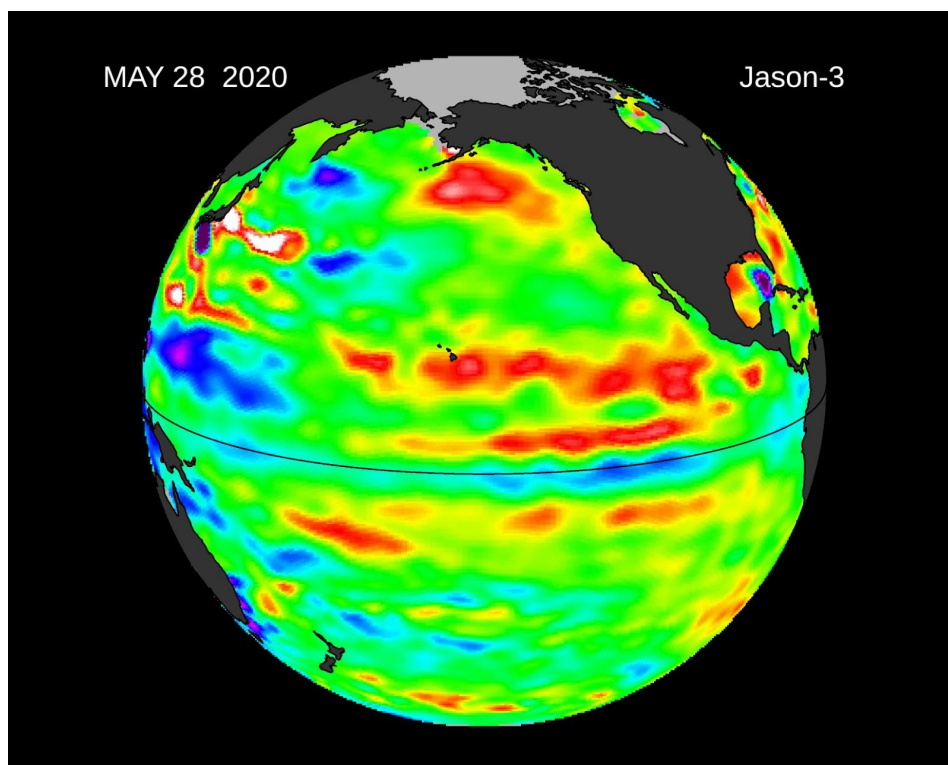


Tarea numérica

Modelos climáticos simples del fenómeno del Niño



Estudiante: Nicolás Calbucura

Profesor: Ariel Pérez

Fecha: 6 de julio de 2020.

Índice	2
--------	---

Índice

Índice	2
Resumen	3
Introducción	4
Resultados	6
Conclusiones	16
Referencias	18

Resumen

En el siguiente informe, se resuelven distintas EDOs relacionadas a modelos matemáticos que describen el fenómeno del Niño (ENSO) mediante ecuaciones diferenciales para la temperatura superficial en la zona este del océano pacífico ecuatorial (a partir de ahora llamada T_E o SST) y para la anomalía de la temperatura en los últimos 300 metros cerca de la superficie del océano pacífico ecuatorial en su parte oeste (a partir de ahora H_W). Dichos modelos son dos: el primero, un oscilador con retraso para T_E (modelo hecho por Schopf y Suarez; Battisti y Hirst) y el segundo, un sistema de EDOs para T_E y H_W , que genera un oscilador con recarga (modelo hecho por Jin).

Para resolver estas EDOs, se aplican tres métodos numéricos distintos: Euler progresivo, Heun y Runge Kutta de orden 4. Además de resolver estas EDOs mediante los métodos nombrados, se comparan los resultados con la solución analítica en un caso, y se comparan también los resultados de cada método entre sí, con distintas discretizaciones para deducir en qué casos cada método, discretización, o combinación de ambos es más eficiente, concluyendo que es mejor utilizar un método más exacto que utilizar una discretización más exacta en casi todos los casos. Junto a esto, también se deduce matemáticamente que el modelo 2 (oscilador con recarga) presenta un comportamiento oscilatorio y se calcula el período de oscilación, para luego comparar este resultado teórico, con el período calculado mediante las simulaciones hechas con los métodos numéricos. Se visibiliza una diferencia pequeña entre ambos valores (aproximadamente 4 meses), y se observa que tanto el período teórico, como el obtenido gracias a las simulaciones están dentro de la estimación del período de ENSO, que es de 3 a 5 años. Por último, se asocia el comportamiento oscilatorio de T_E con los impactos en el clima de la zona este del océano pacífico, provocando aumento de humedad y precipitaciones cuando aumenta SST, y disminuyendo la humedad y precipitaciones cuando disminuye SST.

Introducción

Los modelos a estudiar son los siguientes:

- Modelo 1 (oscilador con retraso):

$$T'_E(t) = RT_E(t) - \alpha\gamma_1 \frac{C_E}{C_W} T_E(t - \delta)$$

- Modelo 2 (oscilador con recarga):

$$T'_E(t) = RT_E(t) + \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} H_W(t)$$

$$H'_W(t) = -\alpha T_E(t) - rH_W(t)$$

Donde $r=0,1/\text{mes}$, $R=0,1/\text{mes}$, $C_E/C_W=0,27$, $\gamma_1=1/\text{mes}$, $\gamma_2=0,164/\text{mes}$, $\alpha=0,612/\text{mes}$.

Para lograr solucionar las ecuaciones diferenciales ordinarias, se realizarán programas que discretizan los modelos en una cantidad de pasos dependiente de Δt , haciendo que mientras más chico sea este último valor, más pasos tendrá la discretización y se esperará mayor exactitud en la solución de las EDOs. Para encontrar estas soluciones obtenidas a través de la discretización, se utilizarán tres métodos: método de Euler (o Euler progresivo), método de Heun y método de Runge Kutta de orden 4 (también referido a futuro como RK4). Todos estos métodos funcionan con una condición inicial y calculan cada y_{n+1} teniendo en cuenta el valor de y_n , sumándole a este último la integral de la función derivada de y (y'), entre x_n y x_{n+1} . La diferencia entre los métodos radica en cómo se calcula la integral y' entre x_n y x_{n+1} , a continuación se explica cómo se calcula esta integral:

1. Método de Euler progresivo: calcula la integral de y' entre x_n y x_{n+1} mediante rectángulos, simplemente multiplicando y'_n por el paso de discretización (que será llamado h).
2. Método de Heun: calcula la integral de y' entre x_n y x_{n+1} mediante trapecios, para esto, calcula un paso intermedio y'^*_{n+1} que se calcula mediante el método de Euler, y calcula el área del trapecio con bases y'_n e y'^*_{n+1} .
3. Método de Runge Kutta de orden 4: calcula la integral de y' entre x_n y x_{n+1} calculando 4 constantes (g_1 , g_2 , g_3 y g_4), cada 1 dependiente de la anterior para finalmente sumar $g_1+2g_2+2g_3+g_4$, multiplicar esta suma por h y dividir por 6.

Para producir los arreglos que servirán de ejes para obtener las soluciones, se utilizará la librería `numpy`, la cual también servirá para obtener los errores en norma 2 entre dos arreglos de valores (siendo sumamente útil al momento de comparar dos soluciones entre sí). Por otra parte, para producir los gráficos se utilizará la librería `matplotlib`.

Los programas de cada actividad serán adjuntados junto a este informe, con la explicación de su funcionamiento dentro de cada programa.

Resultados

A continuación se muestran los resultados asociados a los ejercicios presentes en la tarea:

- a) Para tener comparaciones con la solución analítica, se procede a solucionar la EDO (se procede mediante variables separables):

$$\frac{dT_E(t)}{dt} = RT_E(t) - \alpha \gamma_1 \frac{C_E}{C_W} T_E(t - \delta)$$

$$T_E(0) = 1$$

Reemplazando los valores dados por el enunciado:

$$T'_E(t) = -0,06524 T_E(t) \Rightarrow \frac{T'_E(t)}{T_E(t)} = -0,06524$$

Se integra con respecto a t:

$$\int \frac{T'_E(t)}{T_E(t)} dt = \int -0,06524 dt \Rightarrow \ln(|T_E(t)|) = -0,06524t$$

$$\Rightarrow T_E(t) = k \exp(-0,06524t), k \in \mathbb{R}$$

Se aplica la condición inicial:

$$T_E(0) = k \exp(0) = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\therefore T_E(t) = \exp(-0,06524t)$$

A continuación se muestran los resultados de $T_E(t)$ al aplicar los métodos de Heun y Euler, comparados con la solución analítica obtenida.

1. Gráficos para $\Delta t = 1$ mes:

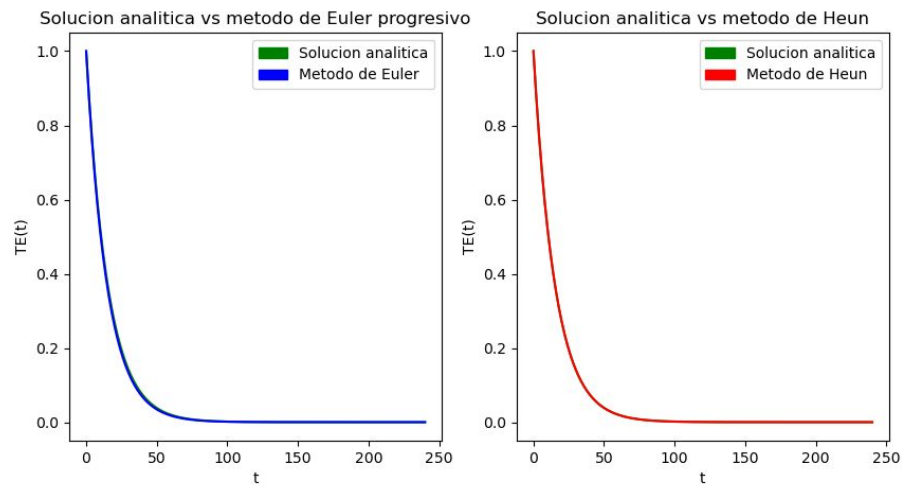


Figura 1: Solución analítica vs métodos de Euler y Heun con $\Delta t = 1$.

Error en norma 2 del método de Euler: 0,06511240809782955. Error en norma 2 del método de Heun: 0,001459170911380534.

2. Gráficos para $\Delta t = 0,1$ meses:

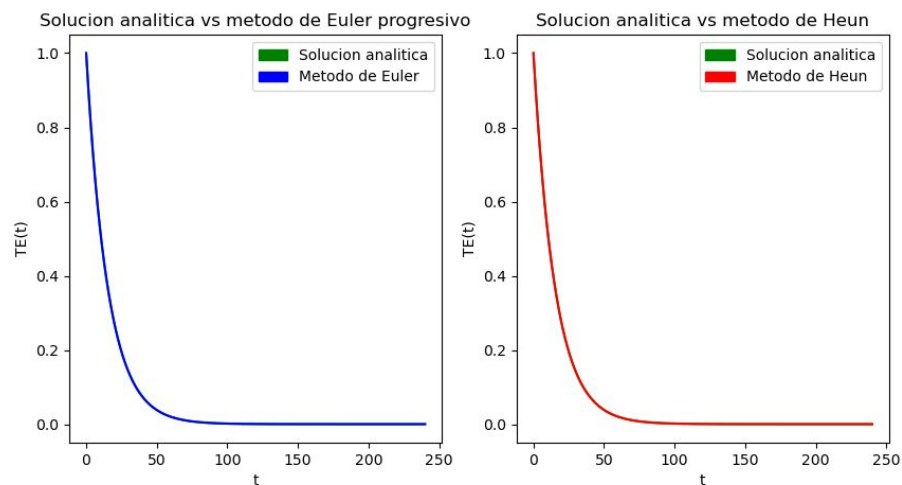


Figura 2: Solución analítica vs métodos de Euler y Heun con $\Delta t = 0,1$.

Error en norma 2 del método de Euler: 0,020231372180511513. Error en norma 2 del método de Heun: $4,4128314898869914 \cdot 10^{-5}$.

3. Gráficos para $\Delta t = 0,01$ meses:

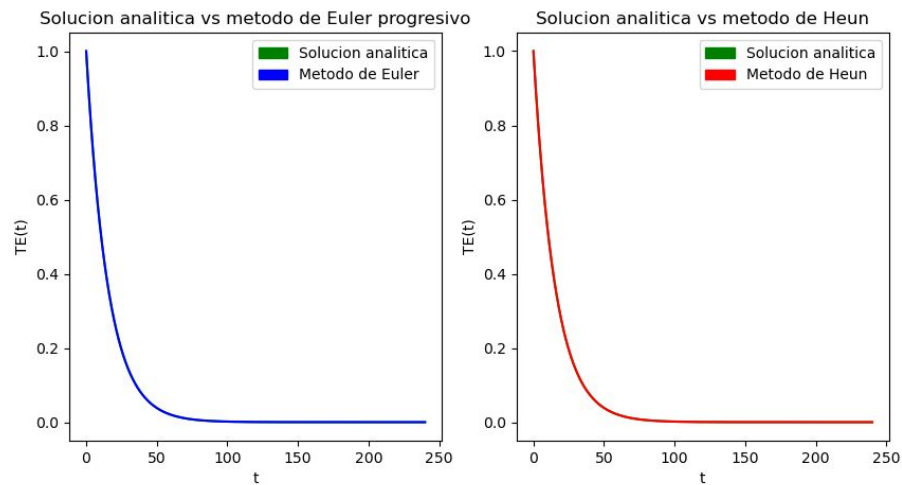


Figura 3: Solución analítica vs métodos de Euler y Heun con $\Delta t = 0,01$.

Error en norma 2 del método de Euler: 0,006386745981829641. Error en norma 2 del método de Heun: $1,3893196832861033 \cdot 10^{-6}$

4. Gráficos para $\Delta t = 0,005$ meses:

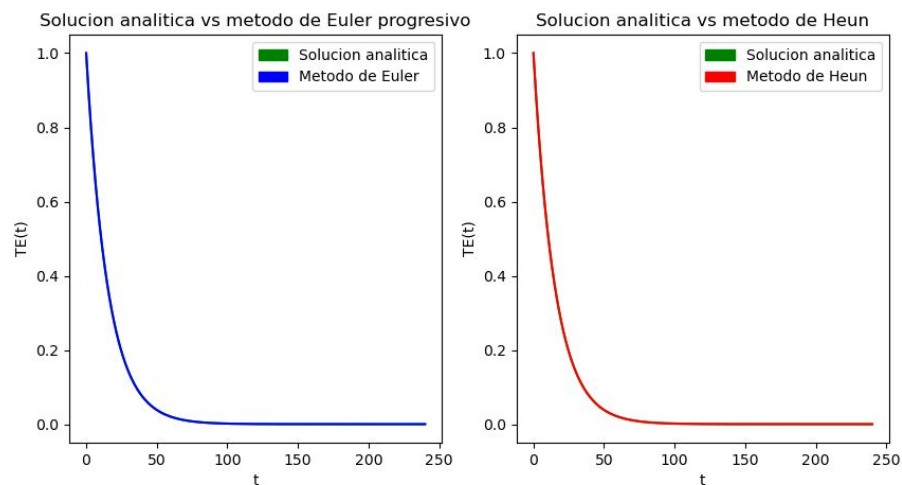


Figura 4: Solución analítica vs métodos de Euler y Heun con $\Delta t = 0,005$.

Error en norma 2 del método de Euler: 0,004515681590776313. Error en norma 2 del método de Heun: $4,910785240072046 \cdot 10^{-7}$.

b) En este caso no hay solución analítica para la siguiente EDO:

$$T'_E(t) = 0,1T_E(t) - 0,16524T_E(t-5)$$

Por lo tanto, se resuelve mediante los métodos de Euler y Heun, para luego comparar los resultados.

1. Gráfico para $\Delta t = 1$ mes:

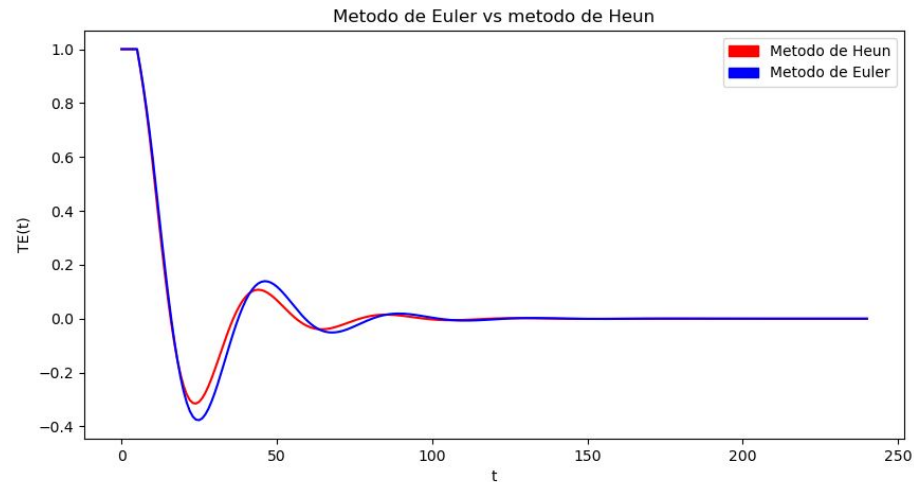


Figura 5: Método de Euler vs método de Heun con $\Delta t = 1$.

Error en norma 2 entre ambos métodos: 0,34969974024353184.

2. Gráfico para $\Delta t = 0,1$ meses:

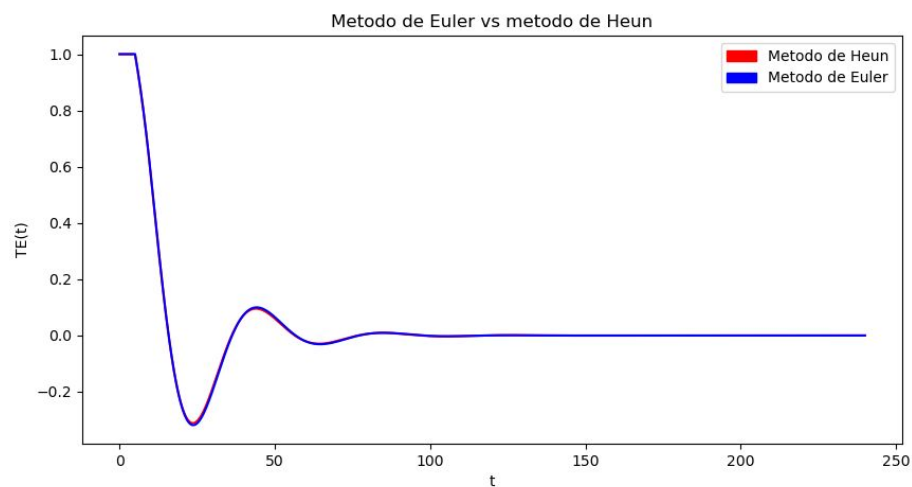


Figura 6: Método de Euler vs método de Heun con $\Delta t = 0,1$.

Error en norma 2 entre ambos métodos: 0,11868410003403113.

3. Gráfico para $\Delta t = 0,01$ meses:

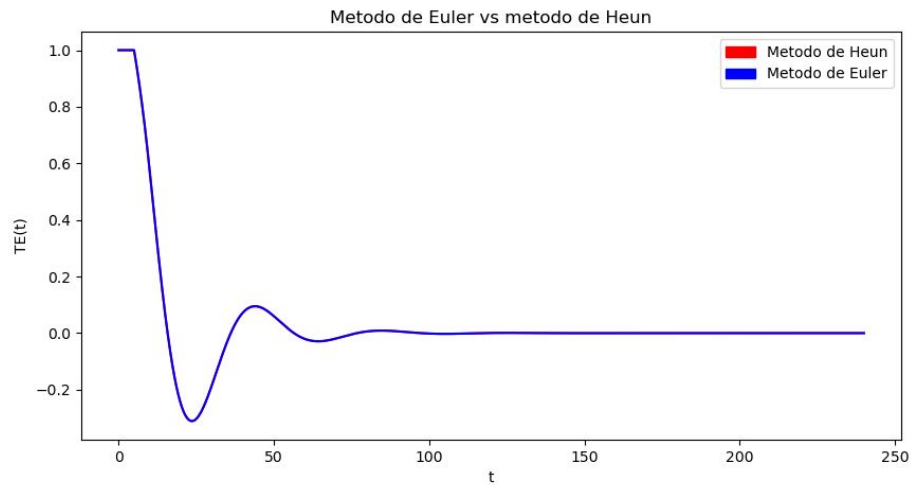


Figura 7: Método de Euler vs método de Heun con $\Delta t = 0,01$.

Error en norma 2 entre ambos métodos: 0,0367698309677077.

4. Gráfico para $\Delta t = 0,005$ meses:

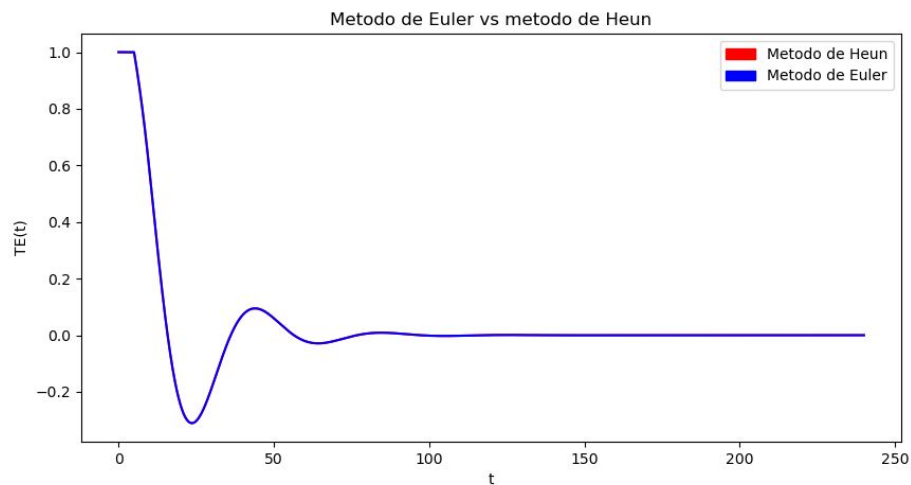


Figura 8: Método de Euler vs método de Heun con $\Delta t = 0,005$.

Error en norma 2 entre ambos métodos: 0,02096920706479374.

- c) Se soluciona el siguiente sistema de EDOs mediante el método de Euler progresivo y el método de Runge Kutta de orden 4:

$$T'_E(t) = RT_E(t) + \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} H_W(t)$$

$$H'_W(t) = -rH_W(t) + \alpha T_E(t)$$

Reemplazando por los valores dados en el enunciado:

$$T'_E(t) = 0,1T_E(t) + 0,04428H_W(t)$$

$$H'_W(t) = -0,612T_E(t) - 0,1H_W(t)$$

Solucionar este sistema de EDOs es lo mismo que solucionar:

$$X'(t) = AX(t)$$

Donde:

$$X(t) = \begin{bmatrix} T_E(t) \\ H_W(t) \end{bmatrix}, \quad X'(t) = \begin{bmatrix} T'_E(t) \\ H'_W(t) \end{bmatrix} \quad y \quad A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,04428 \\ -0,612 & -0,1 \end{bmatrix}$$

Para ver las diferencias entre ambos métodos gráficamente, se graficaron ambos métodos, obteniendo los siguientes resultados para distintos Δt :

1. Gráfico para $\Delta t = 1$ mes:

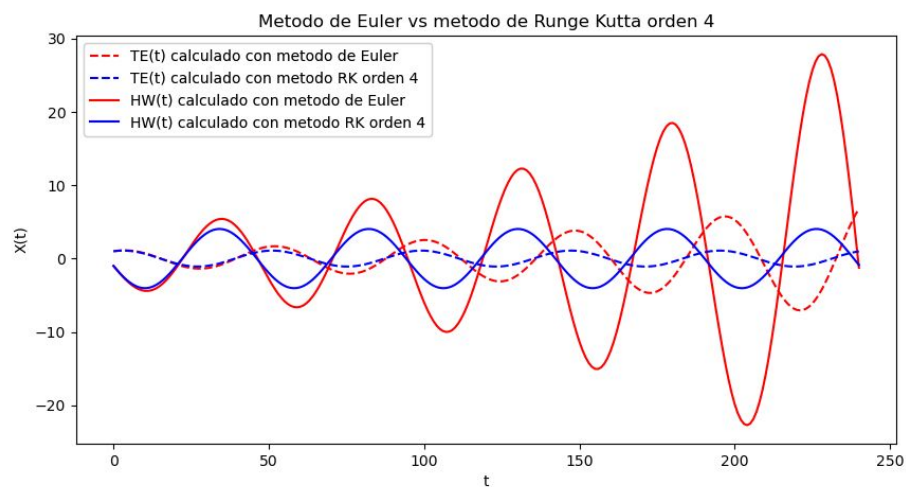


Figura 8: Método de Euler vs método de Runge Kutta de orden 4 con $\Delta t = 1$.

Error en norma 2 entre ambos métodos: 133,99308477103057.

2. Gráfico para $\Delta t = 0,1$ meses:

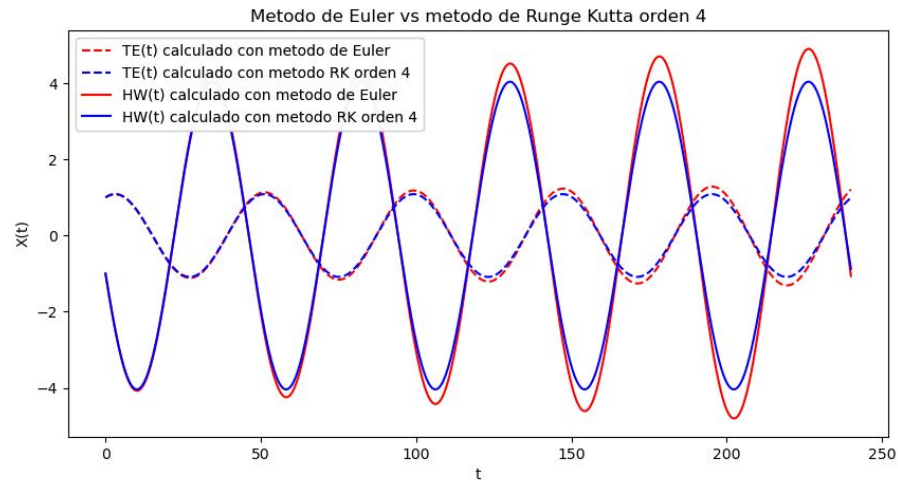


Figura 9: Método de Euler vs método de Runge Kutta de orden 4 con $\Delta t = 0,1$.

Error en norma 2 entre ambos métodos: 18,359308329049806.

3. Gráfico para $\Delta t = 0,01$ meses:

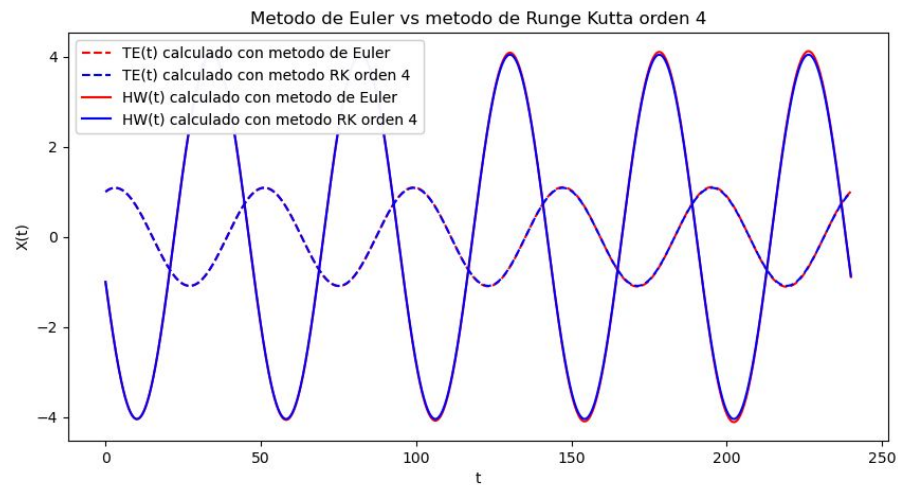


Figura 10: Método de Euler vs método de Runge Kutta de orden 4 con $\Delta t = 0,01$.

Error en norma 2 entre ambos métodos: 5,410797012227444.

4. Gráfico para $\Delta t = 0,005$ meses:

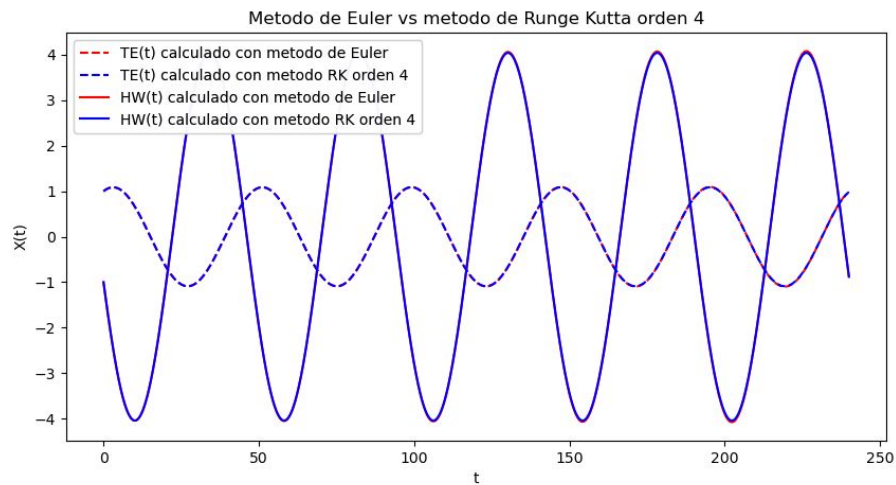


Figura 11: Método de Euler vs método de Runge Kutta de orden 4 con $\Delta t = 0,005$.

Error en norma 2 entre ambos métodos: 3,8113266054090604.

Ahora, comparando $T_E(t)$ calculado con el método de Runge Kutta de orden 4 a partir del modelo 2, con $T_E(t)$ calculado con el método de Heun a partir del modelo 1 con retraso de 5 meses (ambos con $\Delta t = 0,005$ meses) se obtiene el siguiente gráfico:

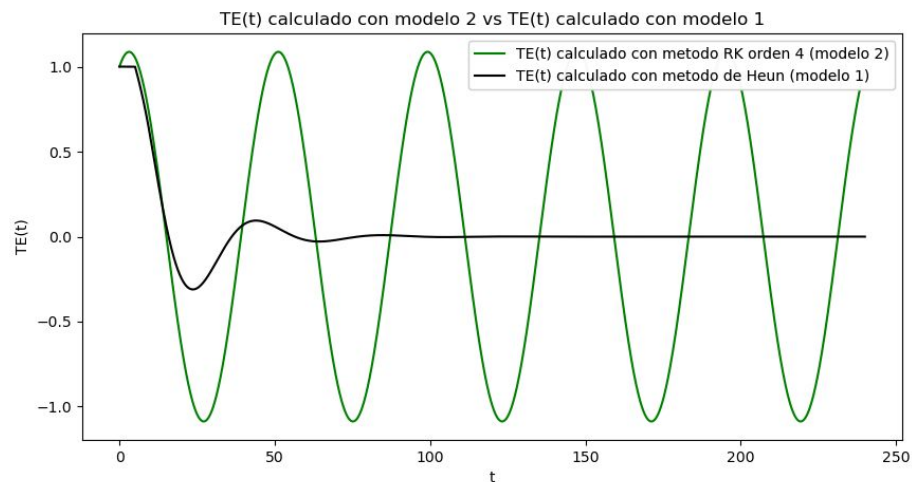


Figura 12: Método de Runge Kutta de orden 4 (a partir de modelo 2) vs método de Euler (a partir de modelo 1 con retraso) con $\Delta t = 0,005$.

Error en norma 2 entre método de Euler (a partir del modelo 1) y método de Runge Kutta de orden 4 (a partir del modelo 2): 157,36985582940375.

d) Para esta actividad, se usan las dos ecuaciones del modelo 2:

$$T'_E(t) = RT'_E(t) + \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} H'_W(t)$$

$$H'_W(t) = -rH_W(t) - \alpha T_E(t)$$

Además, para obtener una EDO de orden dos para la función $T_E(t)$, se despeja $H_W(t)$ de la primera ecuación:

$$H_W(t) = \frac{(T'_E(t) - RT'_E(t)) C_W}{\gamma_2 C_E}$$

Entonces se deriva la primera ecuación y se reemplaza $H'_W(t)$ gracias a la segunda ecuación:

$$T''_E(t) = RT'_E(t) + \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} H'_W(t)$$

$$\Rightarrow T''_E(t) = RT'_E(t) + \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} (-rH_W(t) - \alpha T_E(t))$$

Luego, se reemplaza $H_W(t)$:

$$T''_E(t) = RT'_E(t) + \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} \left[-r \left(\frac{T'_E(t) - RT'_E(t)}{\gamma_2} \cdot \frac{C_W}{C_E} \right) - \alpha T_E(t) \right]$$

$$\Rightarrow T''_E(t) = (R - r) T'_E(t) + \left(Rr - \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} \alpha \right) T_E(t)$$

$$\Rightarrow T''_E(t) + (r - R) T'_E(t) + \left(\gamma_2 \frac{C_E}{C_W} \alpha - Rr \right) T_E(t) = 0$$

Resolviendo el polinomio característico reemplazando los valores conocidos por enunciado, se puede concluir que $T_E(t)$ está en un régimen oscilatorio, ya que el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es menor que 0:

$$\lambda^2 + (r - R) \lambda + \left(\gamma_2 \frac{C_E}{C_W} \alpha - Rr \right) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 - 4(0,164 \cdot 0,27 \cdot 0,612 - 0,01) = -0,06839744$$

Entonces la frecuencia de oscilación ω es igual a:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{\left(\gamma_2 \frac{C_E}{C_W} \alpha - Rr\right)}{1} - \left(\frac{(r-R)}{2}\right)^2} = \sqrt{\gamma_2 \frac{C_E}{C_W} \alpha - Rr - \left(\frac{r^2 - 2Rr + R^2}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\gamma_2 \frac{C_E}{C_W} \alpha - \left(\frac{r^2 + 2Rr + R^2}{4}\right)} = \sqrt{\gamma_2 \frac{C_E}{C_W} \alpha - \frac{(R+r)^2}{4}}$$

Entonces, el período de oscilación dado por $2\pi/\omega$ es igual a:

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma_2 \frac{C_E}{C_W} \alpha - \frac{(R+r)^2}{4}}} = 2\pi \left(\gamma_2 \frac{C_E}{C_W} \alpha - \frac{(R+r)^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Reemplazando los valores conocidos por el enunciado, P es igual a:

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{0,27 \cdot 0,612 \cdot 0,164 - \frac{0,02^2}{4}}} \approx 48,049 \text{ meses}$$

Se busca calcular el período P barra para el modelo 1 con retraso y el modelo 2 (no se puede para el modelo 1 sin retraso, ya que no tiene un comportamiento oscilatorio). Debido a que para Δt grandes (como 1 y 0.1) se producen problemas al calcular el período en el modelo 1 y modelo 2 (esto se produce debido a que se tiene una menor resolución de los resultados y se hace más difícil localizar cuándo la función pasa por un punto específico para así calcular el período), se calcula el período medio P barra en el modelo 1 y modelo 2 con $\Delta t=0,005$. Los resultados son los siguientes:

- **Modelo 1 con retraso, método de Euler:** P barra = 40.55 meses
- **Modelo 1 con retraso, método de Heun:** P barra = 40.535 meses
- **Modelo 2, método de Euler:** P barra = 48.05 meses
- **Modelo 2, método de Runge Kutta de orden 4:** P barra = 48.05 meses

Teniendo en cuenta estos resultados, se promedian y se estima el valor final de P barra en 44,29 meses.

Conclusiones

En la actividad a, se pudo observar que a medida que se discretiza con mayor exactitud la ecuación diferencial ordinaria a resolver, disminuye el error entre la solución analítica y las soluciones obtenidas mediante el método de Euler y de Heun para $T_E(t)$. Sin embargo, disminuir el paso de discretización del modelo, conlleva un mayor tiempo de ejecución del programa, por lo que si se busca un error bajo con poco tiempo de cálculo, lo más eficiente sería utilizar el método de Heun (que calcula la integral de y' entre x_n y x_{n+1} mediante trapecios para calcular y_{n+1}) con una cantidad pasos de discretización suficientes para el objetivo deseado. Por ejemplo, en este caso, si se busca un error de menos de 1% con respecto a la solución analítica, basta con utilizar el método de Heun con $\Delta t=1$ mes, que da mejores resultados (tan solo un error de $\sim 0,1\%$) que el método de Euler con $\Delta t=0,005$ meses (con un error de $\sim 0,4\%$).

En la actividad b, por su parte, ocurre algo similar; la solución obtenida con el método de Heun para $\Delta t=1$ mes, da cuenta de un resultado mucho más exacto que la solución del método de Euler, ya que cuando se disminuye Δt , se aprecia cómo la solución obtenida mediante el método de Euler se acerca a la solución inicial para Heun, obteniendo un error entre ambos métodos cada vez menor. Es necesario destacar que al presentarse un comportamiento oscilatorio, la diferencia entre ambos métodos aumenta, por lo que se concluye que para ecuaciones que tengan comportamiento menos uniforme (en comparación a la función exponencial de la actividad a, por ejemplo), es conveniente utilizar un método acorde al error que se busca (si se busca un error bajo, entonces es conveniente usar el método de Heun o de Runge Kutta), y observar qué tanto cambia el resultado para discretizaciones más exactas.

En tanto a la actividad c, para $\Delta t=1$ mes se presenta un error muy grande entre el método de Euler y el método de Runge Kutta de orden 4, específicamente, se observa un comportamiento oscilatorio con amplitud creciente para la solución de $X(t)$ obtenida a partir del método de Euler. Dicho comportamiento se va acercando a la solución obtenida con el método de Runge Kutta a medida que se hace más pequeño Δt , pero nuevamente, disminuir Δt aumenta considerablemente el tiempo de procesamiento del programa, por lo que se concluye que es mejor utilizar un método más exacto que utilizar una discretización más exacta en casi todos los casos. Por otra parte, al momento de comparar $T_E(t)$ obtenida a partir del modelo 2 con el método de Runge Kutta, con $T_E(t)$ obtenido a partir del modelo 1 con retraso con el método de Heun (ambas soluciones con $\Delta t=0,005$ meses), se aprecia una gran diferencia: el método 1 con retraso da lugar a una oscilación muy amortiguada, con período estimado de 40 meses, mientras que el método 2 da lugar a una oscilación sin amortiguamiento con período estimado de 48 meses.

Para la actividad d, se compara el valor del período P teórico con P barra estimado a partir de los cálculos mostrados en la sección de resultados, llegando a una diferencia de un poco

menos de 4 meses (el valor teórico P es 48,049 meses, y el valor estimado P barra, es 44,29 meses), lo cual es considerable, pero no representa una diferencia muy grande.

El período estimado de las oscilaciones de T_E (SST en la parte este del océano pacífico), es de tres a cinco años, esto según diversos artículos científicos, entre los que se encuentran: The biennial component of ENSO variability (Rasmusson, 1990), Quasi-quadrennial and quasi-biennial variability in COADS equatorial Pacific sea surface temperature and winds (Jiang, 1995) y A practical guide to wavelet analysis (Torrence y Compo, 1998). Esto hace que los resultados obtenidos anteriormente estén dentro de ese rango (P teórico ≈ 4 años, P barra $\approx 3,7$ años).

El primer modelo “oscilador con retraso” (modelo hecho por Schopf y Suarez; Battisti y Hirst), se sustenta en una interacción océano-atmósfera, junto al análisis de la geometría de la cuenca oceánica (Battisti y Hirst et al. 1989). En este modelo, el término R representa el efecto de las ondas Kelvin propagándose desde la zona oeste hacia la zona este, el término que acompaña a $T_E(t-\delta)$ representa la tasa de crecimiento de la inestabilidad en la zona este, y δ representa el retraso de los procesos inducidos por las olas. Lo más valioso de estos términos, es que determinan la tasa de crecimiento del sistema y, cuando las soluciones son oscilatorias, el período de la oscilación.

El segundo modelo “oscilador con recarga” (modelo hecho por Jin) se basa en la retroalimentación positiva de la interacción océano tropical-atmósfera propuesta por Bjerknes como mecanismo de crecimiento y la recarga-descarga del contenido de calor ecuatorial como mecanismo de transición de fase sugerido por Cane y Zebiak y por Wyrski (Jin et al. 1997). En este sentido, lo más valioso de este modelo es que muestra resultados similares al modelo con retraso, sin necesitar de un retraso inducido por las olas explícito.

La oscilación de T_E (SST) influye en el clima, aumentando las precipitaciones, humedad e inundaciones en la zona este cuando esta temperatura aumenta, debido al fenómeno del Niño. Por el contrario, cuando la temperatura disminuye, se puede producir el fenómeno de la Niña, que tiene efectos contrarios, es decir, tiende a disminuir la humedad y las precipitaciones.

Referencias

1. https://sealevel.jpl.nasa.gov/science/el_nino_pdo/latestdata/ (foto de portada)
2. The biennial component of ENSO variability. (Rasmusson, 1990)
3. Quasi-quadrennial and quasi-biennial variability in COADS equatorial Pacific sea surface temperature and winds. (Jiang, 1995)
4. A practical guide to wavelet analysis. (Torrence y Compo, 1998)
5. Testing Simple Models of ENSO. (Meechoso, Neelin y Yu, 2003)
6. Interannual Variability in a Tropical Atmosphere–Ocean Model: Influence of the Basic State, Ocean Geometry and Nonlinearity. (Battisti y Hirst, 1989)
7. An equatorial recharge paradigm for ENSO. Part I: Conceptual model. (Jin, 1997)
8. <https://www.youtube.com/watch?v=WPA-KpldDVc>