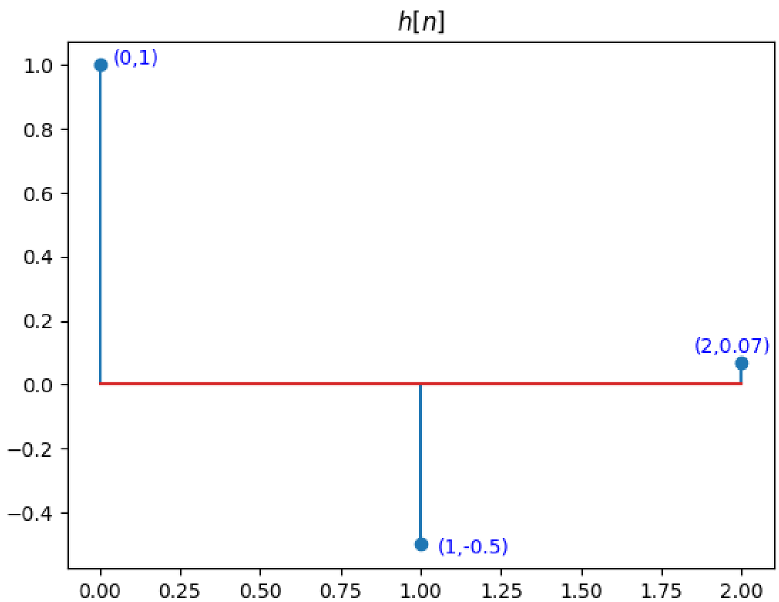
Análise de sinais

Nícolas Hecker Silva, Ra: 186132

1 Respostas ao trabalho 1

a)

Dado o sistema: $X[n] = S[n] - 0,5s[n-1] + 0,07s[n-2]$ é possível inferir a partir dele que para qualquer impulso $s[n]$ e em qualquer instante de tempo, a intensidade do sinal x no instante n será produzida pela intensidade no instante n subtraída da intensidade no instante anterior multiplicado por $0,5$ e somado com a intensidade do sinal a dois instantes anteriores multiplicado por $0,07$. Assim é possível resumir esse comportamento na imagem abaixo:



A convolução para esse sinal será dado por: $s[n] * h[n]$. Como a convolução e comutativa temos: $s[n] * h[n] = h[n] * s[n]$, logo:

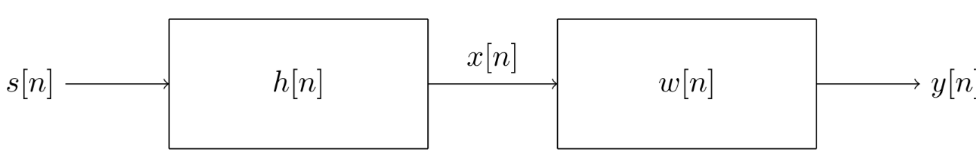
$$X[n] = s * h = h * s = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot s[n-k] = h[0] \cdot s[n] + h[1] \cdot s[n-1] + h[2] \cdot s[n-2]$$

Isso ocorre pois todos os outros valores de $h[n]$ são nulos, não sendo relevantes para o somatório.

Assim:

$$X[n] = 1 \cdot s[n] - 0,5 \cdot s[n-1] + 0,07 \cdot s[n-2]$$

b)



Como $h(n)$ e $w[n]$ estão em cascata e são LIT, podemos realizar:

$$y[n] = s[n] * h[n] * w[n]$$

Conectando os dois sistemas em um sistema convoluído. Dessa forma, para que o o efeito de h seja amenizado ou anulado, o valor do sistema combinado deve ser o sistema identidade, ou seja, o sistema o qual aplicado sobre qualquer sinal resulta nele mesmo. Como esse se trata de um espaço discreto, esse sistema é o sitema impulso $\delta[n]$: $h * w = \delta$

Para encontrar o valor de w é necessário resolver as sequintes equações:

$$\delta[n] = h * w = w * h = \sum_{k=0}^{\infty} w[k] \cdot h[n-k] = w[0] \cdot h[n] + w[1] \cdot h[n-1] + ...$$

analisando para cada valor de n:

$n = 0$:

$$w[0] \cdot h[0] + w[1] \cdot h[0-1] = 1$$

Os valores de $h[n]$ só são não nulos para $n \in 0, 1, 2$, logo:

$$w[0] \cdot h[n] = 1 \implies w[0] = 1$$

$n = 1$:

$$w[0] \cdot h[1] + w[1] \cdot h[0] = 1 \implies w[1] = 0,5$$

Já que $w[0] = 1$, $h[0] = 1$ e $h[1] = -0,5$.
$n = 2$:

$$w[0] \cdot h[2] + w[1] \cdot h[1] + w[2] \cdot h[0] = 0 \implies w[2] = 0,18$$

Já que $w[0] = 1$, $h[0] = 1$, $h[1] = -0,5$, $h[2] = 0,7$ e $w[1] = 0,5$.
$n = 3$:

$$w[0] \cdot h[3] + w[1] \cdot h[2] + w[2] \cdot h[1] + w[3] \cdot h[0] = 0 \implies w[3] = 0,055$$

Já que $w[0] = 1$, $h[0] = 1$, $h[1] = -0,5$, $h[2] = 0,7$, $w[1] = 0,5$, $h[n] = 0, n > 2$ e $w[2] = 0,18$.
$n = 3$:

$$w[0] \cdot h[4] + w[1] \cdot h[3] + w[2] \cdot h[2] + w[3] \cdot h[1] + w[4] \cdot h[0] = 0 \implies w[4] = 0,0149$$

Já que $w[0] = 1$, $h[0] = 1$, $h[1] = -0,5$, $h[2] = 0,7$, $w[1] = 0,5$, $h[n] = 0, n > 2$ e $w[2] = 0,18$ e $w[3] = 0,0149$.

Assim, é possível ver que o valor para w[n] maiores pode ser dado por:

$$w[n] = w[n-1] \cdot 0,5 - w[n-2] \cdot 0,07$$

Assim é possível escrever um programa para obter os próximos valores de $w[n]$:

```python
def getNext(quantidade, wn = [1,0.5]):
    for _ in range(quantidade):
        wn.append((wn[-1]*0.5)-(wn[-2]*0.07))
    return wn
```

Obtendo os 10 primeiros valores de $w[n]$

n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9	n = 10
1	0.5	0.18	0.055	0.0149	0.0036	0.000757	0.0001265	1.03E-05	-3.73E-06

Table 1

Eles seguem diminuindo após o valor 10, de forma a atingir o 0 apenas quando $n \to \infty$, entretanto, há vários momentos que o valor de w cruza o eixo x visto que $w[10] < 0$. Para fins comparativos, o elemento 32 é da ordem de 10^{-18}

c)

Para os filtros:

$$w_1 = [1, 0.5, (0.5)^2, (0.5)^3, (0.5)^4]$$

e

$$w_2 = [1, -0.75, 1.5, -0.2, 0.3]$$

temos os seguintes sistemas compostos:

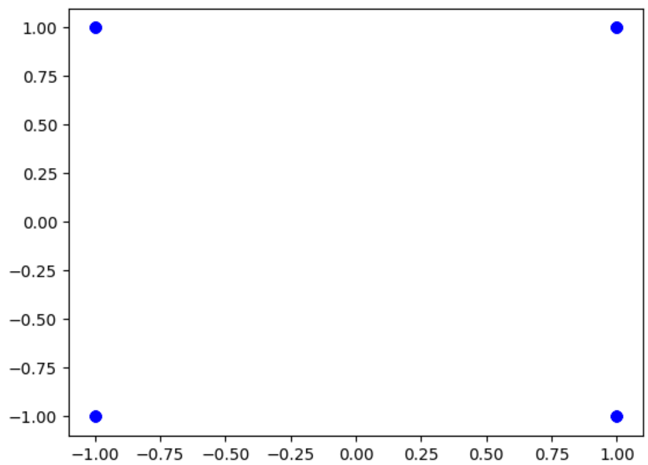
$$x_1 * w_1 = [1, 0, 0.07, 0.035, 0.0175, -0.0225, 0.004375]$$

$$x_2 * w_2 = [1, -1.25, 1.945, -1.0025, 0.505, -0.164, 0.021]$$

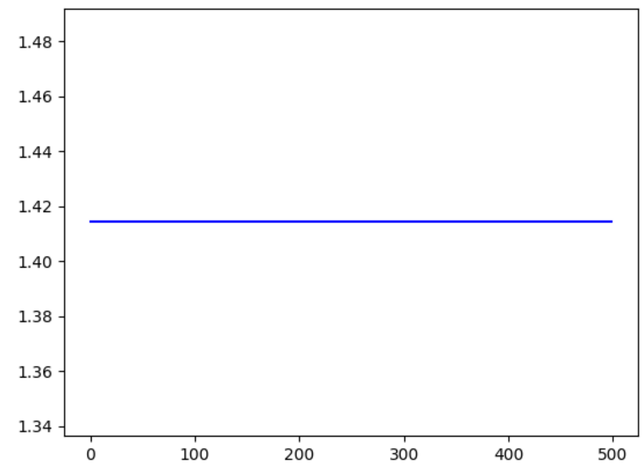
aqui podemos ver que o sistema w_1 gera um sistema composto que se aproxima mais ao sistema impulso, enquanto o outro é mais distante. Portanto é de se esperar que o primeiro consiga aproximar mais a saída da entrada.

d)

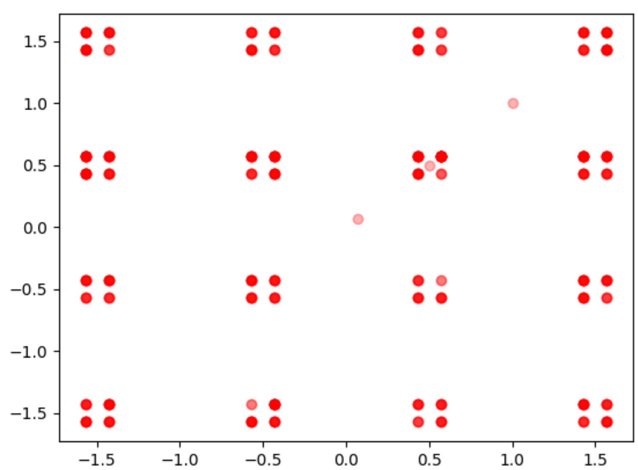
Transmitindo o sinal e aplicando os filtros obtemos os seguintes resultados (discussões nas legendas das imagens):



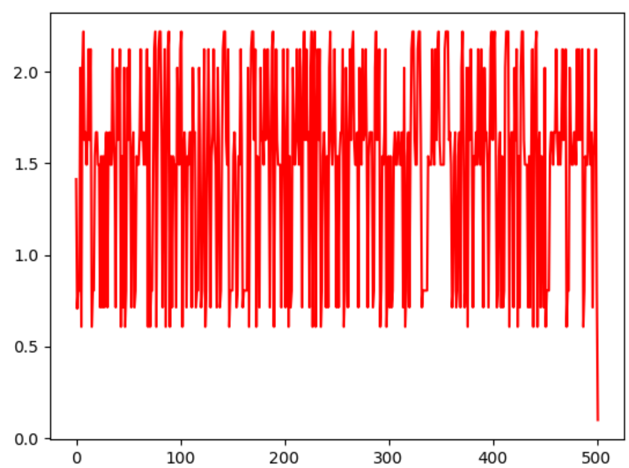
(a) Pontos mostrando o alfabeto no plano complexo formando um quadrado.



(b) Gráfico de linha mostrando o módulo dos símbolos. Todos os símbolos possuem o mesmo módulo.



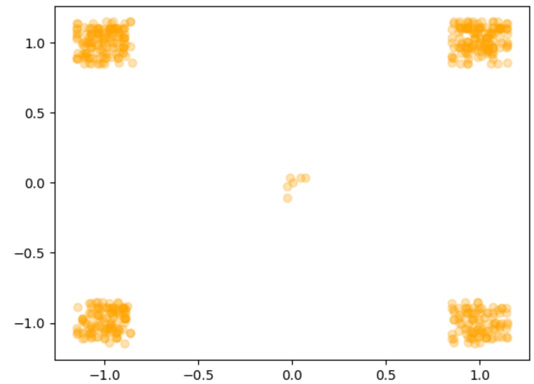
(c) Símbolos transmitidos no plano complexo. Aqui é possível ver 67 pontos (de 68 registrados pelo python) e 3 deles estão em locais estranhos. O ponto central é um ponto relevante a ser analisado na figura ao lado.



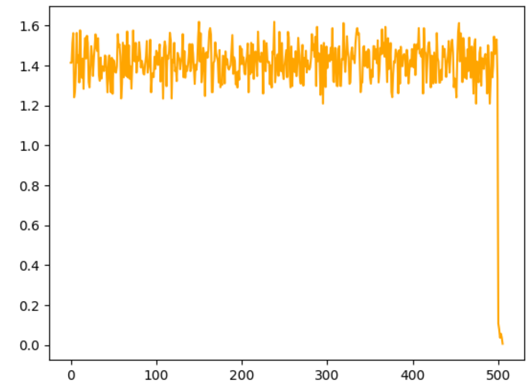
(d) Módulo dos símbolos transmitidos. Aqui é possível ver que o final do sinal tem módulo próximo de 0, dando origem ao ponto central da imagem anterior. Esse fenômeno é causado pelo final da convolução, uma vez que o sinal acaba e os pesos restantes são muito pequenos, aproximando o módulo a 0.

e)

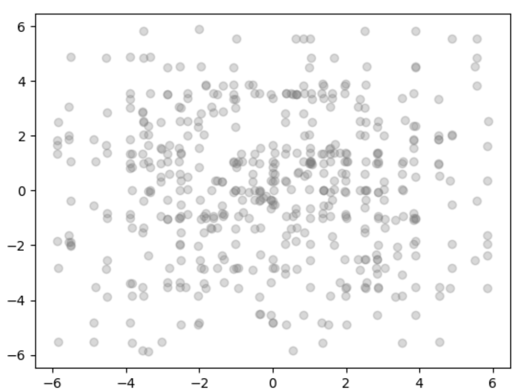
Após isso, foi inserido um ruído extra gaussiano aos dados após a transmissão:



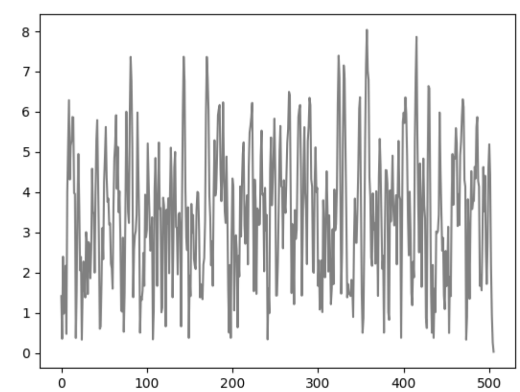
(a) Símbolos resgatados da transmissão através da convolução com o filtro w_1. Aqui podemos ver que há nuvens nas regiões equivalentes aos pontos do quadrado inicial. Assim esse filtro teve um bom desempenho em reduzir o efeito do sinal da transmissão, mesmo que não perfeitamente. É possível ver também uma nuvem com 6 pontos em torno do 0 resultado do final da convolução.



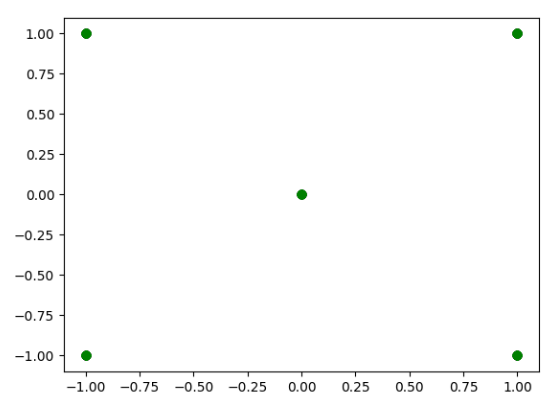
(b) Amplitudes dos símbolos gerados pela correção do filtro inicial. Aqui é possível verificar que os pontos centrais da figura anterior são causados pelo final da convolução dos termos, como os últimos 6 valores do filtros são muito menores que o primeiro, o valor da amplitude se aproxima de 0, chegando mais próximo quanto mais próximo do final da convolução.



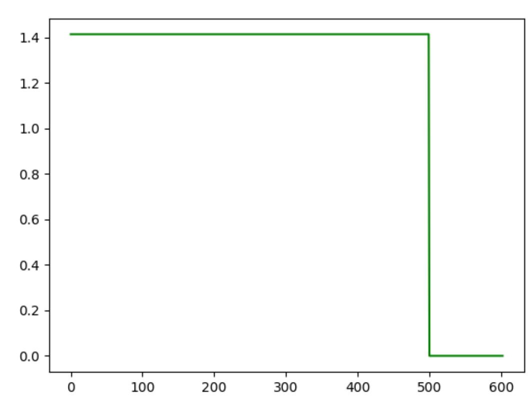
(c) Símbolos gerados pela correção do filtro w_2 destruindo o sinal. É possível ver algumas retas e padrões na imagem, mas os símbolos são incomparáveis com os originais.



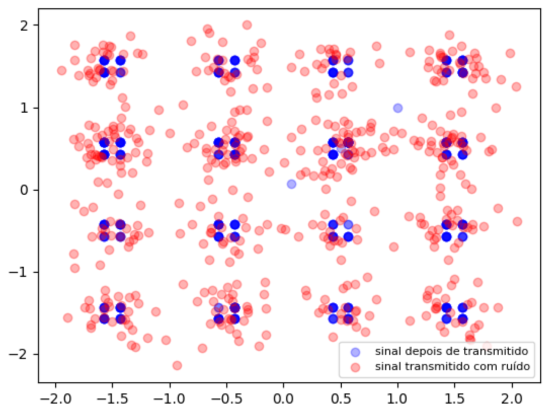
(d) As amplitudes do sinal passado por w_2 é ruidoso e sem padrão. O sinal original foi destruído pelo filtro.



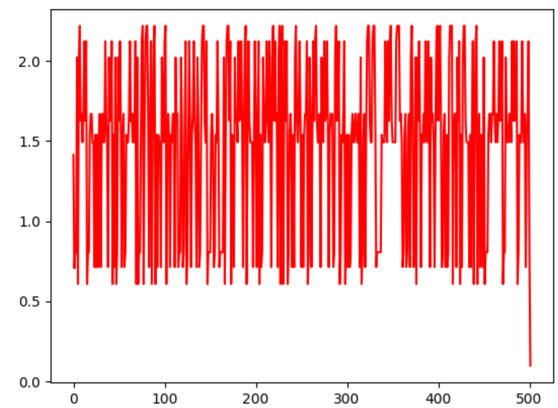
(e) O filtro com os 100 primeiros parâmetros calculados, w_3, gerou os pontos coincidentes com os originais, se apresentando com um excelente filtro para o sistema $h[n]$. Há um ponto central (99 pontos coincidentes) gerados por efeito dos 99 parâmetros pequenos do filtro ao final da convolução.



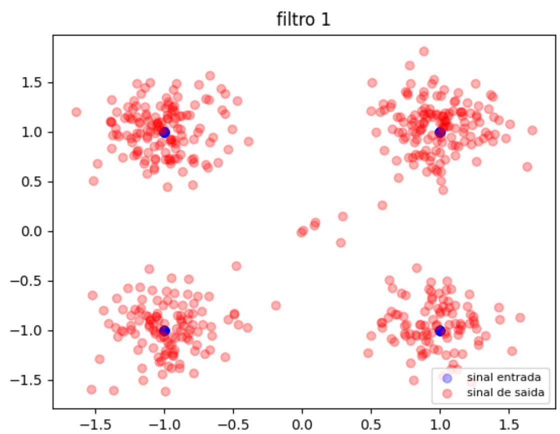
(f) Amplitudes dos dados idênticos a amplitude da entrada com exceção aos últimos 99 pontos. Aqui é possível verificar que esses pontos foram gerados pelo final da convolução.



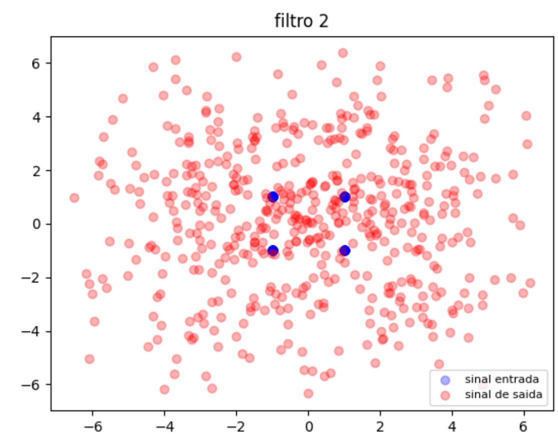
(a) Símbolos gerados através da adição do erro e a transmissão. As nuvens rodeiam as regiões de pontos originais.



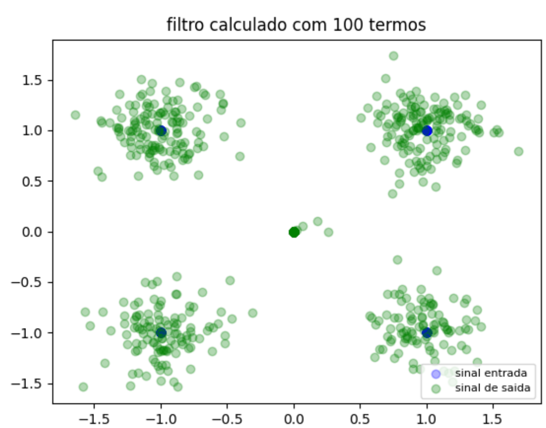
(b) Novamente a amplitude cai rapidamente próximo final da convolução



(c) O sinal de saída do primeiro filtro cria nuvens ao redor das entradas iniciais. Isso mostra que ainda é possível relacionar a entrada com a saída, mas o ruído de 20% piorou significativamente a saída do sinal. Mesmo com o ruído os pontos ao centro continuam presentes.



(d) O filtro 2 (w_2), como antes, continua destruindo o sinal. Nesse caso, porém, não há parão visível além de uma distribuição gaussiana



(e) A distribuição gaussiana prejudicou muito a qualidade do filtro de correção, causando um resultado muito semelhante ao filtro w_1 que possui apenas 7 parâmetros. Isso indica que para sistemas com ruídos aleatórios, um sistema filtro muito preciso não resulta em uma melhora significativa na qualidade do sinal.