3.1 北东地坐标系

(1) 俯仰角和横滚角：方向与对应轴向转动方向一致；
  绕对应轴正转，相应姿态为正；绕对应轴反转，相应姿态为负。
(2) X轴指北时，航向角为零。北偏东顺时针依次从0变为360deg。

3.2 东北天坐标系

(1) 俯仰角和横滚角：姿态角方向与对应轴向转动方向一致；
  绕对应轴正转，相应姿态为正；绕对应轴反转，相应姿态为负。
(2) 航向角：姿态角方向与对应轴向转动方向相反。

注意：

由于航向角定义为：Y轴指北时，航向角为零。北偏东顺时针依次从0变为360deg。而Z轴指天，Z轴反转时，航向角才依次增大。

三. 导航坐标系与载体坐标系之间的姿态旋转矩阵

1. 基本旋转矩阵

假设坐标系1通过绕其3个轴旋转后得到坐标系2，变换矩阵为：

- 绕 Z 轴转动 ψ 角

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 绕 Y 轴转动 θ 角

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- 绕 X 轴转动 γ 角

$$C_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

2. 导航坐标系：北东地———载体坐标系：前右下

欧拉角旋转顺序：**偏航(Z 轴)—俯仰(Y 轴)—横滚(X 轴) 3-2-1**

将导航坐标系 n 通过三次旋转，旋转到与载体坐标系 b 对齐。

第一个转动度角度：偏航角(绕 Z 轴旋转 ψ 角)，旋转矩阵为

$$C_n^1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1^2=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

第三个转动度角度：横滚角(绕 X 轴旋转 γ 角)，旋转矩阵为

$$C_2^b=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$$

所以姿态矩阵为：

$$C_n^b=C_2^bC_1^2C_n^1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

则有

$$C_n^b=C_2^bC_1^2C_n^1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \mathrm{si}\gamma n\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta\\ \begin{pmatrix}-\cos\gamma\sin\psi\\ +\sin\gamma\sin\theta\cos\psi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\cos\gamma\cos\psi\\ +\sin\gamma\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix} & \sin\gamma\cos\theta\\ \begin{pmatrix}\sin\gamma\sin\psi\\ +\cos\gamma\sin\theta\cos\psi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\sin\gamma\cos\psi\\ +\cos\gamma\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix} & \cos\gamma\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$C_b^n=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & \begin{pmatrix}-\cos\gamma\sin\psi\\ +\sin\gamma\sin\theta\cos\psi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\sin\gamma\sin\psi\\ +\cos\gamma\sin\theta\cos\psi\end{pmatrix}\\ \cos\theta\sin\psi & \begin{pmatrix}\cos\gamma\cos\psi\\ +\sin\gamma\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\sin\gamma\cos\psi\\ +\cos\gamma\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix}\\ -\sin\theta & \sin\gamma\cos\theta & \cos\gamma\cos\theta\end{bmatrix}$$

记

$$C_b^n=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}$$

则三个**姿态角计算公式**为：

横滚角： $\gamma=a\tan2(C_{32},C_{33})$

俯仰角： $\theta=-a\sin(C_{31})$

航向角： $\psi=a\tan2(C_{21},C_{11})$

3. 导航坐标系：东北天———载体坐标系：右前上

欧拉角旋转顺序：**偏航(Z 轴)—俯仰(X 轴)—横滚(Y 轴)　3-1-2**

将导航坐标系 n 通过三次旋转，旋转到与载体坐标系 b 对齐。

第一个转动度角度：偏航角(绕 Z 轴旋转**-ψ 角**)，旋转矩阵为

$$C_n^1=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

第二个转动度角度：俯仰角(绕 X 轴旋转 θ 角)，旋转矩阵为

$$C_1^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

第三个转动度角度：横滚角(绕 Y 轴旋转 γ 角)，旋转矩阵为

$$C_2^b=\begin{bmatrix}\cos\gamma & 0 & -\sin\gamma\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma\end{bmatrix}$$

则有

$$C_n^b=C_2^bC_1^2C_n^1=\begin{bmatrix}\cos\gamma & 0 & -\sin\gamma\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\gamma\cos\psi\\ +\sin\gamma\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\cos\gamma\sin\psi\\ +\sin\gamma\sin\theta\cos\psi\end{pmatrix} & -\sin\gamma\cos\theta\\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\theta & \sin\theta\\ \begin{pmatrix}\sin\gamma\cos\psi\\ -\cos\gamma\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\cos\psi\cos\theta\\ -\sin\gamma\sin\psi-\cos\gamma\sin\theta\cos\psi\end{pmatrix} & \cos\gamma\cos\theta\end{bmatrix}$$

所以姿态矩阵为：

$$C_n^b=C_2^bC_1^2C_n^1=\begin{bmatrix}\cos\gamma & 0 & -\sin\gamma\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

则

$$C_b^n=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\gamma\cos\psi\\ +\sin\gamma\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix} & \sin\psi\cos\theta & \begin{pmatrix}\sin\gamma\cos\psi\\ -\cos\gamma\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-\cos\gamma\sin\psi\\ +\sin\gamma\sin\theta\cos\psi\end{pmatrix} & \cos\psi\cos\theta & \begin{pmatrix}\cos\psi\cos\theta\\ -\sin\gamma\sin\psi-\cos\gamma\sin\theta\cos\psi\end{pmatrix}\\ -\sin\gamma\cos\theta & \sin\theta & \cos\gamma\cos\theta\end{bmatrix}$$

记

$$C_b^n=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}$$

则三个**姿态角计算公式**为：

横滚角： $\gamma=a\tan2(-C_{31},C_{33})$

俯仰角： $\theta=a\sin(C_{32})$

航向角： $\psi=a\tan2(C_{12},C_{22})$