EA614 - Análise de Sinais

Exercício de Fixação de Conceitos (EFC) 2 – Série de Fourier
Turma U – 2º semestre de 2023
Prof: Levy Boccato   Email: `lboccato@dca.fee.unicamp.br`

Introdução

A série de Fourier permite caracterizar sinais periódicos através de uma combinação linear de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas, conforme a equação de síntese:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}}\,, \tag{1}$$

onde $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ denota a frequência fundamental, T denota o período fundamental do sinal $x(t)$ e os valores a_k são os coeficientes da série. Tais coeficientes são dados pela equação de análise:

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt} \tag{2}$$

O objetivo deste exercício computacional é estudar a série de Fourier para uma onda periódica através de simulações computacionais. A seguir, é apresentado o roteiro do experimento.

Parte Computacional

Considere a onda periódica $x(t)$ ilustrada na Figura 1, com período $T = 7$ s, cuja definição matemática no intervalo $[-3{,}5\,,\,3{,}5]$ corresponde a:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -2 \leq t < -1 \\ -2t, & -1 \leq t < 0 \\ 2t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{3}$$

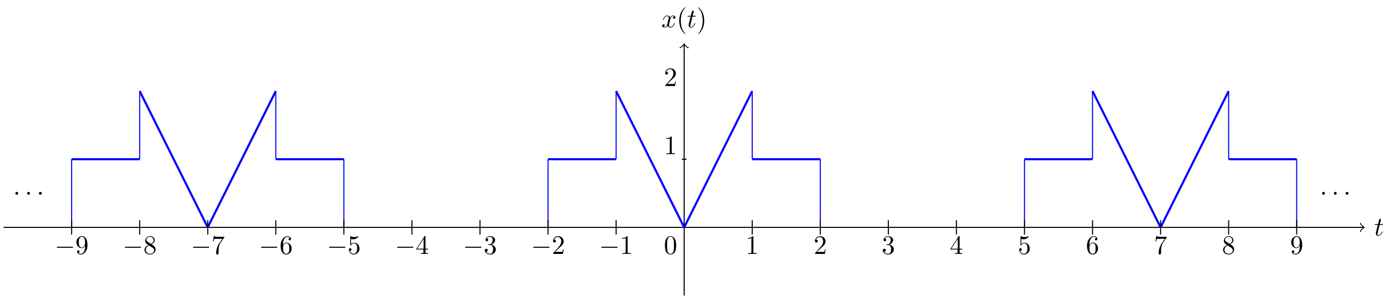

Figura 1: Sinal periódico $x(t)$ (ilustração de 3 períodos).

(a) Obtenha os coeficientes a_k da série de Fourier da onda $x(t)$.

Dica: calcule o coeficiente a_0 separadamente, lembrando que ele corresponde ao nível DC do sinal.

(b) Com os coeficientes obtidos anteriormente, implemente um programa que aproxime a onda $x(t)$ pela sua série de Fourier truncada:

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}, \tag{4}$$

com as harmônicas de índices $-N$ a N.

De posse do programa, exiba, em gráficos diferentes, a onda $x(t)$ dada pela Equação (3) junto com sua aproximação $\tilde{x}_N(t)$ com os valores $N = 1, 10, 20, 50$, para um período do sinal. Procure usar cores distintas para a onda $x(t)$ e as aproximações.

Neste item, portanto, devem ser gerados quatro gráficos, sendo que cada gráfico mostrará duas curvas: a onda $x(t)$ e sua aproximação em série de Fourier $\tilde{x}_N(t)$ para o valor adotado de N.

(c) Para cada um dos valores de N do item anterior, calcule a potência média do erro P_N:

$$P_N = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big(x(t) - \tilde{x}_N(t)\Big)^2 dt \tag{5}$$

Uma vez que estamos lidando com representações discretas dos sinais, a potência pode ser aproximada através da média temporal de $\Big(x(t) - \tilde{x}_N(t)\Big)^2$.

(d) Para $N = 50$, exiba o módulo dos coeficientes da série $|a_k|$ em função de ω e discuta a simetria observada. Como queremos mostrar uma sequência de valores discretos, utilize o comando `stem()` no Matlab (ou Python).

(e) Considere o circuito analógico mostrado na Figura 2, que corresponde a um sistema LIT cuja resposta em frequência é dada por $H(j\omega) = \frac{1}{1-j\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)}$, onde $\omega_c = \frac{1}{RC}$ é a frequência de corte do filtro (em rad/s). Plote o módulo e a fase da resposta em frequência e discuta a ação deste sistema como um filtro. (Dica: utilize os comandos $abs(\cdot)$ e $angle(\cdot)$).

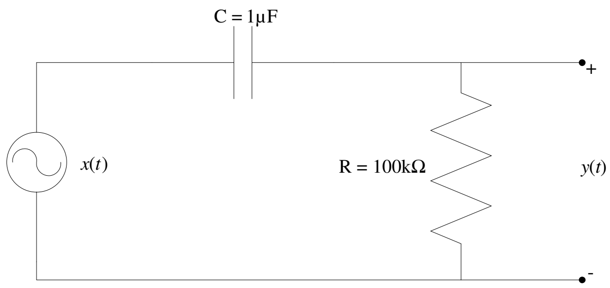

Figura 2: Circuito RC que implementa um filtro analógico.

(f) Tendo como base os conceitos de autofunção e autovalor, mostre a saída do sistema LIT ($y(t)$) do item (e) quando a entrada é a onda $x(t)$ aproximada com $N = 50$. Comente a forma de onda obtida.

(g) A Figura 3 mostra a resposta do sistema LIT do item (e) à onda $x(t)$ da Figura 1. Explique as diferenças entre o gráfico da Figura 3 e a resposta do sistema que foi observada no item (f).

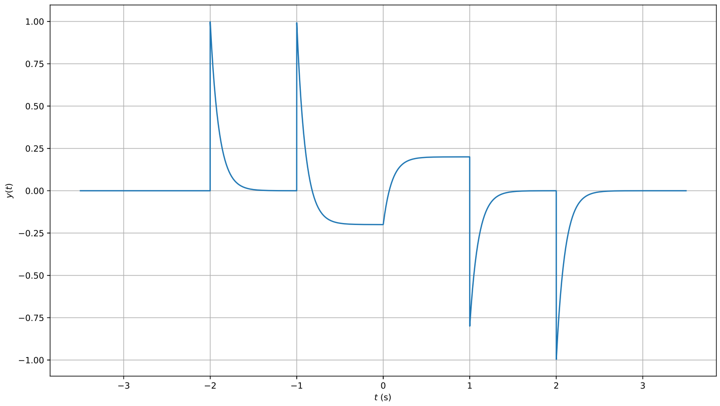

Figura 3: Resposta do circuito da Figura 2 ao sinal $x(t)$ da Figura 1.