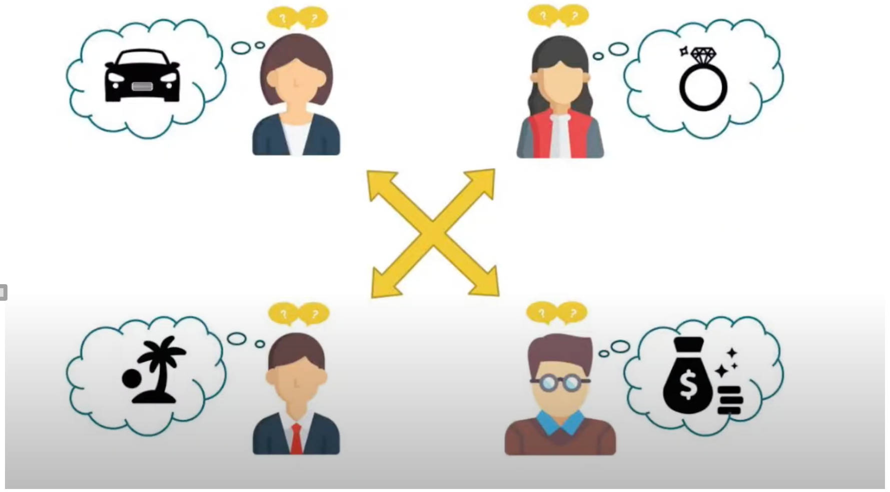
Théorie des jeux et finance

Chaouat Célia & Cohen Salomé – Ing4 TD04 Finance

Sommaire

- Introduction
- Théories probabilistes de la finance en théorie de jeux
- Interprétation au concept de probabilité utilisé en finance et aux modèles de la finance de marché
- Etudes des interdépendances stratégiques
- Mise au point de la topologie des jeux élémentaires
- Analyse stratégique
- Planification stratégique à la lumière de jeux simples en forme normale
- Planification stratégique à la lumière de jeux simples en forme extensif
- Mise au point de la topologie des jeux élémentaires
- Avancées en Machine Learning, applications directes dans la finance
- Les marchés de prédiction au travers de l’apprentissage sans regret
- Problème de market making et relation avec l’apprentissage en ligne
- Bilans personnels
- Sources

Introduction



La théorie des jeux va s'attacher à représenter un certain nombre d'agents.

Avec des situations (appelées « jeux ») où les « agents (les « joueurs ») prennent des décisions financières ou autres, chacun étant conscient que le résultat de son propre choix (ses « gains ») dépend de celui des autres.

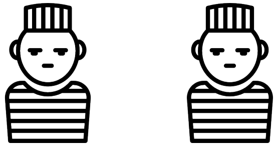
Ces agents sont dans une situation dites « interactive »

Chaque agent, qui cherche à remplir ses objectifs, ne devra pas agir de façon isolée mais va s'intéresser aussi aux comportements des autres.

La théorie des jeux est à la fois une théorie du comportement mais aussi une théorie des anticipations

Exemple

La price de décision est en fonction du choix des autres



Deux prisonniers interrogés dans des salles séparées

Un choix à faire : se taire ou dénoncer son partenaire

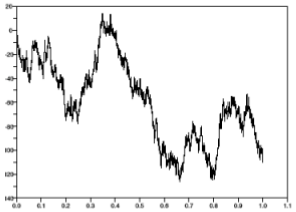
	Se taire	Avouer
Se taire	(-0,5 ;-0,5)	(-10 ;0)
Avouer	(0 ;-10)	(-5 ;-5)

Théories probabilistes de la finance en théorie des jeux

- Développement considérable de la modélisation financière traduit par une utilisation des outils mathématiques.
- La formule des options de Black et Scholes est un exemple de type de modèle mathématique en finance.
- Ce modèle, qui suppose que le cours d'une action est représenté par un processus stochastique (ou aléatoire), est de nature **probabiliste**.

$$c = e^{-R*T} * \left(S_0 e^{R*T} . \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{F_T}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - K . \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{F_T}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu . S . \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 . S^2 \frac{\partial f^2}{\partial S^2} = \mu . f .$$



Interprétation au concept de probabilité utilisé en finance et aux modèles de la finance de marché

Exemple

Dé à six faces non pipé → On peut déduire, par des considérations sur la symétrie et l'homogénéité de la structure physique du dé, que P(6)=1/6

Théorie logique = probabilité unique, indépendante toute observation empirique (c'est-à-dire, de tout jet de dé)
Probabilité déterminée en observant l'espace de possibilité associée à l'événement **E : « lancer un dé à six faces non pipé ».**

De manière similaire →

En Finance, on affirme que le prix d'une option est déterminé par la formule de Black et Scholes, on adopte alors le point de vue de la théorie logique. En effet, on soutient que le prix obtenu est déterminé de manière unique et par la relation entre certaines données concrètes (la volatilité et la moyenne du processus de prix du sous-jacent, le taux d'intérêts, les coûts de transactions, etc) et une hypothèse (donnée par la structure de l'option : option d'achat ou de vente sur tel ou tel actif, à une échéance et à un prix d'exercice déterminé, etc).

Interprétation au concept de probabilité utilisé en finance et aux modèles de la finance de marché

Parallèle :

- **<u>Avec les théories objectives :</u>** probabilité relatif à la connaissance humaine, probabilité liant des données expérimentales (empiriques) et une hypothèse quant à l'état futur du monde, relativement à ces données → relation possédant une objectivité qui la rend indépendante des individus.

- **<u>Avec les théories Subjective :</u>** en finance, la probabilité a également un caractère subjectif → résulte de l'ensemble des anticipations des agents présents sur le marché; Cette théorie identifie la probabilité avec le degré de croyance d'un individu particulier. Du point de vue de la finance, la théorie subjective a une interprétation du concept de probabilité, car cette théorie conteste le moins le formalisme mathématique. Les mathématiques garantissent la cohérence des probabilités. → Théorie subjective met en avant le concept de cohérence. Probabilités → notions subjectives, dont la cohérence est garantie par les règles formelles du calcul des probabilités.

- **<u>Avec les théories Fréquentielles</u>** : concept empirique. C'est la fréquence avec laquelle un événement particulier survient au cours d'une séquence d'événements déterminés.

Etudes des interdépendances stratégiques

Selon Schmidt (1999), ***« choisir rationnellement une stratégie c'est d'abord, pour chaque joueur, parcourir le jeu mentalement à l'envers, c'est à dire à partir de sa phase terminale, caractérisée par toutes les issues possibles du jeu dont beaucoup n'appartiennent pas à sa solution pour remonter séquence après séquence jusqu'au choix initial ».***

- La stratégie, dans la théorie des jeux, passe par le choix d'un plan d'action qui se définit par rapport à un arbre de décision qui représente l'ensemble des possibilités sur un horizon de temps déterminé.

- Notion importante : **équilibre de Nash est un type de solution** (proposé par John Forbes Nash en 1950) utilisé en théorie des jeux, qui souligne le caractère autoréalisateur. Un équilibre de Nash est une combinaison de décisions individuelles, appelées **« stratégies »,** où chacun anticipe correctement les choix des autres → Autoréalisation car l'issue réalisée est le résultat des décisions prises en pensant qu'elle va se réaliser. La question principale qui se pose en théorie des jeux est que va faire l'autre ? Les croyances du joueurs concernant le comportement des autres ont un rôle essentiel au moment de la décision.

- Diversité des croyances → une multiplicité d'équilibres.

Analyse stratégique

- **Jeux simultanés :**
- Matrice de gains : moyen afin de représenter un jeu sous forme normale sous la forme d'un tableau indiquant les gains associés à chaque action en fonction des actions de l'autre joueur.
- Dilemme du prisonnier (parler ou se taire)
- Stratégie pure strictement dominante (stable) (mais Pareto dominée, global mais instable)
- **IESDS :** Elimination itérative des stratégies strictement dominées est un équilibre de Nash → Réduction progressive de la matrice
- **Equilibre de Nash :**
- Situation telle qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier (seul) de la situation obtenue
- Les agents n'ont pas de motivation à changer de stratégie
- **Meilleur réponse :**
- l'ensemble de stratégies qui produisent le résultat immédiat le plus favorable au joueur considéré, étant données les choix des autres joueurs. Equilibre de Nash = meilleure réponse pour tous
- **Stratégies mixtes :**
- *Un profil de stratégies mixtes Q = (q1, . . . , qn) est un élément de K qui spécifie les stratégies (pure ou mixtes) de tous les joueurs : le vecteur de probabilité qui correspond à la stratégie mixte utilisée par le joueur i.*
- Une stratégie mixte est une meilleure réponse par rapport à un ensemble de stratégies Q si et seulement si toutes les stratégies de son support sont aussi des meilleures réponses par rapport à Q.

Optimum/domination de Pareto

- Un profil S est optimal au sens de Pareto → impossible d'augmenter l'utilité d'un joueur sans diminuer celle d'au moins un autre joueur et si n'est pas Pareto-dominé par aucun autre profil

$$\begin{cases} \exists i, & u_i(s') > u_i(s) \\ \forall j, & u_j(s') \geq u_j(s) \end{cases}$$

- Un profil S domine un profile S' au sens de Pareto → au moins aussi bon pour tous les joueurs et si S est strictement meilleur pour au moins l'un d'entre eux

Exemple Équilibre de Nash et multiplicité d'équilibres

		B		
		b_1	b_2	b_3
A	a_1	(6, 4)	(4, 3)	(3, 1)
	a_2	(5, 4)	(7, 5)	(5, 6)

- Le joueur A doit choisir entre les deux stratégies $a1$ et $a2$.
- Le joueur B doit choisir entre les trois stratégies $b1, b2, b3$.
- Le tableau donne le gain de A et de B pour chaque combinaison de stratégies.
- Deux équilibres de Nash :

- $\{a1, b1\}$ → A maximise son gain en choisissant $a1$ en pensant que B va choisir $b1$; Cette équilibre est sous-optimal car il en existe une autre $\{a2, b2\}$ donnant aux deux joueurs un gain supérieur à celui qui est procuré par cet équilibre.

- $\{a2, b3\}$ → B maximise son gain en choisissant $b1$ en pensant que A va choisir $a1$, ces prévisions s'avérant être correctes.

Planification stratégique à la lumière de jeux simples en forme normale

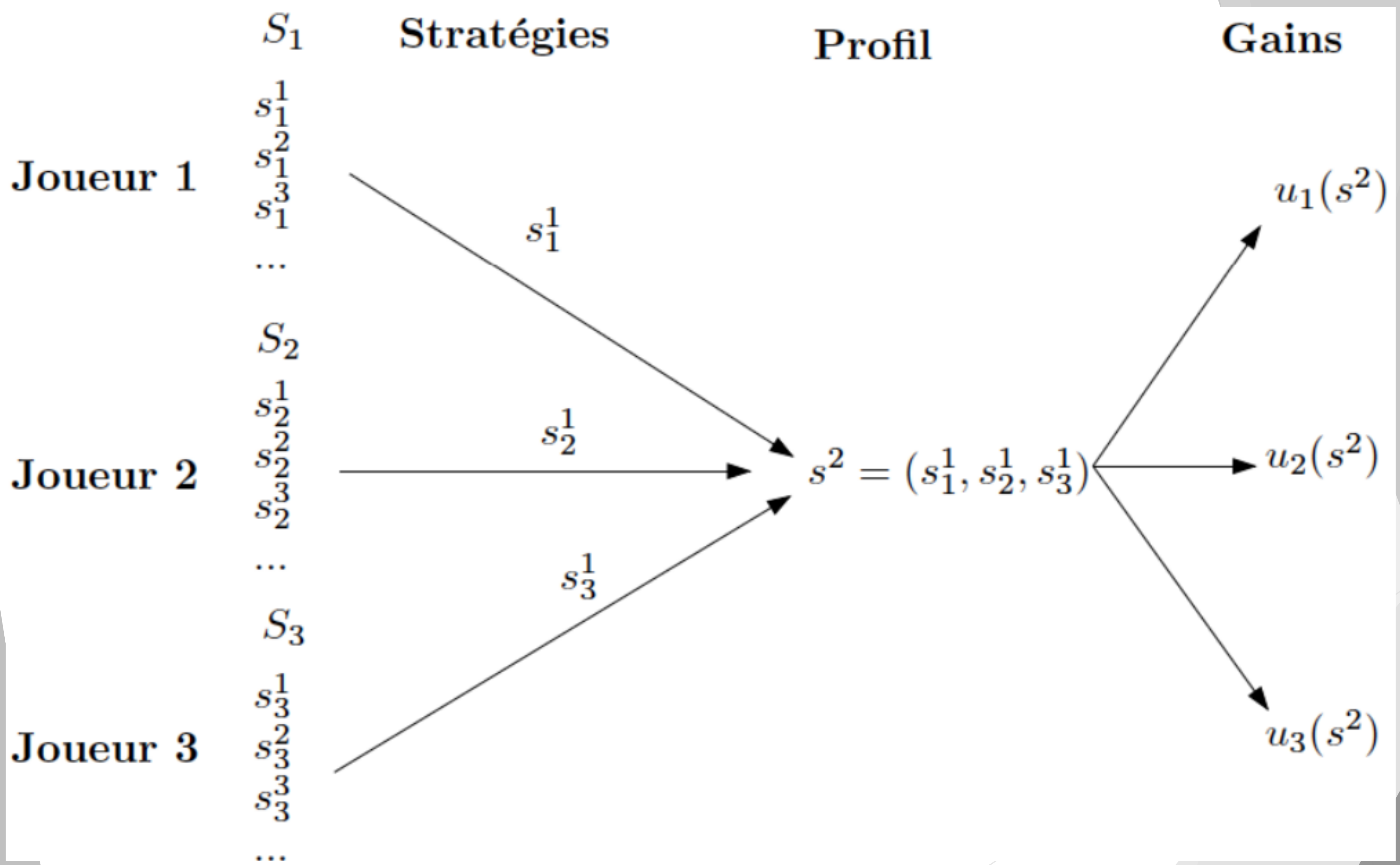
Définition

Un jeu en forme normale est décrit par :

- Un ensemble n de joueurs : I = {1,2, ... ,n}
- Pour chaque joueur i, appartenant à I, on a un ensemble de stratégies *Si* qui regroupent toute les stratégies possibles du joueur avec ki stratégies disponibles pour le joueur i. $S_i = \left\{ {s_i}^1, {s_i}^2, \ldots, {s_i}^{k^i} \right\}$
- Chaque joueur choisit une stratégie Si ; résultat s ≡ (s1,s2, . . . ,sn).
- Pour chaque joueur i, une fonction de gain, Ui :

ui : S = ×i∈I Si → R

s ≡ (s1,s2, . . . ,sn) 7→ ui(s)


S_1
Stratégies
Profil
Gains
s_1^1
s_1^2
Joueur 1
s_1^3
...
s_1^1
$u_1(s^2)$
S_2
s_2^1
s_2^1
s_2^2
Joueur 2
s_2^3
$s^2 = (s_1^1, s_2^1, s_3^1)$
$u_2(s^2)$
...
s_3^1
S_3
s_3^1
Joueur 3
s_3^2
s_3^3
...
$u_3(s^2)$

Prenons l'exemple du dilemme du prisonnier (donné en introduction) vis-à-vis de jeux simples en forme normale

- $n = 2$ joueurs, $I = \{1, 2\} = \{\text{prisonnier } 1, \text{prisonnier } 2\}$
- L'ensemble des stratégies de chaque joueur est : $S1 = S2 = \{N, D\}$
- 4 résultats possibles :

$$S = \left\{ \begin{array}{cc} (s_1 = N, s_2 = N), & (N, D), \\ (D, D), & (D, N) \end{array} \right\}$$

- **<u>Gains des prisonniers (connus par eux) ≡ années de prisons (relation négative) :</u>**

  -Si prisonnier 1 et prisonnier 2 se dénoncent, ils sont condamnés à 8 ans de prison

  -S'ils nient tous les deux, ils auront 1 année de prison

  -Si un seul dénonce, il est relâché en récompense de sa coopération et l'autre est condamné à 10 ans de prison

Gain :
$u1(N, N) = u2(N, N) = -1,$
$u1(N, D) = u2(D, N) = -10,$
$u1(D, N) = u2(N, D) = 0,$
$u1(D, D) = u2(D, D) = -8.$

Matrice avec Stratégies de Prisonnier 1 en lignes et stratégies de prisonnier 2 en colonnes

Le vecteur de gains (–1, –1) correspond à (u1(N, N), u2(N, N)).

	Prisonnier1 N	Prisonnier1 D
Prisonnier2 N	$(-1, -1)$	$(-10, 0)$
Prisonnier2 D	$(0, -10)$	$(-8, -8)$

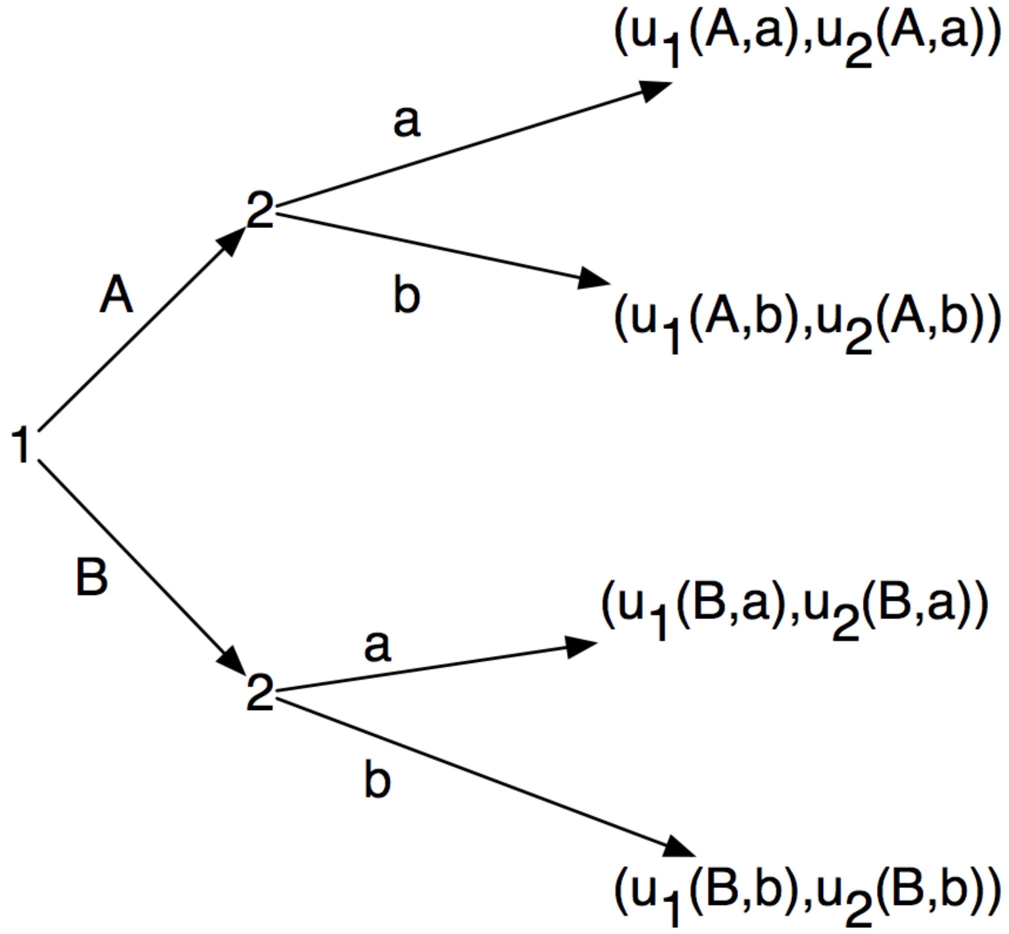
Planification stratégique à la lumière de jeux simples en forme extensif

Définition

Un jeu en forme extensive est donnée par un arbre de jeu qui contient un nœud initial, des nœuds de décisions, des nœuds terminaux et des branches reliant chaque nœud à ceux qui lui succèdent :

- Un ensemble de n joueurs : i = 1, 2, . . . , n.
- Pour chaque nœud de décision, le nom du joueur qui a le droit de choisir la stratégie du nœud
- Pour chaque joueur i, spécification des actions permises à chaque nœud
- La spécification des gains de chaque joueur à chaque nœud terminal.

Exemple :



Le problème d’entrée d’une firme sur le marché d’un monopole :

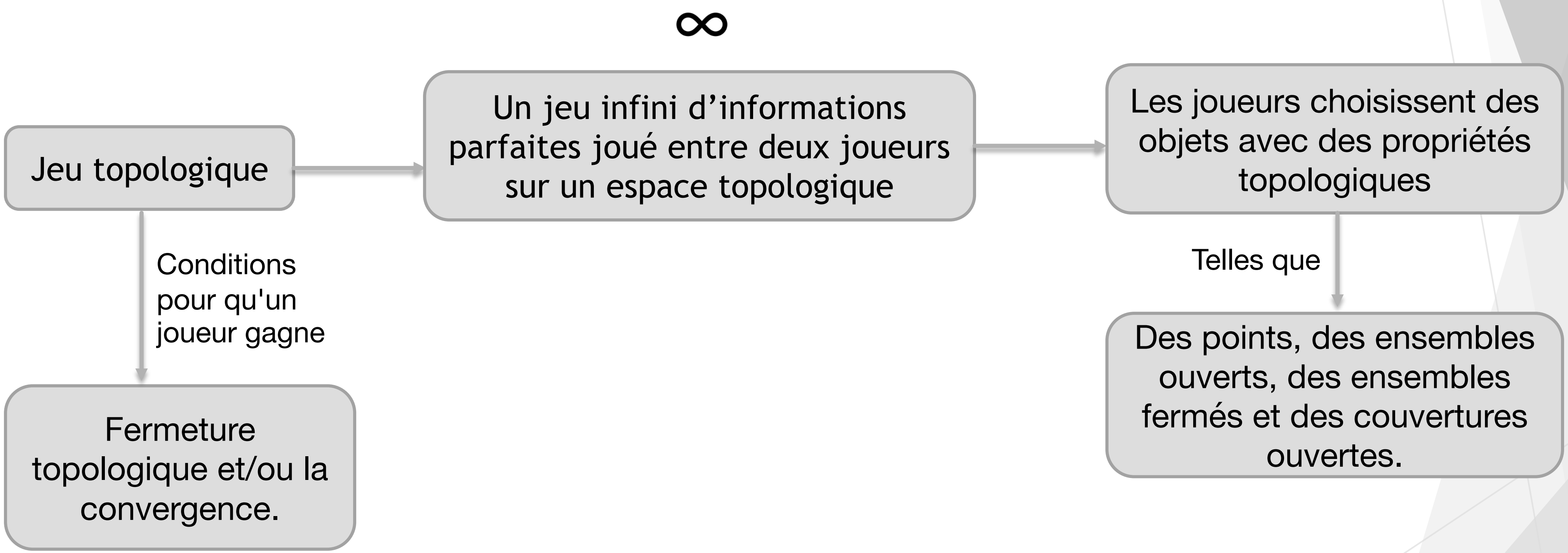
- Celui qui entre (E) doit choisir entre Entrer ou Ne pas Entrer
- Entrer : firme (F) à deux choix : Combattre en cassant les prix ou Coopérer avec lui, de manière à créer un monopole joint

Les gains sont :

uE (Entrer, Coopérer) = 40
uI(Entrer, Coopérer) = 50
uE (Entrer, Combattre) = −10
uI(Entrer, Combattre) = 0
uE (Non) = 0
uI(Non) = 300

Mise au point de la topologie des jeux élémentaires

Définir un jeu topologique



Exemple

Exemple **jeu Banach–Mazur**, exemple ayant des **liens entre les notions de théorie des jeux et les propriétés topologiques.**

- Y un espace topologique
- X un sous-ensemble de Y, appelé ensemble gagnant

Le joueur 1 commence le jeu en choisissant un sous-ensemble ouvert non vide

le joueur 2 répond avec un sous-ensemble ouvert non vide

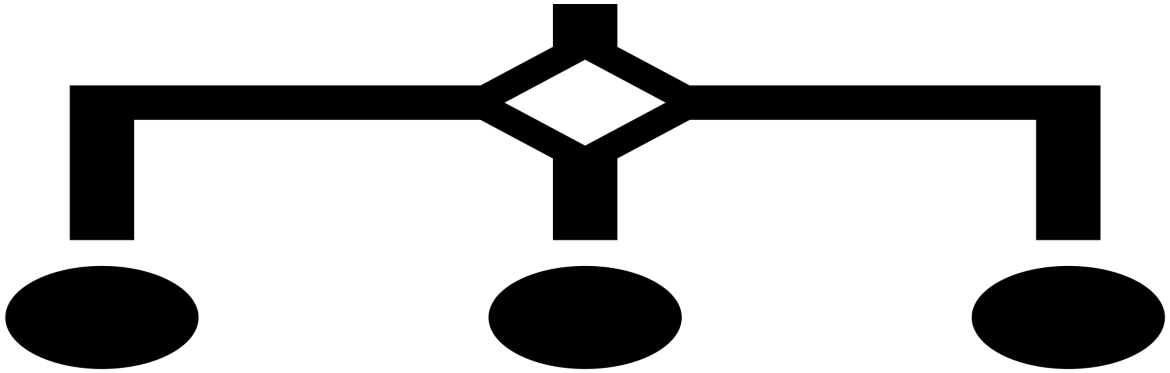
Le jeu continue de cette façon, les joueurs choisissant alternativement un sous-ensemble ouvert non vide de la pièce précédente.

Après une séquence infinie de coups, un pour chaque nombre naturel, le jeu est terminé, et je gagne si et seulement si :

$$I_0 \subset Y \; J_0 \subset I_0$$

$$X \cap \bigcap_{n\in\omega} I_n \neq \emptyset.$$

Lien entre la théorie des jeux et la topologie de cette exemple



Stratégie gagnante dans le jeu si et seulement si X est de la première catégorie de Y (un ensemble est de la première catégorie s'il s'agit de l'union dénombrable d'ensembles denses nulle part).

Si Y est un espace métrique complet, alors j'a une stratégie gagnante si et seulement si X est « comeagre » dans un sous-ensemble ouvert non vide de Y .

Si X a la Propriété de Baire dans Y , alors le jeu est déterminé.

La topologie

Permet de relier les 144 jeux 2×2 d'une manière nouvelle et systématique.

Chaque jeu est lié aux autres dans le sens où il y a une transformation qui convertit la structure de gain pour l'un en structure de gain pour l'autre.

LA THEORIE DES JEUX

Compréhension de la gouvernance démocratique (topologie des jeux élémentaires)

- Voter dans une démocratie résout les conflits si l'électorat considère le processus de vote juste et le résultat choisi comme acceptable.

Exemple

Projet public à financer (si les électeurs lors d'un référendum décident de le financer) est la rénovation d’un parc public, ce qui peut profiter à tout le monde, mais plus à ceux qui utilisent le parc fréquemment qu'à ceux qui ne le font pas. Dans ce cas, certains diront que ceux qui utilisent fréquemment le parc devraient payer plus pour sa rénovation. Mais cette approche volontaire conduit à un problème de biens publics ou de passager clandestin, que nous modélisons comme un dilemme des prisonniers à n personnes.

Nous considérons une personne riche qui peut apporter une contribution importante. On suppose que sa contribution = aux restes du public.

Légende(x, y) = classement des gains par rapport à personne fortunée, reste du public

(4) : meilleur

(3) : meilleur suivant

(2) : pire suivant

(1) : pire

→ **Equilibre de Nash est donc souligné = meilleur réponse pour tous**

Rest of Public⇒ Wealthy Individual ⇓	Contribute	Don’t contribute
Contribute	Full renovation: (3,3)	Partial renovation: (1,4)
Don’t contribute	Partial renovation: (4,1)	No renovation: <u>(2,2)</u>

Suite de l'exemple :

Supposons maintenant que les acteurs puissent d'abord voter sur l'opportunité de contribuer ou non au financement de la rénovation du parc.

Si une majorité (c'est-à-dire les deux joueurs) doit voter pour financer le parc afin qu'il soit rénové, alors leurs choix et les résultats qui en résultent sont indiqués dans le jeu ci-dessous :

Rest of Public ⇒ **Wealthy Individual ⇓**	**Vote to finance**	**Vote not to finance**
Vote to finance	Full renovation: (3,3)	No renovation: (2,2)
Vote not to finance	No renovation: (2,2)	No renovation: (2,2)

On remarque que l'option selon laquelle le parc doit être partiellement rénové n'apparaît pas dans la **matrice des gains**.
Les résultats sont plus frappants : le parc est soit entièrement rénové, soit non rénové, ce qui fait du résultat coopératif d'une rénovation complète **l'unique équilibre Pareto-optimal de Nash.**

Avancées en Machine Learning, applications directes dans la finance

Définition

- Le but de l’intelligence artificielle est de créer des machines capables d’imiter l’esprit humain.
- Pour atteindre cet objectif, ces machines ont besoin de capacités d'apprentissage, de la représentation des connaissances, du raisonnement et de la pensée abstraite.
- Le Machine Learning (apprentissage automatique) se concentre uniquement sur l'écriture de logiciels qui peuvent apprendre de l'expérience passée.
- Le Machine Learning est étroitement lié à l'exploration de données et à l'analyse statistique.
- L'apprentissage automatique est l'extraction de connaissances à partir de données et l'utilisation ultérieure de ces connaissances pour trouver des solutions à des observations inédites.

Avancées en Machine Learning, applications directes dans la finance

<u>Application du Machine Learning à la gestion de portefeuille</u>

Le gestionnaire de portefeuille (investissement long terme)

utilisent

Le Machine Learning

afin

D’analyser toutes les données de l’entreprise disponibles : rapports financiers, communiqués de presse...

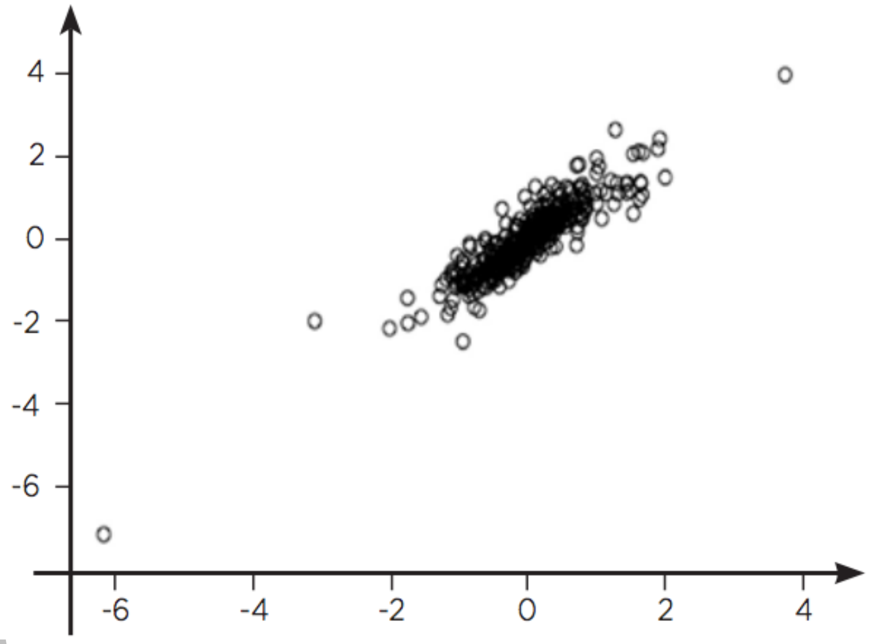
Identifier les investissements les plus intéressants.

L’expertise, acquise par l’expérience, repose sur la reconnaissance immédiate de schémas, de « **patterns** »

Avec le machine learning on a des systèmes qui ont une véritable expertise.

- **Marché financier → immense toile d'araignée → Tous les actifs sont liés entre eux ainsi le mouvement d'un actif a des répercussions sur d'autres actifs → CORRELATION**
- Les actifs peuvent être corrélés positivement ou négativement.
- Les actifs d'un même secteur et/ou d'une même région sont souvent corrélés positivement.
- **Exemple :**

Deux banques françaises; les données utilisées pour observer la corrélation sont le prix des actions d'une période d'un an. Les points forme une ligne, qui traduit ces deux actifs sont corrélés positivement. Cela se confirme, par un coefficient de corrélation égal à 0,911



En probabilité → Arbre de décisions pour la prévision de rendement d'actifs financiers.

Les marchés de prédiction au travers de l'apprentissage sans regret

En Machine Learning

Les règles de notation du marché sont utilisées comme fonctions de perte pour évaluer et comparer les performances de différents algorithmes

- Les règles de notation du marché ont été développées pour mettre en commun les opinions de nombreux prévisionnistes différents → Règles de notation partagées séquentiellement
- Le marché maintient une distribution de probabilité actuelle $\vec{p}$

- Soit $\{1, \cdots, N\}$ un ensemble de résultats exhaustifs d'un événement futur.
- Une distribution de probabilité $\vec{p}$ à un score Si ($\vec{p}$) pour chaque résultat i, prenant des valeurs dans la ligne réelle étendue $[-\infty, \infty]$.
- Ce score représente la récompense qu'un prévisionniste pourrait recevoir pour prédire la distribution $\vec{p}$ si le résultat se révèle être i.

$$s_i(\vec{p}) = a_i + b\left(2p_i - \sum_{i=1}^{N} p_i^2\right)$$

Les marchés de prédiction au travers de l'apprentissage sans regret

Un trader peut entrer sur le marché → **Il change la distribution** $\vec{p}$ par une distribution arbitraire $\vec{p}\,'$

Résultat = i ↓

Gain = Si($\vec{p}\,'$) - Si($\vec{p}$)

Par exemple, dans la populaire règle de notation logarithmique du marché (LMSR);
Basée sur : $$s_i(\vec{p}) = a_i + b\log(p_i)$$

→ Un trader qui change la distribution de $\vec{p}$ à $\vec{p}\,'$ reçoit : Gain = b log(p′i / pi)

- Si les commerçants mettent à jour leurs propres croyances au fil du temps en fonction de l'activité du marché, la distribution du marché devrait éventuellement converger vers les croyances collectives de la population.
- Ainsi, le market maker n'est responsable que du paiement du score du trader final; Soit $\vec{p}$0 la distribution de probabilité initiale du marché.
- Le pire des cas de perte du teneur de marché : **max (si ($\vec{p}$) - si ($\vec{p}$0)). i∈ {1, ···, N} $\vec{p}$∈ΔN**
- Le pire cas de perte du market maker exécutant un LMSR initialisé à la distribution uniforme : **b log N**

Problème de market making et relation avec l'apprentissage en ligne

- Les Market Makers automatisés pour des marchés complets sont bien étudiés en économie et en finance.

- Le teneur de marché détermine le coût de chaque titre en utilisant une fonction de coût différentiable, **C:** $\mathbf{R}^{|O|} \rightarrow \mathbf{R}$ **;** **f**onction spécifiant le montant d'argent actuellement misé sur le marché en fonction du nombre d'actions de chaque titre acheté.

Qo → Nombre d'actions du titre O détenues par les traders → Un trader souhaite acheter un lot d'action Ro → Le commerçant doit payer C (q + r) - C (q) au teneur de marché.

Un trader souhaite acheter un lot d'action Ro ↓ Ro>0 : Achat
Ro<0 & Ro=0 : Vente

Le commerçant doit payer C (q + r) - C (q) au teneur de marché. ↓ Le prix instantané du titre o (c'est-à-dire le prix par action d'une partie infinitésimale d'un titre) est alors **∂C(Q)/∂Qo**, et est noté po (q).

Bilans personnels

Célia Chaouat

À mon sens, ce projet nous a permis de se documenter et d'apprendre un grand nombre de connaissances sur la Théorie des Jeux et Finance. En effet, nous avons appris toute la logique et la complexité de ces études. C'est un sujet assez complexe c'est pourquoi il n'existe pas ou peu de code alliant l'Intelligence Artificielle sur cette théorie. Cette étude a beaucoup attiré ma curiosité concernant ces théories et ce fut un sujet très intéressant à étudier. Je pense que nous avons bien résumé et expliqué ce qu'était la Théorie de Jeux et Finance afin que le doucement ne soit pas trop lourd à lire. Je remercie Salomé d'avoir travaillé en binôme sur ce sujet.

Salomé Cohen

Ce projet m'a permis d'apprendre davantage sur la théorie des jeux qui est étroitement lié à la finance, la probabilité. J'ai trouvé intéressant les recherches sur les divers théories probabilistes, les stratégies de jeux ainsi que sur le lien entre le machine learning et la finance.
Sujet enrichissant qui m'a permis de découvrir la théorie des jeux vis-à-vis du monde de la finance en liant Machine Learning, Intelligence Artificielle, théories probabilistes....

Sources

- https://www.universalis.fr/encyclopedie/equilibre-economique/10-l-equilibre-de-nash/
- https://www.cairn.info/revue-vie-et-sciences-de-l-entreprise-2005-3-page-6.htm
- https://www.youtube.com/watch?v=nkvacyCk1lI
- https://perso.liris.cnrs.fr/marc.plantevit/ENS/GameTheory/CM/2_Representation.pdf
- https://www.cairn.info/revue-finance-et-bien-commun-2008-2-page-145.htm
- https://www.universalis.fr/encyclopedie/theorie-des-jeux/
- https://docplayer.fr/4822039-Analyse-des-interactions-multi-agents-theorie-des-jeux.html
- https://mpra.ub.uni-muenchen.de/12751/1/MPRA_paper_12751.pdf
- https://www.fimarkets.com/pages/machine-learning-finance.php#:~:text=Les%20gestionnaires%20de%20portefeuilles%20utilisent,les%20investissements%20les%20plus%20int%C3%A9ressants.
- https://www.lebigdata.fr/machine-learning-et-big-data
- https://www.lri.fr/~jcohen/documents/enseignement/chap5.pdf
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Meilleure_réponse