

# EA614 - Análise de Sinais

## Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) 3 – Filtros Analógicos

Turma U – 2º semestre de 2023

Prof: Levy Boccato Email: lboccato@dca.fee.unicamp.br

## 1 Introdução

Neste EFC, estudaremos alguns filtros passa-baixas (FPBs) práticos, *i.e.*, não-ideais, tendo como objetivo analisar como eles se comportam nas bandas de passagem e de rejeição e, também, na transição entre estas duas regiões. Toda a análise será conduzida no domínio da frequência, considerando somente a magnitude da transformada de Fourier dos sinais e dos filtros.

## 2 Atividades

### 2.1 Filtro de Chebyshev

O primeiro filtro a ser estudado é o filtro de Chebyshev, cuja resposta em magnitude é dada por:

$$|H_C(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}}, \quad (1)$$

onde  $T_n(\cdot)$  identifica o polinômio de Chebyshev do primeiro tipo e de ordem  $n$ , definido pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \end{aligned} \quad (2)$$

ou, equivalentemente, pelas seguintes expressões:

$$T_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \cos\left(n \cdot \arccos\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right), \text{ para } 0 \leq \omega \leq \omega_c \quad (3)$$

e

$$T_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \cosh\left(n \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right), \text{ para } \omega > \omega_c \quad (4)$$

A construção de um filtro de Chebyshev envolve a definição de três parâmetros: (i) a frequência de corte  $\omega_c$ , em rad/s; (ii) a ordem  $n$  do filtro; e (iii)  $\epsilon$ , que controla o ganho na frequência de corte  $\left(|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}\right)$ .

- (a) Fixe  $\omega_c = 10$  rad/s e  $\epsilon = 0,2$  e varie a ordem do filtro desde  $n = 1$  a  $n = 5$  ( $n$  inteiro). Exiba, em um mesmo gráfico e com cores diferentes, o módulo da resposta em frequência obtida para cada um dos valores de  $n$  e comente as mudanças observadas. Neste item, utilize a rotina fornecida `calcula_coeficientes(w,wc,n)`, que recebe como argumentos um vetor de frequências **w**, a frequência de corte **wc** e a ordem do filtro **n**, e retorna o vetor **Tn** (do mesmo tamanho que **w**) com os valores do polinômio de Chebyshev necessários para determinar a resposta do filtro, segundo a Equação (1).

**Sugestão:** para implementar o filtro de Chebyshev, crie uma função que receba como parâmetros o vetor **w**, a frequência de corte **wc**, a ordem desejada **n** e o parâmetro  $\epsilon$ , e que retorne um vetor **Habs** com o módulo da resposta em frequência do filtro. Desta maneira, será possível utilizar este mesmo trecho de código em outras partes desta atividade.

- (b) Ainda com  $\omega_c = 10$  rad/s, fixe a ordem do filtro em  $n = 3$  e adote os seguintes valores para  $\epsilon$ : 0,1; 0,3; 0,5; 0,7 e 0,9. Plote em um mesmo gráfico, com cores diferentes, a resposta em frequência obtida para cada um dos valores de  $\epsilon$  e comente o comportamento observado.

## 2.2 Filtro de Butterworth

O segundo filtro estudado é o filtro de Butterworth, que possui a seguinte magnitude de resposta em frequência:

$$|H_B(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}. \quad (5)$$

Para o projeto deste tipo de filtro, devemos especificar dois parâmetros: (i) a frequência de corte  $\omega_c$ , em rad/s, e (ii) a ordem  $n$  do filtro.

- (c) Com  $\omega_c = 10$  rad/s, considere  $n = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ . Plote em um mesmo gráfico, com cores diferentes, a resposta em magnitude obtida para cada um dos valores de  $n$  e comente as mudanças observadas. Novamente, crie uma função que receba como parâmetros  $\omega_c$  e  $n$  e retorne um vetor com os valores de  $|H_B(j\omega)|$ .

## 2.3 Filtragem de um pulso retangular

Considere o sinal  $x(t)$  correspondente ao pulso retangular, no domínio do tempo, cuja expressão é dada por:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

e cuja forma de onda é mostrada na Figura 1.

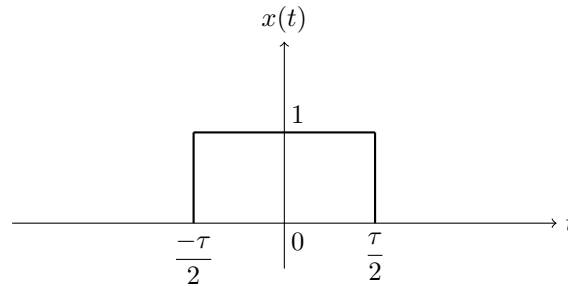


Figura 1: Pulso retangular.

- (d) Calcule a transformada de Fourier  $X(j\omega)$  do sinal  $x(t)$ , considerando  $\tau = 2\pi/\omega_m$ . Apresente o gráfico de  $|X(j\omega)|$ , com o eixo das frequências variando de 0 a 40 rad/s, com  $\omega_m = 5$  rad/s e comente acerca dos pontos em que  $|X(j\omega)| = 0$ .
- (e) Considere, por fim, os três FPBs especificados a seguir:

- FPB ideal com frequência de corte  $\omega_c = 10$  rad/s.

$$H_{\text{ideal}}(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

- Filtro de Chebyshev com  $\epsilon = 0,9$ ,  $n = 3$  e  $\omega_c = 10$  rad/s.
- Filtro de Butterworth com  $n = 2$  e  $\omega_c = 10$  rad/s.

Realize, então, a filtragem do sinal  $x(t) \iff X(j\omega)$  com cada um destes FPBs. Para facilitar a análise, plote em um **primeiro** gráfico, com cores distintas, as magnitudes das respostas em frequência dos três filtros ( $|H_{\text{ideal}}(j\omega)|$ ,  $|H_C(j\omega)|$  e  $|H_B(j\omega)|$ ). Em um **segundo** gráfico, plote o módulo do espectro observado na saída dos filtros (ou seja,  $|Y_{\text{ideal}}(j\omega)|$ ,  $|Y_C(j\omega)|$  e  $|Y_B(j\omega)|$ ), novamente com cores distintas.

Comente as semelhanças e diferenças entre as respostas em frequência dos filtros e como isto se reflete no espectro das saídas obtidas, para frequências inferiores e superiores à frequência de corte.