

# MATH213 - Géométrie Différentielle 2022

Marc Troyanov – EPFL

État au 23 décembre 2022

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels sur les Espaces vectoriels euclidiens et pseudo-euclidiens</b>	<b>3</b>
1.1	Définitions de bases . . . . .	3
1.2	Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie . . . . .	5
1.3	Similitudes et Isométries d'un espace vectoriel euclidien. . . . .	6
1.4	Le groupe orthogonal . . . . .	8
1.5	Un théorème d'Euler . . . . .	9
1.6	Géométrie vectorielle dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{E}^3$ . . . . .	11
1.7	Géométrie vectorielle dans le plan euclidien orienté $\mathbb{E}^2$ . . . . .	13
1.8	Formes quadratiques sur un espace vectoriel réel, théorème de Sylvester. . . . .	15
1.9	Espaces pseudo-euclidiens . . . . .	19
1.10	Base de Sylvester et espaces pseudo-euclidiens modèles. . . . .	21
1.11	Indicatrices et cône isotrope . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Courbes dans l'espace euclidien</b>	<b>24</b>
2.1	Qu'est ce qu'une courbe ? . . . . .	24
2.2	Notions fondamentales . . . . .	24
2.3	Champs de vecteurs le long d'une courbe . . . . .	28
2.4	Longueur et abscisse curviligne . . . . .	30
2.5	Changement de paramétrage d'une courbe . . . . .	33
2.6	Quantités géométriques et quantités cinématiques . . . . .	34
2.7	Paramétrage naturel d'une courbe régulière . . . . .	35
2.8	Courbure d'une courbe de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	37
2.9	Contact entre deux courbes . . . . .	40
2.10	Le repère de Frenet d'une courbes dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	42
2.10.1	Variation angulaire du plan osculateur . . . . .	44
2.10.2	Courbes de pente constante . . . . .	45
2.10.3	Le théorème fondamental de la théorie des courbes de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	46
2.11	Courbes dans un plan orienté . . . . .	48
2.12	Le théorème des quatre sommets . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Calcul différentiel et Sous-Variétés différentiables de <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>54</b>
3.1	Rappels de calcul différentiel . . . . .	54
3.1.1	Dérivées directionnelles et dérivées partielles . . . . .	54
3.1.2	Applications de classe $C^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	55
3.1.3	Applications Différentiables au sens de Frechet . . . . .	56

3.1.4	Une autre interprétation de la différentielle . . . . .	59
3.1.5	Le théorème d'inversion locale . . . . .	61
3.1.6	Le théorème du rang constant . . . . .	62
3.2	Sous-Variétés . . . . .	65
3.3	L'espace tangent à une sous-variété . . . . .	67
3.4	Applications différentiables entre deux sous-variétés . . . . .	70
3.5	Le fibré tangent à une sous-variété . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Géométrie des sous-variétés</b>	<b>72</b>
4.1	Distances extrinsèque et intrinsèque sur une sous-variété . . . . .	73
4.2	Le tenseur métrique associé à une paramétrisation locale . . . . .	74
4.3	Signification géométrique du tenseur métrique . . . . .	78
4.4	Sur les isométries entre sous-variétés paramétrées . . . . .	81
4.5	Intégration sur une sous-variété . . . . .	82
4.6	Domaines riemanniens . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Courbure des surfaces</b>	<b>86</b>
5.1	Co-orientation d'une surface et application de Gauss . . . . .	86
5.2	Courbure d'une courbe tracée sur une surface . . . . .	87
5.2.1	Géodésiques . . . . .	87
5.2.2	Repère de Darboux, courbures normale et géodésique . . . . .	87
5.2.3	Le théorème de Meusnier . . . . .	90
5.3	L'application de Weingarten et la deuxième forme fondamentale . . . . .	91
5.4	Courbures d'une surface . . . . .	93
5.4.1	Courbure normale . . . . .	93
5.4.2	Courbures principales, moyenne et de Gauss . . . . .	93
5.4.3	Interprétation locale des courbures principales. . . . .	95
5.4.4	Courbure des surfaces de révolution . . . . .	96
5.5	Quelques théorèmes classiques de la théorie des surfaces . . . . .	99
5.6	Les symboles de Christoffel . . . . .	101
5.7	Sur l'accélération des courbes tracées sur une surface . . . . .	103
5.8	Le Théorème Egregium . . . . .	104
<b>A</b>	<b>Notions de topologie et espaces vectoriels normés</b>	<b>106</b>
A.1	Rappels de topologie . . . . .	106
A.2	Rappels sur la notion de norme . . . . .	108
<b>B</b>	<b>Sur les notations classiques de la géométrie différentielle des surfaces</b>	<b>110</b>
<b>C</b>	<b>Formulaire</b>	<b>114</b>

# Chapitre 1

## Rappels sur les Espaces vectoriels euclidiens et pseudo-euclidiens

### 1.1 Définitions de bases

**Définitions.** (i) Un *espace vectoriel euclidien* est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réel muni d'un produit scalaire. On notera génériquement un tel espace par  $(\mathbb{E}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , où  $n \in \mathbb{N}$  est la dimension de l'espace vectoriel et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire. Rappelons qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie-positive sur l'espace vectoriel  $\mathbb{E}^n$ .

En particulier, le *produit scalaire standard* sur  $\mathbb{R}^n$  est défini par

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(ii) Deux vecteurs  $x, y$  d'un espace vectoriel euclidien  $\mathbb{E}^n$  sont dit *orthogonaux* si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Dans ce cas on note  $x \perp y$ .

(iii) La *norme* d'un vecteur  $x \in \mathbb{E}^n$  est le nombre réel défini par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

La norme est bien définie car  $\langle x, x \rangle \geq 0$  pour tout  $x$ .

Le produit scalaire peut se retrouver à partir de la norme en utilisant les *formules de polarisation* :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Le résultat suivant est une propriété fondamentale des produits scalaires.

**Proposition 1.1.1.** (*Inégalité de Cauchy-Schwartz.*) Pour tous vecteurs  $x, y$  de l'espace euclidien  $\mathbb{E}^n$  on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

De plus on a égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Proposition 1.1.2.** *La norme vérifie les propriétés suivantes pour tous  $x, y \in \mathbb{E}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :*

- (a)  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .
- (b)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .
- (c)  $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Preuve.** Les deux premières propriétés suivent facilement des définitions. La troisième propriété est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Comme les normes de  $x$ ,  $y$  et  $x + y$  sont positives ou nulles, on peut prendre la racine carrée dans l'inégalité ci-dessus, ce qui nous donne  $\|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$ . □

**Définition.** Dans un espace vectoriel euclidien, on définit :

- (1.) La *distance* entre deux éléments  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{E}^n$  est

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

- (2.) L'*angle*  $\alpha \in [0, \pi]$  entre deux vecteurs non nuls  $x, y \in \mathbb{E}^n$  est défini par

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Cette notion est bien définie car d'une part  $\|x\|\|y\| \neq 0$  lorsque  $x$  et  $y$  sont non nuls et d'autre part on a

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq +1$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Notons que le produit scalaire est parfois défini géométriquement à partir de la notion d'angle via la formule

$$\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos(\alpha),$$

mais du point de vue de l'algèbre linéaire, c'est le produit scalaire qui est la notion de base et l'angle est une notion dérivée.

- (3.) L'*aire* du parallélogramme  $\mathcal{P}(x, y)$  construit sur les vecteurs  $x$  et  $y$  est définie par

$$\text{Aire}(\mathcal{P}(x, y)) = \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2}.$$

A nouveau, l'inégalité de Cauchy-Schwartz justifie aussi que  $\text{Aire}(\mathcal{P}(x, y))$  est bien définie. On vérifie d'autre part facilement que

$$\text{Aire}(\mathcal{P}(x, y)) = \|x\|\|y\| \sin(\alpha),$$

ce qui correspond à la définition de l'aire d'un parallélogramme comme le produit de la "base" par la "hauteur".

**Proposition 1.1.3.** *Tout espace vectoriel euclidien  $\mathbb{E}^n$  est un espace métrique pour la distance définie ci-dessus.*

**Preuve.** Nous devons vérifier que la distance  $d(x, y) = \|y - x\|$  vérifie les trois propriétés suivantes pour tous  $x, y, z \in \mathbb{E}^n$  :

- (i.)  $d(x, y) \geq 0$  et  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ .
- (ii.)  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- (iii.)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité du triangle).

Ces propriétés se déduisent très facilement de la proposition 1.1.2. Vérifions par exemple l'inégalité du triangle :

$$d(x, z) = \|z - x\| = \|(z - y) - (y - x)\| \leq \|(z - y)\| + \|(y - x)\| = d(x, y) + d(y, z).$$

□

**Proposition 1.1.4.** *Les conditions suivantes sont équivalentes pour deux vecteurs non nuls  $x, y \in \mathbb{E}^n$  :*

- (i)  $x \perp y$ , i.e.  $\langle x, y \rangle = 0$ .
- (ii) L'angle  $\theta$  entre  $x$  et  $y$  est égal à  $\frac{\pi}{2}$ .
- (iii) On a  $\|x + y\| = \|x - y\|$ .
- (iv) On a  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  (théorème de Pythagore).

**Preuve.** L'équivalence entre (i) et (ii) vient de

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

L'équivalence entre (i) et (iii) vient de

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

et celle entre (i) et (iv) de

$$2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

□

## 1.2 Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Dans ce bref paragraphe nous définissons la notion d'orientation d'un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réels. Rappelons que si  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sont deux bases d'un espace vectoriel  $V$ , alors on appelle *matrice de changement de base* de la base  $\{u_i\}$  vers la base  $\{v_j\}$  la matrice  $P = (p_{ij})$  définie par

$$v_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} u_i$$

**Définition.** On dit que deux bases  $\{u_1, \dots, u_n\}$  et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  d'un espace vectoriel réel ont la même orientation si le déterminant de la matrice de changement de base  $P$  est positif. Sinon on dit que les bases ont des orientations opposées.

Il n'est pas difficile de vérifier que "avoir la même orientation" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de  $V$ . De plus il existe exactement deux classes d'équivalences.

**Définition.** On appelle orientation de  $V$  le choix d'une classe d'équivalence pour cette relation. Un espace vectoriel réel orienté est un espace vectoriel muni du choix d'une orientation.

Une orientation de  $V$  est donc définie dès qu'on a choisi une base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  et qu'on la déclare d'orientation positive. Toute autre base est dite d'orientation positive si elle a la même orientation que  $\mathcal{B}$ ; on dit aussi que c'est une base directe. Une base est dite d'orientation négative si elle a l'orientation opposée à d'orientation positive si elle a la même orientation que  $\mathcal{B}$ ; on dit aussi que c'est une base indirecte.

Finalement, on dit qu'une application linéaire  $f : V \rightarrow V$  préserve l'orientation si son déterminant est positif et qu'elle inverse l'orientation si son déterminant est négatif. Noter que cette notion est indépendante du choix d'une orientation sur  $V$ . On note

$$\mathrm{GL}_+(V) = \{f \in \mathrm{GL}(V) \mid \det(f) > 0\},$$

c'est un sous-groupe du groupe linéaire général de  $V$ .

### 1.3 Similitudes et Isométries d'un espace vectoriel euclidien.

**Définition.** Un similitude de rapport  $\lambda > 0$  d'un espace vectoriel euclidien  $\mathbb{E}^n$  est une application bijective  $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  telle que

$$d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{E}^n.$$

Une isométrie de  $\mathbb{E}^n$  est une similitude de rapport 1. C'est donc une bijection qui respecte les distances.

Il est facile de vérifier à partir de cette définition que les similitudes de  $\mathbb{E}^n$  forment un groupe et les isométries forment un sous-groupe normal.

**Théorème 1.3.1.** L'application  $f : E \rightarrow E$  est une similitude de rapport  $\lambda$  si et seulement s'il existe un vecteur  $b \in \mathbb{E}^n$  et une application linéaire  $g : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  tels que  $f(x) = g(x) + b$  pour tout  $x \in \mathbb{E}^n$  et

$$\|g(x)\| = \lambda \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{E}^n.$$

On dit que  $g$  est la partie linéaire de l'isométrie  $f$  et  $b$  est le vecteur de translation de  $f$ . Remarquons que ce vecteur est donné par  $b = f(0)$ .

Pour la preuve de ce théorème, on a besoin du théorème suivant, que nous acceptons sans démonstration :

**Théorème 1.3.2.** (Théorème fondamental de la géométrie affine.) Pour une bijection  $f : V \rightarrow V$  d'un espace vectoriel réel de dimension finie  $V$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) L'image par  $f$  de toute droite affine est une droite affine.

(b)  $f$  est une application affine, i.e. il existe une application linéaire  $g : V \rightarrow V$  et un vecteur  $b \in V$  tels que  $f(x) = g(x) + b$  pour tout  $x \in V$ .

**Preuve du théorème 1.3.1.** La première étape est de prouver que l'image d'une droite affine par une isométrie  $f$  est une droite affine. De façon équivalente, il s'agit de vérifier que si  $x, y, z \in \mathbb{E}^n$  sont trois points alignés, alors  $f(x), f(y), f(z)$  sont également alignés. Or la condition pour que trois points soient alignés est que l'inégalité du triangle se réduise à une égalité, c'est-à-dire (quitte à renommer les points),

$$\|z - x\| = \|z - y\| + \|y - x\|,$$

ou si on préfère  $\|z - y\| + \|y - x\| - \|z - x\| = 0$ .

Puisque  $f$  est une similitude, on a

$$\|f(z) - f(y)\| + \|f(y) - f(x)\| - \|f(z) - f(x)\| = \lambda (\|z - y\| + \|y - x\| - \|z - x\|),$$

ce qui montre que  $x, y, z \in \mathbb{E}^n$  sont alignés si et seulement si  $f(x), f(y), f(z)$  sont alignés. Le théorème fondamental de la géométrie affine nous dit alors que  $f$  est une transformation affine, c'est-à-dire  $f(x) = g(x) + b$  avec  $g$  linéaire. L'application  $g$  est elle-même une similitude car

$$\|g(y) - g(x)\| = \|(f(y) - b) - (f(x) - b)\| = \|f(y) - f(x)\| = \lambda \|y - x\|$$

pour tous  $x, y \in \mathbb{E}^n$ . En particulier on a  $\|g(x)\| = \lambda \|x\|$  pour tout  $x \in \mathbb{E}^n$  (car  $g(0) = 0$ ). □

**Remarque.** La partie linéaire  $g$  d'une similitude  $f$  de rapport  $\lambda$  vérifie

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{E}^n.$$

En particulier, la partie linéaire d'une isométrie (cas  $\lambda = 1$ ) respecte le produit scalaire. Cela découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \langle g(x), g(y) \rangle &= \frac{1}{4} (\|g(x) + g(y)\|^2 - \|g(x) - g(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|g(x + y)\|^2 - \|g(x - y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\lambda^2 \|x + y\|^2 - \lambda^2 \|x - y\|^2) \\ &= \lambda^2 \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.3.3.** Une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une isométrie pour le produit scalaire standard de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si on a

$$f(x) = Ax + b,$$

où  $b = f(0) \in \mathbb{R}^n$  et  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  est une matrice vérifiant  $A^\top A = I_n$ .



**Preuve.** Par définition du produit scalaire standard de  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

où  $\{e_1, \dots, e_n\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  (cette relation exprime que la base canonique est une base orthonormée).

D'autre part  $Ae_r = \sum_{i=1}^n a_{ir}e_i$  et  $Ae_s = \sum_{j=1}^n a_{js}e_j$ , par conséquent :

$$\delta_{rs} = \langle e_r, e_s \rangle = \langle Ae_r, Ae_s \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_{ir}e_i, \sum_{j=1}^n a_{js}e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ir}a_{js}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ir}a_{is} = \left( A^\top A \right)_{rs}.$$

Ce qui prouve que  $A^\top A = I_n$ .

□

## 1.4 Le groupe orthogonal

Le résultat précédent justifie la définition importante suivante :

**Définition 1.4.1.** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est *orthogonale* si  $A^\top A = I_n$ . L'ensemble des  $n \times n$  matrices orthogonales se note

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n\}$$

**Proposition 1.4.2.** Pour toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A \in O(n)$ , c'est-à-dire  $A^\top A = I_n$ .
- (ii)  $A$  est inversible et  $A^{-1} = A^\top$ .
- (iii)  $\|Ax\| = \|x\|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (iv)  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
- (v) Les colonnes de  $A$  forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .
- (vi) Les lignes de  $A$  forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .
- (vii) Pour tout vecteur  $b \in \mathbb{R}^n$ , l'application affine  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $f(x) = Ax + b$  est une isométrie.

De plus  $O(n)$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $A \in O(n)$  on a  $\det(A) = \pm 1$ .

Dans cette proposition, le produit scalaire est le produits scalaire standard de  $\mathbb{R}^n$  et la norme et la distance sont associées à ce produit scalaire. Nous laissons la preuve de cette proposition en exercice.

Remarquons que l'application déterminant définit un homomorphisme de groupes

$$\det : O(n) \rightarrow \{\pm 1\},$$

le noyau de cet homomorphisme est le *groupe spécial orthogonal* :

$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^\top A = I_n \text{ et } \det(A) = +1\}.$$

La proposition suivante décrit les  $2 \times 2$  matrices orthogonales.

**Proposition 1.4.3.** Pour toute matrice  $A \in O(2)$ , il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ si } \det(A) = +1,$$

et

$$A = S_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ si } \det(A) = -1.$$

La matrice  $R_\theta$  représente une rotation d'angle  $\theta$  et  $S_{\theta/2}$  représente la réflexion à travers la droite vectorielle formant un angle  $\theta/2$  avec le premier vecteur  $e_1$  de la base canonique.

**Preuve.** Les colonnes d'une matrices orthogonale  $A \in O(2)$  doivent former une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$ . Il existe donc  $\theta \in (-\pi, \pi]$  tel que la première colonne s'écrive  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ . La deuxième colonnes de  $A$  doit-être un vecteur de norme 1 orthogonal à la première colonne, c'est-à dire  $\pm \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$ . Ceci démontre que ou bien  $A = R_\theta$  ou bien  $A = S_{\theta/2}$ .

$\theta$  et  $S_{\theta/2}$  est une symétrie car cette matrice possède deux vecteurs propres orthogonaux de valeurs propre  $+1$  et  $-1$  respectivement. Ces vecteurs propres sont

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Nous laissons la vérification de ces deux dernières affirmations en exercice. □

## 1.5 Un théorème d'Euler

Le théorème d'Euler décrit les isométries directes fixant un point dans l'espace à trois dimensions.

**Théorème. (Théorème d'Euler)** Toute isométrie directe  $f : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  fixant un point est l'identité ou une rotation autour d'un axe passant par ce point.

**Preuve.** On peut supposer que  $f$  fixe l'origine  $O$ . Alors  $f$  est une transformation linéaire. On a  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ . On sait également que  $A \in SO(3)$  (c'est-à-dire  $A^\top A = \mathbf{I}$  et  $\det(A) = +1$ ). Pour montrer qu'il existe un axe, il suffit de montrer qu'il existe un vecteur propre de valeur propre  $\lambda = 1$ . En effet, s'il existe un vecteur non nul  $\mathbf{a}$  tel que  $A\mathbf{a} = \mathbf{a}$ , alors la droite  $\mathbb{R}\mathbf{a}$  est fixe pour la transformation  $f$  (c'est donc un axe pour  $f$ ) car

$$f(t\mathbf{a}) = A(t\mathbf{a}) = tA(\mathbf{a}) = t\mathbf{a}$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Pour montrer que 1 est une valeur propre de  $A$ , il faut montrer que

$$\det(A - \mathbf{I}) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \det(A - \mathbf{I}) &= \underbrace{\det(A^\top)}_{=1} \det(A - \mathbf{I}) = \det(A^\top (A - \mathbf{I})) \\ &= \det(A^\top A - A^\top) = \det(\mathbf{I} - A^\top) = \det(\mathbf{I} - A). \end{aligned}$$

Or, comme  $(A - \mathbf{I})$  est une matrice  $3 \times 3$ , on a  $\det(A - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{I} - A)$ , donc

$$\det(\mathbf{I} - A) = -\det(\mathbf{I} - A).$$

Il en résulte que  $\det(\mathbf{I} - A) = 0$ .

Il faut encore prouver que  $f$  est bien une rotation autour de l'axe  $\mathbb{R}\mathbf{a}$ .

Prenons pour cela un vecteur  $\mathbf{u}_1$  de longueur 1 et perpendiculaire à  $\mathbf{a}$  et notons  $\mathbf{u}_2 := \mathbf{a} \times \mathbf{u}_1$ .

Observons que  $A\mathbf{u}_1$  et  $A\mathbf{u}_2$  sont aussi orthogonaux à l'axe car

$$\langle A\mathbf{u}_i, \mathbf{a} \rangle = \langle A\mathbf{u}_i, A\mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{a} \rangle = 0.$$

Ceci implique que les vecteurs  $A\mathbf{u}_1$  et  $A\mathbf{u}_2$  sont des combinaisons linéaires de  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$ , et comme ces vecteurs sont aussi de longueur 1 et orthogonaux, on a

$$A\mathbf{u}_1 = \cos(\theta)\mathbf{u}_1 + \sin(\theta)\mathbf{u}_2,$$

$$A\mathbf{u}_2 = -\sin(\theta)\mathbf{u}_1 + \cos(\theta)\mathbf{u}_2$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{u}_1$  et  $A\mathbf{u}_1$ .

La matrice de la transformation linéaire  $A$  dans la base orthonormée  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{a}$  est donc la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et il s'agit bien d'une rotation autour de l'axe  $\mathbb{R}\mathbf{a}$ .

□

Rappelons que la *trace* d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux. On prouve dans le cours d'algèbre linéaire que deux matrices semblables ont la même trace. Donc la trace de  $A$  dans la base originale coïncide avec la trace de  $A$  dans la base  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{a}$ . Cette trace vaut donc  $1 + 2\cos(\theta)$ ; on a prouvé le résultat suivant.

**Proposition** *L'angle  $\theta$  d'une rotation  $A \in SO(3)$  est donné par l'équation*

$$\text{trace}(A) = 1 + 2\cos(\theta).$$

Certaines matrices de rotation sont très simples. Par exemple la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Ox$  est donnée par la matrice

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oy$  est donnée par la matrice

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(observer la place du signe  $-$  dans cette matrice!).

Finalement, la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oz$  est donnée par la matrice

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on effectue une rotation d'angle  $\varphi$  autour de l'axe  $Oz$ , puis une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oy$  et enfin une rotation d'angle  $\psi$  de nouveau autour de l'axe  $Oz$ , on obtient une matrice

$$A = R_z(\psi) \circ R_y(\theta) \circ R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) - \sin(\psi) \sin(\phi) & -\cos(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) - \sin(\psi) \cos(\phi) & \cos(\psi) \sin(\theta) \\ \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi) + \cos(\psi) \sin(\phi) & -\sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\phi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Toute matrice de rotation dans  $\mathbb{R}^3$  s'obtient de cette manière (avec  $0 \leq \psi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta < \pi$  et  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ). Les angles  $\psi, \theta, \varphi$  s'appellent les *angles d'Euler* de la rotation  $A$ .

## 1.6 Géométrie vectorielle dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{E}^3$

Soit  $\mathbb{E}^3$  un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. On appelle *produit vectoriel* de deux vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^3$  le vecteur  $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbb{E}^3$  vérifiant les conditions géométriques suivantes :

- (i)  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}$  et  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \perp \mathbf{y}$ .
- (ii)  $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \text{aire}(\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ , où  $\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est le parallélogramme construit sur les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .
- (iii) Si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont linéairement indépendants, alors  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}\}$  est une base directe de  $\mathbb{E}^3$ .

La proposition suivante justifie cette définition :

**Proposition 1.6.1.** *Le produit vectoriel est uniquement défini par les trois conditions ci-dessus. De plus, si  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{E}^3$ , alors le produit vectoriel de  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$  et  $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$  se calcule par la formule suivante :*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3. \quad (1.1)$$

**Preuve.** Si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont linéairement dépendants, alors  $\text{aire}(\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0$ , par conséquent  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$  doit être le vecteur nul, et on vérifie facilement que dans ce cas le membre de droite de (1.1) est en effet nul. Lorsque  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont linéairement indépendants, l'ensemble des vecteurs qui sont à la fois orthogonaux à  $\mathbf{x}$  et à  $\mathbf{y}$  est un sous-espace vectoriel de dimension 1. Ce sous-espace contient exactement deux vecteurs dont la norme est égale à  $\text{aire}(\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ , et pour un seul de ces deux vecteurs, que l'on notera  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ , la base  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}\}$  est d'orientation positive.

Nous devons maintenant prouver que le produit vectoriel est donné par la formule (1.1). Cela demande un peu de calcul. Notons

$$\mathbf{z} = (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{e}_3,$$

et observons pour commencer que

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = (x_2y_3 - x_3y_2)x_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)x_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)x_3 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

De même  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = 0$ , ce qui montre que  $\mathbf{z}$  est orthogonal à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . Pour montrer la propriété (ii), on calcule le carré de la norme<sup>1</sup> de  $\mathbf{z}$ , et on en réorganise les termes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|^2 &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= \sum_{i \neq j} x_i^2 y_j^2 - 2 \sum_{i < j} x_i x_j y_i y_j \\ &= \sum_{i,j} x_i^2 y_j^2 - \left( \sum_i x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i y_i x_j y_j \right) \\ &= \left( \sum_i x_i^2 \right) \left( \sum_j y_j^2 \right) - \left( \sum_i x_i y_i \right)^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \\ &= \text{aire}(\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2. \end{aligned}$$

Finalement, pour prouver (iii) on remarque que si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont linéairement indépendants, alors  $\mathbf{z}$  est non nul et donc

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} &= (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 \\ &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \|\mathbf{z}\|^2 > 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}\}$  est une base directe. □

**Remarque.** Le produit vectoriel peut aussi s'écrire

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3,$$

---

1. Il est souvent plus commode de calculer le carré d'une norme que la norme elle-même.

que l'on écrit aussi parfois sous la forme d'un “déterminant formel”

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \mathbf{e}_1 \\ x_2 & y_2 & \mathbf{e}_2 \\ x_3 & y_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}.$$

Observons aussi que le produit vectoriel définit une application bilinéaire antisymétrique  $\times : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ .

**Définition.** On appelle *produit mixte* de trois vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}^3$ , le produit scalaire

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}] = \langle \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle.$$

Il est clair à partir de la formule (1.1) que dans une base orthonormée directe, le produit mixte est donné par le déterminant suivant :

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Cette quantité représente le *volume orienté* du parallélépipède  $\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w})$  construit sur les trois vecteurs.

## 1.7 Géométrie vectorielle dans le plan euclidien orienté $\mathbb{E}^2$

Dans ce paragraphe et le suivant nous travaillons dans un espace vectoriel euclidien  $\mathbb{E}^2$  muni d'une orientation ; on se donne également une base orthonormée directe (i.e. d'orientation positive)  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ .

Par définition les vecteurs  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$ , forment une autre base directe de  $\mathbb{E}^2$  si et seulement si  $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$ . Ils forment une base d'orientation négative si  $a_1b_2 - a_2b_1 < 0$ .

### L'opérateur $\mathbf{J}$

On note  $\mathbf{J} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  l'application linéaire qui est donnée dans une base orthonormée directe par  $\mathbf{J}(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) = -v_2\mathbf{e}_1 + v_1\mathbf{e}_2$ . Sa matrice est donc

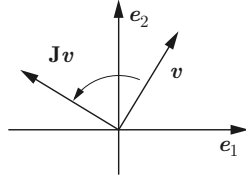
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cet opérateur  $\mathbf{J}$  est caractérisée par les propriétés suivantes :

- (i)  $\|\mathbf{J}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  (en particulier  $\mathbf{J}(0) = 0$ ),
- (ii)  $\mathbf{J}\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$ ,
- (iii) Si  $\mathbf{v} \neq 0$ , alors  $\{\mathbf{v}, \mathbf{J}\mathbf{v}\}$  est une base d'orientation positive.

En particulier,  $\mathbf{J}$  ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie (mais cet opérateur dépend de l'orientation de  $\mathbb{E}^2$ .)

Géométriquement, l'opérateur  $\mathbf{J}$  est la rotation qui fait tourner le vecteur  $\mathbf{v}$  d'un quart de tour dans le sens positif.



**Définition.** Le *produit extérieur* de deux vecteurs  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^2$  est le scalaire  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R}$  défini par

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle \mathbf{J}(\mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle.$$

Dans une base orthonormée directe  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , le produit extérieur de  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$  est donné par

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle -a_2\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_2, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 \rangle = a_1b_2 - a_2b_1,$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Noter aussi que

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de ces formules :

**Proposition 1.7.1.** *Le produit extérieur vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) *Le produit extérieur est bilinéaire et antisymétrique.*
- (ii)  *$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$  si et seulement si  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont colinéaires.*
- (iii)  *$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = \text{aire}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ .*
- (iv)  *$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$  et on a égalité si et seulement si  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$*
- (v)  *$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} > 0$  si et seulement si  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  est une base directe de  $\mathbb{E}^2$ .*

On définit alors l'*angle orienté*  $\theta_{\text{or}} \in (-\pi, \pi]$  entre deux vecteurs non nuls  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2\}$  de  $\mathbb{E}^2$  par

$$\theta_{\text{or}} = \begin{cases} \angle(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2), & \text{si } \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \geq 0, \\ -\angle(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2), & \text{si } \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} < 0. \end{cases}$$

où  $\angle(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2) \in [0, \pi]$  est l'angle non orienté. Ainsi l'angle orienté entre  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  est négatif si et seulement si ces deux vecteurs forment une base d'orientation négative (et dans ce cas le signe du sinus de l'angle orienté est négatif). L'angle orienté est complètement déterminé par les formules :

$$\cos(\theta_{\text{or}}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}, \quad \sin(\theta_{\text{or}}) = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

De la même manière, on définit l'*aire orientée* du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2\} \in \mathbb{E}^2$  par

$$\text{aire}_{\text{or}}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \begin{cases} \text{aire}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})), & \text{si } \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \geq 0, \\ -\text{aire}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})), & \text{si } \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} < 0. \end{cases}$$

On voit donc que

$$\text{aire}_{\text{or}}(\mathcal{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin(\theta_{\text{or}}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.$$

# Espaces vectoriels pseudo-euclidiens

## 1.8 Formes quadratiques sur un espace vectoriel réel, théorème de Sylvester.

Soit  $Q$  une forme quadratique sur un espace vectoriel réel de dimension finie  $V$ . Le théorème 10.4.2 nous dit qu'il existe une base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $V$  qui est orthogonale pour  $Q$ . Dans cette base on a

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \Rightarrow \quad Q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2.$$

Il est habituel de noter  $p$  le nombre de coefficients  $\alpha_i$  qui sont positifs et  $q$  le nombre de coefficients  $\alpha_i$  qui sont négatifs.

**Définition 1.8.1.** (1) Le couple  $(p, q)$  s'appelle la *signature*<sup>2</sup> de  $Q$ .

(2) La somme  $r = p + q$  s'appelle le *rang* de  $Q$ .

(3) La forme quadratique  $Q$  est *non dégénérée* si  $r = \dim(V)$ .

(4)  $Q$  est *positive* si  $q = 0$  et *négative* si  $p = 0$ .

(5) La forme quadratique  $Q$  est *définie positive* si elle est positive et non dégénérée.

(6)  $Q$  est *définie négative* si elle est négative et non dégénérée.

**Remarques. 1.** Une notation utile est la suivante : On dit que  $Q > 0$  sur le sous-espace vectoriel  $W \subset V$  si la restriction de  $Q$  à  $W$  est définie positive, c'est-à-dire  $Q(x) > 0$  pour tout  $x \in W \setminus \{0\}$ . On dira dans ce cas que le sous-espace vectoriel  $W$  est défini positif pour  $Q$ . De même on dit  $Q < 0$  si  $(-Q) > 0$  sur  $W$ .

**2.** On dit aussi que  $Q$  est *semi-définie positive* (resp. *semi-définie négative*) si  $Q(x) \geq 0$  pour tout  $x \in V$  (respectivement  $Q(x) \leq 0$  pour tout  $x \in V$ ). Il est clair qu'une forme quadratique de signature  $(p, q)$  est semi-définie positive si et seulement si  $q = 0$  et semi-définie négative si et seulement si  $p = 0$ .

Le résultat suivant justifie ces définitions.

**Théorème 1.8.2** (Théorème d'inertie de Sylvester). *La signature  $(p, q)$  ne dépend que de la forme quadratique  $Q$  et non de la base choisie. Plus précisément, nous avons la caractérisation suivante de la signature :*

(i)  *$p$  est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de  $V$  sur lequel  $Q$  est définie positive.*

---

2. ne pas confondre avec la signature d'une permutation



(ii)  $q$  est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de  $V$  sur lequel  $Q$  est définie négative.

**Preuve.** Nous allons démontrer que le coefficient  $p$  est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel sur lequel  $Q$  est définie positive. Observons tout d'abord que, quitte à permuter les vecteurs de la base orthogonale, on peut supposer que

$$\begin{cases} \alpha_i > 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq p, \\ \alpha_i < 0 & \text{pour } p < i \leq r = p + q, \\ \alpha_i = 0 & \text{pour } i > r. \end{cases}$$

Dans cette base on peut écrire

$$Q(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i^2 - \sum_{j=p+1}^r |\alpha_j| x_j^2.$$

Soit maintenant  $W \subset V$  un sous-espace vectoriel de dimension maximale tel que la forme quadratique  $Q$  restreinte à  $W$  est définie positive. Il est clair que  $\dim(W) \geq p$  car la restriction de  $Q$  au sous-espace  $\text{Vec}\{v_1, \dots, v_p\}$  est définie positive.

Nous allons prouver par l'absurde que  $\dim(W) = p$ . Supposons par l'absurde que  $\dim(W) > p$  et notons  $U = \text{Vec}\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$ . Alors  $\dim(U) = n - p$  et donc  $\dim(W \cap U) > 0$  car

$$\dim(W \cap U) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(W + U) > p + (n - p) - n = 0$$

(on utilise que  $\dim(W + U) \leq n$  puisque  $W + U \subset V$ ). Il existe donc un vecteur non nul  $x \in W \cap U$ , mais ceci est impossible car

$$x \in W \setminus \{0\} \Rightarrow Q(x) > 0 \quad \text{et} \quad x \in U \Rightarrow Q(x) \leq 0.$$

(rappelons que par hypothèse  $Q$  est définie positive sur  $W$ ). Cette contradiction montre que

$$p = \max\{\dim(W) \mid W \subset V \text{ est un sous-espace vectoriel tel que } Q > 0 \text{ sur } W\}.$$

Un argument similaire montre que  $q$  est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel sur lequel  $Q < 0$ . On a ainsi obtenu une caractérisation de la signature  $(p, q)$  d'une forme quadratique qui ne dépend pas du choix d'une base orthogonale, ce qui prouve le théorème de Sylvester.  $\square$

**Remarque.** Observons que la forme bilinéaire  $Q$  est définie positive (i.e. de signature  $(n, 0)$ ) si et seulement si la forme bilinéaire associée est un produit scalaire. La norme associée à ce produit scalaire est alors  $\|x\| = \sqrt{Q(x)}$ .

Du point de vue matriciel, le théorème de Sylvester s'énonce ainsi :

**Corollaire 1.8.3.** *Toute matrice symétrique  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est congruente à une matrice diagonale de type*

$$H_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Les nombres  $(p, q)$  ne dépendent que de  $A$  et non de la base orthogonale choisie.*

**Définition** Le couple  $(p, q)$  s'appelle alors la *signature*  $(p, q)$  de la matrice symétrique  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On dit que la matrice  $A$  est *définie positive* si  $(p, q) = (n, 0)$ .

**Preuve.** Notons  $\beta$  la forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice de Gram est  $A$ . On peut choisir une base orthogonale  $\{v_1, \dots, v_n\}$  pour  $\beta$  telle que  $\beta(v_i, v_j) = 0$  si  $i \neq j$  et

$$\beta(v_i, v_i) > 0, \quad \beta(v_j, v_j) < 0, \quad \beta(v_k, v_k) = 0,$$

pour  $1 \leq i \leq p < j \leq (p+q) < k \leq n$ . On définit alors une nouvelle base  $\{w_1, \dots, w_n\}$  par

$$w_i = \frac{v_i}{\sqrt{\beta(v_i, v_i)}}, \quad w_j = \frac{v_j}{\sqrt{-\beta(v_j, v_j)}}, \quad w_k = v_k,$$

(avec  $1 \leq i \leq p < j \leq (p+q) < k \leq n$ ). Il est facile de vérifier que la matrice de  $\beta$  dans cette base est la matrice  $H_{p,q}$ . □

**Définition 1.8.4.** Soit  $g$  une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel  $V$  de dimension  $n$ . On dit qu'une base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $V$  est une *base de Sylvester*, ou une *base orthonormale généralisée* si

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} +1, & \text{si } 1 \leq i = j \leq p \\ -1, & \text{si } p+1 \leq i = j \leq p+q \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $(p, q)$  est la signature de  $g$ .

Le corollaire 1.8.3 nous garantit l'existence d'une base de Sylvester (non unique) pour toute forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie.

**Proposition 1.8.5.** (i) Deux matrices symétriques réelles  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  sont congruentes si et seulement si elles ont la même signature.

(ii) Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique de signature  $(p, q)$ , alors  $p$  est le nombre de valeurs propres strictement positives de  $A$  comptées avec multiplicités et  $q$  est le nombre de valeurs propres strictement négatives comptées avec multiplicités.

(iii) Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique de signature  $(p, q)$ , alors  $(-1)^q \det(A) \geq 0$ .

**Preuve.** (i) L'affirmation découle du fait que toute matrice symétrique  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est congruente à sa forme de Sylvester et que la congruence est une relation d'équivalence.

(ii) Par le théorème spectral on sait que toute matrice symétrique  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est orthogonalement diagonalisable, donc à la fois semblable et congruente à une matrice diagonale  $D$  qui contient les valeurs propres de  $A$ , répétées autant de fois que leur multiplicité.

(iii) Découle immédiatement du point (ii) car le déterminant de  $A$  est le produit des valeurs propres de  $A$  (comptées avec leur multiplicités).

Pour les points (ii) et (iii) on garde à l'esprit que pour une matrice réelle symétrique, la multiplicité géométrique de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique. □

Rappelons que pour une matrice réelle symétrique, la multiplicité géométrique de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique.

Voici un exemple pour le point (ii) de cette proposition. Considérons la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est  $\chi_A(t) = (t-7)^2(t+2)$ , en particulier  $\det(A) \neq 0$  et donc  $A$  est de rang 3. Les valeurs propres sont  $+7$  avec multiplicité 2 et  $-2$  avec multiplicité 1. La signature de  $A$  est donc  $(p, q) = (2, 1)$ . En particulier  $A$  n'est pas définie positive.

**Corollaire 1.8.6.** *Soit  $g$  une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie. Supposons que la restriction de  $g$  à un hyperplan  $W \subset V$  est définie positif. Notons  $G$  la matrice de Gram de  $g$  pour une base quelconque de  $V$ . Alors on a*

- (i)  *$g$  est de signature  $(n, 0)$  (donc définie positive) sur  $V$  si et seulement si  $\det(G) > 0$ .*
- (ii)  *$g$  est de signature  $(n-1, 1)$  si et seulement si  $\det(G) < 0$ .*
- (iii)  *$g$  est de signature  $(n-1, 0)$  si et seulement si  $\det(G) = 0$ .*

Ce résultat nous permet d'établir le critère suivant pour déterminer si une matrice est définie positive :

**Corollaire 1.8.7** (Critère de Sylvester). *Une matrice symétrique  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  est définie positive si et seulement si tous ses déterminants mineurs principaux sont positifs.*

Rappelons qu'on appelle *déterminant mineur* d'une matrice  $A$  tout déterminant d'une sous-matrice carrée de  $A$ . Les mineurs principaux sont les déterminants  $\det(A_k)$  où  $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k} \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Exemple.** Considérons la matrice  $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & x & 4 \end{pmatrix}$ . Nous avons les déterminants mineurs

$$\det(2) = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & x & 4 \end{pmatrix} = -2x^2 + 2x + 10.$$

La matrice  $A$  est donc définie positive si et seulement si  $x^2 - x - 5 < 0$ .

**Démonstration du Corollaire 1.8.7.** Supposons que la matrice symétrique  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est définie positive. Alors la forme bilinéaire  $g$  de matrice  $A$ , c'est-à-dire  $g(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ , est définie positive, de même que sa restriction à tout sous-espace vectoriel. En particulier la restriction de  $g$  au sous-espace  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}$  est définie positive. Mais il est clair que la matrice de Gram de cette restriction pour la base  $\{e_1, \dots, e_k\}$  est la sous-matrice  $A_k$ . Par conséquent nous avons  $\det(A_k) > 0$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$ .

La preuve de la réciproque se fait par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , alors  $A = (a)$  est une matrice de taille  $1 \times 1$  et il est clair qu'elle est définie positive si et seulement si  $a = \det(A) > 0$ .

Supposons le corollaire démontré pour les matrices de taille  $(n-1) \times (n-1)$  et considérons une matrice  $A$  symétrique de taille  $n \times n$  vérifiant le critère de Sylvester. Notons  $g$  la forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^n$  de matrice  $A$ , alors on sait par hypothèse de récurrence que la restriction de  $g$  au sous-espace  $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  est définie positive (on identifie ici  $\mathbb{R}^{n-1}$  au sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  dont la dernière coordonnée est nulle). On conclut par le corollaire 1.8.6 que  $g$  est de signature  $(n, 0)$ , donc définie positive sur  $\mathbb{R}^n$  puisque  $\det(A) > 0$ .

□

## 1.9 Espaces pseudo-euclidiens

**Définitions. 1.** On appelle *espace vectoriel pseudo-euclidien* un espace vectoriel  $V$  sur le corps  $\mathbb{R}$  de dimension finie muni d'une forme quadratique  $Q$  non dégénérée. L'espace  $(V, Q)$  est dit *euclidien* si  $Q$  est définie positive (i.e.  $Q(x) > 0$  pour tout  $x \in V$  non nul).

**2.** Une application affine  $f : V_1 \rightarrow V_2$  entre deux espaces pseudo-euclidiens  $(V_1, Q_1)$  et  $(V_2, Q_2)$  est une *isométrie* si pour tous  $x, y \in V_1$  on a

$$Q_2(f(y) - f(x)) = Q_1(y - x).$$

Lorsque  $f$  est linéaire, cette condition peut s'écrire  $Q_1 = Q_2 \circ f$ , c'est-à-dire  $Q_2(f(x)) = Q_1(x)$  pour tout  $x \in V_1$ .

**Remarque.** Lorsque  $(V, Q)$  est euclidien, on a les notions de norme d'un vecteur  $\|x\| = \sqrt{Q(x)}$  et de distance  $d(x, y) = \|y - x\|$  entre deux points. Une isométrie entre deux espaces euclidiens est une bijection qui respecte les distances. Dans le cas général  $Q(x)$  n'est pas forcément positif, toutefois même lorsqu'il n'y a pas de norme ou de distance associée à une forme quadratique, celle-ci peut représenter des quantités géométriques intéressantes. Lorsque deux espaces pseudo-euclidiens sont isométriques, on considère que leurs géométries sont équivalentes (par exemple tous les espaces euclidiens de même dimension sont isométriques, leur géométrie sont donc équivalentes à celle de l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire standard).

Les développements du chapitre 10 nous ont appris qu'il y a équivalence entre les trois points de vues suivants :

- (1) La théorie des espaces pseudo-euclidiens.
- (2) La théorie des formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel réel de dimension finie.
- (3) La théorie des matrices carrées symétriques à coefficients réels de déterminant non nul.

Rappelons ces équivalences :

- Si  $Q$  est une forme quadratique sur  $V$ , alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique, que l'on notera par  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $Q(x) = g(x, x)$  pour tout  $x \in V$ . Cette forme bilinéaire est donnée par la formule de polarisation

$$g(x, y) = \frac{1}{4} (Q(x + y) - Q(x - y)).$$

- Si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est une base de  $V$ , alors la *matrice de Gram* de  $Q$  (ou de  $g$ ) dans cette base est la matrice  $G \in M_n(\mathbb{R})$  définie par

$$G = (g_{ij}), \quad \text{avec } g_{ij} = g(v_i, v_j).$$

Cette matrice est clairement symétrique, i.e.  $G^\top = G$  car  $g_{ji} = g(v_j, v_i) = g(v_i, v_j) = g_{ij}$ . La matrice de Gram est donc déterminée par  $g$ .

- Inversement on peut calculer  $g(x, y)$  à partir de la formule

$$g(x, y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j = X^\top G Y$$

où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les composantes de  $x$  dans la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  (c'est-à-dire  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ ) et  $X \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur-colonne de  $\mathbb{R}^n$  associé, (de même pour  $(y_1, \dots, y_n)$  et  $Y$ ).

- La condition de non dégénérescence de  $Q$  (ou de  $g$ ) signifie que pour tout  $x \in V \setminus \{0\}$  on peut trouver  $y \in V$  tel que  $g(x, y) \neq 0$ .
- Il est facile de vérifier que  $g$  est non dégénéré si et seulement  $\det(G) \neq 0$ , i.e. la matrice de Gram  $G$  est inversible.

Nous avons alors le résultat suivant :

**Proposition 1.9.1.** *Soient  $(V_1, Q_1)$  et  $(V_2, Q_2)$  deux espaces pseudo-euclidiens de dimension  $n$  et  $f : V_1 \rightarrow V_2$  un isomorphisme linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$f$  est une isométrie, i.e.  $Q_2 \circ f = Q_1$ .*
- (2)  *$g_2(f(x), f(y)) = g_1(x, y)$  pour tous  $x, y \in V_1$ , où  $g_i$  est la forme bilinéaire associée à  $Q_i$  (pour  $i = 1, 2$ ).*
- (3) *Les matrices de Gram de  $g_1$  et  $g_2$  dans des bases  $\mathcal{B}_1 \subset V_1$  et  $\mathcal{B}_2 \subset V_2$  sont reliées par*

$$G_1 = A^\top G_2 A,$$

où  $A = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f)$  est la matrice de  $f$  dans ces bases. En particulier les matrices  $G_1$  et  $G_2$  sont congruentes et la congruence est réalisée par la matrice de l'endomorphisme  $f$ .

La preuve est un simple exercice.

**Remarque.** Lorsque  $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 =$  la base canonique, la formule de congruence est évidente car

$$g_2(f(X), f(Y)) = (AX)^\top G_2 AX = X^\top (A^\top G_2 A) Y = X^\top G_1 Y.$$

Si  $(V, Q)$  est un espace pseudo-euclidien, l'ensemble des isométries linéaires de  $V$  dans lui-même forme un groupe, que l'on appelle le *groupe orthogonal de  $Q$* . On le note

$$O(Q) = \{f \in GL(V) \mid Q \circ f = Q\}.$$

Dans le cas où  $V = \mathbb{R}^n$  on peut identifier tout endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  avec sa matrice  $A$  dans la base canonique. On peut donc écrire

$$O(Q) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^\top G A = G\}.$$

Le *groupe spécial orthogonal de  $Q$*  est le sous-groupe

$$SO(Q) = O(Q) \cap SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^\top G A = G \text{ et } \det(A) = 1\}.$$

## 1.10 Base de Sylvester et espaces pseudo-euclidiens modèles.

Rappelons qu'une base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  d'un espace vectoriel pseudo-euclidien  $(V, Q)$  est une *base de Sylvester* (ou une base *orthonormée généralisée*) si  $Q(v_i) = \pm 1$  pour tout  $i$  et  $v_i \perp_Q v_j$  si  $i \neq j$ . Le théorème de Sylvester nous dit que tout espace vectoriel pseudo-euclidien admet des bases de Sylvester. De plus le nombre  $p$  d'éléments de la base tels que  $Q(v_i) = +1$  et le nombre  $q$  d'éléments tels que  $Q(v_j) = -1$  ne dépendent pas de la base choisie. Le couple  $(p, q)$  est la *signature* de la forme quadratique  $Q$  et nous avons  $p + q = n$  car  $Q$  est supposée non dégénérée. Il suit du théorème de Sylvester que tout espace pseudo-euclidien est isométrique à l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  muni de la forme quadratique standard de signature  $(p, q) = (p, n - p)$  :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=p+1}^n x_j^2.$$

On note  $\mathbb{E}^{p,q}$  cet espace et on considère que c'est l'*espace pseudo-euclidien modèle* (ou standard) de signature  $(p, q)$ . La forme bilinéaire symétrique associée est

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{j=p+1}^n x_j y_j,$$

et la matrice de Gram dans la base canonique est la matrice

$$H_{p,q} = I_p \oplus (-I_q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

c'est-à-dire

$$H_{p,q} = (\eta_{ij}), \quad \text{avec} \quad \eta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq p, \\ -1 & \text{si } i = j > p, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (1.3)$$

(*symbole de Kronecker généralisé* de signature  $(p, q)$ ). Remarquons que  $\mathbb{E}^{n,0}$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire standard, on le note simplement  $\mathbb{E}^n$ .

Le groupe des isométries linéaires de  $\mathbb{E}^{p,q}$  se note  $O(p, q)$  :

$$O(p, q) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^\top H_{p,q} A = H_{p,q}\}.$$

Le sous-groupe des isométries de déterminant 1 est

$$SO(p, q) = O(p, q) \cap SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in O(p, q) \mid \det A = +1\}.$$

## 1.11 Indicatrices et cône isotrope

**Définition.** Soit  $(V, Q)$  un espace pseudo-euclidien.

(1) On appelle *cône isotrope* de  $(V, Q)$  l'ensemble des vecteurs isotropes. On le note

$$S_0(V, Q) = \{x \in V \mid Q(x) = 0\}.$$

(2) On appelle *indatrice positive* de  $(V, Q)$  l'ensemble

$$S_+(V, Q) = \{x \in V \mid Q(x) = 1\}.$$

(3) L'*indatrice négative* de  $(V, Q)$  est l'ensemble

$$S_-(V, Q) = \{x \in V \mid Q(x) = -1\}.$$

**Remarques.**

- (1) Le cône isotrope et les indicatrices ne sont pas des sous-espaces vectoriels de  $V$ .
- (2) Si  $x \in S_0(V, Q)$ , alors  $\lambda x \in S_0(V, Q)$  pour tous  $\lambda \neq 0$ .
- (3) Si  $x \in S_+(V, Q)$ , alors  $\lambda x \in S_+(V, Q)$  si et seulement si  $\lambda = \pm 1$ . La même propriété est vraie pour  $S_-(V, Q)$ .
- (4) Les ensembles  $S_0(V, Q)$ ,  $S_+(V, Q)$  et  $S_-(V, Q)$  déterminent complètement la forme quadratique  $Q$ , i.e. si  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux formes quadratiques telles que

$$S_0(V, Q_1) = S_0(V, Q_2), \quad S_+(V, Q_1) = S_+(V, Q_2), \quad S_-(V, Q_1) = S_-(V, Q_2),$$

alors  $Q_1 = Q_2$ .

- (5) Les ensembles  $S_0(V, Q)$ ,  $S_+(V, Q)$  et  $S_-(V, Q)$  sont invariants par l'action du groupe  $O(Q)$ , c'est-à-dire que si  $f \in O(Q)$ , alors  $x \in S_+(V, Q)$  si et seulement si  $f(x) \in S_+(V, Q)$ .

**Exemples.**

- (1) Pour le plan euclidien, on a  $S_-(\mathbb{E}^2) = \emptyset$ ,  $S_0(\mathbb{E}^2) = \{0\}$  et  $S_+(\mathbb{E}^2)$  est le cercle unité.
- (2) Plus généralement l'indatrice  $S_+$  d'un espace euclidien  $\mathbb{E}^n$  est la *sphère unité*; c'est l'ensemble des points de  $\mathbb{E}^n$  dont la distance à l'origine 0 est égale à 1. L'indatrice négative est l'ensemble vide et  $S_0(\mathbb{E}^n) = \{0\}$ .
- (3) Pour  $\mathbb{E}^{1,1}$ ,  $S_0(\mathbb{E}^{1,1})$  est la réunion des deux droites  $\{x_2 = \pm 1\}$  et  $S_\pm(\mathbb{E}^{1,1})$  sont deux hyperboles dont les asymptotes sont les droites du cône isotrope.
- (4) Pour  $\mathbb{E}^{1,2}$ ,  $S_0(\mathbb{E}^{1,2})$  est le cône circulaire droit  $\{x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$ , l'indatrice négative  $S_-(\mathbb{E}^{1,2})$  est une hyperboloïde de révolution à deux nappes et l'indatrice positive  $S_+(\mathbb{E}^{1,2})$  est une hyperboloïde de révolution à une nappe.

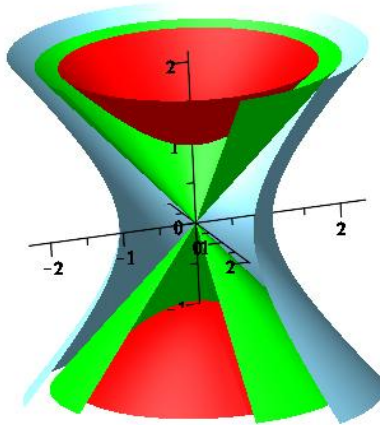
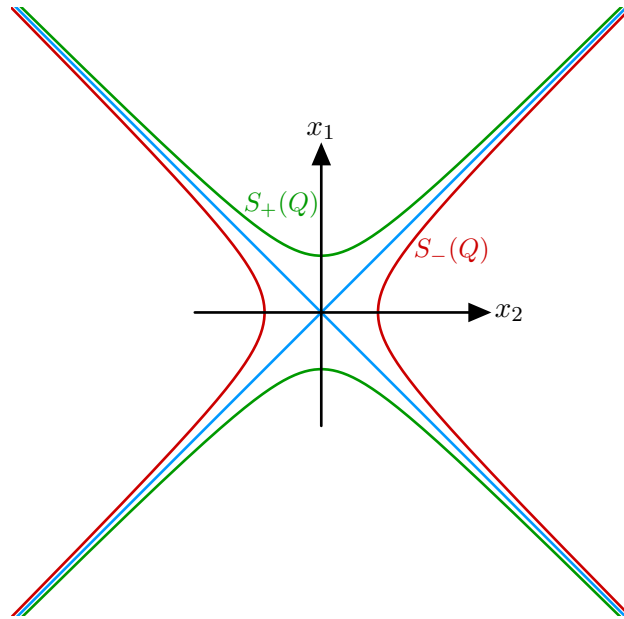


FIGURE 1.1 – Cône isotrope et indicatrices de  $\mathbb{E}^{1,1}$  et  $\mathbb{E}^{1,2}$ .



## Chapitre 2

# Courbes dans l'espace euclidien

### 2.1 Qu'est ce qu'une courbe ?

La notion mathématique de *courbe* ou de *ligne* formalise l'idée intuitive d'un objet du plan ou de l'espace qui est continu et n'a qu'une dimension. Euclide en donne la définition suivante dans le livre I des *Eléments* : *une ligne est une longueur sans largeur*. Les droites, les cercles et les ellipses sont des exemples familiers de courbes. Dans la vie courante, un fil de fer ou la trajectoire d'un projectile sont des exemples concrets de courbes.

La formalisation de la notion de courbes conduit à plusieurs concepts qu'il faudra distinguer. Le premier est celui de « lieu géométrique » des points satisfaisant certaines propriétés : cette idée nous conduit à la notion *implicite* d'une courbe comme ensemble des points satisfaisant une équation (dans le plan) ou deux équations (dans l'espace). Le second concept est celui de courbe comme « trajectoire » : on ne regarde plus la courbe comme un ensemble de points, mais comme un « point mobile », c'est-à-dire une fonction d'un paramètre à valeurs dans le plan ou dans l'espace : c'est le point de vue *paramétrique* ou *cinématique* en théorie des courbes. L'acte de tracer une courbe au crayon noir sur une feuille blanche se décrit par le point de vue paramétrique, le résultat de cette action, la courbe qu'on a tracée, correspond au point de vue implicite. Dans ce chapitre, nous privilégions le point de vue paramétrique.

### 2.2 Notions fondamentales

Dans ce chapitre, on suppose que l'espace est muni d'un système de coordonnées fixe, on l'identifie donc à  $\mathbb{R}^n$  et on admet que  $n$  est un entier quelconque. On supposera, sauf mention du contraire, que le système de coordonnées est orthonormé ; la norme d'un vecteur  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  est alors donnée par

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

**Définitions.** Une *courbe paramétrée* dans  $\mathbb{R}^n$  est une application continue  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  :

$$\alpha : u \mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \dots, \alpha_n(u)) \in \mathbb{R}^n, \quad u \in I$$

où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle appelé l'*intervalle de paramétrage* de la courbe.

La variable  $u$  parcourant l'intervalle  $I$  s'appelle le *paramètre* (elle est aussi parfois notée par les lettres  $s, t, \varphi$  ou  $\theta$ ) et l'ensemble

$$\alpha(I) = \{\alpha(u) \mid u \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

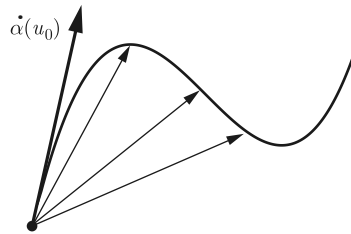
s'appelle la *trace* ou le *support* de la courbe paramétrée  $\alpha$ .

On dit que la courbe  $\alpha$  est *différentiable* en  $u_0 \in I$  si la limite

$$\frac{d\alpha}{du}(u_0) := \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\alpha(u) - \alpha(u_0)}{u - u_0}$$

existe. Cette limite s'appelle alors le *vecteur vitesse* de la courbe  $\alpha$  en  $u_0$  et on le note  $\dot{\alpha}(u_0)$  ou  $\alpha'(u_0)$ .

Remarquons que la direction du vecteur vitesse est tangente à la courbe en  $\alpha(u_0)$  car cette direction est la limite des directions prises par une suite de cordes reliant le point  $p = \alpha(u_0)$  à un point de la courbe se rapprochant du point  $p$ .



La *vitesse* de  $\alpha$  en  $u_0$  est la norme du vecteur vitesse, on la note

$$V_\alpha(u_0) = \|\dot{\alpha}(u_0)\|.$$

**Lemme 2.1** La courbe  $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \dots, \alpha_n(u))$  est différentiable en  $u_0$  si et seulement si les fonctions  $\alpha_i(u)$  sont dérivables en  $u_0$ . De plus

$$\dot{\alpha}(u_0) = \left( \frac{d\alpha_1}{du}(u_0), \dots, \frac{d\alpha_n}{du}(u_0) \right),$$

et

$$V_\alpha(u_0) = \sqrt{\left( \frac{d\alpha_1}{du}(u_0) \right)^2 + \dots + \left( \frac{d\alpha_n}{du}(u_0) \right)^2}.$$

□

ATTENTION. La seconde formule est fausse si l'on travaille dans un système de coordonnées non orthonormé.

**Définitions.** Voyons quelques définitions supplémentaires.

- (a) La courbe  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite de *classe*  $C^1$  si elle est différentiable en tout point de  $I$  et si les dérivées

$$\dot{\alpha}_j = \frac{d\alpha_j}{du}$$

sont continues sur l'intervalle  $I$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, n$ .

- (b) La courbe est dite de *classe*  $C^k$  (où  $k$  est un entier) si les dérivées d'ordre  $m$

$$\frac{d^m \alpha_j}{du^m}(u)$$

existent et sont continues pour tout  $j = 1, 2, \dots, n$  et tout  $m = 1, 2, \dots, k$ .

Si une courbe est de classe  $C^k$  pour tout entier  $k$ , on dit qu'elle est de classe  $C^\infty$ . Si la courbe est simplement continue, on dit qu'elle est de *classe*  $C^0$ .

- (c) Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe de classe  $C^2$ , alors son *accélération* est le vecteur défini par

$$\ddot{\alpha}(u) = \frac{d^2 \alpha}{du^2}(u).$$

- (d) Soit  $\alpha$  une courbe de classe  $C^1$  et  $u_0$  une valeur du paramètre. On dit que le point  $p = \alpha(u_0)$  est *singulier* si  $\dot{\alpha}(u_0) = \mathbf{0}$  (de façon équivalente,  $p$  est singulier si et seulement si  $V_\alpha(u_0) = 0$ ). Le point  $p = \alpha(u_0)$  est *régulier* s'il n'est pas singulier.

Une courbe est *régulière* si elle est de classe  $C^1$  et si tous ses points sont réguliers.

- (e) Le point  $p = \alpha(u_0)$  sur une courbe de classe  $C^2$  est *birégulier* si  $\dot{\alpha}(u_0)$  et  $\ddot{\alpha}(u_0)$  sont linéairement indépendants.

Une courbe est *birégulière* si elle est de classe  $C^2$  et si tous ses points sont biréguliers.

- (f) Le *plan osculateur* à la courbe  $\alpha$  au point  $p = \alpha(u_0)$  est le plan passant par  $p$  et qui est parallèle aux vecteurs  $\dot{\alpha}(u_0)$  et  $\ddot{\alpha}(u_0)$ . Ce plan n'est défini que si  $p$  est un point birégulier.

- (g) Un point  $p$  sur une courbe  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un *point double* s'il existe deux valeurs distinctes du paramètre ( $u_1, u_2 \in I$ ,  $u_1 \neq u_2$ ) telles que

$$p = \alpha(u_1) = \alpha(u_2).$$

- (h) Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe et si  $J \subset I$  est un intervalle, alors on dit que la restriction de  $\alpha$  à  $J$  est un *arc* de la courbe *arc de courbe*  $\alpha$  (un arc de courbe n'est donc rien d'autre qu'un « morceau de courbe »).

- (i) On dit qu'un arc de courbe est *simple* s'il ne contient pas de point double.

- (j) La *droite tangente* à la courbe  $\gamma$  au point régulier  $\gamma(u_0)$  est la droite  $T_{u_0}\gamma$  parcourue à vitesse constante, passant par  $\gamma(u_0)$  dans la direction du vecteur vitesse  $\dot{\gamma}(u_0)$  :

$$T_{u_0}\gamma : \lambda \mapsto \gamma(u_0) + \lambda \dot{\gamma}(u_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

### Exemple 2.1

- 1) La *cubique* dans  $\mathbb{R}^3$  est la courbe  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\alpha(u) = (au, bu^2, cu^3),$$

où  $a, b, c$  sont des constantes non nulles. Cette courbe est de classe  $C^\infty$ , son vecteur vitesse est

$$\dot{\alpha}(u) = (a, 2bu, 3cu^2)$$

et son accélération est

$$\ddot{\alpha}(u) = (0, 2b, 6cu).$$

La cubique est donc birégulière et sa vitesse est

$$V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\| = \sqrt{a^2 + 4b^2u^2 + 9c^2u^4}.$$

2) La courbe  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\beta(u) = (u^2, u^3, \dots, u^{n+1})$$

est de classe  $C^\infty$ . Son vecteur vitesse est

$$\dot{\beta}(u) = (2u, 3u^2, \dots, (n+1)u^n),$$

et sa vitesse est  $V_\beta(u) = \|\dot{\beta}(u)\| = \sqrt{4u^2 + \dots + ((n+1)u^n)^2}$ . Cette courbe a un unique point singulier en  $\beta(0) = (0, 0, \dots, 0)$ .

3) La droite passant par les points distincts  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  et  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  admet le paramétrage affine  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  suivant :

$$\delta(t) = p + t\vec{pq} = (p_1 + t(q_1 - p_1), p_2 + t(q_2 - p_2), \dots, p_n + t(q_n - p_n)).$$

En posant  $\mathbf{w} = \vec{pq} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , on a  $\delta(t) = (p_1 + tw_1, \dots, p_n + tw_n)$ . Le vecteur vitesse et la vitesse sont donnés pour tout  $t$  par

$$\dot{\delta}(t) = \mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\delta(t) = \|\mathbf{w}\|,$$

et l'accélération est nulle. La courbe est donc régulière, de classe  $C^\infty$  et sa vitesse est constante. Son accélération est nulle et la droite n'est donc pas birégulière.

4) La même droite admet de nombreux autres paramétrages, par exemple :

$$\varepsilon(t) = p + t^3\mathbf{w} = (p_1 + t^3w_1, \dots, p_n + t^3w_n) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dans ce cas,

$$\dot{\varepsilon}(t) = 3t^2\mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\varepsilon(t) = 3t^2\|\mathbf{w}\|.$$

La courbe est de classe  $C^\infty$  et elle possède un unique point singulier en  $\varepsilon(0) = p$ .

5) Ou encore

$$\eta(t) = p + \sqrt[3]{t}\mathbf{w} = (p_1 + \sqrt[3]{t}w_1, \dots, p_n + \sqrt[3]{t}w_n) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Cette courbe n'est alors pas de classe  $C^1$ , elle n'est en effet pas différentiable en  $t = 0$ . Nous avons pour  $t \neq 0$  :

$$\dot{\eta}(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}\mathbf{w} \quad \text{et} \quad V_\eta(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}\|\mathbf{w}\|,$$

et donc  $V_\eta(t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .

6) Le cercle de centre  $p$  et rayon  $r$  dans le plan  $\Pi \subset \mathbb{R}^n$  admet le paramétrage

$$c(t) = p + r \cos(\omega t)\mathbf{b}_1 + r \sin(\omega t)\mathbf{b}_2 \quad (0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega})$$

où  $p, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  est un repère orthonormé dans le plan  $\Pi$  et  $\omega > 0$  est une constante appelée la *vitesse angulaire* (on vérifie en effet facilement que  $\|c(t) - p\| = r$ ). La vitesse de cette courbe est

$$\dot{c}(t) = -\omega r \sin(\omega t) \mathbf{b}_1 + \omega r \cos(\omega t) \mathbf{b}_2 \quad \text{et} \quad V_c(t) = \omega r.$$

Son accélération est

$$\ddot{c}(t) = -\omega^2 r \cos(\omega t) \mathbf{b}_1 - \omega^2 r \sin(\omega t) \mathbf{b}_2.$$

La courbe est birégulière, elle est de classe  $C^\infty$ , et sa vitesse est constante.

7) Le *graphe* d'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  est la courbe  $\gamma_f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)).$$

Remarquons que la variable  $x$  est à la fois une coordonnée du plan et le paramètre de la courbe. Si  $f$  est continûment dérivable, alors la courbe est de classe  $C^1$  et

$$\dot{\gamma}_f(x) = (1, f'(x)) \quad \text{et} \quad V_{\gamma}(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Cette courbe est toujours régulière puisqu'en tout point  $V_{\gamma}(x) \geq 1$ .

8) L'*hélice circulaire* est la courbe  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

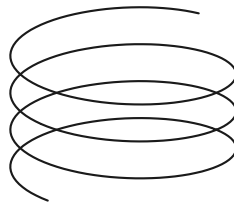
$$\gamma(u) = (a \cos(u), a \sin(u), bu),$$

avec  $a$  et  $b$  non nuls. Son vecteur vitesse et son accélération sont donnés par

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(u) &= (-a \sin(u), a \cos(u), b) \\ \ddot{\gamma}(u) &= a(-\cos(u), -\sin(u), 0). \end{aligned}$$

L'hélice circulaire est donc une courbe birégulière et la vitesse est constante :

$$\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Hélice circulaire

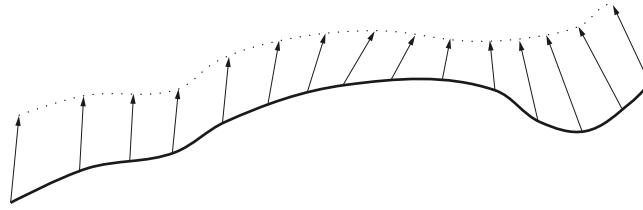
## 2.3 Champs de vecteurs le long d'une courbe

**Définition.** Un *champ de vecteurs* le long d'une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la donnée d'un vecteur

$$\mathbf{W}(u) = w_1(u)\mathbf{e}_1 + w_2(u)\mathbf{e}_2 + \cdots + w_n(u)\mathbf{e}_n$$

pour toute valeur du paramètre  $u \in I$ . Ce vecteur est en général considéré comme un vecteur fixe d'origine  $\gamma(u)$ , mais on peut aussi le voir comme un vecteur libre.

Le champ de vecteurs  $\mathbf{W}(u)$  est dit *de classe  $C^k$*  si les dérivées de  $w_1, w_2, \dots, w_n$  existent et sont continues jusqu'à l'ordre  $k$ .



Champ de vecteurs le long d'une courbe.

### Exemples de champs de vecteurs

- (1) Si  $\gamma$  est de classe  $C^1$ , alors son vecteur vitesse définit un champ  $u \mapsto \dot{\gamma}(u)$ .
- (2) Si  $\gamma$  est de classe  $C^2$ , alors son accélération définit un champ  $u \mapsto \ddot{\gamma}(u)$ .
- (3) Si  $\mathbf{W}(u)$  et  $\mathbf{Z}(u)$  sont deux champs de vecteurs le long de la courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions, alors

$$u \mapsto f(u)\mathbf{W}(u) + g(u)\mathbf{Z}(u)$$

est un nouveau champ de vecteurs le long de la courbe.

- (4) Si  $\mathbf{W}(u)$  est un champ de vecteurs de classe  $C^k$ , alors sa dérivée  $\dot{\mathbf{W}}(u)$  est un champ de vecteurs de classe  $C^{k-1}$  et  $\ddot{\mathbf{W}}(u)$  est de classe  $C^{k-2}$ .
- (5) En dimension 3, un autre champ est donné par  $u \mapsto \mathbf{W}(u) \times \mathbf{Z}(u)$ .
- (6) Si  $\gamma, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont deux courbes ayant même intervalle de paramétrage, alors on peut définir un champ

$$\mathbf{W}(u) = \beta(u) - \gamma(u),$$

ce champ s'appelle le *champ de poursuite* de la courbe  $\beta$  depuis la courbe  $\gamma$ .

- (7) Un champ important est le *vecteur tangent* d'une courbe régulière  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . C'est le champ de vecteurs le long de la courbe obtenu en normalisant le vecteur vitesse :

$$\mathbf{T}_\gamma(u) := \frac{\dot{\gamma}(u)}{\|\dot{\gamma}(u)\|} = \frac{\dot{\gamma}(u)}{V_\gamma(u)}.$$

- (8) Le *vecteur normal principal* d'une courbe birégulière  $\gamma$  de classe  $C^2$  est le champ de vecteurs le long de la courbe défini par

$$\mathbf{N}_\gamma(u) := \frac{\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u) \rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)}{\|\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u) \rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)\|}.$$

**Exercice.** Vérifier que en chaque point d'une courbe birégulière, les vecteurs  $\mathbf{T}_\gamma(u)$  et  $\mathbf{N}_\gamma(u)$  forment un repère orthonormé du plan osculateur.

**Lemme 2.2 (Règle de Leibniz)** Soient  $\mathbf{W}(u)$  et  $\mathbf{Z}(u)$  deux champs de vecteurs de classe  $C^1$  le long de la courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , alors

$$\frac{d}{du} \langle \mathbf{W}(u), \mathbf{Z}(u) \rangle = \langle \dot{\mathbf{W}}(u), \mathbf{Z}(u) \rangle + \langle \mathbf{W}(u), \dot{\mathbf{Z}}(u) \rangle.$$

Si  $n = 3$ , alors on a de même

$$\frac{d}{du} (\mathbf{W}(u) \times \mathbf{Z}(u)) = \dot{\mathbf{W}}(u) \times \mathbf{Z}(u) + \mathbf{W}(u) \times \dot{\mathbf{Z}}(u),$$

et si  $n = 2$ ,

$$\frac{d}{du} (\mathbf{W}(u) \wedge \mathbf{Z}(u)) = \dot{\mathbf{W}}(u) \wedge \mathbf{Z}(u) + \mathbf{W}(u) \wedge \dot{\mathbf{Z}}(u).$$

**Preuve.** Démontrons la première formule. Pour simplifier on écrit

$$\mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u) = \langle \mathbf{W}(u), \mathbf{Z}(u) \rangle.$$

On a alors par bilinéarité

$$\begin{aligned} & \mathbf{W}(u + \varepsilon) \cdot \mathbf{Z}(u + \varepsilon) - \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u) \\ &= \left( \mathbf{W}(u + \varepsilon) \cdot \mathbf{Z}(u + \varepsilon) - \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u + \varepsilon) \right) + \left( \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u + \varepsilon) - \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{Z}(u) \right) \\ &= \left( \mathbf{W}(u + \varepsilon) - \mathbf{W}(u) \right) \cdot \mathbf{Z}(u + \varepsilon) + \mathbf{W}(u) \cdot \left( \mathbf{Z}(u + \varepsilon) - \mathbf{Z}(u) \right). \end{aligned}$$

Il suffit de diviser cette identité par  $\varepsilon$  et faire tendre  $\varepsilon$  vers 0 pour obtenir le lemme. Les autres formules se vérifient de la même manière. □

**Corollaire 2.3** (a) Si  $\mathbf{W}_1(u)$  et  $\mathbf{W}_2(u)$  sont deux champs de vecteurs de classe  $C^1$  le long de  $\gamma$  tel que  $\langle \mathbf{W}_1(u), \mathbf{W}_2(u) \rangle$  est constant, alors on a

$$\langle \mathbf{W}_1(u), \dot{\mathbf{W}}_2(u) \rangle = -\langle \dot{\mathbf{W}}_1(u), \mathbf{W}_2(u) \rangle$$

pour tout  $u \in I$ .

(b) Si  $\mathbf{W}(u)$  est un champ de vecteurs de classe  $C^1$  le long de  $\gamma$  tel que  $\|\mathbf{W}\|$  est constant, alors  $\dot{\mathbf{W}}(u)$  est orthogonal à  $\mathbf{W}(u)$  pour tout  $u \in I$ .

**Preuve.** L'affirmation (a) est une conséquence immédiate de la règle de Leibniz et (b) découle de (a). □

## 2.4 Longueur et abscisse curviligne

**Définition.** La *longueur* d'un arc de courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  par morceaux est l'intégrale de sa vitesse :

$$\ell(\gamma) = \int_a^b V_\gamma(t) dt, \quad \text{où } V_\gamma = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

### Exemple 2.2

1) Il est clair que si la vitesse est constante :  $V_\gamma(t) \equiv v$ , alors on a

$$\ell(\gamma) = v \cdot (b - a).$$

Ainsi, la longueur d'un chemin parcouru à vitesse constante est égale à la vitesse fois le temps de parcours :

$$\text{longueur} = \text{vitesse} \times \text{temps}.$$

2) Comme cas particulier, nous avons le segment  $[p, q]$  paramétré par  $\delta(t) = (p_1 + t(q_1 - p_1), \dots, p_n + t(q_n - p_n))$ , avec  $t \in [0, 1]$ .

On a vu que  $V_\delta(t) = \|\vec{p\dot{q}}\| = \|q - p\|$  et donc

$$\ell(\delta) = \|q - p\|.$$

3) L'arc de cercle de centre  $p$  et rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^2$  est paramétré par  $c(\theta) = (p_1 + r \cos(\theta), p_2 + r \sin(\theta))$ , où  $\theta$  varie de  $\theta_0$  à  $\theta_1$ . La vitesse de cette courbe est constante :  $V_c(\theta) = r$ , et donc

$$\ell(c) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} V_c d\theta = r(\theta_1 - \theta_0).$$

On a donc montré que la longueur d'un arc de cercle est égale au produit du rayon par l'angle qui sous-tend l'arc.

4) La longueur du graphe  $\gamma_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par

$$\ell(\gamma_f) = \int_a^b V_\gamma(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Voyons à présent quelques propriétés importantes de la longueur.

**Proposition 2.4** Si  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une similitude de rapport  $\lambda > 0$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un arc de courbe de classe  $C^1$ , alors  $\tilde{\gamma} := g \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est aussi de classe  $C^1$  et

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \lambda \ell(\gamma).$$

En particulier la longueur d'une courbe est invariante par isométrie.

**Preuve.** On sait que toute similitude  $g$  est de la forme  $g(x) = \lambda Ax + \mathbf{b}$ , où  $\mathbf{b}$  est un vecteur et  $A$  une matrice orthogonale. On a donc  $\tilde{\gamma}(u) = \lambda A\gamma(u) + \mathbf{b}$ , et, par la règle de Leibniz,

$$\dot{\tilde{\gamma}}(u) = \lambda \dot{A}\gamma(u) + \lambda A\dot{\gamma}(u) + \dot{\mathbf{b}} = \lambda A\dot{\gamma}(u)$$

puisque  $A$  et  $\mathbf{b}$  sont constantes. Comme  $A$  est une matrice orthogonale, on a

$$V_{\tilde{\gamma}}(u) = \|\dot{\tilde{\gamma}}(u)\| = \|\lambda A\dot{\gamma}(u)\| = \lambda \|\dot{\gamma}(u)\| = \lambda V_\gamma(u),$$

et donc

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_a^b V_{\tilde{\gamma}}(u) du = \lambda \int_a^b V_\gamma(u) du = \lambda \ell(\gamma).$$

□

**Proposition 2.5 (additivité de la longueur)** Soit  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe de classe  $C^1$  et  $c \in [a, b]$ . Notons  $\beta := \alpha|_{[a, c]} : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\gamma := \alpha|_{[c, b]} : [c, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  les restrictions de  $\alpha$  aux intervalles  $[a, c]$  et  $[c, b]$ . Alors

$$\ell(\alpha) = \ell(\beta) + \ell(\gamma).$$



**Preuve.** Cette proposition découle de la propriété correspondante de l'intégrale, nous laissons le lecteur compléter les détails. □

**Proposition 2.6** Pour tout arc de courbe  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  on a

$$d(\alpha(a), \alpha(b)) \leq \ell(\alpha).$$

Cette proposition dit que *le plus court chemin reliant deux points est le segment de droite entre ces deux points*.

**Preuve.** Si  $\alpha(b) = \alpha(a)$  il n'y a rien à montrer. Sinon on pose  $\mathbf{w} := \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{\|\alpha(b) - \alpha(a)\|}$  et on introduit la fonction

$$f(u) := \langle \alpha(u) - \alpha(a), \mathbf{w} \rangle.$$

Par la règle de Leibniz, on a

$$\dot{f}(u) = \frac{df}{du} = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle + \langle \alpha(u) - \alpha(a), \dot{\mathbf{w}} \rangle = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\dot{f}(u) = \langle \dot{\alpha}(u), \mathbf{w} \rangle \leq \|\dot{\alpha}(u)\| \|\mathbf{w}\| = \|\dot{\alpha}(u)\| = V_\alpha(u)$$

(car  $\|\mathbf{w}\| = 1$ ). On a donc

$$\begin{aligned} d(\alpha(a), \alpha(b)) &= \|\alpha(b) - \alpha(a)\| \\ &= f(b) - f(a) \\ &= \int_a^b \dot{f}(u) du \\ &\leq \int_a^b V_\alpha(u) du = \ell(\alpha). \end{aligned}$$

□

**Définition.** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$  et  $u_0 \in I$  une valeur du paramètre. L'*abscisse curviligne* (ou *paramètre naturel*) sur  $\alpha$  correspondant au *point initial*  $p_0 = \alpha(u_0)$  est la fonction  $s_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$s_\alpha(u) = \int_{u_0}^u V_\alpha(\tau) d\tau.$$

L'abscisse curviligne mesure donc la longueur du chemin parcouru sur la courbe depuis le point initial, elle est négative avant le point initial et positive après :

$$s_\alpha(u) = \begin{cases} \ell(\alpha|_{[u_0, u]}) & \text{si } u \geq u_0 \\ -\ell(\alpha|_{[u, u_0]}) & \text{si } u \leq u_0. \end{cases}$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, nous noterons l'abscisse curviligne par  $s(u)$  au lieu de  $s_\alpha(u)$ .

## 2.5 Changement de paramétrage d'une courbe

La notion de courbe que nous avons introduite plus haut est une notion *cinématique*<sup>1</sup>, i.e. fondée sur la notion de paramétrage. Il est naturel, d'un point de vue géométrique, d'admettre qu'une « même » courbe puisse avoir plusieurs paramétrages distincts.

**Définition.** Soit  $\alpha(t)$  ( $t \in I$ ) une courbe paramétrée. On dit qu'une courbe  $\beta(u)$  ( $u \in J$ ) est une *reparamétrage* de  $\alpha$  s'il existe une bijection

$$h : I \rightarrow J$$

transformant le paramètre  $t$  en  $u = h(t)$  et telle que

- a)  $h$  est continûment différentiable ;
- b)  $h'(t) > 0$  quel que soit  $t \in I$  ;
- c)  $\alpha = \beta \circ h$ .

Observons que les deux courbes ont alors la même trace  $\alpha(I) = \beta(J)$ . Les vecteurs vitesses sont reliés par

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{du} \frac{du}{dt} = h'(t) \frac{d\beta}{du} \quad (2.1)$$

et les vitesses par

$$V_\alpha(t) = h'(t)V_\beta(u).$$

En particulier, comme  $\frac{du}{dt} = h'(t) \neq 0$ , on voit que les courbes  $\alpha$  et  $\beta$  ont les mêmes points singuliers.

Les formules ci-dessus montrent en particulier que lorsqu'on reparamétrise une courbe, celle-ci ne change pas de sens de parcours (car les vecteurs vitesses des deux courbes ont même direction et même sens). On peut toutefois inverser le sens de parcours d'une courbe par une procédure similaire à un reparamétrage.

**Définition.** On dit qu'une courbe  $\beta(u)$  ( $u \in J$ ) est une *inversion*, ou un *antireparamétrage*, de la courbe  $\alpha(t)$  ( $t \in I$ ) s'il existe une bijection

$$h : I \rightarrow J$$

transformant le paramètre  $t$  en  $u = h(t)$  et telle que

- a)  $h$  est continûment différentiable ;
- b)  $h'(t) < 0$  quel que soit  $t \in I$  ;
- c)  $\alpha = \beta \circ h$ .

Voici un exemple simple : considérons les courbes du plan  $\mathbb{R}^2$

$$\alpha(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (0 < \theta < \pi)$$

et

$$\gamma(x) = (x, \sqrt{1-x^2}), \quad (-1 < x < 1).$$

---

1. Le mot *cinématique* vient du grec *κίνησις*, qui signifie « mouvement ».

Ces deux courbes ont la même trace, qui est le demi-cercle unité :

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}.$$

La fonction  $h : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$  définie par  $h(\theta) = x = \cos(\theta)$  fait le lien entre les deux paramétrages car

$$\gamma(h(\theta)) = (x, \sqrt{1-x^2}) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \alpha(\theta).$$

Comme  $h'(\theta) = \frac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta) < 0$ , on voit que la courbe  $\alpha$  est une inversion de  $\gamma$ .

Observons par ailleurs que si  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , alors  $h'(\theta) = 0$ . L'inversion  $h$  cesse d'être admissible aux extrémités de l'intervalle. Cela correspond au fait que la vitesse de  $\gamma$

$$V_\gamma(x) = \left\| \frac{d\gamma}{dx} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

tend vers l'infini lorsque  $x \rightarrow \pm 1$ .

## 2.6 Quantités géométriques et quantités cinématiques

**Définition.** Une quantité ou une notion attachée à une courbe est dite *géométrique* si elle est invariante par rapport aux changements de paramètre, et elle est dite *cinématique* dans le cas contraire.

Par exemple, la vitesse et l'accélération sont des notions cinématiques alors que la notion de point singulier, de point régulier et de direction tangente sont des notions géométriques.

**Lemme 2.7** *Le vecteur tangent  $\mathbf{T}_\alpha(t)$  est une quantité géométrique.*

**Preuve.** Cette affirmation est géométriquement évidente, puisque  $\mathbf{T}$  est un champ de vecteurs unitaire indiquant la direction de la courbe. Voyons tout de même une preuve formelle de ce lemme :

Soit  $\beta(u)$  ( $u \in J$ ) un reparamétrage de la courbe  $\alpha$ . Il existe alors une fonction  $h : I \rightarrow J$  telle que  $h'(t) > 0$  et  $\alpha(t) = \beta(h(t))$ . On sait que  $V_\alpha(t) = V_\beta(u)h'(t)$ , par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\alpha, t) &= \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d\beta(h(t))}{dt} \\ &= \frac{h'(t)}{V_\alpha(t)} \frac{d\beta(u)}{du} \\ &= \frac{1}{V_\beta(u)} \frac{d\beta(u)}{du} \\ &= \mathbf{T}(\beta, u). \end{aligned}$$

□

La longueur d'une courbe est également une quantité géométrique ; plus généralement, nous avons la proposition suivante.

**Proposition 2.8** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux courbes de classe  $C^1$ . Si  $\beta$  est un reparamétrage ou une inversion de  $\alpha$ , alors  $\ell(\beta) = \ell(\alpha)$ .

**Preuve.** Considérons d'abord le cas où  $\beta(u)$  ( $a' \leq u \leq b'$ ) est un reparamétrage de la courbe  $\alpha(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) ; on a

$$\begin{aligned}\ell(\beta) &= \int_{a'}^{b'} V_\beta(u) du = \int_a^b V_\beta(u) \frac{du}{dt} dt \\ &= \int_a^b V_\alpha(t) dt \\ &= \ell(\alpha).\end{aligned}$$

Dans le cas où  $\beta(u)$  est une inversion de  $\alpha(t)$ , alors  $\frac{du}{dt} < 0$  et on a

$$\begin{aligned}\ell(\beta) &= \int_{a'}^{b'} V_\beta(u) du = \int_b^a V_\beta(u) \frac{du}{dt} dt \\ &= - \int_b^a V_\alpha(t) dt \\ &= \int_a^b V_\alpha(t) dt \\ &= \ell(\alpha).\end{aligned}$$

□

Considérons par exemple l'arc du cercle unité compris entre les points  $(1, 0)$  et  $(x_0, y_0)$  (où l'on suppose  $y > 0$ ), alors la longueur de cet arc de cercle est donnée par

$$\ell = \theta = \text{Arcos}(x_0).$$

Si cette courbe est paramétrée comme un graphe, i.e. par  $\gamma(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ , ( $x_0 < x < 1$ ), alors la vitesse est  $V_\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  et la longueur est donc donnée par

$$\ell = \int_{x_0}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

La proposition 2.8 nous permet de déduire du résultat précédent l'identité analytique :

$$\int_{x_0}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arcos}(x_0),$$

que nous avons obtenue (presque) sans aucun calcul, mais par un raisonnement purement géométrique.

## 2.7 Paramétrage naturel d'une courbe régulière

**Théorème 2.9** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe régulière de classe  $C^1$  et  $t_0 \in I$  une valeur du paramètre. Alors il existe une unique reparamétrage  $h : I \rightarrow J$ , telle que  $0 \in J$ ,  $h(t_0) = 0$  et telle que  $\beta := \alpha \circ h^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  soit de vitesse 1 :  $V_\beta(s) = 1$ .

**Preuve.** Montrons d'abord l'unicité de ce reparamétrage. On a vu plus haut (p. 33) que

$$V_\alpha(t) = h'(t)V_\beta(s).$$

Comme  $V_\beta(s) = 1$  et  $h' > 0$ , on a donc  $h'(t) = V_\alpha(t)$  et comme  $h(t_0) = 0$ , on doit avoir

$$s = h(t) = \int_{t_0}^t V_\alpha(\tau) d\tau.$$

Ainsi  $h(t)$  coïncide avec l'abscisse curviligne  $s(t)$ .

Pour montrer l'existence du reparamétrage, on *définit* à présent  $h$  par  $h(t) = s(t) = \int_{t_0}^t V_\alpha(\tau) d\tau$  et l'intervalle  $J$  par  $J = h(I)$ . Alors  $h(t_0) = 0$  et  $h'(t) = V_\alpha(t)$ . En utilisant la formule (2.1) de la page 33, on voit que la courbe  $\beta := \alpha \circ h^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifie

$$V_\beta(s) = V_\alpha(t) \frac{1}{h'(t)} = 1.$$

□

**Définition.** On dit qu'une courbe régulière  $\gamma$  est *paramétrée naturellement* si sa vitesse vaut 1, i.e. si  $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$  pour tout  $s$ . Le théorème précédent nous dit que toute courbe régulière peut se reparamétriser de façon naturelle.

Dès qu'un point initial et un sens de parcours ont été choisis sur la courbe, le paramétrage naturel est unique et il est donné par l'abscisse curviligne.

**Recette** Pour trouver le paramétrage naturel d'une courbe  $\alpha$ , il faut effectuer les opérations suivantes :

- 1) Identifier ou choisir le point initial  $u_0$ .
- 2) Calculer la vitesse  $V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\|$ .
- 3) Intégrer  $V_\alpha$  pour obtenir l'abscisse curviligne  $s : s(u) = \int_{u_0}^u V_\alpha(\tau) d\tau$ .
- 4) Inverser la relation  $s = s(u)$  (i.e. exprimer  $u$  en fonction de  $s : u = u(s)$ ).
- 5) On obtient alors le paramétrage naturel  $\beta(s) = \alpha(u(s))$ .

**Exemple 2.3** La *chaînette* est la courbe plane paramétrée par  $\alpha(u) = (u, \cosh u)$ . Le vecteur vitesse est  $\dot{\alpha}(u) = (1, \sinh(u))$ , et donc

$$V_\alpha(u) = \|\dot{\alpha}(u)\| = \sqrt{1 + \sinh^2(u)} = \cosh(u).$$

L'abscisse curviligne depuis le point initial  $\alpha(0) = (0, 1)$  est donnée par l'intégrale

$$s(u) = \int_0^u V_\alpha(t) dt = \int_0^u \cosh(t) dt = \sinh(u),$$

et on a donc

$$u(s) = \operatorname{argsh}(s) = \log(s + \sqrt{1 + s^2}).$$

Remarquons que  $\cosh(u) = \sqrt{1 + \sinh^2(u)} = \sqrt{1 + s^2}$ . En substituant cette relation dans le paramétrage de  $\alpha$ , on obtient le paramétrage naturel de la chaînette :

$$\beta(s) = \alpha(u(s)) = (u(s), \cosh u(s)) = (\operatorname{argsh}(s), \sqrt{1 + s^2}).$$

On vérifie facilement que  $\|\dot{\beta}(s)\| = 1$ .

Les courbes pour lesquelles on peut effectivement calculer le paramétrage naturel sont plutôt rares ; mais cette notion joue un rôle théorique fondamental. Il faut en particulier se souvenir des relations suivantes qui relient le paramètre naturel  $s$  au paramètre donné  $u$ .

$$\boxed{ds = V(u) \cdot du \quad , \quad \frac{d}{ds} = \frac{1}{V(u)} \frac{d}{du}.} \quad (2.2)$$

REMARQUE. L'abscisse curviligne joue un rôle fondamental en théorie des courbes, car c'est dans le paramétrage naturel que les relations fondamentales entre les différentes quantités géométriques liées à une courbe sont le plus clairement mises en évidence. Pour cette raison, les livres traitant de courbes choisissent souvent d'écrire les formules relativement à la seule abscisse curviligne. Nous n'avons pas fait ce choix et avons préféré écrire les formules par rapport à un paramètre général en raison de la difficulté pratique de calculer le paramétrage naturel pour la plupart des courbes. Nous invitons toutefois le lecteur à réécrire lui-même les formules des prochains paragraphes dans le cas spécial d'une courbe paramétrée naturellement ; il constatera ainsi lui-même combien les formules et les calculs théoriques se simplifient.

## 2.8 Courbure d'une courbe de $\mathbb{R}^n$

**Définition.** Le *vecteur de courbure* d'une courbe régulière  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^2$  est le champ de vecteurs le long de cette courbe défini par

$$\mathbf{K}(\alpha, t) := \frac{1}{V_\alpha(t)} \frac{d}{dt} \mathbf{T}(\alpha, t),$$

où  $\mathbf{T}(\alpha, t) = \frac{1}{V_\alpha(t)} \dot{\alpha}(t)$  est le vecteur tangent à la courbe.

REMARQUE. Le corollaire 2.3 entraîne que le vecteur de courbure est toujours orthogonal au vecteur tangent :

$$\mathbf{K}(\alpha, t) \perp \mathbf{T}(\alpha, t).$$

On définit aussi la *courbure* de la courbe  $\alpha$  ; c'est par définition la norme du vecteur de courbure :

$$\kappa(\alpha, t) := \|\mathbf{K}(\alpha, t)\|.$$

Il est facile de voir que la courbure d'une droite est nulle, voici un autre exemple simple.

**Exemple 2.4** Un paramétrage d'un cercle de centre  $p$  et rayon  $r$  est donné par

$$c(\theta) = p + r \cos(\theta) \mathbf{u}_1 + r \sin(\theta) \mathbf{u}_2,$$

où  $p, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  est un repère orthonormé du plan contenant le cercle. On a

$$\dot{c}(\theta) = -r \sin(\theta) \mathbf{u}_1 + r \cos(\theta) \mathbf{u}_2,$$

donc  $V_c(\theta) = r$  et  $\mathbf{T}(c, \theta) = -\sin(\theta) \mathbf{u}_1 + \cos(\theta) \mathbf{u}_2$ .

En dérivant le vecteur tangent, on a  $\dot{\mathbf{T}}(c, \theta) = -\cos(\theta) \mathbf{u}_1 - \sin(\theta) \mathbf{u}_2$ , donc

$$\mathbf{K}(c, \theta) = \frac{1}{V_c(\theta)} \dot{\mathbf{T}}(c, \theta) = -\frac{1}{r} (\cos(\theta) \mathbf{u}_1 + \sin(\theta) \mathbf{u}_2)$$

et donc

$$\kappa(c, \theta) = \|\mathbf{K}(c, \theta)\| = \frac{1}{r}.$$

La courbure du cercle est donc l'inverse de son rayon.

Remarquons aussi qu'on a la relation suivante exprimant le centre du cercle en fonction d'un point sur le cercle et de la courbure :

$$c(\theta) + r^2 \mathbf{K}(c, \theta) = p. \quad (2.3)$$

**Proposition 2.10** *Le vecteur de courbure  $\mathbf{K}_\alpha(t)$  et la courbure  $\kappa_\alpha(t) = \|\mathbf{K}_\alpha(t)\|$  sont des quantités géométriques.*

Nous laissons la preuve en exercice.

**Proposition 2.11 (Formule de l'accélération)** *Le vecteur accélération d'une courbe régulière  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifie*

$$\ddot{\gamma}(u) = (V_\gamma(u))^2 \mathbf{K}_\gamma(u) + \dot{V}_\gamma(u) \mathbf{T}_\gamma(u). \quad (2.4)$$

**Preuve.** Écrivons le vecteur vitesse sous la forme  $\dot{\gamma}(u) = V_\gamma(u) \mathbf{T}_\gamma(u)$  et dérivons ce vecteur :

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(u) &= \frac{d}{du} (V_\gamma(u) \mathbf{T}_\gamma(u)) = V_\gamma(u) \dot{\mathbf{T}}_\gamma(u) + \dot{V}_\gamma(u) \mathbf{T}_\gamma(u) \\ &= (V_\gamma(u))^2 \mathbf{K}_\gamma(u) + \dot{V}_\gamma(u) \mathbf{T}_\gamma(u). \end{aligned}$$

□

On dit que  $\dot{V}_\gamma(u) \mathbf{T}_\gamma(u)$  est l'*accélération tangentielle* et  $(V_\gamma(u))^2 \mathbf{K}_\gamma(u)$  est l'*accélération normale* de  $\gamma$ .

En mécanique, cette formule signifie que la force subie par une particule en mouvement est fonction de l'accélération tangentielle  $\dot{V}_\gamma$  et du carré de la vitesse multiplié par la courbure.

**Corollaire 2.12** *Si  $\alpha$  est paramétrée naturellement, i.e. si  $V_\alpha \equiv 1$ , alors*

$$\ddot{\alpha}(s) = \mathbf{K}(\alpha, s).$$

**Preuve.** Puisque  $V_\alpha \equiv 1$ , on a  $\dot{V}_\alpha = 0$  et le corollaire se déduit immédiatement de la formule de l'accélération. □

**Proposition 2.13** Une courbe  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de courbure nulle si et seulement si c'est une droite ou un segment de droite (qui peut être paramétrée arbitrairement).

**Preuve.** On peut supposer grâce au théorème 2.9 que  $\alpha$  est paramétrée naturellement. Le corollaire précédent entraîne alors que  $\ddot{\alpha}(s) = \mathbf{K}(\alpha, s)$  et comme  $\kappa(\alpha, s) = \|\mathbf{K}(\alpha, s)\| = 0$ , on a donc  $\ddot{\alpha}(s) = \mathbf{0}$ . Le vecteur  $\mathbf{v} := \dot{\alpha}$  est alors constant et on obtient donc en intégrant

$$\alpha(s) = p + s\mathbf{v}$$

où  $p = \alpha(0)$ . □

**Lemme 2.14** Le vecteur de courbure d'une courbe de classe  $C^2$  en un point est un multiple du vecteur normal principal en ce point :

$$\mathbf{K}_\gamma(u) = \kappa_\gamma(u)\mathbf{N}_\gamma(u).$$

**Preuve.** Nous laissons la preuve en exercice. Rappelons que

$$\mathbf{N}_\gamma(u) = \frac{\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u) \rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)}{\|\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u) \rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)\|}.$$

□

**Proposition 2.15** La courbure d'une courbe de classe  $C^2$  est la variation angulaire de la direction de cette courbe par rapport au paramètre naturel.

La signification exacte de cette proposition sera précisée dans la preuve.

**Preuve.** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe de classe  $C^2$  paramétrée naturellement et notons

$$\varphi(s_0, s) := \angle(\mathbf{T}(s_0), \mathbf{T}(s))$$

l'angle entre  $\mathbf{T}(s_0)$  et  $\mathbf{T}(s)$  (où  $s_0, s \in I$ ). Comme  $\|\mathbf{T}(s_0)\| = \|\mathbf{T}(s)\| = 1$ , on a par la trigonométrie élémentaire que

$$\|\mathbf{T}(s_0) - \mathbf{T}(s)\| = 2 \sin\left(\frac{\varphi(s_0, s)}{2}\right).$$

On a donc

$$\lim_{s \rightarrow s_0+} \frac{\varphi(s_0, s)}{s - s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0+} \left( \frac{\varphi(s_0, s)}{2 \sin\left(\frac{\varphi(s_0, s)}{2}\right)} \cdot \frac{2 \sin\left(\frac{\varphi(s_0, s)}{2}\right)}{s - s_0} \right) = \lim_{s \rightarrow s_0+} \left\| \frac{\mathbf{T}(s_0) - \mathbf{T}(s)}{s - s_0} \right\| = \|\dot{\mathbf{T}}(s_0)\|.$$

On a ainsi montré que la courbure est la dérivée à droite de l'angle, on peut noter

$$\kappa(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0+} \frac{\varphi(s_0, s)}{s - s_0} = \frac{d}{ds} \Big|_{s_0+} \varphi(s_0, s) \quad (2.5)$$

□



## 2.9 Contact entre deux courbes

**Définition.** On dit que deux courbes de classe  $C^k$

$$\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ayant le même paramètre  $t \in I$  ont un *contact d'ordre  $k$*  en  $t_0 \in I$  si  $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$  et si leurs dérivées en  $t_0$  coïncident jusqu'à l'ordre  $k$  :

$$\frac{d^m \alpha}{dt^m}(t_0) = \frac{d^m \beta}{dt^m}(t_0),$$

pour  $m = 1, 2, \dots, k$ .

Ainsi, deux courbes  $\alpha, \beta$  ont un contact d'ordre 0 en  $t_0$  si elles passent par le même point en  $t_0$ . Elles ont un contact d'ordre 1 si elles passent par le même point et elles ont le même vecteur vitesse en ce point :

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), \quad \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \frac{d\beta}{dt}(t_0).$$

Concernant les courbes ayant un contact d'ordre 2, nous avons le résultat suivant :

**Théorème 2.16** *Deux courbes  $\alpha, \beta$  de classe  $C^2$  ont un contact d'ordre 2 en  $t_0$  si et seulement si elles passent par le même point et si elles ont le même vecteur vitesse et le même vecteur de courbure en ce point :*

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), \quad \frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \frac{d\beta}{dt}(t_0) \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_\alpha(t_0) = \mathbf{K}_\beta(t_0).$$

*En particulier, si ces deux courbes sont birégulières alors elles ont le même plan osculateur en  $t_0$ .*

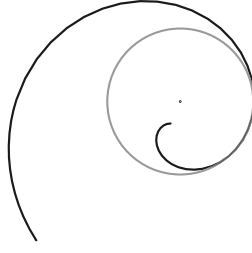
**Preuve.** C'est une conséquence directe de la proposition 2.11. □

**Corollaire 2.17** *Deux cercles de  $\mathbb{R}^n$  parcourus à vitesse constante ont un contact d'ordre 2 si et seulement si ces deux cercles coïncident.*

**Preuve.** Par le théorème précédent, les deux cercles ont le même vecteur vitesse et le même vecteur de courbure en leur point de contact. En particulier les deux cercles se situent dans le même plan, qui est le plan osculateur commun.. On sait en outre par l'exemple 2.4 que la courbure d'un cercle est égale à l'inverse de son rayon. Les deux cercles ont donc même rayon  $r$ . Mais on sait aussi par l'équation (2.3) que les deux cercles doivent avoir même centre, donc ils coïncident. □

**Théorème 2.18** *Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe de classe  $C^2$  qui est birégulière en  $t_0 \in I$ . Alors il existe un cercle  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ayant un contact d'ordre 2 avec  $\alpha$  en  $t_0$ . Ce cercle est unique à un changement de paramètre près, son rayon est l'inverse de  $|\kappa_\alpha(t_0)|$  et son centre est donné par*

$$p = \alpha(t_0) + \frac{1}{\kappa_\alpha(t_0)^2} \mathbf{K}_\alpha(t_0). \tag{2.6}$$



Cercle osculateur.

**Définition.** Ce cercle s'appelle le *cercle osculateur*<sup>2</sup>. (aussi appelé le *cercle de courbure*) à  $\alpha$  en  $t_0$ , c'est parmi tous les cercles celui qui approxime le mieux la courbe au voisinage de  $\alpha(t_0)$ . Son centre est le *centre de courbure* et son rayon est le *rayon de courbure* de  $\alpha$  en  $t_0$ . On le note

$$\rho_\alpha(t_0) = \frac{1}{\kappa_\alpha(t_0)}.$$

**Preuve.** Supposons pour la preuve que la courbe  $\alpha$  est paramétrée naturellement (et notons selon l'usage  $s$  le paramètre naturel). On supposera aussi que le point considéré correspond à la valeur  $s = 0$  du paramètre.

Notons  $\rho = \frac{1}{\kappa_\alpha(0)}$ ,  $\mathbf{T} := \mathbf{T}_\alpha(0) = \dot{\alpha}(0)$  et  $\mathbf{N} := \rho \mathbf{K}_\alpha(0)$ , puis posons

$$p := \alpha(0) + \rho \mathbf{N} \tag{2.7}$$

et considérons le cercle de centre  $p$  et rayon  $\rho$  que nous paramétrisons par

$$\gamma(s) = p - \rho \cos(s/\rho) \mathbf{N} + \rho \sin(s/\rho) \mathbf{T}.$$

Il s'agit bien d'un cercle, puisque  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{N}$  sont orthogonaux et de longueur 1. Il est alors clair que  $\gamma(0) = \alpha(0)$  et que  $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{T} = \dot{\alpha}(0)$ . On sait d'autre part que la courbure du cercle de rayon  $\rho$  est constante et égale à  $\frac{1}{\rho} = \kappa_\alpha(0)$ . Le théorème 2.16 entraîne donc que la courbe  $\alpha$  et le cercle  $\gamma$  ont un contact d'ordre 2 en  $s = 0$ .

L'unicité de ce cercle découle immédiatement du corollaire 2.17. □

REMARQUE. Le plan osculateur à la courbe au point considéré admet le repère affine  $\{\alpha(t_0), \mathbf{T}_\alpha(0), \mathbf{K}_\alpha(0)\}$ . La preuve précédente montre que ce plan est le plan qui contient le cercle osculateur.

**Définition.** On appelle *développée de la courbe birégulière*  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  la courbe

$$\beta(u) = \alpha(u) + \rho_\alpha(u) \mathbf{N}_\alpha(u),$$

où  $\rho_\alpha$  est le rayon de courbure de  $\alpha$ . On dit aussi que  $\beta$  est la *développante* de  $\alpha$ .

---

2. Le terme *osculateur* nous vient du latin et signifie *embrasser* : le cercle osculateur embrasse la courbe au point de contact.

## 2.10 Le repère de Frenet d'une courbe dans $\mathbb{R}^3$

Rappelons que le vecteur tangent et le vecteur normal principal d'une courbe birégulière  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  sont le champ de vecteurs le long de cette courbe définis par

$$\mathbf{T}_\gamma(u) = \frac{\dot{\gamma}(u)}{V_\gamma(u)} \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_\gamma(u) = \frac{\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u) \rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)}{\|\ddot{\gamma}(u) - \langle \ddot{\gamma}(u), \mathbf{T}_\gamma(u) \rangle \cdot \mathbf{T}_\gamma(u)\|}.$$

**Définition.** Le vecteur binormal de  $\gamma$  est le produit vectoriel du vecteur unitaire tangent et du vecteur normal principal :

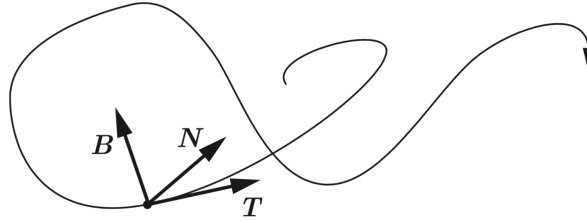
$$\mathbf{B}_\gamma(u) = \mathbf{T}_\gamma(u) \times \mathbf{N}_\gamma(u).$$

Le repère de Frenet<sup>3</sup> est un repère mobile (les trois vecteurs sont des champs qui dépendent du paramètre  $u$ ), il est orthonormé et direct. Il suit la courbe en ce sens que le premier vecteur de ce repère est toujours tangent à celle-ci.

de  $\gamma$  est le repère défini par les trois champs de vecteurs

$$\{\mathbf{T}_\gamma(u), \mathbf{N}_\gamma(u), \mathbf{B}_\gamma(u)\}.$$

Le repère de Frenet est uniquement défini aux points où la courbe est birégulière. C'est un repère mobile (les trois vecteurs sont des champs qui dépendent du paramètre  $u$ ), il est orthonormé et direct. Il suit la courbe en ce sens que le premier vecteur de ce repère est toujours tangent à celle-ci.



Rappelons que le plan passant par  $\gamma(u)$  de directions  $\mathbf{T}_\gamma(u)$  et  $\mathbf{N}_\gamma(u)$  est le *plan osculateur*. Le plan de directions  $\mathbf{B}_\gamma(u)$  et  $\mathbf{N}_\gamma(u)$  s'appelle le *plan normal* et le plan de directions  $\mathbf{T}_\gamma(u)$  et  $\mathbf{B}_\gamma(u)$  est le *plan rectifiant*.

**Lemme 2.19** *Le vecteur binormal à la courbe  $\gamma$  peut aussi s'écrire*

$$\mathbf{B}_\gamma(u) = \frac{\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)}{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|}.$$

**Preuve.** On a

$$\dot{\gamma} \times (\ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{T} \rangle \cdot \mathbf{T}) = \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$$

car  $\dot{\gamma} \times \mathbf{T} = 0$ . Donc

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{\dot{\gamma}}{V_\gamma} \times \frac{(\ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{T} \rangle \cdot \mathbf{T})}{\|\ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{T} \rangle \cdot \mathbf{T}\|} = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{V_\gamma \|\ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \mathbf{T} \rangle \cdot \mathbf{T}\|} = \frac{\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)}{\|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)\|}.$$

---

3. Jean Frédéric Frenet, mathématicien et astronome français 1816-1900.

□

**Définition.** (i) On dit qu'une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est *régulière au sens de Frenet*, si elle est de classe  $C^2$ , birégulière, et que le vecteur normal principal est un champ  $u \mapsto \mathbf{N}_\gamma(u)$  de classe  $C^1$ .  
(ii) La *torsion* d'une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  régulière au sens de Frenet de classe  $C^3$  est la fonction  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\tau(u) := \frac{\langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{B}(u) \rangle}{V_\gamma(u)}.$$

**Théorème 2.20 (Formules de Serret-Frenet)** Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière au sens de Frenet, Alors le repère de Frenet est de classe  $C^1$  et ses dérivées sont données par les formules

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_\gamma(u)} \dot{\mathbf{T}}(u) &= \kappa(u) \mathbf{N}(u), \\ \frac{1}{V_\gamma(u)} \dot{\mathbf{N}}(u) &= -\kappa(u) \mathbf{T}(u) + \tau(u) \mathbf{B}(u), \\ \frac{1}{V_\gamma(u)} \dot{\mathbf{B}}(u) &= -\tau(u) \mathbf{N}(u). \end{aligned}$$

On verra au théorème 2.24 que la courbure et la torsion déterminent complètement la géométrie d'une courbe, par conséquent les formules de Serret-Frenet contrôlent toute la théorie des courbes.

**Preuve.** Le vecteur tangent  $\mathbf{T}(u)$  est une fonction de classe  $C^1$  du paramètre  $u$  car la courbe est supposée de classe  $C^2$ . Le vecteur normal principal  $\mathbf{N}(u)$  est une fonction de classe  $C^1$  par hypothèse et le vecteur binormal est une fonction de classe  $C^1$  car  $\mathbf{B}(u) = \mathbf{T}(u) \times \mathbf{N}(u)$ .

La première équation est une conséquence immédiate des égalités

$$\dot{\mathbf{T}}(u) = V_\gamma(u) \mathbf{K}(u) = V_\gamma(u) \kappa(u) \mathbf{N}(u).$$

Pour prouver la deuxième équation, on remarque d'abord que

$$\dot{\mathbf{N}}(u) = \langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{T}(u) \rangle \mathbf{T}(u) + \langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{N}(u) \rangle \mathbf{N}(u) + \langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{B}(u) \rangle \mathbf{B}(u),$$

car  $\{\mathbf{T}_\gamma(u), \mathbf{N}_\gamma(u), \mathbf{B}_\gamma(u)\}$  est un repère orthonormé. D'autre part, on a  $\langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{N}(u) \rangle = 0$  car la norme de  $\mathbf{N}(u)$  est constante et

$$\langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{T}(u) \rangle \mathbf{T}(u) = -\langle \mathbf{N}(u), \dot{\mathbf{T}}(u) \rangle \mathbf{T}(u) = -V_\gamma(u) \kappa(u) \mathbf{T}(u).$$

On a donc

$$\dot{\mathbf{N}}(u) = -V_\gamma(u) \kappa(u) \mathbf{T}(u) + V_\gamma(u) \tau(u) \mathbf{B}(u),$$

car  $\langle \dot{\mathbf{N}}(u), \mathbf{B}(u) \rangle = V_\gamma(u) \tau(u)$  par définition de la torsion.

Pour prouver la troisième équation, on part de

$$\dot{\mathbf{B}}(u) = \langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{T}(u) \rangle \mathbf{T}(u) + \langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{N}(u) \rangle \mathbf{N}(u) + \langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{B}(u) \rangle \mathbf{B}(u),$$

on a  $\langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{B}(u) \rangle = 0$  car  $\|\mathbf{B}\|$  est constante et

$$\langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{T}(u) \rangle = -\langle \mathbf{B}(u), \dot{\mathbf{T}}(u) \rangle = -V_\gamma(u) \kappa(u) \langle \mathbf{B}(u), \mathbf{N}(u) \rangle = 0.$$

Donc

$$\dot{\mathbf{B}}(u) = \langle \dot{\mathbf{B}}(u), \mathbf{N}(u) \rangle \mathbf{N}(u) = -\langle \mathbf{B}(u), \dot{\mathbf{N}}(u) \rangle \mathbf{N}(u) = -V_\gamma(u) \tau(u) \mathbf{N}(u).$$

Le théorème est démontré. □

**Exemple.** Rappelons que l'*hélice circulaire* est la courbe  $\gamma(u) = (a \cos(u), a \sin(u), b u)$ , on a

$$\dot{\gamma}(u) = (-a \sin(u), a \cos(u), b), \quad \ddot{\gamma}(u) = a(-\cos(u), -\sin(u), 0) \quad \text{et} \quad V_\gamma = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dans la suite, on suppose  $a > 0$  et on notera  $c := V_\gamma = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Le repère de Frenet est donc

$$\mathbf{T} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -a \sin(u) \\ a \cos(u) \\ b \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} = - \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} b \sin(u) \\ -b \cos(u) \\ a \end{pmatrix}$$

On trouve la courbure et la torsion en dérivant  $\mathbf{N}$  :

$$\kappa = -\frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{N}}, \mathbf{T} \rangle = \frac{a}{c^2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{c} \langle \dot{\mathbf{N}}, \mathbf{B} \rangle = \frac{b}{c^2}.$$

Les résultats qui suivent donnent une interprétation géométrique de la torsion.

**Proposition 2.21** *Une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  régulière au sens de Frenet est située dans un plan si et seulement si  $\tau_\gamma(u) = 0$  pour tout  $u \in I$ .*

**Preuve.** Il est clair à partir du Lemme 2.19 que si la courbe  $\gamma$  est située dans un plan  $\Pi$ , alors le vecteur binormal est constant (c'est l'un des deux vecteurs unitaires orthogonal à  $\Pi$ ). La troisième formule de Serret-Frenet entraîne alors que  $\tau_\gamma(u) = 0$ .

Réciproquement, supposons  $\tau(u) \equiv 0$ , alors par la troisième formule de Frenet, le vecteur  $\mathbf{B}(u) = \mathbf{B}$  est constant. Posons alors

$$h(u) := \langle \gamma(u) - \gamma(u_0), \mathbf{B} \rangle,$$

et remarquons que

$$\frac{dh}{du} := \langle \dot{\gamma}(u), \mathbf{B} \rangle = V_\gamma(u) \langle \mathbf{T}(u), \mathbf{B} \rangle = 0.$$

Par conséquent  $h$  est constante, et comme  $h(u_0) = 0$ , la fonction  $h$  est identiquement nulle, ce qui montre que la courbe  $\gamma$  est contenue dans le plan d'équation

$$\langle \mathbf{x} - \gamma(u_0), \mathbf{B} \rangle = 0,$$

c'est-à-dire le plan orthogonal à  $\mathbf{B}$  passant par  $\gamma(u_0)$ . □

### 2.10.1 Variation angulaire du plan osculateur

**Proposition 2.22** *La torsion d'une courbe régulière au sens de Frenet est la variation angulaire de la direction de son vecteur binormal.*

Plus précisément, soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe régulière au sens de Frenet et notons

$$\theta(s_0, s) := \angle(\mathbf{B}(s_0), \mathbf{B}(s)),$$

alors

$$|\tau(s_0)| = \|\dot{\mathbf{B}}(s_0)\| = \lim_{s \rightarrow s_0+} \frac{\theta(s_0, s)}{s - s_0}.$$

La preuve est la même que celle de la Proposition 2.15. formule (2.5).

Remarquer que  $\theta(s_0, s)$  représente aussi l'angle entre les plans osculateurs de la courbe en  $s_0$  et en  $s$ . On a

## 2.10.2 Courbes de pente constante

**Définition.** On dit qu'une courbe de classe  $C^1$  dans  $\mathbb{R}^3$  est de *pente constante* si elle est régulière et si son vecteur tangent fait un angle constant avec une direction fixe. Une telle courbe s'appelle aussi une *hélice généralisée*.

**Théorème 2.23** Une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  régulière au sens de Frenet est de pente constante si et seulement si le rapport

$$\frac{\tau_\gamma(u)}{\kappa_\gamma(u)}$$

est constant.

**Preuve.** On peut supposer sans perdre de généralité que  $\gamma$  est paramétrée naturellement. Supposons qu'il existe un vecteur constant non nul  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$  tel que le produit scalaire  $a = \langle \mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle$  est constant. En dérivant cette relation et en utilisant la première équation de Serret-Frenet, on trouve que

$$0 = \langle \dot{\mathbf{T}}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle = \kappa_\gamma(s) \langle \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle.$$

Nous avons supposé que la courbe est birégulière, donc sa courbure est non nulle et on a donc  $\langle \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle = 0$  pour tout  $s$ .

Ceci implique que  $b = \langle \mathbf{B}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle$  est également constant, car la troisième équation de Serret-Frenet nous dit que

$$\frac{d}{ds} \langle \mathbf{B}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle = \langle \dot{\mathbf{B}}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle = -\tau_\gamma(s) \langle \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle = 0.$$

La seconde équation de Serret-Frenet nous dit maintenant que

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \mathbf{N}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle = \langle \dot{\mathbf{N}}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle = -\kappa_\gamma(s) \langle \mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle + \tau_\gamma(s) \langle \mathbf{B}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle,$$

et donc

$$\frac{\tau_\gamma(s)}{\kappa_\gamma(s)} = \frac{\langle \mathbf{T}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle}{\langle \mathbf{B}_\gamma(s), \mathbf{A} \rangle} = \frac{a}{b}$$

est constante.

Supposons inversement que  $\lambda := \frac{\tau_\gamma(s)}{\kappa_\gamma(s)}$  est constant et considérons le champ de vecteurs

$$\mathbf{A}(s) := \lambda \mathbf{T}_\gamma(s) + \mathbf{B}_\gamma(s).$$

Il est clair que l'angle entre  $\mathbf{T}_\gamma$  et  $\mathbf{A}$  est constant car  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{T}_\gamma \rangle = \lambda$ . Vérifions que ce vecteur est constant :

$$\frac{d}{ds} \mathbf{A} = \lambda \dot{\mathbf{T}}_\gamma + \dot{\mathbf{B}}_\gamma = \lambda \kappa_\gamma(s) \mathbf{N}_\gamma - \tau_\gamma(s) \mathbf{N}_\gamma = 0.$$

La preuve de la proposition est complète. □

**Remarque.** La preuve montre que pour une courbe de pente constante, l'angle  $\theta$  entre le vecteur tangent  $\mathbf{T}_\gamma$  et la direction fixe  $\mathbf{A}$  est donné par

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle}{\|\mathbf{T}(u)\| \|\mathbf{A}(u)\|} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{\tau_\gamma}{\sqrt{\kappa_\gamma^2 + \tau_\gamma^2}}.$$

On remarque aussi que le vecteur  $\mathbf{A}$  appartient au plan rectifiant de  $\gamma$ .

### 2.10.3 Le théorème fondamental de la théorie des courbes de $\mathbb{R}^3$ .

Le *théorème fondamental* de la théorie des courbes de  $\mathbb{R}^3$  dit que l'on peut prescrire arbitrairement la courbure et la torsion d'une courbe birégulière de  $\mathbb{R}^3$ . Cette courbe est unique à un déplacement près.

**Théorème 2.24** *Si  $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions continues et si  $\kappa(s) > 0$  pour tout  $s \in I$ , alors il existe une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , régulière au sens de Frenet, paramétrée naturellement et telle que*

$$\kappa_\gamma(s) = \kappa(s) \quad \text{et} \quad \tau_\gamma(s) = \tau(s)$$

*pour tout  $s$ . Cette courbe est unique à un déplacement près.*

Par exemple toute courbe de  $\mathbb{R}^3$  ayant courbure constante  $\kappa > 0$  et torsion constante  $\tau \neq 0$  est isométrique à une hélice.

**Démonstration.** Nous prouvons d'abord l'unicité. Supposons que  $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  sont deux courbes régulières au sens de Frenet, paramétrées naturellement et dont la courbure et la torsion valent respectivement  $\kappa(s)$  et  $\tau(s)$ . Notons  $\{\mathbf{T}_1(s), \mathbf{N}_1(s), \mathbf{B}_1(s)\}$  et  $\{\mathbf{T}_2(s), \mathbf{N}_2(s), \mathbf{B}_2(s)\}$  leur repère de Frenet respectifs.

Sans perdre de généralité, on peut supposer que l'intervalle  $I$  contient 0. Quitte à composer l'une ou l'autre (ou les deux) courbes par un déplacement, on peut supposer que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$  et qu'en  $s = 0$  les deux repères de Frenet coïncident avec la base canonique  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Notons alors  $\mathbf{F}_i(s) \in SO(3)$  la matrice orthogonale dont les colonnes sont les composantes des vecteurs  $\mathbf{T}_i(s), \mathbf{N}_i(s), \mathbf{B}_i(s)$  pour  $i = 1, 2$ . Les équations de Serret-Frenet s'écrivent alors

$$\frac{d}{ds} \mathbf{F}_i(s) = \mathbf{F}_i(s) \Omega(s), \quad \text{où} \quad \Omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2^{-1}) &= \frac{d}{ds} (\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2^\top) = \dot{\mathbf{F}}_1 \mathbf{F}_2^\top + \mathbf{F}_1 \dot{\mathbf{F}}_2^\top \\ &= (\mathbf{F}_1 \Omega) \mathbf{F}_2^\top + \mathbf{F}_1 (\mathbf{F}_2 \Omega)^\top \\ &= \mathbf{F}_1 \Omega \mathbf{F}_2^\top + \mathbf{F}_1 \Omega^\top \mathbf{F}_2^\top \\ &= 0, \end{aligned}$$

car la matrice  $\Omega$  est antisymétrique, i.e.  $\Omega^\top = -\Omega$ . Par conséquent la matrice  $\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2^{-1}$  est constante. Mais on a supposé que  $\mathbf{F}_1(0) = \mathbf{F}_2(0) = \mathbf{I}_3$  (la matrice identité). Donc  $\mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)^{-1} = \mathbf{I}_3$  pour tout c'est-à-dire  $\mathbf{F}_1(s) = \mathbf{F}_2(s)$ . En particulier  $\mathbf{T}_1(s) = \mathbf{T}_2(s)$  pour tout  $s$  et donc

$$\gamma_1(s) = \int_0^s \mathbf{T}_1(u)du = \int_0^s \mathbf{T}_2(u)du = \gamma_2(s).$$

Prouvons maintenant l'existence. Pour cela on se donne deux fonctions continues  $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  et on considère le problème de Cauchy

$$\frac{d}{ds}\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}(s)\Omega(s), \quad \mathbf{F}(0) = \mathbf{I}_3, \quad (2.8)$$

où  $\Omega(s)$  est la matrice définie plus haut. Le théorème de Cauchy–Lipschitz global (théorème 9.37 dans le cours d'analyse II) nous dit qu'il existe une solution globale  $\mathbf{F} : I \rightarrow M_3(\mathbb{R})$  de classe  $C^1$  de ce problème. Nous affirmons que  $\mathbf{F}(s) \in SO(3)$  pour tout  $s$ . En effet, on a

$$\frac{d}{ds}\mathbf{F}\mathbf{F}^\top = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^\top + \mathbf{F}\dot{\mathbf{F}}^\top = \mathbf{F}\Omega\mathbf{F}^\top + \mathbf{F}\Omega^\top\mathbf{F}^\top = 0$$

par antisymétrie de  $\Omega$ . Or  $\mathbf{F}(0)\mathbf{F}^\top(0) = \mathbf{I}_3$  (à cause de la condition initiale dans (2.8)), donc  $\mathbf{F}(s)\mathbf{F}^\top(s) = \mathbf{I}_3$  pour tout  $s \in I$ , ce qui signifie que  $\mathbf{F}(s) \in SO(3)$ .

Notons respectivement  $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$  les trois colonnes de la matrice  $\mathbf{F}(s)$  et définissons  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  par

$$\gamma(s) = \int_0^s \mathbf{T}(u)du.$$

Alors  $\gamma$  est clairement une courbe de classe  $C^2$  car  $s \rightarrow \mathbf{T}(s)$  est de classe  $C^1$ , De plus cette courbe est paramétrée naturellement puisque  $\dot{\gamma}(s) = \mathbf{T}(s)$  est un vecteur unitaire. L'équation différentielle (2.8) est équivalente aux équations de Serret-Frenet. Cela implique que implique que  $s \rightarrow \mathbf{N}(s)$  est aussi de classe  $C^1$  et que la courbure et la torsion de  $\gamma$  sont données par les fonctions  $\kappa$  et  $\tau$ , ce qui complète notre démonstration. □



## 2.11 Courbes dans un plan orienté

Le repère de Frenet et la courbure d'une courbe dans un plan orienté est défini en tenant compte de l'orientation du plan :

**Définition.** (a) Le *repère de Frenet orienté* d'une courbe régulière  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  dans le plan orienté est le repère mobile d'origine  $\gamma(u)$  et formé par les deux vecteurs

$$\mathbf{T}_\gamma(u) = \frac{\dot{\gamma}(u)}{V_\gamma(u)}, \quad \mathbf{N}_\gamma^{\text{or}}(u) = \mathbf{J}(\mathbf{T}_\gamma(u)),$$

où  $\mathbf{J}$  est l'opérateur de rotation défini au paragraphe (1.7). (b) La *courbure orientée* de  $\gamma$  en  $u$  est définie par

$$\kappa_\gamma^{\text{or}}(u) = \frac{1}{V_\gamma(u)} \langle \dot{\mathbf{T}}_\gamma(u), \mathbf{N}_\gamma^{\text{or}}(u) \rangle.$$

**Remarques.**

- (i) Le repère  $\{\mathbf{T}_\gamma(u), \mathbf{N}_\gamma^{\text{or}}(u)\}$  est un repère orthonormé direct.
- (ii) La courbure non orientée de  $\gamma$  est égale à la valeur absolue de  $\kappa_\gamma^{\text{or}}(u)$ .
- (iii) La courbure orientée peut aussi s'écrire

$$\kappa_\gamma^{\text{or}}(u) = \frac{\mathbf{T}_\gamma(u) \wedge \dot{\mathbf{T}}_\gamma(u)}{V_\gamma(u)}.$$

- (iv) Si la courbe  $\gamma$  est birégulière, on a

$$\kappa_\gamma^{\text{or}}(u) \mathbf{N}_\gamma^{\text{or}}(u) = \kappa_\gamma(u) \mathbf{N}_\gamma(u) = \mathbf{K}_\gamma(u) \quad (= \text{le vecteur de courbure}).$$

Cette égalité vient du fait que si on change l'orientation du plan, alors  $\kappa_\gamma^{\text{or}}(u)$  et  $\mathbf{N}_\gamma^{\text{or}}(u)$  changent tous les deux de signe.

Dans la suite de ce paragraphe, nous n'utiliserons que le vecteur normal orienté, nous noterons donc  $\mathbf{N}_\gamma(u)$  au lieu de  $\mathbf{N}_\gamma^{\text{or}}(u)$ , nous noterons aussi  $k_\gamma(u)$  pour la courbure orientée.

**Proposition 2.25** *Avec ces notations, les formules de Serret-Frenet pour une courbe plane de classe  $C^2$  s'écrivent*

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_\gamma} \frac{d}{du} \mathbf{T}_\gamma(u) &= k_\gamma(u) \mathbf{N}_\gamma(u) \\ \frac{1}{V_\gamma} \frac{d}{du} \mathbf{N}_\gamma(u) &= -k_\gamma(u) \mathbf{T}_\gamma(u). \end{aligned}$$

**Preuve.** On a d'une part

$$\dot{\mathbf{T}} = \langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T} + \langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} = \langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} = V k \mathbf{N}.$$

par définition de la courbure orientée  $k$  (et en utilisant  $\langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{T} \rangle = 0$ ). D'autre part

$$\dot{\mathbf{N}} = \langle \dot{\mathbf{N}}, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T} + \langle \dot{\mathbf{N}}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N} = \langle \dot{\mathbf{N}}, \mathbf{T} \rangle \mathbf{T} = -\langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{T} = -V k \mathbf{T}.$$

□

**Proposition 2.26** La courbure orientée d'une courbe plane  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  est donnée par

$$k_\gamma(u) = \frac{\dot{\gamma}(u) \wedge \ddot{\gamma}(u)}{V_\gamma^3(u)}.$$

**Preuve.** On a

$$\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} = (V\mathbf{T}) \wedge (\dot{V}\mathbf{T} + V^2k\mathbf{N}) = V^3k,$$

car  $\mathbf{T} \wedge \mathbf{T} = 0$  et  $\mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = 1$ .

□

La courbure orientée de  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  est donc donnée par

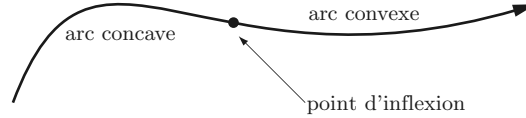
$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

en particulier, si  $\gamma$  est le graphe de la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e.  $\gamma(x) = (x, f(x))$ , alors on a

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

**Définitions.** On dit qu'un arc  $\gamma(u)$  ( $a < u < b$ ) est *convexe* si la courbure orientée  $k_\gamma$  est positive sur cet arc. L'arc est *concave* si la courbure orientée est négative. Un *point d'inflexion* est un point séparant un arc convexe d'un arc concave (en particulier la courbure est nulle en un point d'inflexion).

On dit qu'un arc est une *spirale* si la courbure est non nulle et monotone sur cet arc. Un point de la courbe est un *sommet* si c'est un maximum local ou un minimum local de la courbure.



## La fonction angulaire

La fonction angulaire mesure l'inclinaison en chaque point d'une courbe (par rapport à la direction horizontale).

**Définition.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière de classe  $C^1$ . La *fonction angulaire* de la courbe  $\gamma$  avec point initial  $p = \gamma(u_0)$  est la fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- (a)  $\varphi(u_0)$  est l'angle orienté entre  $\dot{\gamma}(u)$  et le vecteur  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ .
- (b)  $\varphi$  est continue.
- (c) L'angle orienté entre  $\dot{\gamma}(u)$  et  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  est égal à  $\varphi(u)$  modulo  $2\pi$  pour tout  $u \in [a, b]$

REMARQUE. Dans le concept de fonction angulaire d'une courbe plane, on n'identifie pas  $\varphi(u)$  à  $\varphi(u) + 2\pi$ . Au contraire, le paramètre angulaire mesure le nombre de tours effectués (entre  $u_0$  et  $u$ ) par le vecteur tangent. Ce nombre peut être supérieur à  $2\pi$ .

Le nombre  $\varphi(b) - \varphi(a)$  est la *variation angulaire totale* de la courbe. Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe périodique (i.e. une courbe fermée régulière), alors le nombre entier

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}$$

s'appelle le *nombre de rotations* de  $\gamma$ .

**Lemme 2.27** *Le repère de Frenet orienté d'une courbe régulière  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  peut s'écrire*

$$\mathbf{T}_\gamma(u) = (\cos(\varphi(u)), \sin(\varphi(u))) \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_\gamma(u) = (-\sin(\varphi(u)), \cos(\varphi(u))),$$

où  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction angulaire de  $\gamma$ .

**Preuve.** La formule pour  $\mathbf{T}$  est évidente, puisque  $\varphi$  (modulo  $2\pi$ ) mesure l'angle du vecteur tangent  $\mathbf{T}$  avec  $\mathbf{e}_1$ . La formule pour  $\mathbf{N}$  se déduit alors de la définition  $\mathbf{N} = \mathbf{J}(\mathbf{T})$ . □

**Théorème 2.28** *La courbure orientée d'une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  vérifie*

$$k_\gamma(u) = \frac{1}{V_\gamma(u)} \frac{d\varphi}{du}.$$

**Preuve.** Par le lemme précédent, on a  $\dot{\mathbf{T}} = (-\sin(\varphi(u)), \cos(\varphi(u)))\dot{\varphi}(u) = \mathbf{N}\dot{\varphi}$ , donc  $k_\gamma = \frac{1}{V} \langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{V} \dot{\varphi}$ . □

### Le diagramme de courbure

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière de classe  $C^2$ . Choisissons un point initial sur  $\gamma$  et un sens de parcours. Le *diagramme de courbure* de  $\gamma$  est la courbe dans un plan de coordonnées  $s, k$  donnée par

$$u \mapsto (s(u), k(u)),$$

où  $s(u)$  est l'abscisse curviligne de  $\gamma$  correspondant aux choix du point initial et du sens de parcours, et  $k$  est la courbure orientée.

Le diagramme de courbure est toujours un graphe (c'est le graphe de la fonction courbure  $k = k(s)$  exprimée à partir de l'abscisse curviligne).

Les éléments de la courbe  $\gamma$  que l'on peut facilement mettre en correspondance avec le diagramme de courbure sont :

- sa longueur  $\ell(\gamma)$  ;
- le signe de la courbure ;
- les points d'inflexions de  $\gamma$  (ce sont les points où  $k(s)$  change de signe) ;
- les sommets de  $\gamma$  (i.e. les points où  $\frac{dk}{du} = 0$ ).

D'autre part, l'aire  $\int_0^\ell k(s)ds = \int_0^\ell d\varphi$  limitée par le diagramme de courbure correspond à la variation angulaire totale de la courbe.

Hormis la position de la courbe dans le plan, le diagramme de courbure contient toutes les informations géométriques sur une courbe.

**Théorème 2.29 (Théorème fondamental de la théorie des courbes planes)** *Toute fonction continue  $k : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  est la courbure orientée d'une courbe plane de classe  $C^2$  paramétrée naturellement. Cette courbe est unique à un déplacement près.*

**Preuve.** Montrons d'abord l'unicité. Supposons que  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe de classe  $C^2$  paramétrée naturellement dont la courbure orientée est  $k(s)$ . Le vecteur tangent est donné par

$$\mathbf{T}(s) = \dot{\gamma}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = (\cos(\varphi(s)), \sin(\varphi(s)))$$

où  $\varphi : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction angulaire. Les trois fonctions  $(x(s), y(s), \varphi(s))$  forment alors une solution du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos(\varphi) \\ \frac{dy}{ds} = \sin(\varphi) \\ \frac{d\varphi}{ds} = k(s) \end{cases} .$$

La courbe  $\gamma$  est donc déterminée à partir de la fonction  $k(s)$  en résolvant ces équations. Pour résoudre ce système, on calcule  $\varphi$  par intégration :  $\varphi(s) = \varphi_0 + \int_0^s k(\sigma)d\sigma$ . Puis on trouve  $x(s)$  et  $y(s)$  par une nouvelle intégration :

$$x(s) = x_0 + \int_0^s \cos(\varphi(\sigma))d\sigma \quad , \quad y(s) = y_0 + \int_0^s \sin(\varphi(\sigma))d\sigma$$

les constantes  $x_0, y_0$ , et  $\varphi_0$  sont des constantes d'intégration et peuvent être choisies arbitrairement (ce sont les *conditions initiales* du système d'équations différentielles).

En changeant les valeurs de  $x_0$  et  $y_0$ , on modifie la courbe par une translation ; si l'on change  $\varphi_0$ , alors la courbe  $\gamma$  subit une rotation. L'argument montre à la fois l'existence et l'unicité de la courbe  $\gamma$  à un déplacement près.

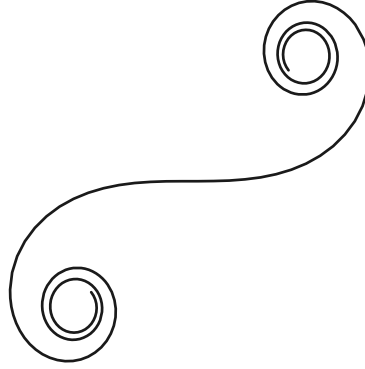
□

**REMARQUE.** La relation  $k = k(s)$  entre l'abscisse curviligne et la courbure orientée s'appelle l'*équation intrinsèque* de la courbe. Elle contient la même information que le diagramme de courbure.

**Exemple 2.5** Considérons la courbe dont le diagramme de courbure est une droite (i.e. l'équation intrinsèque est linéaire :  $k(s) = ms + n$ ). Alors la fonction angulaire est donnée par

$$\varphi(s) = \int k(s) ds = \frac{m}{2}s^2 + ns + c ,$$

la courbe est donc donnée par



Chlotoïde.

$$x(s) = \int \cos\left(\frac{m}{2}s^2 + ns + c\right) ds, \quad y(s) = \int \sin\left(\frac{m}{2}s^2 + ns + c\right) ds.$$

Ces intégrales s'appellent les *fonctions de Fresnel*. Elles ne peuvent pas être exprimées à partir des fonctions élémentaires.

Cette courbe s'appelle une *chlotoïde* ou *spirale de Cornu*, elle permet par exemple de passer d'une droite à un cercle sans discontinuité de la courbure. Pour cette raison, elle est utilisée dans la conception des tracés ferroviaires ou autoroutiers.

## 2.12 Le théorème des quatre sommets

**Définition.** On dit que  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une *courbe fermée de classe  $C^m$*  si la fonction  $\gamma$  peut s'étendre à un intervalle ouvert  $[a - \epsilon, b + \epsilon]$  et si on a

$$\frac{d^k \gamma}{du^k}(a) = \frac{d^k \gamma}{du^k}(b),$$

pour  $0 \leq k \leq m$ . On dit aussi que  $\gamma$  est une courbe *périodique* de classe  $C^m$  car on peut l'étendre en une fonction périodique  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de période  $(b - a)$ .

En particulier, si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe fermée de classe  $C^1$  alors  $\gamma(a) = \gamma(b)$  et  $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$ . Le vecteur vitesse est donc le même en  $t = a$  et en  $t = b$ . Et si la courbe est fermée de classe  $C^2$ , alors la courbure en  $t = a$  est égale à la courbure en  $t = b$ .

**Théorème 2.30** *Toute courbe fermée de classe  $C^3$  dans un plan orienté possède au moins quatre sommets.*

On rappelle qu'un sommet est d'une courbe de classe  $C^2$  est un maximum local ou un minimum local de la courbure orientée. À titre d'exemple, une ellipse possède deux minimums et deux maximums de courbure.

La preuve utilisera le lemme suivant :

**Lemme 2.31** Soit  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe fermée de classe  $C^3$  paramétrée naturellement. Alors

$$\int_0^\ell x(s) \dot{k}(s) ds = \int_0^\ell y(s) \dot{k}(s) ds = 0.$$

**Preuve du Lemme.** Examinons la seconde intégrale, on a

$$\int_0^\ell y(s) \dot{k}(s) ds = - \int_0^\ell \dot{y}(s) k(s) ds = \int_0^\ell \ddot{x}(s) ds = 0.$$

En effet la première égalité est une intégration par parties, la seconde égalité vient de la relation  $\ddot{x} = -ky$  qui se déduit des équations de Serret-Frenet et la dernière égalité est évidente.  $\square$

**Preuve du Théorème.** La preuve dans le cas général est assez complexe, nous ne la donnerons que dans le cas où la courbe est le bord d'un domaine convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Par hypothèse,  $\gamma$  est une courbe fermée de classe  $C^3$ , par conséquent la dérivée de la courbure vérifie  $\dot{k}(0) = \dot{k}(\ell)$  et la fonction  $k(s)$  doit donc avoir au moins un maximum local et un minimum local. Nous allons d'abord prouver par l'absurde que  $k(s)$  doit avoir au moins un troisième extremum local.

Supposons donc par l'absurde que  $k(s)$  a exactement deux extremum locaux, et faisons également les hypothèses suivantes sans perte de généralité :

1. On suppose que  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est paramétrée naturellement.
2. Le minimum local de  $k(s)$  est en  $s = 0$  et le maximum local est en  $s_0 \in (0, \ell)$ .
3.  $\gamma(0) = (0, 0)$  et  $\gamma(s_0) = (x_0, 0)$ .

Ces hypothèses entraînent que  $k(s)$  est strictement croissante sur l'intervalle  $(0, s_0)$  et strictement décroissante sur  $(s_0, \ell)$ . Donc  $\dot{k}(s) > 0$  sur le premier intervalle et  $\dot{k}(s) < 0$  sur le deuxième intervalle.

Puisque  $\gamma$  borde un domaine convexe, les deux arcs  $\gamma|_{[0, s_0]}$  et  $\gamma|_{[s_0, \ell]}$  sont situés l'un dans le demi-plan  $\{y \geq 0\}$  et l'autre dans le demi-plan  $\{y \leq 0\}$ . Supposons par exemple que  $y(s) > 0$  sur l'intervalle  $(0, s_0)$  et  $y(s) < 0$  sur l'intervalle  $(s_0, \ell)$ , alors nous avons  $y(s)\dot{k}(s) > 0$  pour tous  $s \notin \{0, s_0\}$ . Mais ceci entre en contradiction avec le lemme précédent car ce lemme implique que

$$\int_0^{s_0} y(s) \dot{k}(s) ds = - \int_{s_0}^\ell y(s) \dot{k}(s) ds.$$

L'argument est le même (avec le signe opposé) si  $y(s) < 0$  sur l'intervalle  $(0, s_0)$  et  $y(s) > 0$  sur  $(s_0, \ell)$ .

Nous avons montré que  $\dot{k}(s)$  doit au moins s'annuler trois fois, mais comme on a  $\dot{k}(0) = \dot{k}(\ell)$ , cette fonction ne peut pas avoir un nombre impair de changements de signe. Il y a donc au moins quatre points où  $\dot{k}(s) = 0$ .  $\square$

## Chapitre 3

# Calcul différentiel et Sous-Variétés différentiables de $\mathbb{R}^n$

Les sous-variétés différentiables sont des parties de  $\mathbb{R}^n$  qui généralisent les courbes et surfaces en toutes dimensions et codimensions. On les suppose assez régulières pour qu'on puisse appliquer les concepts et outils du calcul différentiel.

### 3.1 Rappels de calcul différentiel

#### 3.1.1 Dérivées directionnelles et dérivées partielles

Soit  $U$  un domaine de  $\mathbb{R}^m$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application. Pour un point  $p$  de  $U$  et un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  on définit la *dérivée directionnelle de  $f$  en direction de  $v$  au point  $p$*  par

$$D_v f(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + tv) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

si cette limite existe.

Si  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^m$  et  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont les coordonnées associées (i.e. un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  s'écrit  $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$ ), alors la dérivée directionnelle de  $f$  en direction du vecteur  $e_i$  s'appelle la *dérivée partielle de  $f$  au point  $p$  en direction de la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée* (ou en direction du vecteur  $e_i$ ), et on note

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = D_{e_i} f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

**Remarque.** Il est important de noter que l'existence des dérivées partielles d'une fonction en un point donné ne garantit pas l'existence des dérivées directionnelles dans toutes les directions. Par exemple la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/4}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue et possède les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ , mais la dérivée directionnelle en  $(0, 0)$  en direction de  $v = (v_1, v_2)$  n'existe pas si  $v_1$  et  $v_2$  sont non nuls car

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 v_1 v_2}{t((tv_1)^2 + (tv_2)^2)^{3/4}} = \frac{v_1 v_2}{(v_1^2 + v_2^2)^{3/4}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t}} = \pm\infty.$$

### 3.1.2 Applications de classe $C^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

On dit que l'application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est *de classe  $C^1$*  si elle est continue et si toutes les dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

existent en tout point de  $U$  et sont continues. La fonction est de classe  $C^k$  ( $k$  un entier  $\geq 2$ ) si les  $n + 1$  fonctions  $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont de classe  $C^{k-1}$ .

On note  $C^0(U, \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des applications continues sur  $U$  et  $C^k(U, \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des applications de classe  $C^k$ . Une application est de classe  $C^\infty$  si elle est de classe  $C^k$  pour tout  $k$  et on note  $C^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(U, \mathbb{R}^n)$ . On dit parfois que  $f$  est *lisse* si  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ .

Lorsque  $n = 1$ , i.e. lorsque  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  on note simplement  $C^k(U) = C^k(U, \mathbb{R})$ , on appelle les éléments de  $C^k(U)$  des *fonctions* (ainsi les fonctions sont les applications à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ).

La matrice à  $n$  lignes et  $m$  colonnes

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

s'appelle la *matrice Jacobienne* de  $f$ . Noter que c'est une fonction du point  $p \in U$ . Lorsque  $n = m$ , le déterminant de cette matrice est alors bien défini, on l'appelle le *Jacobien* de  $f$  et on note<sup>1</sup>

$$J_f(p) = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

**Définitions.** 1. Un *difféomorphisme* de classe  $C^k$  entre deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  est une application bijective  $f : U \rightarrow V$  telle que  $f$  et  $f^{-1}$  sont de classe  $C^k$  (lorsque  $k = 0$ ,  $f$  est simplement un homéomorphisme).

2. Une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est *difféomorphisme local* de classe  $C^k$  en  $p$  si  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$  et s'il existe un voisinage ouvert  $U' \subset U$  de  $p$  tel que  $V' = f(U')$  est ouvert et la restriction  $f|_{U'}$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $U'$  sur  $V'$ .

3. Finalement on dit que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un *difféomorphisme local* si c'est un difféomorphisme local en chaque point de  $U$ .

Observer qu'un difféomorphisme local n'est pas forcément une application injective (ni surjective d'ailleurs).

---

1. Une autre notation, un peu désuète mais assez explicite, est

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right).$$



**Remarque.** Un homéomorphisme de classe  $C^k$  n'est pas toujours un difféomorphisme. Par exemple la fonction  $f(x) = x^3$  décrit un homéomorphisme  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  mais l'inverse  $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$  n'est pas dérivable en  $y = 0$ .

Il y a deux façons de concevoir un difféomorphisme  $f : U \rightarrow V$ . Dans le premier point de vue, on considère que  $f$  déplace les points de  $U$  (éventuellement en déformant l'ensemble  $U$ ). Ainsi si  $p$  est un point de  $U$ , on considère que  $q = f(p)$  est un autre point qui appartient à  $V$ .

Dans le second point de vue, les points ne "bougent" pas, mais on considère que  $(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  représente un nouveau système de coordonnées sur  $U$ . Ceci nous mène à la définition suivante :

**Définition.** Un système de coordonnées de classe  $C^k$  sur l'ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  est la donnée de  $n$  fonctions  $y_1, y_2, \dots, y_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\phi : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

décrit un difféomorphisme de  $U$  vers un ouvert  $V = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ .

### 3.1.3 Applications Différentiables au sens de Frechet

**Définition.** L'application  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est *différentiable au sens de Frechet* en  $p \in U$  s'il existe une application linéaire  $\ell : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que

$$f(x) - f(p) - \ell(x - p) = o(\|x - p\|)$$

On peut réécrire cette condition sous la forme

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\|f(x) - f(p) - \ell(x - p)\|}{\|x - p\|} = 0.$$

Intuitivement, une application  $f$  est donc différentiable (au sens de Frechet) en  $p$  si  $f(x) - f(p)$  est tangente à une application linéaire :

**Lemme 3.1.1.** *Si elle existe, l'application linéaire de la définition précédente est unique.*

**Preuve.** Supposons que  $\ell_1$  et  $\ell_2$  soient deux applications linéaires telles que

$$f(x) - f(p) - \ell_1(x - p) = f(x) - f(p) - \ell_2(x - p) = o(\|x - p\|).$$

Soit  $v$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^n$  et  $t \in \mathbb{R}$  un réel assez petit pour que  $x + tv \in U$ , alors on a

$$f(p + tv) - f(p) - \ell_1(tv) = f(p + tv) - f(p) - \ell_2(tv) = o(\|tv\|) = o(t),$$

et donc

$$t(\ell_1(v) - \ell_2(v)) = \ell_1(tv) - \ell_2(tv) = o(t),$$

ce qui implique que  $\ell_1(v) - \ell_2(v) = 0$ .

□

On appelle alors cette application la *différentielle* de  $f$  en  $p$  et on note<sup>2</sup>

$$df_p := \ell.$$

**Remarque.** Il est fréquent de noter  $h$  le vecteur  $h = x - p$ . On pense alors à  $h$  comme un “accroissement de  $p$ ”. On a alors

$$f(p + h) = f(p) + df_p(h) + o(\|h\|).$$

On remarque aussi que  $df_p(h)$  peut se calculer par la formule suivante :

$$df_p(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(p + th) - f(p)}{t} \right) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + th),$$

Il s’agit donc de la dérivée directionnelle de  $f$  au point  $p$  en direction de  $h$ .

## Exemples

- (i) Si  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert, alors  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $p \in I$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $p$  et

$$df_p(h) = f'(p) \cdot h.$$

- (ii) Soit  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application affine, i.e. une application du type  $f(x) = Ax + b$  (où  $A$  une  $n \times m$  matrice à coefficients réels). Alors  $f$  est différentiable en tout point et  $df_p = A$  pour tout  $p \in \mathbb{R}^m$ .

- (iii) Si  $\beta : E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$  est une application bilinéaire (où  $E_i$  sont des espaces normés de dimension finies), alors

$$d\beta_{(p_1, p_2)}(h_1, h_2) = \beta(p_1, h_2) + \beta(h_1, p_2)$$

- (iv) Considérons l’application  $\psi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  définie par  $\psi(A) = A^2$ , alors

$$d\psi_A(H) = AH + HA.$$

- (v) L’application  $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  définie par  $\phi(A) = A^{-1}$  est différentiable et on a

$$d\phi_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

- (vi) La différentielle de l’application  $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par

$$d\det_A(H) = \text{Trace}(\text{Cof}(A)^\top H).$$

où  $\text{Cof}(A)$  est la matrice des cofacteurs de  $A$ .

**Proposition 3.1.2** (Différentiation en chaîne). *Soient  $U \in \mathbb{R}^m$ ,  $V \in \mathbb{R}^n$  deux ouverts et  $f : U \rightarrow V$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^s$  deux applications telles que  $f$  est Fréchet différentiable en  $p \in U$  et  $g$  est Fréchet différentiable en  $q = f(p) \in V$ , alors  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^s$  est Fréchet différentiable en  $p$  et*

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p$$

---

2. La notation  $Df_p$  est également souvent utilisée, mais nous préférons garder cette notation pour la matrice jacobienne.

Cette proposition est l'une des raisons qui rend la notion de différentiabilité au sens de Fréchet efficace et importante.

**Preuve.** Par hypothèse, on a

$$f(p+h) - f(p) = df_p(h) + o(\|h\|) \quad \text{et} \quad g(q+k) - g(q) = dg_q(k) + o(\|k\|).$$

Donc

$$\begin{aligned} g \circ f(p+h) - g \circ f(p) &= g \circ f(p+h) - g(q) \\ &= g(f(p) + df_p(h) + o(\|h\|)) - g \circ f(p) \\ &= g(q + df_p(h) + o(\|h\|)) - g(q) \\ &= dg_q(df_p(h) + o(\|h\|)) + o(df_p(h) + o(\|h\|)) \\ &= dg_q \circ df_p(h) + o(\|h\|), \end{aligned}$$

ce qui démontre que  $d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p$ . □

**Proposition 3.1.3.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application différentiable en chaque point de  $U$  ou  $U$  est un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^m$ . Supposons que la différentielle de  $f$  soit bornée sur  $U$ , i.e. il existe  $C > 0$  tel que  $\|df_p\| \leq C$  pour tout  $p \in U$  (ici on utilise la norme d'opérateur pour  $df$ ). Alors  $f$  est  $C$ -Lipschitzienne, i.e.

$$\|f(y) - f(x)\| \leq C\|y - x\|.$$

**Preuve.** Le segment de droite reliant  $x$  à  $y$  est contenu dans le domaine  $U$  puisque celui-ci est supposé convexe. On paramétrise ce segment par  $\gamma(t) = x + t(y - x) \in U$ . On a alors

$$f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt.$$

Or la règle de dérivation en chaîne nous dit que

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = df_{\gamma(t)}(y - x),$$

donc

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| &= \left\| \int_0^1 df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|df_{\gamma(t)}(y - x)\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|df_{\gamma(t)}\| \cdot \|y - x\| dt \\ &\leq C\|y - x\|. \end{aligned}$$

**Théorème 3.1.4.** Si  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ , alors  $f$  est différentiable en tout point  $p$  de  $U$ . De plus la matrice de la différentielle  $df_p$  est la matrice Jacobienne de  $f$  en  $p$  :

$$df_p = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

**Démonstration.** On fait la preuve pour  $m = 2$ , le cas général est semblable. Écrivons

$$f(p_1 + h_1, p_2 + h_2) - f(p_1, p_2) = f(p_1 + h_1, p_2 + h_2) - f(p_1 + h_1, p_2) + f(p_1 + h_1, p_2) - f(p_1, p_2).$$

On a d'une part

$$f(p_1 + h_1, p_2) - f(p_1, p_2) = \frac{\partial f(p_1, p_2)}{\partial x_1} \cdot h_1 + o(h_1).$$

D'autre part, appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction  $\phi(t) = f(p_1 + h_1, p_2 + th_2)$ . Ce théorème nous dit qu'il existe  $s \in [0, 1]$  tel que

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(s) = h_2 \cdot \frac{\partial f(p_1 + h_1, p_2 + sh_2)}{\partial x_2},$$

c'est-à-dire

$$f(p_1 + h_1, p_2) - f(p_1, p_2) = h_2 \cdot \frac{\partial f(p_1 + h_1, sp_2 + sh_2)}{\partial x_2}.$$

Par continuité de  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ , on a

$$\frac{\partial f(p_1 + h_1, sp_2 + sh_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(p_1, p_2)}{\partial x_2} + o(h_1, h_2)$$

En regroupant toutes ces identités, on obtient

$$f(p_1 + h_1, p_2 + h_2) - f(p_1, p_2) = \frac{\partial f(p_1, p_2)}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f(p_1, p_2)}{\partial x_2} \cdot h_2 + o(h_1, h_2).$$

On a donc montré que  $f$  est différentiable en  $p$  et que

$$df_p(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot h_2. \quad (3.3)$$

Cette dernière relation signifie que la matrice de  $df$  est la matrice Jacobienne de  $f$ . □

**Corollaire 3.1.5.** Si  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ , alors l'application  $p \mapsto df_p$  est continue.

### 3.1.4 Une autre interprétation de la différentielle

La formule (3.3) suggère une autre façon de voir la différentielle d'une fonction. Remarquons d'abord que si  $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable à valeurs scalaires, alors  $dg_p$  est une forme linéaire, c'est-à-dire un élément du dual de  $\mathbb{R}^m$  pour tout point  $p$  de  $U$ . Si en particulier,  $g$  est elle-même une forme linéaire, alors on a  $dg_p = g$  pour tout point  $p$ . On a donc la remarque suivante :

Pour tout système de coordonnées linéaires  $x_1, \dots, x_m$  sur  $\mathbb{R}^m$  on a en tout point<sup>3</sup>  $dx_i|_p = x_i$ .

Ainsi pour tout vecteur  $v = v_1 e_1 + \dots + v_m e_m$ , on a

$$dx_i(v) = v_i = \langle e_i, v \rangle,$$

A condition toutefois que  $x_1, \dots, x_m$  soit le système de coordonnées linéaires associé à la base  $e_1, \dots, e_m$ .

Considérons maintenant une application différentiable  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , alors nous avons en tout point  $p$  et pour tout  $i = 1, \dots, m$  :

$$df_p(e_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Pour vecteur  $v = v_1 e_1 + \dots + v_m e_m$ , on a donc par linéarité de  $df$  :

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^m df_p(e_i) v_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i(v)$$

car  $v_i = dx_i(v)$ . On écrit cette formule sous la forme classique suivante :

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (3.4)$$

**Remarque 3.1.6.** (1) Les raisonnements précédents montrent que l'image de  $df_p$  est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(p)$ .

Ne pas oublier dans cette formule que si  $n > 1$ , alors  $f$  est une fonction à valeurs vectorielles, nous pouvons donc encore développer  $df$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \vec{u}_j dx_i,$$

où ici on a noté  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

### La notion de gradient

Considérons à nouveau une fonction différentiable  $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  à valeurs scalaires. On a vu que sa différentielle en tout point  $p$  est la forme linéaire

$$dg_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i.$$

**Définition 3.1.7.** On appelle *gradient* de  $g$  en  $p$  le vecteur dual de la forme linéaire  $dg_p$ , où la dualité est induite par le produit scalaire standard de  $\mathbb{R}^m$ . Le gradient s'écrit

$$\vec{\nabla} g(p) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i} \mathbf{e}_i,$$

---

3. Noter que cette formule ne s'applique pas pour des coordonnées curvilignes (non linéaires), on ne peut par exemple pas écrire  $dr = r$  ou  $d\theta = \theta$  dans le cas de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans le plan

et il se caractérise par la condition

$$dg_p(\mathbf{v}) = \langle \vec{\nabla} g(p), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m.$$

Notons encore que la matrice jacobienne de  $g$  en  $p$  est naturellement une matrice ligne car  $dg_p$  est un élément du dual de  $\mathbb{R}^n$ . Puisque le gradient de  $g$  est un vecteur il est représenté par une matrice colonne. Ainsi nous avons

$$dg = \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \cdots \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} g = (dg)^\perp = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

### 3.1.5 Le théorème d'inversion locale

**Théorème 3.1.8.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$  (avec  $k \geq 1$ ). Alors  $f$  est un  $C^k$ -difféomorphisme local au voisinage de  $p \in U$  si et seulement si  $J_f(p) \neq 0$ .

La preuve a été vue au cours d'analyse 2, nous la donnons ci-dessous par soucis de complétude.

**Preuve.** Quitte à remplacer  $f$  par l'application  $x \mapsto f(x - p) - f(p)$ , on se ramène au cas  $p = f(p) = 0$ . En composant ensuite  $f$  avec l'application linéaire  $df_0^{-1}$ , on peut supposer que  $df_0 = \text{Id}$ . Avec ces hypothèses, on a donc

$$f(x) = x + g(x),$$

où  $g \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$  vérifie  $g(0) = 0$  et  $dg_0 = 0$ , c'est-à-dire  $g(x) = o(\|x\|)$ .

Nous devons construire un voisinage de 0 sur lequel  $f$  est inversible. Comme  $x \mapsto dg_x$  est continu et  $dg_0 = 0$ , il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $x$  dans la boule  $B_r$  de centre 0 et de rayon  $r$  on a  $\|dg\|_x \leq \frac{1}{3}$  (on prend  $r$  assez petit pour que  $B_r \subset U$ ). En particulier  $g$  est  $\frac{1}{3}$ -Lipschitz sur cette boule, c'est-à-dire

$$x, x' \in B_r \quad \Rightarrow \quad \|g(x') - g(x)\| \leq \frac{1}{3}\|x' - x\|,$$

en particulier  $\|g(x)\| \leq \frac{r}{3}$  pour tout  $x \in B_r$ . On va montrer que tout point  $y \in B_{r/2}$  appartient à l'image de  $f$  par la méthode du point fixe. Observons que

$$f(x) = x + g(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y - g(x).$$

Fixons donc  $y_0 \in B_{r/2}$  et définissons  $T : B_r \rightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$T(x) = y_0 - g(x).$$

Observons d'abord que  $T(B_r) \subset B_r$  car

$$\|x\| \leq r \Rightarrow \|T(x)\| = \|y_0 - g(x)\| \leq \|y_0\| + \|g(x)\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{3} < r.$$

Ainsi  $T$  définit une transformation  $T : B_r \rightarrow B_r$  montrons qu'elle est strictement contractante :

$$x, x' \in B_r \Rightarrow \|T(x') - T(x)\| = \|g(x') - g(x)\| \leq \frac{1}{3}\|x' - x\|.$$

L'application  $T$  possède donc un unique point fixe  $x_0$  tel que  $T(x_0) = x_0$ , c'est-à-dire  $f(x_0) = y_0$ . On a montré que  $B_{r/2}$  est contenu dans l'image de  $f$ .  
 Considérons l'ouvert  $V = B_r \cap f^{-1}(B_{r/2})$ , alors par construction  $f : V \rightarrow B_{r/2}$  est surjective. Cette application est aussi injective par unicité du point fixe de  $T$ .  
 Notons  $h : B_{r/2} \rightarrow V$  l'inverse de  $f|_V$  et montrons d'abord que  $h$  est continue en 0. Observons que pour  $x \in V$  on a  $f(x) = x + g(x)$ , donc

$$\|x\| = \|f(x) - g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f(x)\| + \frac{1}{3}\|x\|$$

qui implique en posant  $x = h(y)$

$$\|h(y)\| = \|x\| \leq \frac{3}{2}\|f(x)\| = \frac{3}{2}\|y\|.$$

Nous pouvons montrer maintenant que  $h$  est différentiable en 0 et que sa différentielle en 0 est l'identité :

$$\frac{\|h(y) - y\|}{\|y\|} = \frac{\|x - f(x)\|}{\|y\|} = \frac{\|g(x)\|}{\|y\|} \leq \frac{3}{2} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|}$$

qui tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow 0$  (et cette condition est équivalente à  $y \rightarrow 0$ ).

Nous avons démontré que si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $C^k$  et si  $df_p$  est inversible en un point  $p \in U$ , alors  $f$  définit une bijection dans un voisinage de  $p$  et l'inverse  $f^{-1}$  est différentiable en  $f(p)$ . Il est clair que si  $df_p$  est inversible  $p \in U$ , alors  $df$  est inversible en tout point d'un voisinage de  $p$  (car le jacobien est une fonction continue). L'inverse  $f^{-1}$  est alors de classe  $C^k$  car la différentielle de  $f^{-1}$  admet pour matrice jacobienne l'inverse de la matrice jacobienne de  $df$ . □

**Corollaire 3.1.9.** *Une application  $f : U \rightarrow V$  de classe  $C^k$ , avec  $k \geq 1$  entre deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  est un difféomorphisme si et seulement si  $f$  est bijective et  $J_f(p) \neq 0$  pour tout  $p \in U$ .*

### 3.1.6 Le théorème du rang constant

**Rappels d'algèbre linéaire.** Rappelons que le *rang* d'une application linéaire  $\ell : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la dimension de l'image  $\text{Im}(\ell) \subset \mathbb{R}^n$ . L'application linéaire  $\ell$  est de rang  $r$  si et seulement si après changement de bases sur  $\mathbb{R}^m$  et sur  $\mathbb{R}^n$  sa matrice prend la forme

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dans ces coordonnées, l'application s'écrit  $(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ .

On montre aussi que le rang est la valeur maximale de  $r \in \mathbb{N}$  tel que la matrice  $A$  admet un  $r \times r$  mineur non nul (i.e. une sous-matrice carrée de taille  $r \times r$  et de déterminant non nul).

**Définitions 3.1.10.**  $\circ$  Le *rang* d'une application  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  est la fonction  $\text{rang}_f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}$  donnée par  $\text{rang}_f(p) = \text{rang}(df_p)$ .

$\circ$  On dit que  $f$  est de *rang maximal* en  $p$  si  $\text{rang}_f(p) = \min(m, n)$ .

- $f$  est une *immersion* si  $\text{rang}_f(p) = m$  pour tout  $p \in U$  (de façon équivalente  $df_p$  est injective pour tout  $p \in U$ ).
- $f$  est une *submersion* si  $\text{rang}_f(p) = n$  pour tout  $p \in U$  (de façon équivalente  $df_p$  est surjective pour tout  $p \in U$ ).

**Exemple 3.1.11.** a) Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $F(x) = (x^2, x^3)$ . On a  $dF_x = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x^2 \end{pmatrix}$  et donc le rang de  $F$  vaut 0 en  $(0, 0)$  et 1 ailleurs.

b) Soit  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $G(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2, x_1^3)$ . Alors  $dG = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ 3x_1^2 & 0 \end{pmatrix}$ . Ainsi, le rang de  $G$  vaut 1 si  $x_1 = 0$  et 2 sinon.

**Lemme 3.1.12.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$ , alors la fonction  $U \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $p \mapsto \text{rang}_f(p)$  est semi-continue inférieurement. En particulier si  $f$  est de rang maximal en un point  $p$ , alors  $f$  est de rang maximal dans un voisinage de ce point.

Rappelons qu'une fonction  $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}$  est *semi-continue inférieurement* si pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'ensemble  $\{x \in U \mid \rho(x) > \alpha\}$  est ouvert.

*Preuve.* L'application  $f$  vérifie  $\text{rang}_f(p) \geq r$  si et seulement si la matrice jacobienne de  $df_p$  admet un  $r \times r$  mineur non nul (i.e. si cette matrice contient une sous-matrice carrée de taille  $r \times r$  dont le déterminant est non nul). Par continuité de la matrice jacobienne, ce même mineur est non nul dans un voisinage de  $p$ .  $\square$

Le théorème du rang constant affirme qu'une application de classe  $C^k$  dont le rang est constant est localement  $C^k$ -équivalente à une application linéaire :

**Théorème 3.1.13** (Théorème du rang constant). Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^k$  et de rang constant  $= r$ . Alors pour tout  $p \in U$  il existe des voisinages  $V$  de  $p$  et  $W$  de  $q = f(p)$  ainsi que des  $C^k$ -difféomorphismes

$$F : W \rightarrow W' \subset \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad G : V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^m$$

tels que

- (i)  $f(V) \subset W$ ,
- (ii)  $G(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$  et  $F(q) = 0 \in \mathbb{R}^n$ ,
- (iii) l'application  $\tilde{f} = F \circ f \circ G^{-1} : V' \rightarrow W'$  s'écrit

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

La situation peut se représenter sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ G \downarrow & & \downarrow F \\ V' & \xrightarrow{\tilde{f}} & W' \end{array}$$



**Preuve.** On peut supposer, quitte à faire des translations, que  $p = 0 \in \mathbb{R}^m$  et  $q = f(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ . Quitte à faire des changements de bases sur  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ , on peut aussi supposer que  $df_0$  prenne la forme normale, c'est-à-dire que la matrice jacobienne de  $f$  en 0 est la  $n \times m$  matrice

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définissons l'application suivante  $G : U \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$G(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m),$$

et observons que la matrice jacobienne de  $G$  en 0 est la  $m \times m$  matrice

$$\left( \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}.$$

Par le théorème d'inversion locale, on sait que  $G$  définit un difféomorphisme de classe  $C^k$  d'un voisinage  $V$  de 0 sur un autre voisinage  $V'$  de 0.

On considère maintenant l'application  $f \circ G^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cette application s'écrit

$$f \circ G^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, f^{r+1} \circ G^{-1}(x), \dots, f^n \circ G^{-1}(x)),$$

et sa matrice jacobienne en  $x$  est une  $m \times n$  matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & * \\ 0 & \Delta(x) \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \Delta(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f_i \circ G^{-1} \right)_{(r+1) \leq i, j \leq n}$$

Or nous savons que cette matrice est de rang  $r$  pour tout  $x \in V'$  car  $\text{rang } f \circ G^{-1} = \text{rang } f = r$ . Par conséquent  $\Delta(x)$  est la matrice nulle pour tout  $x \in V'$ . Ainsi  $f \circ G^{-1}$  ne dépend que des variables  $x_1, \dots, x_r$  et on peut donc écrire

$$f \circ G^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_r, h(x_1, \dots, x_r))$$

On définit maintenant une application  $F : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$F(y) = (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} - h_{r+1}(y_1, \dots, y_r), y_n - h_n(y_1, \dots, y_r)).$$

La matrice jacobienne de  $F$  en 0 est la  $n \times n$  matrice

$$\left( \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible, donc  $F$  définit un  $C^k$ -difféomorphisme d'un voisinage  $W$  de 0  $\in \mathbb{R}^n$  vers un voisinage  $W'$  de 0. On vérifie que  $F \circ f \circ G^{-1} : V' \rightarrow W'$  est donné par

$$F \circ f \circ G^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

□

Une conséquence importante du théorème du rang constant est le

**Théorème 3.1.14** (Théorème des fonctions implicites). *Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application  $C^\infty$  où  $m = n + k$ . Soit  $p$  un point de  $U$  et supposons que la matrice Jacobienne partielle (de taille  $n \times n$ )*

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq n, (k+1) \leq j \leq m}$$

*est inversible en  $p$ . Alors il existe un voisinage de  $p$  de type  $V \times W \subset U$  avec  $V \subset \mathbb{R}^k$  et  $W \subset \mathbb{R}^n$  ainsi qu'une application  $\phi : V \rightarrow W$  de classe  $C^\infty$  telle que pour tout  $x \in V \times W$  on a*

$$f(x) = q \quad \Leftrightarrow \quad (x_{k+1}, \dots, x_m) = \phi(x_1, \dots, x_k)$$

où  $q = f(p)$ .

Nous laissons la preuve en exercice.

## 3.2 Sous-Variétés

**Définition.** Un sous-ensemble  $M \subset \mathbb{R}^n$  est une *sous-variété de dimension  $m$  de classe  $C^k$*  si pour tout point  $p$  de  $M$  il existe un voisinage  $U$  de  $p$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\phi : U \rightarrow V$  tel que

$$\phi(U \cap M) = V \cap E$$

où  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $m$ .

On dit aussi que  $(n - m)$  est la *codimension* de  $M$ . Une sous-variété de dimension 2 s'appelle une *surface* et une sous-variété de codimension 1 s'appelle une *hypersurface*.

**Remarque.** On peut remplacer dans cette définition les mots *sous-espace vectoriel* par *sous-espace affine*. Dans la pratique, vérifier que  $M$  est une sous-variété de dimension  $m$  revient à montrer qu'au voisinage de tout point de  $M$  il existe un système de coordonnées curvilignes  $y_1, \dots, y_n$  dans un voisinage  $U$  de  $p$  tel que

$$\phi(U \cap M) = V \cap \{y \in V \mid y_{m+1} = \dots = y_n = 0\},$$

où  $c_{m+1}, \dots, c_n$  sont des constantes. La sous variété est donc localement décrite par un système de  $n - m$  équations (en général non linéaires).

### Premiers exemples.

- (i) Une sous-variété de dimension 0 de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble discret (tous ses points sont isolés).
- (ii) Une sous-variété de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
- (iii) L'ensemble vide est une sous-variété de dimension  $m$  pour tout entier  $m$ .
- (iv) Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^k$  définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^m$ , alors son graphe

$$M = \{(x, t) \in U \times \mathbb{R} \mid t = f(x)\}$$

est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

Les trois premiers exemples sont triviaux. S'agissant du quatrième exemple, pour montrer que le graphe  $M$  de la fonction  $f \in C^k(U)$  est une sous-variété, on considère l'application  $\phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$  définie par

$$\phi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n)).$$

Cette application est clairement de classe  $C^k$  et c'est un difféomorphisme dont l'inverse est explicitement donné par

$$\phi^{-1}(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1} + f(y_1, \dots, y_n)).$$

Il est clair que  $\phi(M) = U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , qui est ouvert d'un sous-espace vectoriel de dimension  $n$ .

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^k$  et de rang constant  $r$ , alors on a les conclusions suivantes :*

- A) *Pour chaque point  $q \in \mathbb{R}^n$ , la préimage  $M = f^{-1}(q) \subset U$  est une sous-variété différentiable de codimension  $r$  (i.e. de dimension  $m - r$ ).*
- B) *Chaque point  $p \in U$  admet un voisinage  $V_p \subset U$  tel que l'image directe  $M = f(V_p) \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $r$ .*

En particulier :

- a) Si  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une submersion de classe  $C^k$ , alors  $M = f^{-1}(q)$  est une sous-variété de codimension  $n$ .
- b) Si  $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une immersion de classe  $C^k$ , alors chaque point  $p \in U$  admet un voisinage  $V_p \subset U$  tel que l'image directe  $M = f(V_p) \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $n$ .

**Remarque.** En général, l'image  $f(U) \subset \mathbb{R}^n$  d'une immersion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  n'est pas une sous-variété, même si  $f$  est injectif (cf exercice 8.6 pour un exemple). Il est par contre facile de voir que  $f(U)$  est une sous-variété si  $f$  est une immersion et  $f$  définit un homéomorphisme de  $U$  vers  $M$ .

### Des exemples pour le cas A :

- 1) Si  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $C^\infty$  telle que  $dF_p \neq 0$  quel que soit  $p$ , alors  $F^{-1}(q)$  est une hypersurface de  $\mathbb{R}^m$ .
- 2) La sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  est une hypersurface.
- 3) Si  $F, G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  vérifient  $dF_p$  et  $dG_p$  sont linéairement indépendants quel que soit  $p$ , alors  $F^{-1}(q_1) \cap G^{-1}(q_2)$  est une sous-variété de codimension 2.
- 4) Le groupe orthogonal  $O(n)$  est une sous-variété de  $M_n(\mathbb{R})$  (voir exercice 7.6).

**Preuve du théorème.** Le théorème du rang constant nous dit que l'application  $f$  est localement équivalente à une application linéaire de rang  $r$  donc la préimage d'un point par  $f$  et son image directe sont localement équivalents à des sous-espaces vectoriels, or c'est précisément cela la définition d'une sous-variété.

Commençons par démontrer l'affirmation (A). Fixons  $q \in \mathbb{R}^n$ , si  $q \notin f(U)$ , alors  $f^{-1}(q) = \emptyset$  et il n'y a rien à montrer. On suppose donc que  $q \in f(U)$  et on choisit un point  $p \in M = f^{-1}(q)$ . Par le théorème du rang constant on sait qu'il existe des ouverts  $V, V' \subset \mathbb{R}^m$ ,  $W, W' \subset \mathbb{R}^n$  tels que  $f(V) \subset W$ ,  $p \in V$ ,  $q \in W$ , ainsi que des difféomorphismes  $F : W \rightarrow W'$  et  $G : V \rightarrow V'$  tels que  $G(p) = 0$ ,  $F(q) = 0$  et  $\tilde{f} = F \circ f \circ G^{-1} : V' \rightarrow W'$  s'écrit  $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . On a alors

$$G(M \cap V) = V' \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0\} \subset \mathbb{R}^m.$$

On a démontré que tout point  $M = f^{-1}(q)$  est différentiablement équivalent à un ouvert d'un sous-espace vectoriel de dimension  $m - r$  au voisinage de chacun de ses points. Par définition  $M$  est donc une sous-variété de dimension  $m - r$  de  $\mathbb{R}^m$ .

Montrons maintenant l'affirmation (B). Fixons un point quelconque  $p \in U$  et considérons des voisinages  $V$  de  $p$  et  $W$  de  $q = f(p)$  ainsi que des difféomorphismes  $F : W \rightarrow W'$  et  $G : V \rightarrow V'$  comme plus haut. Notons  $M = f(V)$ , alors

$$F(M \cap W) = W' \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{r+1} = \dots = x_{n-1} = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

Donc  $M$  est une sous-variété de dimension  $n - (n - r) = r$  de  $\mathbb{R}^n$ . □

### 3.3 L'espace tangent à une sous-variété

Un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  est tangent en un point  $p$  à une sous-variété  $M \subset \mathbb{R}^n$  si c'est le vecteur vitesse d'une courbe différentiable contenue dans la variété et passant par  $p$ . Plus précisément ;

**Définition.** Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété de classe  $C^1$  de dimension  $m$  et soit  $p$  un point de  $M$ . On dit qu'un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  est un *vecteur tangent* à  $M$  s'il existe une courbe  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  de classe  $C^1$  telle que

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}.$$

Dans ce cas on dit que la courbe  $\gamma$  *représente* le vecteur tangent  $\mathbf{v}$ . On note  $T_p M$  l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  en  $p$ .

**Exemple.** Si  $U \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert, alors  $T_p U$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , car tout vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur vitesse de la courbe  $\gamma_{\mathbf{v}}(t) = p + t\mathbf{v}$  (cette courbe est contenu dans l'ouvert  $U$  pour  $|t| < \varepsilon$  assez petit).

**Proposition 3.3.1.** *En chaque point  $p$  d'une sous-variété différentiable  $M \subset \mathbb{R}^n$  de dimension  $m$ , l'espace tangent  $T_p M$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Preuve.** On sait par définition de la notion de variété qu'il existe un voisinage  $U$  de  $p$  et un difféomorphisme  $\phi : U \rightarrow V$  tel que  $\phi(p) = 0$  et

$$\phi(U \cap M) = V \cap E$$

où  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un sous-espace-vectoriel de dimension  $m$ .

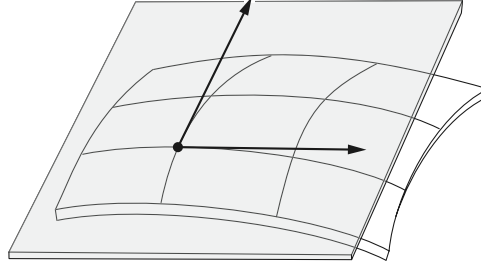
Soit  $\mathbf{v} \in T_p M$  un vecteur tangent à  $M$  en  $p$ . Par définition il existe une courbe  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \cap U$  de classe  $C^1$  telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\mathbf{v} = \dot{\alpha}(0)$ . Définissons la courbe  $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V \cap E$  par  $\beta(t) = \phi \circ \alpha(t)$ , alors on a

$$\mathbf{v} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi^{-1}(\beta(t)) = d\phi_0^{-1}(\dot{\beta}(0)) \in d\phi_0^{-1}(E),$$

ce qui montre que  $T_p M$  est inclus dans l'espace vectoriel  $d\phi_0^{-1}(E)$ . Pour montrer l'inclusion inverse, on considère un vecteur quelconque  $\mathbf{w} \in E$ , alors pour  $\epsilon > 0$  assez petit, la courbe :  $\beta(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow E$  définie par  $\beta(t) = t\mathbf{w}$  prend ses valeurs dans  $V \cap E$ . Notons  $\alpha = \phi^{-1} \circ \beta$ , alors  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \cap U$  est une courbe  $C^1$  telle que  $\alpha(0) = p$ , par conséquent  $\dot{\alpha}(0) \in T_p M$ . Mais on a

$$d\phi_0^{-1}(\mathbf{w}) = d\phi_0^{-1}(\dot{\beta}(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi^{-1}\beta(t) = \dot{\alpha}(0) \in T_p M.$$

Ceci montre que  $d\phi_0^{-1}(E) \subset T_p M$ , on a donc montré que  $T_p M = d\phi_0^{-1}(E)$ , qui est bien un sous-espace vectoriel de dimension  $m$ .  $\square$



Plan tangent à une surface.

**Proposition 3.3.2.** Si  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  une application différentiable de rang constant  $r$ , alors pour tout point  $p$  de la sous-variété  $M = f^{-1}(q)$ , on a  $T_p M = \text{Ker}(df_p)$ .

**Preuve.** Sous les hypothèses de la proposition,  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m = n - r$ . En particulier l'espace tangent  $T_p M$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $m$ . Montrons que  $T_p M \subset \text{Ker}(df_p)$ . Soit  $\mathbf{v} \in T_p M$  un vecteur tangent  $M$  en  $p$  et  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  une courbe qui représente  $\mathbf{v}$ , alors

$$df_p(\mathbf{v}) = df_p(\dot{\alpha}(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t)) = 0,$$

car  $f(\alpha(t)) = q$  pour tout  $t$  puisque  $\alpha(t) \in M$ . Ceci montre que  $T_p M \subset \text{Ker}(df_p)$ . Mais d'autre part,  $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  est une application linéaire de rang  $r$ , donc son noyau  $\text{Ker}(df_p)$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n - r = m$ . On conclut que  $T_p M = \text{Ker}(df_p)$ .  $\square$

**Exemple.** Considérons le cas d'une hypersurface  $M = f^{-1}(0)$  où  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une submersion. Alors pour tout point  $p \in M = f^{-1}(0)$  on a

$$T_p M = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid df_p(\mathbf{v}) = 0\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{\nabla} f(p), \mathbf{v} \rangle = 0\},$$

l'espace tangent en  $p$  à  $M$  est donc le sous-espace vectoriel orthogonal au gradient  $\vec{\nabla} f(p)$ .

**Proposition 3.3.3.** Si  $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application différentiable de rang constant  $r$  telle que  $M = f(U) \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété (de dimension  $r$ ), alors pour tout  $q = f(p) \in M$ , on a  $T_q M = \text{Im}(df_p)$ .

**Preuve.** Observons que la courbe  $t \mapsto f(p + t\mathbf{e}_i)$  est tracée sur la sous-variété  $M$  et passe par le pont  $q$  en  $t = 0$ , par conséquent le vecteur

$$\mathbf{b}_i := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + t\mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = df_p(\mathbf{e}_i)$$

est un élément de  $T_q M$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ . Les vecteurs  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$  engendrent le sous-espace vectoriel  $\text{Im}(df_p)$ , par conséquent  $\text{Im}(df_p) \subset T_q M$ . Or ces deux sous-espaces vectoriels sont de dimension  $r$ , ils sont par conséquent égaux. □

**Remarque.** Les vecteurs  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$  de la preuve précédentes forment les colonnes de la matrice Jacobienne de  $f$  en  $p$ . Ils sont linéairement indépendants si et seulement si le rang de  $f$  en  $p$  est égale à  $k$ .

**Exemple.** Considérons le graphe de la fonction différentiable  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , notons  $S$  cette surface et  $p$  un point de  $S$ . Il y a deux façon de comprendre le plan tangent  $T_p S$ .

- (i) Point de vue implicite : La surface  $S$  est l'ensemble des zéros de la fonction  $f : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y, z) = z - \varphi(x, y)$ . Le gradient de  $f$  est  $\vec{\nabla} f = (-\varphi_x, -\varphi_y, 1)$  et le plan tangent en  $p = (x, y, \varphi(x, y))$  admet l'équation

$$T_p S = \left( \vec{\nabla} f(p) \right)^\perp = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \mid v_3 = \varphi_x v_1 + \varphi_y v_2 \}$$

où on a noté pour simplifier  $\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  et  $\varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ .

- (ii) Point de vue paramétrique : La surface  $S$  est l'image de  $U$  par l'application  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $h(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$ . Alors  $T_p S$  est le sous-espace vectoriel engendré par

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial h}{\partial x} = (1, 0, \varphi_x) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial h}{\partial y} = (0, 1, \varphi_y).$$

On vérifie facilement que ces deux descriptions donnent le même sous-espace vectoriel.

**Remarque.** L'espace tangent  $T_p M$  d'une sous-variété  $M \subset \mathbb{R}^n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Ce sous-espace n'est pas *géométriquement* tangent à la sous-variété  $M$  (il peut même être disjoint de  $M$ ). Pour cette raison on introduit la notion suivante :

**Définition 3.3.4.** L'espace affine tangent à une sous-variété différentiable  $M \subset \mathbb{R}^n$  en un point  $p \in M$  est le sous-espace affine

$$A_p M = \{ q \in \mathbb{R}^n \mid (q - p) \in T_p M \} = p + T_p M.$$

Observons que le point  $p$  appartient à l'intersection  $M \cap A_p M$  et le sous-espace affine est géométriquement tangent à  $M$  en ce point.

**Exemple.** Si  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  telle que  $df_p \neq 0$  en tout  $p \in U$ , alors l'espace affine tangent à l'hypersurface  $M = f^{-1}(0)$  en  $p$  est l'hyperplan

$$A_p M := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i) = 0 \right\}.$$

A titre d'exemple, le plan tangent en  $p = (x_0, y_0, z_0)$  à l'ellipsoïde  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  est le plan d'équation

$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z - z_0)}{c^2} = 0.$$

### 3.4 Applications différentiables entre deux sous-variétés

La notion d'application différentiable entre des ouverts  $U \subset \mathbb{R}^m$  et  $V \subset \mathbb{R}^n$  se généralise au cas des applications entre deux sous-variétés.

**Définitions.** (i) Soient  $M \subset \mathbb{R}^d$  et  $N \subset \mathbb{R}^\ell$  deux sous-variétés différentiables de classe  $C^k$  et  $f : M \rightarrow N$  une application entre ces deux sous-variétés. On dit que  $f$  est *différentiable de classe  $C^k$*  au voisinage du point  $p \in M$  s'il existe un voisinage ouvert  $U \subset \mathbb{R}^d$  de  $p$  et une application  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  de classe  $C^k$  telle que  $F$  et  $f$  coïncident sur l'intersection  $U \cap M$ , c'est-à-dire qu'on a  $F|_{M \cap U} = f|_{M \cap U}$ . L'application  $F$  s'appelle alors une *extension locale de  $f$  au voisinage de  $p$* .

(ii) On dit  $f : M \rightarrow N$  différentiables de classe  $C^k$  et on note  $f \in C^k(M, N)$  si  $f$  est différentiable au voisinage de tout point de  $M$ .

On distingue certaines applications différentiables particulières :

- (i) On dit que  $f \in C^k(M, N)$  est un *difféomorphisme* de classe  $C^k$  si  $f$  est bijective et  $f^{-1} \in C^k(N, M)$ .
- (ii) On dit que  $\varphi : U \rightarrow V$  est une *carte locale* de classe  $C^k$  si  $U$  est un ouvert de la variété  $M$ ,  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et  $\varphi$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$ . Dans ce cas on doit avoir  $m = \dim(M)$ .
- (iii) On dit que  $\psi : U \rightarrow V$  est une *paramétrisation locale* de classe  $C^k$  si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ ,  $V$  est un ouvert de  $M$  et  $\psi$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$ . Une paramétrisation locale est donc l'inverse d'une carte locale.

**Exemple.** La projection stéréographique est l'application  $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie sur le complémentaire du "pôle nord"  $N$  de la sphère unité  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  (c'est-à-dire le point  $(0, \dots, 0, 1)$ ) qui envoie le point  $P \in S^n \setminus \{N\}$  sur l'intersection  $P'$  de la droite par  $N$  et  $P$  avec  $\mathbb{R}^n$  (vu comme l'hyperplan de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini par  $\{x_{n+1} = 0\}$ ). La projection stéréographique est donc une carte de la sphère dont le domaine est le complémentaire du pôle nord.

La différentielle d'une application de classe  $C^1$  est définie a priori pour les applications entre des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . La proposition suivante permet de généraliser cette notion importante au cas des applications entre deux sous-variétés.

**Proposition 3.4.1.** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application entre deux variétés différentiables et  $p \in M$ . Supposons que  $f$  soit de classe  $C^1$  au voisinage de  $p$ . Alors pour toute extension locale  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  de  $f$  au voisinage de  $p$ , on a  $dF_p(T_p M) \subset T_q N$ , où  $q = f(p)$ . De plus la restriction  $dF_p|_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_q M$  ne dépend pas de l'extension locale de  $f$  choisie.

On notera  $df_p : T_p M \rightarrow T_q M$  l'application ainsi définie et on dit que c'est la *différentielle de l'application  $f : M \rightarrow N$  en  $p$* .

**Preuve.** Par définition de la notion de vecteur tangent, il existe une courbe  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  de classe  $C^1$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Si on suppose  $\varepsilon > 0$  assez petit, alors  $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U \cap M$  et la règle de dérivation en chaîne appliquée à  $F \circ \gamma$  nous dit que

$$w = dF_p(v) = dF_p(\dot{\gamma}(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)),$$

car par définition on a  $F|_{M \cap U} = f|_{M \cap U}$ . Cela montre d'une part que l'image  $w$  ne dépend que de  $f$  et non de l'extension  $F$  choisie et d'autre part que  $w$  appartient à  $T_q N$  puisque la courbe  $\alpha = f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$  vérifie  $\alpha(0) = q$  et  $\dot{\alpha}(0) = w$ . □

Remarquons que cette preuve nous donne une interprétation très naturelle de la différentielle  $df_p : T_p M \rightarrow T_q M$ . Si le vecteur tangent  $v \in T_p M$  est représenté par la courbe  $\gamma$  tracée sur  $M$ , alors  $df_p(v) \in T_q N$  est le vecteur tangent représenté la courbe  $f \circ \gamma$ .

**Proposition 3.4.2** (Règle de dérivation en chaîne). *Si  $f : M_1 \rightarrow M_2$  et  $g : M_2 \rightarrow M_3$  sont des applications différentiables de classe  $C^k$  entre des sous-variétés différentiables, alors  $g \circ f : M_1 \rightarrow M_3$  est différentiable de classe  $C^k$  et pour tout point  $p \in M_1$  on a*

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p : T_p M_1 \rightarrow T_{g(f(p))} M_3.$$

**Preuve.** Il suffit d'appliquer la règle de dérivation en chaîne classique à des extensions  $F$  et  $G$  des applications  $f$  et  $g$  à des voisinages de  $p$ , respectivement  $f(p)$ . □

### 3.5 Le fibré tangent à une sous-variété

**Définition.** On appelle *espace tangent total* ou *fibré tangent* à la sous-variété  $M \subset \mathbb{R}^n$  l'ensemble définit par

$$TM = \{(p, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M \text{ et } \mathbf{v} \in T_p M\}.$$

**Proposition 3.5.1.** (a) *Si  $M \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $m$  et de classe  $C^k$  avec  $k \geq 2$ , alors  $TM \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$  est une sous-variété de dimension  $2m$  et de classe  $C^{k-1}$ .*  
(b) *Si  $f : M \rightarrow N$  est une application différentiable de classe  $C^k$  entre deux sous-variétés de classe  $C^k$ , alors l'application*

$$Tf : TM \rightarrow TN \quad \text{définie par} \quad Tf(p, v) = (f(p), df_p(v))$$

*est une application différentiable de classe  $C^{k-1}$ .*

(c) *Les sous-variétés différentiables de classe  $C^\infty$  forment une catégorie dont les morphismes sont les applications de classe  $C^\infty$ . La correspondance  $(M \rightarrow TM, f \rightarrow Tf)$  définit un foncteur covariant de cette catégorie dans elle-même.*

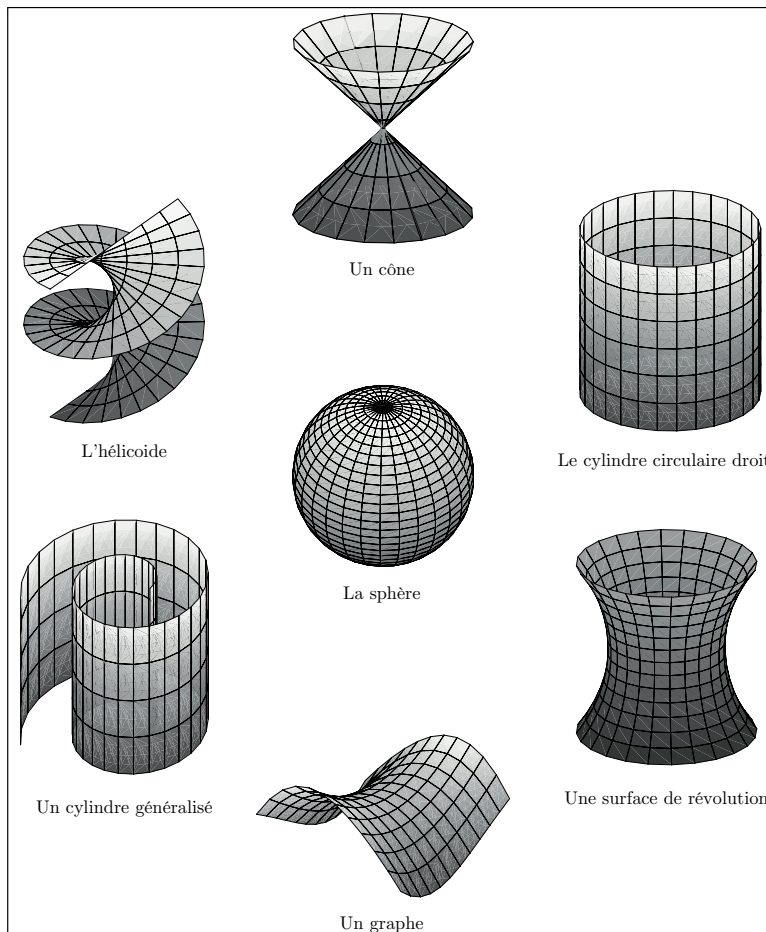
Nous laissons la preuve en exercice.



## Chapitre 4

# Géométrie des sous-variétés

*Dans ce chapitre nous étudions la géométrie des sous-variété du point de vue des distances, aires et volumes, angles etc. La notion de courbure des surfaces sera étudiée au chapitre 5*



## 4.1 Distances extrinsèque et intrinsèque sur une sous-variété

**Définitions.** (i) La *distance extrinsèque* entre deux points  $p$  et  $q$  sur une sous-variété  $M \subset \mathbb{R}^n$  est la distance euclidienne  $\|q - p\|$  entre ces deux points.

(ii) La *distance intrinsèque* entre deux points  $p$  et  $q$  sur une sous-variété connexe  $M \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  est l'infimum des longueurs des courbes de classe  $C^1$  par morceaux tracées sur la sous-variété et qui relient ces deux points. On note cette distance par

$$d_M(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M, \gamma \text{ est } C^1 \text{ par morceaux}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}. \quad (4.1)$$

(iii) Deux sous-variétés connexes  $M_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $M_2 \subset \mathbb{R}^d$  de classe  $C^1$  dans sont dites *intrinsèquement isométriques* s'il existe une application bijective  $f : M_1 \rightarrow M_2$  telle que  $d_{M_2}(f(p), f(q)) = d_{M_1}(p, q)$  pour tous  $p, q \in M_1$ . Dans ce cas on dit que l'application  $f$  est une *isométrie* entre les deux sous-variétés.

Le lecteur vérifiera sans difficulté que la distance ainsi définie satisfait aux propriétés habituelles d'une distance, et donc  $(M, d_M)$  est un espace métrique. Remarquons aussi que

$$d_M(p, q) \geq \|q - p\|$$

pour tous  $p, q \in S$ .

**Exemple.** La distance intrinsèque entre deux points  $p$  et  $q$  d'une sphère  $S$  de centre  $c$  et de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^n$  est égale à  $d_S(p, q) = R\alpha$ , où  $\alpha = \angle_c(p, q)$  est l'angle entre les vecteurs  $(p - c)$  et  $(q - c)$  (ceci sera démontré plus tard). La distance extrinsèque est égale à  $\|q - p\| = 2R \sin(\alpha/2)$ .

**Proposition 4.1.1.** Soit  $f : M_1 \rightarrow M_2$  un difféomorphisme entre deux sous-variétés connexes de classe  $C^1$ . Supposons que pour tout point  $p \in M_1$ , et tout vecteur tangent  $\mathbf{v} \in T_p M_1$ , on a  $\|df_p(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ . Alors  $f$  est une isométrie entre  $M_1$  et  $M_2$  pour les distances intrinsèques  $d_{M_1}$  et  $d_{M_2}$ , c'est-à-dire

$$d_{M_2}(f(p), f(q)) = d_{M_1}(p, q)$$

pour tous  $p, q \in M_1$ .

Remarquons que l'hypothèse de cette proposition signifie que  $df_p$  est une isométrie linéaire entre les espaces tangents  $T_p M_1$  et  $T_{f(p)} M_2$ . En particulier on a  $\langle df_p(\mathbf{v}_1), df_p(\mathbf{v}_2) \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$  pour tous  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_p M_1$ ,

**Preuve.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow M_1$  un chemin de classe  $C^1$  par morceaux reliant  $p$  à  $q$ , alors  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow M_2$  un chemin de classe  $C^1$  par morceaux dans la variété  $M_2$  qui relie  $f(p)$  à  $f(q)$ . Nous avons alors  $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$ , et donc, par hypothèse

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = \|df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\| = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

pour tout  $t \in [a, b]$ . Par conséquent

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_a^b \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \ell(\gamma).$$

Ceci implique que

$$d_{M_2}(f(p), f(q)) \leq \ell(\tilde{\gamma}) = \ell(\gamma).$$

En prenant l'infimum des chemins  $\gamma$  qui relient  $p$  à  $q$  on conclut que  $d_{M_2}(f(p), f(q)) \leq d_{M_1}(p, q)$ . Finalement, en remplaçant  $f$  par le difféomorphisme  $f^{-1}$  et en répétant le même argument, on obtient également l'inégalité  $d_{M_1}(p, q) \leq d_{M_2}(f(p), f(q))$ , ce qui prouve que  $f$  est une isométrie.  $\square$

La réciproque du lemme précédent est également vraie, nous l'énonçons sous forme d'un théorème que nous admettons sans démonstration :

**Théorème 4.1.2.** *Une application  $f : M_1 \rightarrow M_2$  entre deux sous-variétés connexes de classe  $C^2$  est une isométrie entre  $M_1$  et  $M_2$  pour les distances intrinsèques  $d_{M_1}$  et  $d_{M_2}$  si et seulement si  $f$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  tel que  $\|df_p(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$  pour tout  $p \in M_1$  et tout  $\mathbf{v} \in T_p M_1$ .*

*Remarque.* La partie difficile de ce théorème est de prouver qu'une application  $f$  qui préserve les distances (i.e. telle que  $d_{M_2}(f(p), f(q)) = d_{M_1}(p, q)$  pour tous  $p, q \in M_1$ ) est différentiable. Ce résultat a été démontré par S. B. Myers et N. E. Steenrod en 1939.

**Exemple.** Deux sous-variétés  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$  sont dites *congruentes* s'il existe une isométrie globale  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $f(M_1) = M_2$ . Lorsque c'est le cas, il est clair que la restriction  $f|_{M_1}$  est une isométrie de  $M_1$  vers  $M_2$  pour la distance intrinsèque, et aussi pour la distance extrinsèque (ce qui n'est en général pas le cas pour les isométries intrinsèques).

## 4.2 Le tenseur métrique associé à une paramétrisation locale

On a vu que la distance intrinsèque entre deux points d'une sous-variété connexe est l'infimum des longueurs des courbes reliant ces deux points. Il sera donc important de pouvoir calculer la longueur d'une courbe lorsqu'elle est décrite dans une paramétrisation (locale) de la variété.

Rappelons qu'une *paramétrisation locale* d'une sous-variété  $M \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  est la donnée :

- (i) d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ , où  $m = \dim(M)$
- (ii) d'une application  $\psi : \Omega \rightarrow M$ , de classe  $C^k$ , qui est un difféomorphisme sur son image  $\psi(\Omega) \subset M$ . En particulier  $\psi$  est une immersion de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

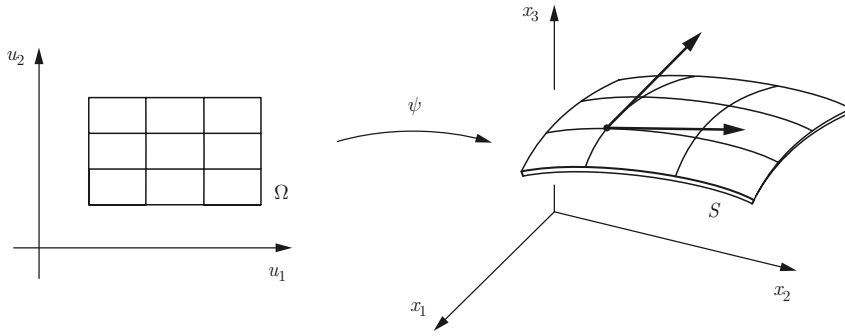
Par la condition (ii), on sait que  $\psi$  est en particulier une immersion. Si on note  $(u_1, \dots, u_m)$  les coordonnées sur  $\Omega$ , alors pour tout  $u \in \Omega$ , les vecteurs

$$\mathbf{b}_1(u) = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}(u), \dots, \mathbf{b}_m(u) = \frac{\partial \psi}{\partial u_m}(u)$$

sont donc linéairement indépendants et forment une base de l'espace tangent  $T_{\psi(u)}M$ .

**Définition.** On dit que  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\}$  est la *base adaptée* au paramétrage  $\psi$  du plan tangent  $T_p S$ .

Les paramètres  $u_1, \dots, u_m$  s'appellent les *coordonnées curvilignes locales* associées à la paramétrisation locale  $\psi$  de  $M$ . Les courbes sur  $M$  obtenues en fixant toutes les coordonnées  $u_i$  sauf une s'appellent les *lignes de coordonnées* sur la sous-variété paramétrée  $M$ ; ensemble, elles forment le *réseau de coordonnées* associé au paramétrage  $\psi$ .



**Définition.** Les vecteurs  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  ne forment en général pas une base orthonormée de l'espace tangent  $T_p M$ . La matrice de Gram  $\mathbf{G}$  de cette base s'appelle le *tenseur métrique* de la sous-variété  $M$  dans le paramétrage  $\psi$ . Notons que puisque les vecteurs  $\mathbf{b}_i$  dépendent de  $u \in \Omega$ , le tenseur métrique  $\mathbf{G} = (g_{ij}) : \Omega \rightarrow M_m(\mathbb{R})$  est une fonction à valeurs matricielle définie sur le domaine  $\Omega$ . Ses coefficients sont

$$g_{ij}(u) = \langle \mathbf{b}_i(u), \mathbf{b}_j(u) \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_k}{\partial u_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial u_j}. \quad (4.2)$$

Le tenseur métrique est donc une fonction  $\mathbf{G} \in C^{k-1}(\Omega, M_m(\mathbb{R}))$  de classe  $C^{k-1}$  définie sur  $\Omega$  à valeurs dans l'espace vectoriel des  $m \times m$  matrices symétriques. Noter que le tenseur métrique est associé au paramétrage local  $\psi : \Omega \rightarrow M$  et non pas uniquement à la sous-variété  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

Le tenseur métrique s'appelle aussi la *première forme fondamentale* de associée à  $\psi$ . On verra plus loin qu'il y a aussi une deuxième et une troisième formes fondamentales.

**Exemple 1 (graphe d'une fonction).** Comme premier exemple, considérons le graphe  $S$  de la fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Un paramétrage  $\psi : \Omega \rightarrow S$  est donné par

$$\psi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

La base du plan tangent en un point de la surface adaptée à ce paramétrage est

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Les coefficients du tenseur métrique sont donc

$$g_{11} = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1 \rangle = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle = f_x f_y, \quad g_{22} = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2 \rangle = 1 + f_y^2,$$

où on a noté  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  et  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

$$g_{11} = 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \quad g_{12} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad g_{22} = 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{G}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix},$$

**Exemple 2 (Surface de révolution)**

Considérons une courbe régulière de classe  $C^1$   $\alpha(v) = (r(v), z(v))$ , où  $v \in I \subset \mathbb{R}$  dans un plan muni de coordonnées  $(r, z)$  et supposons que  $r(v) > 0$  pour tout  $v \in I$ .

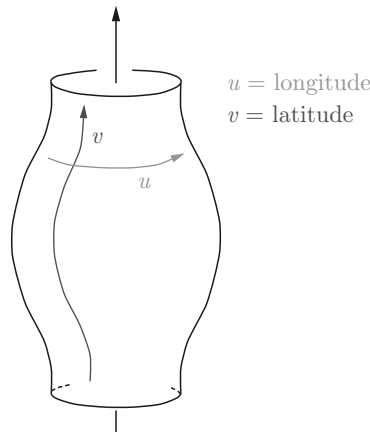
On appelle *surface de révolution de profil  $\alpha$  autour de l'axe  $Oz$*  la surface  $S \subset \mathbb{R}^3$  paramétrée par  $\psi : \Omega \rightarrow S$ , ( $\Omega = [0, 2\pi] \times I$ ), où

$$\psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

est donné par

$$\begin{cases} x(u, v) = r(v) \cos(u) \\ y(u, v) = r(v) \sin(u) \\ z(u, v) = z(v). \end{cases}$$

La coordonnée  $u$  s'appelle *longitude* et la coordonnée  $v$  s'appelle *latitude* ; les courbes  $u = \text{const.}$  sont les *méridiens* et les courbes  $v = \text{const.}$  sont les *parallèles* de  $S$ .



La base du plan tangent associée à ce paramétrage est

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -r(v) \sin(u) \\ r(v) \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v} = \begin{pmatrix} r'(v) \cos(u) \\ r'(v) \sin(u) \\ z'(v) \end{pmatrix}$$

Les coefficients du tenseur métrique sont

$$g_{11} = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\|^2 = r(v)^2, \quad g_{12} = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle = 0, \quad g_{22} = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\|^2 = r'(v)^2 + z'(v)^2.$$

On a donc

$$\mathbf{G}(u, v) = \begin{pmatrix} r(v)^2 & 0 \\ 0 & (r'(v)^2 + z'(v)^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(v)^2 & 0 \\ 0 & \|\dot{\alpha}(v)\|^2 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que le réseau des coordonnées longitude-latitude est partout orthogonal puisque  $g_{12} \equiv 0$ .

**Application à la sphère :** La sphère  $S_a$  de rayon  $a$  centrée à l'origine est la surface d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . C'est la surface de révolution dont le profil est le demi-cercle

$$\gamma(v) = (r(v), z(v)) = (a \cos(v), a \sin(v)) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Le paramétrage de la sphère est donc donné par

$$\begin{cases} x = a \cos(u) \cos(v) \\ y = a \sin(u) \cos(v) \\ z = a \sin(v) \end{cases}$$

où  $(u, v)$  parcourt le domaine  $\Omega$  défini par les inégalités  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  (les paramètres utilisés dans cet exemple, s'appellent les *coordonnées géographiques* sur la sphère). Les formules précédentes nous donnent le tenseur métrique suivant :

$$g_{11} = a^2 \cos^2(v), \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2 \quad (4.3)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{G}(u, v) = \begin{pmatrix} a^2 \cos^2(v) & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 3 (Surface réglée).** Une surface est dite *régulée* si elle est une réunion de droites ou de segments de droites, ces droites sont appelées les *génératrices*. Le plan, le cylindre et le cône sont les exemples les plus simples de surfaces réglées.

Pour paramétrer une surface réglée, on se donne une courbe  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , qu'on appellera une *directrice* de la surface réglée, et qu'on suppose transverse aux génératrices, ainsi qu'un champ de vecteurs  $\mathbf{w}(u)$  le long de  $\alpha$ , ce champ indique la direction des génératrices. La surface est alors paramétrée par

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + v \mathbf{w}(u)$$

où  $(u, v) \in \Omega := I \times \mathbb{R}$ .

On a alors

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \dot{\alpha}(u) + v \dot{\mathbf{w}}(u), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v} = \mathbf{w}(u).$$

et le tenseur métrique est donné par

$$\begin{cases} g_{11} = \|\dot{\alpha}\|^2 + 2 \langle \dot{\alpha}, \dot{\mathbf{w}} \rangle v + v^2 \|\dot{\mathbf{w}}\|^2 \\ g_{12} = \langle \dot{\alpha}, \mathbf{w} \rangle + v \langle \dot{\mathbf{w}}, \mathbf{w} \rangle \\ g_{22} = \|\mathbf{w}\|^2. \end{cases}$$

Voyons deux cas particuliers de surface réglée où ce tenseur métrique prend une forme simple. Supposons d'abord que  $\alpha$  est une courbe plane paramétrée naturellement et que le vecteur  $\mathbf{w}$  est constant, unitaire et orthogonal au plan contenant  $\alpha$ . On dit alors que  $S$  est un *cylindre généralisé*.

On a  $\|\dot{\alpha}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$ ,  $\dot{\mathbf{w}} = 0$  et  $\langle \dot{\alpha}, \mathbf{w} \rangle = 0$ . Par conséquent  $g_{11} = g_{22} = 1$  et  $g_{12} = 0$  et le tenseur métrique est alors  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

L'autre cas particulier est la *surface des tangentes* à une courbe birégulière  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  que l'on suppose paramétrée naturellement. C'est la surface réglée obtenue en prenant le champ de vecteur  $\mathbf{u} = \mathbf{T}(u) = \dot{\alpha}(u)$ , on a donc

$$\begin{cases} g_{11} = \|\dot{\alpha}\|^2 + 2 \langle \dot{\alpha}, \dot{\mathbf{T}} \rangle v + v^2 \|\dot{\mathbf{T}}\|^2 = 1 + \kappa(u)^2 v^2 \\ g_{12} = \langle \dot{\alpha}, \mathbf{T} \rangle + v \langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{T} \rangle = 1 \\ g_{22} = \|\mathbf{T}\|^2 = 1. \end{cases}$$

où  $\kappa(u)$  est la courbure de  $\alpha$ . Le tenseur métrique est alors  $\mathbf{G}(s, v) = \begin{pmatrix} 1 + \kappa(s)v^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Remarque.** Il est utile de remarquer que les vecteurs  $\mathbf{b}_j(u) = \frac{\partial \psi}{\partial u_j}(u)$  forment les colonnes de la matrice jacobienne  $D\psi(u) = \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(u) \right)$ , par conséquent on a

$$\mathbf{G}(u) = D\psi(u)^\top \cdot D\psi(u). \quad (4.4)$$

Cette identité peut nous donner une façon rapide de calculer un tenseur métrique.

**Exemple.** Reprenons l'exemple du tenseur métrique d'un graphe  $M$ , mais cette fois dans le cas d'une fonction de  $m$  variables  $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . La variété  $M$  est donc paramétrée par l'application  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  définie par  $\psi(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m))$ . La matrice jacobienne de  $\psi$  en un point de  $\Omega$  est

$$D\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ f_{x_1} & f_{x_2} & \cdots & f_{x_m} \end{pmatrix},$$

où  $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Le tenseur métrique est donc

$$\mathbf{G} = D\psi^\top \cdot D\psi = \begin{pmatrix} 1 + f_{x_1}^2 & f_{x_1}f_{x_2} & \cdots & f_{x_1}f_{x_m} \\ f_{x_2}f_{x_1} & 1 + f_{x_2}^2 & \cdots & f_{x_2}f_{x_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{x_m}f_{x_1} & f_{x_m}f_{x_2} & \cdots & 1 + f_{x_m}^2 \end{pmatrix},$$

que l'on peut aussi écrire  $g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x_i}f_{x_j}$ .

### 4.3 Signification géométrique du tenseur métrique

Le rôle du tenseur métrique est de nous permettre de calculer la norme d'un vecteur ainsi que le produit scalaire entre deux vecteurs tangents en un point d'une sous-variété différentiable  $M \subset \mathbb{R}^n$  lorsque ces vecteurs sont exprimés dans la base adaptée à un paramétrage local  $\psi : \Omega \rightarrow M$ .

En effet, si  $\xi, \eta \in T_p M$  sont deux vecteurs tangents en un point  $p = \psi(u) \in M$ , alors on peut écrire  $\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i \mathbf{b}_i$  et  $\eta = \sum_{j=1}^m \eta_j \mathbf{b}_j$ , où  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m\} \subset T_p M$  est la base de  $T_p M$  adaptée au paramétrage  $\psi$ . On a donc

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1, j=1}^m \xi_i \eta_j \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \sum_{i=1, j=1}^m g_{ij}(u) \xi_i \eta_j,$$

où les  $g_{ij}$  sont les coefficients du tenseur métrique. On notera souvent ce produit scalaire sous la forme

$$\mathbf{g}_u(\xi, \eta) = \sum_{i=1, j=1}^m g_{ij}(u) \xi_i \eta_j.$$

En particulier la norme du vecteur  $\xi \in T_p M$  et l'angle  $\theta$  entre les vecteurs  $\xi, \eta \in T_p M$  (supposés non nuls) sont donnés par

$$\|\xi\| = \sqrt{\mathbf{g}_u(\xi, \xi)} = \sqrt{\sum g_{ij} \xi_i \xi_j},$$

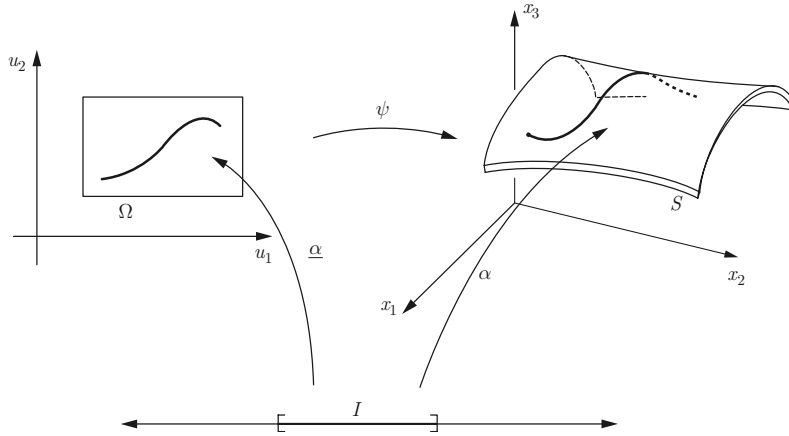
et

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{g}_u(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{g}_u(\xi, \xi)} \sqrt{\mathbf{g}_u(\eta, \eta)}} = \frac{\sum g_{ij} \xi_i \eta_j}{\sqrt{\sum g_{ij} \xi_i \xi_j} \cdot \sqrt{\sum g_{ij} \eta_i \eta_j}}.$$

Ces formules nous permettent de calculer la longueur d'une courbe  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $C^1$  tracée dans l'image d'un paramétrage  $\psi : \Omega \rightarrow M$ . La représentation de la courbe  $\alpha$  dans la carte  $\Omega$  s'écrit

$$\underline{\alpha}(t) = \psi^{-1}(\alpha(t)) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \Omega, \quad t \in [a, b]$$

(i.e. nous avons une courbe auxiliaire  $\underline{\alpha}(t) \in \Omega$  dans le domaine de paramétrage  $\Omega$  telle que  $\psi \circ \underline{\alpha}(t) = \alpha(t)$  pour tout  $t \in I$ ).



Courbe tracée sur une sous-variété.

Le vecteur vitesse de  $\alpha$  est donné par

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d}{dt} \psi(\underline{\alpha}(t)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt} = \sum_{i=1}^m \dot{u}_i(t) \mathbf{b}_i(u),$$

et la longueur de  $\alpha$  est finalement donnée par

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum g_{ij}(u(t)) \dot{u}_i(t) \dot{u}_j(t)} dt.$$



Rappelons que l'abscisse curviligne le long de la courbe  $\alpha$  est la longueur de l'arc  $\alpha|_{[a,s]}$ . En particulier on a  $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\alpha}(t)\|$ . On peut donc écrire

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt}.$$

En multipliant formellement cette égalité par  $dt^2$ , on obtient

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} du_i du_j.$$

Cette identité exprime le *carré de l'élément de longueur infinitésimal* d'une courbe  $\alpha$  sur la sous-variété dans les coordonnées  $u_i$  associée à une carte. On voit que cette expression (qu'on appelle simplement "le  $ds^2$ ") contient la même information que le tenseur métrique.

L'étude du  $ds^2$  nous donne une troisième façon de calculer le tenseur métrique qui est très efficace dans certains cas. Considérons une courbe  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  sur la variété  $M = \psi(\Omega)$ . Sa représentation dans la carte est  $\psi^{-1}(\alpha(t)) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ , et on a le long de cette courbe

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} du_i du_j.$$

Il suffit alors de calculer  $dx_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j$  pour trouver les coefficients  $g_{ij}$  du tenseur métrique.

**Exemple a.** Les coordonnées polaires dans le plan sont données par les formules  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ . On a donc

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (\cos(\theta)dr - r \sin(\theta)d\theta)^2 + (\sin(\theta)dr + r \cos(\theta)d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Le tenseur métrique associé est donc donné par  $\mathbf{G}(r, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ .

**Exemple b.** La surface de révolution autour de l'axe  $Oz$  dont le profil est la courbe  $\gamma(v) = (r(v), z(v))$  admet le paramétrage

$$(x, y, z) = (r(v) \cos(u), r(v) \sin(u), z(v)).$$

On a donc

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (r'(v) \cos(u)dv - r(v) \sin(u)du)^2 + (r'(v) \sin(u)dv + r(v) \cos(u)du)^2 + (z'(v))^2 dv^2 \\ &= r^2(v) du^2 + (r'(v)^2 + z'(v)^2) dv^2. \end{aligned}$$

Le tenseur métrique associé est donc donné par

$$\mathbf{G}(u, v) = \begin{pmatrix} r^2(v) & 0 \\ 0 & (r'(v)^2 + z'(v)^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2(v) & 0 \\ 0 & \|\gamma'(v)\|^2 \end{pmatrix}.$$

## 4.4 Sur les isométries entre sous-variétés paramétrées

Le résultat suivant nous dit comment se comparent les tenseurs métriques de deux sous-variétés paramétrées qui sont isométriques :

**Théorème 4.4.1.** *Soient  $\psi_1 : \Omega_1 \rightarrow M_1$  et  $\psi_2 : \Omega_2 \rightarrow M_2$  deux sous-variétés paramétrées de classe  $C^1$ . Alors il existe une isométrie intrinsèque  $f : M_1 \rightarrow M_2$  si et seulement s'il existe un difféomorphisme  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  tel que pour tout  $u \in \Omega_1$  on a*

$$\mathbf{G}_1(u) = Dh(u)^\top \mathbf{G}_2(h(u)) Dh(u), \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{G}_1$  est le tenseur métrique de  $\psi_1$ ,  $\mathbf{G}_2$  est le tenseur métrique de  $\psi_2$  et  $Dh$  est la matrice jacobienne du difféomorphisme  $h$ .

La situation est représentée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ \psi_1 \uparrow & & \uparrow \psi_2 \\ \Omega_1 & \xrightarrow{h} & \Omega_2 \end{array}$$

Remarquons aussi que si on note  $h(u_1, \dots, u_m) = (v_1, \dots, v_m)$ , alors la formule (4.5) peut s'écrire

$$g_{ij}(u) = \sum_{\mu, \nu=1}^m \tilde{g}_{\mu\nu}(v) \frac{\partial v_\mu}{\partial u_i} \frac{\partial v_\nu}{\partial u_j}, \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{G}_1 = (g_{ij})$  et  $\mathbf{G}_2 = (\tilde{g}_{ij})$  et  $m = \dim(M_1) = \dim(M_2)$ . Cette formule peut aussi s'écrire sous forme différentielle :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(u) du_i du_j = \sum_{\mu, \nu=1}^m \tilde{g}_{\mu\nu}(v) dv_\mu dv_\nu. \quad (4.7)$$

**Preuve.** Supposons qu'il existe une isométrie intrinsèque  $f : M_1 \rightarrow M_2$ , et remarquons que  $f \circ \psi_1 : \Omega_1 \rightarrow M_2$  est une paramétrisation de  $M_2$  (en général différente de  $\psi_2$ ). Par le théorème 4.1.2, on sait que  $f$  est une isométrie si et seulement si

$$\langle df_p(\xi), df_p(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$$

pour tout  $p \in M_1$  et  $\xi, \eta \in T_p M_1$ . Ceci implique que pour tout  $u \in \Omega_1$ , les coefficients du tenseur métrique de  $\psi_1$  vérifient :

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &= \langle d\psi_{1_u}(\mathbf{e}_i), d\psi_{1_u}(\mathbf{e}_j) \rangle \\ &= \langle df_{\psi_1(u)}(d\psi_{1_u}(\mathbf{e}_i)), df_{\psi_1(u)}(d\psi_{1_u}(\mathbf{e}_j)) \rangle \\ &= \langle d(f \circ \psi_1)_u(\mathbf{e}_i), d(f \circ \psi_1)_u(\mathbf{e}_j) \rangle \end{aligned}$$

où  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ . Cette condition s'écrit matriciellement

$$\mathbf{G}_1(u) = D\psi_1(u)^\top \cdot D\psi_1(u) = D(f \circ \psi_1(u))^\top \cdot D(f \circ \psi_1(u)).$$

On considère maintenant l'application  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  définie par  $h = \psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1$ . Cette application est un difféomorphisme de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$  car c'est la composition de trois difféomorphismes, de plus on a  $\psi_2 \circ h = f \circ \psi_1$ , par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1(u) &= D(\psi_2 \circ h(u))^\top \cdot D(\psi_2 \circ h(u)) \\ &= Dh(u)^\top D\psi_2(h(u))^\top D\psi_2(h(u)) Dh(u) \\ &= Dh(u)^\top \mathbf{G}_2(h(u)) Dh(u). \end{aligned}$$

Inversément, supposons qu'il existe un difféomorphisme  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  tel que la condition (4.5) est vérifiée, alors on définit  $f : M_1 \rightarrow M_2$  par  $f = \psi_2 \circ h \circ \psi_1^{-1} : M_1 \rightarrow M_2$ . Le calcul précédent prouve que  $f$  est une isométrie de  $M_1$  vers  $M_2$ . □

Le résultat précédent contient les cas particuliers suivants :

**Corollaire 4.4.2.** *Si les deux sous-variétés paramétrées de classe  $C^1$   $\psi_1 : \Omega \rightarrow M_1$  et  $\psi_2 : \Omega \rightarrow M_2$ , avec même domaine de paramétrisation,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  ont le même tenseur métrique, alors elles sont isométriques*

**Preuve.** Ce corollaire correspond au cas où  $h : \Omega \rightarrow \Omega$  est l'identité. □

**Corollaire 4.4.3.** *Si  $\psi_1 : \Omega_1 \rightarrow M$  et  $\psi_2 : \Omega_2 \rightarrow M$  sont deux paramétrisations de la même sous-variété  $M$ , alors il existe un difféomorphisme  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  tel que (4.5) soit satisfaite pour tout  $u \in \Omega_1$*

**Preuve.** Correspond au cas où  $f$  est l'identité. □

## 4.5 Intégration sur une sous-variété

**Définition.** Si  $M \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $m$  et  $\psi : \Omega \rightarrow M$  est un paramétrage régulier de classe  $C^1$ , alors l'intégrale

$$\text{Vol}_m(M) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathbf{G}(u))} du_1 \cdots du_m. \quad (4.8)$$

s'appelle le *volume  $m$ -dimensionnel de la variété  $M$* .

Nous ne pouvons pas prouver ici cette formule, que nous prenons donc comme une définition, toutefois elle peut se justifier heuristiquement de la façon suivante : Considérons une sous-variété paramétrée  $\psi : \Omega \rightarrow M$  de classe  $C^1$  et de dimension  $m$ . Pour estimer son volume, on peut subdiviser le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  en sous-domaines  $\Omega_i$  :

$$\Omega = \cup_i \Omega_i, \quad \text{tels que si } i \neq j, \text{ alors } \Omega_i \cap \Omega_j \text{ est de mesure nulle,}$$

en sorte que

$$\text{Vol}_m(M) = \text{Vol}_m(\psi(\Omega)) = \sum_i \text{Vol}_m(\psi(\Omega_i)).$$

Si les sous-domaines  $\Omega_i$  sont suffisamment petits, on peut approximer la restriction de  $\psi$  à  $\Omega_i$  par sa différentielle, ainsi

$$\text{Vol}_m(\psi(\Omega_i)) \cong \text{Vol}_m(d\psi_{u_i}(\Omega_i)) = \sqrt{\det(d\psi_{u_i}^\top d\psi_{u_i})} \text{Vol}_m(\Omega_i) = \sqrt{\det \mathbf{G}(u)} \text{Vol}_m(\Omega_i),$$

où  $u_i \in \Omega_i$  est arbitraire. On a donc

$$\text{Vol}_m(M) \cong \sum_i \sqrt{\det \mathbf{G}(u)} \text{Vol}_m(\Omega_i).$$

En raffinant la subdivision de  $\Omega$ , et en supposant que  $\max\{\text{diam}(\Omega_i)\} \rightarrow 0$ , cette somme converge vers l'intégrale (4.8).

**Remarque.** Lorsque  $M$  est une surface, i.e.  $m = 2$ , on note  $\text{Vol}_2(M) = \text{Aire}(M)$  et on dit que c'est l'aire de  $M$ . Lorsque  $m = 1$ ,  $\text{Vol}_1(M)$  n'est rien d'autre que la longueur de la courbe  $M$ .

Le résultat suivant nous dit que le volume est une notion géométrique, c'est-à-dire indépendante de la paramétrisation choisie.

**Proposition 4.5.1.** Soient  $\psi_1 : \Omega_1 \rightarrow M$  et  $\psi_2 : \Omega_2 \rightarrow M$  deux paramétrisations régulières de classe  $C^1$  d'une même sous-variété  $M \subset \mathbb{R}^n$  de dimension  $m$ . Alors on a

$$\int_{\Omega_1} \sqrt{\det(\mathbf{G}_1(u))} du = \int_{\Omega_2} \sqrt{\det(\mathbf{G}_2(v))} dv.$$

Ce résultat se déduit du corollaire 4.4.3 en appliquant la formule de changement de variables dans les intégrales multiples (voir exercice 10.6 pour le cas des surfaces).

**Exemple 1.** Si  $S$  est le graphe de la fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , alors

$$\text{Aire}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

**Exemple 2.** Le paramétrage par longitude et latitude de la sphère  $S_a \subset \mathbb{R}^3$  de rayon  $a$  admet  $\Omega = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  comme domaine de paramétrage et on a

$$G(u, v) = \begin{pmatrix} a^2 \cos(v)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},$$

donc  $dA = a^2 \cos(v) du dv$  et l'aire de cette sphère est

$$\text{Aire}(S_a) = \iint_{S_a} dA = \iint_{\Omega} \sqrt{\det G(u, v)} du dv = \int_{v=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{u=0}^{2\pi} a^2 \cos(v) du dv = 4\pi a^2.$$

**Généralisation.** Plus généralement, si  $\psi : \Omega \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  est une paramétrisation régulière injective d'une sous-variété  $M$  et  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue non négative, alors l'intégrale de la fonction  $\rho$  sur  $M$  est définie par

$$\iint_M \rho(x) dV := \int_{\Omega} (\rho \circ \psi)(u) \sqrt{\det G(u)} du.$$

Nous pouvons aussi considérer le cas des fonctions à valeurs vectorielles. En particulier le *centre de gravité* de la variété  $M$  (pour une distribution de masse homogène) est le point  $C \in \mathbb{R}^n$  défini par

$$C = \frac{1}{\text{Vol}(A)} \int_S \mathbf{x} dV = \frac{1}{\text{Vol}(A)} \int_{\Omega} \psi(u) \sqrt{\det \mathbf{G}(u)} du. \quad (4.9)$$

## 4.6 Domaines riemanniens

**Définition.** On appelle *domaine riemannien* un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  sur lequel est défini un produit scalaire

$$\mathbf{g}_u : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R},$$

en chaque point  $u \in \Omega$ , pour lequel la fonction  $g_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g_{ij}(u) = \mathbf{g}_u(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  est différentiable, où  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ . On note parfois

$$\mathbf{g}_u = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(u) du_i du_j,$$

et on dit que cette expression est la *tenseur métrique* ou la *métrique riemannienne* sur le domaine  $\Omega$ .

Cette structure permet de faire de la géométrie (dite *géométrie intrinsèque* ou *géométrie riemannienne*) dans le domaine  $\Omega$  indépendamment d'une éventuelle réalisation de ce domaine comme plongement dans un espace euclidien. En particulier

- La *norme riemannienne* d'un vecteur  $\xi$  au point  $u$  est

$$\|\xi\|_{\mathbf{g}} = \sqrt{\mathbf{g}_u(\xi, \xi)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^m g_{ij}(u) \xi_i \xi_j}.$$

- L'*angle* en  $u \in \Omega$  entre les vecteurs non nuls  $\xi$  et  $\eta$  est

$$\angle_u(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{g}_u(\xi, \eta)}{\|\xi\|_{\mathbf{g}} \|\eta\|_{\mathbf{g}}}$$

- La *longueur riemannienne* de la courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  de classe  $C^1$  par morceaux est

$$\ell_{\mathbf{g}}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\mathbf{g}} dt = \int_a^b \sqrt{\mathbf{g}_u(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

- La distance intrinsèque entre deux points est définie comme l'infimum des longueurs des courbes rejoignant ces deux points.

Voyons quelques exemples :

1. Si  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une immersion, alors le tenseur métrique défini par

$$\mathbf{g}_u(\xi, \eta) = \langle d\psi_u(\xi), d\psi_u(\eta) \rangle$$

défini une structure Riemannienne sur  $\Omega$  pour laquelle on a  $g_{ij} = \langle \frac{\partial \psi}{\partial u_i}, \frac{\partial \psi}{\partial u_j} \rangle$ .

2. La métrique hyperbolique de Poincaré sur le demi-espace  $\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m > 0\}$  est la métrique riemannienne définie par

$$\mathbf{h}_x(\xi, \eta) = \frac{\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{R}^m}}{x_m^2}.$$

Pour cette métrique on a  $h_{ij}(x) = \frac{1}{x_m^2} \delta_{ij}$ .

3. La métrique hyperbolique de Poincaré dans la boule  $\mathbb{B}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < 1\}$  est la métrique riemannienne définie par

$$\mathbf{g}_x(\xi, \eta) = \frac{4\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{R}^m}}{(1 - \|x\|^2)^2}.$$

Pour cette métrique on a  $h_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}}{(1 - \|x\|^2)^2}$ .

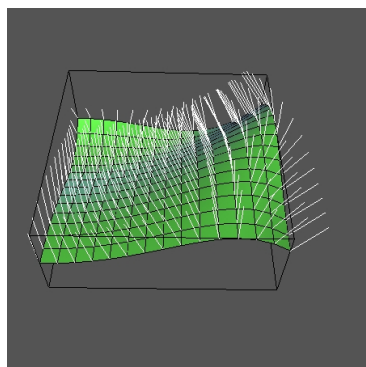
On peut démontrer que les domaines  $\mathbb{H}^m$  et  $\mathbb{B}^m$  sont isométriques pour leur métriques hyperboliques respectives (cf. exercices pour la dimension 2).

# Chapitre 5

## Courbure des surfaces

### 5.1 Co-orientation d'une surface et application de Gauss

**Définition.** On appelle *co-orientation* d'une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  la donnée d'un champ de vecteurs continu  $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que  $\|\nu(p)\| = 1$  et  $\nu(p) \perp T_p S$  pour tout point  $p \in S$ . La surface  $S$  est *co-orientable* si elle admet une co-orientation.



**Remarques.** (i) Si elle existe, une co-orientation  $\nu$  de la surface  $S$  est unique au signe près. De plus le champ  $\nu$  est de classe  $C^{k-1}$  si la surface  $S$  est de classe  $C^k$ .

(ii) Toute surface de classe  $C^1$  est localement co-orientable, i.e. elle admet une co-orientation au voisinage de chacun de ses points.

(iii) Un exemple de surface non co-orientable est le ruban de Möbius. On peut d'ailleurs prouver que toute surface qui n'est pas co-orientable contient un ouvert qui est homéomorphe au ruban de Möbius.

(iv) Le choix d'une co-orientation d'une surface régulière  $S$  permet de définir une orientation du plan tangent  $T_p S$  pour tout  $p \in S$  qui dépend continûment du point. On dit alors que la surface est *orientée* (les deux termes sont donc essentiellement synonymes).

Une co-orientation est concrètement obtenue de la façon suivante : Si la surface  $S$  est définie par l'équation  $f(x, y, z) = 0$ , alors une co-orientation est donnée par le champ

$$\nu(x) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|},$$

en supposant que le gradient de  $f$  ne s'annule pas sur  $S$ . Si la surface est paramétrée de façon régulière par l'application injective  $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ , alors une co-orientation est donnée par

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\|}.$$

Mentionnons pour finir, que l'application  $\boldsymbol{\nu}$  est souvent vue non comme un champ de vecteurs mais comme une application de la surface  $S$  vers la sphère unité. Dans ce cas, l'application

$$\boldsymbol{\nu} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$$

s'appelle l'*application de Gauss*.

## 5.2 Courbure d'une courbe tracée sur une surface

### 5.2.1 Géodésiques

**Définition 5.2.1.** Une courbe  $\gamma : I \rightarrow S$  de classe  $C^2$  tracée sur une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$  est une *géodésique* de cette surface si son accélération est normale à la surface :

$$\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}S, \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Si la surface est co-orientée par le champ  $\boldsymbol{\nu}$ , alors  $\gamma : I \rightarrow S$  est géodésique si et seulement si elle vérifie l'équation différentielle suivante sur l'intervalle  $I$  :

$$\ddot{\gamma}(t) \times \boldsymbol{\nu}(\gamma(t)) = 0.$$

**Lemme 5.2.2.** *Toute géodésique sur une surface régulière est parcourue à vitesse constante.*

Nous laissons la preuve en exercice.

**Exemples.** 1) Les géodésiques d'un plan sont les droites de ce plan paramétrées affinement (i.e. parcourues à vitesse constante).

2) Les géodésiques d'une sphère sont les grands cercles de cette sphère, paramétrés à vitesse constante.

### 5.2.2 Repère de Darboux, courbures normale et géodésique

**Définition 5.2.3.** Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière de classe  $C^2$  tracée sur une surface régulière co-orientée  $S \subset \mathbb{R}^3$ .

- (i) On appelle *repère de Darboux*<sup>1</sup> le long de  $\gamma$  relatif à la surface  $S$  le repère mobile orthonormé  $\{\boldsymbol{\nu}(t), \mathbf{T}_\gamma(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  où  $\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{1}{V_\gamma(t)}\dot{\gamma}(t)$  est le vecteur tangent unitaire à  $\gamma$ ,  $\boldsymbol{\nu}(t)$  est la co-orientation de  $S$  évaluée au point  $\gamma(t) \in S$  et  $\boldsymbol{\mu}(t) = \boldsymbol{\nu}(t) \times \mathbf{T}_\gamma(t)$ .

---

1. Attention, il n'y a pas de lien entre cette notion et le vecteur de Darboux défini au chapitre 2.



- (ii) La *courbure normale* et la *courbure géodésique* de  $\gamma$  sont les fonctions du paramètre  $t$  définies respectivement par

$$k_n(t) = \langle \mathbf{K}_\gamma(t), \boldsymbol{\nu}(t) \rangle \quad \text{et} \quad k_g(t) = \langle \mathbf{K}_\gamma(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle.$$

où  $\mathbf{K}_\gamma(t)$  est le vecteur de courbure de  $\gamma$ . Ces courbures représentent les composantes normale et tangentielle de la courbure de  $\gamma$ .

- (iii) La *torsion géodésique* de  $\gamma$  par

$$\tau_g(t) = \frac{1}{V_\gamma(t)} \langle \dot{\boldsymbol{\nu}}(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle.$$

Remarquons qu'en tout point  $p = \gamma(t)$  de la courbe, les vecteurs  $\{\mathbf{T}_\gamma(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  forment une base orthonormée du plan tangent  $T_p S$ . La courbe  $\gamma$  est géodésique si et seulement si cette courbe est paramétrée à vitesse constante et sa courbure géodésique est nulle. Il est par ailleurs clair que

$$\mathbf{K}_\gamma(t) = k_n(t)\boldsymbol{\nu}(t) + k_g(t)\boldsymbol{\mu}(t) \quad \text{et} \quad k_n(t)^2 + k_g(t)^2 = \kappa(t)^2 = \|\mathbf{K}_\gamma(t)\|^2.$$

**Proposition 5.2.4** (Équations de Darboux). *Le repère de Darboux vérifie les équations différentielles suivantes :*

$$\begin{cases} \frac{1}{V_\gamma} \dot{\mathbf{T}} &= k_g \boldsymbol{\mu} + k_n \boldsymbol{\nu}, \\ \frac{1}{V_\gamma} \dot{\boldsymbol{\nu}} &= -k_n \mathbf{T} + \tau_g \boldsymbol{\mu}, \\ \frac{1}{V_\gamma} \dot{\boldsymbol{\mu}} &= -k_g \mathbf{T} - \tau_g \boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

Nous laissons la preuve de cette proposition en exercice.

La courbure géodésique apparaît naturellement lorsqu'on dérive la fonctionnelle de longueur d'une courbe. De façon plus précise, considérons une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow S$  de classe  $C^2$  sur une surface régulière  $S$ , que l'on suppose paramétrée naturellement :  $\|\dot{\gamma}(u)\| \equiv 1$  (on notera ici  $u$  le paramètre de  $\gamma$ ). Une *déformation* de  $\gamma$  sur  $S$  est la donnée d'une application  $\psi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ , de classe  $C^2$  telle  $\gamma(u) = \psi(u, 0)$  pour tout  $u \in [a, b]$ . On note alors  $\gamma_v(u) = \psi(u, v)$ , que l'on considère comme une famille à un paramètre de courbes tracées sur  $S$  et qui déforment la courbe initiale  $\gamma = \gamma_0$ . Nous avons alors le résultat suivant :

**Théorème 5.2.5** (Formule de variation première pour la longueur). *Dans les conditions ci-dessus, la dérivée en  $v = 0$  de la fonctionnelle longueur  $v \rightarrow \ell(\gamma_v)$  en 0 est donnée par*

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_{v=0} \ell(\gamma_v) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}, \dot{\gamma}(u) \right\rangle \Big|_{u=a}^b - \int_a^b k_g(t) \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, 0), \boldsymbol{\mu}(u) \right\rangle du. \quad (5.1)$$

**Preuve.** On a

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_{v=0} \ell(\gamma_v) = \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_{v=0} \left( \sqrt{\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle} \right) du.$$

Pour simplifier cette intégrale, on observe que

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \sqrt{\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle} \right) = \frac{\left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\|^2} \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle$$

Nous avons supposé que pour  $v = 0$ , on  $\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\| = \|\dot{\gamma}(u)\| = 1$ , par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{v=0} \ell(\gamma_v) = \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle du = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle \Big|_{u=b} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right\rangle du.$$

(on a intégré par parties). En  $v = 0$ , nous avons  $\frac{\partial \psi}{\partial u} = \dot{\gamma}(u)$  et

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}, \ddot{\gamma}(u) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}, \mathbf{K}_\gamma(u) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}, k_g(u) \boldsymbol{\mu}(u) \right\rangle$$

car  $\frac{\partial \psi}{\partial v}$  est un champ de vecteurs tangent à la surface. On a donc finalement

$$\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{v=0} \ell(\gamma_v) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, 0), \dot{\gamma}(u) \right\rangle \Big|_{u=b} - \int_a^b k_g(t) \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}, \boldsymbol{\mu}(u) \right\rangle du.$$

□

Une conséquence importante de ce théorème dit qu'une courbe sur une surface  $S$  qui minimise la distance intrinsèque entre ses extrémités est une géodésique si elle est parcourue à vitesse constante :

**Corollaire 5.2.6.** *Soit  $\gamma : [a, b]$  une courbe de classe  $C^2$  paramétrée à vitesse constante sur la surface  $S$ . Si la longueur de  $\gamma$  est égale à la distance entre les points  $p = \gamma(a)$  et  $q = \gamma(b)$ , alors  $\gamma$  est une géodésique de  $S$ .*

**Preuve.** Soit  $\psi : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  une déformation quelconque de classe  $C^2$  de  $\gamma$  dont les extrémités sont fixées, i.e.  $\psi(a, v) = p$  et  $\psi(b, v) = q$  pour tout  $v \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , alors  $\frac{\partial \psi}{\partial v}$  s'annule lorsque  $u = a$  et  $u = b$ . La formule de variation première (5.1) s'écrit donc

$$\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{v=0} \ell(\gamma_v) = - \int_a^b k_g(t) \langle \boldsymbol{\xi}(u), \boldsymbol{\mu}(u) \rangle du,$$

où on a noté pour simplifier  $\boldsymbol{\xi}(u) = \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, 0)$ . Mais par hypothèse  $\ell(\gamma_0) = d(p, q)$  est la longueur minimale parmi toutes les courbes sur  $S$  qui relient  $p$  à  $q$ , par conséquent  $\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{v=0} \ell(\gamma_v) = 0$  et on a donc

$$\int_a^b k_g(t) \langle \boldsymbol{\xi}(u), \boldsymbol{\mu}(u) \rangle du = 0,$$

Dans cette égalité,  $\boldsymbol{\xi}$  est un champ de vecteurs quelconque le long de  $\gamma$  qui s'annule aux extrémités de la courbe (car nous avons considéré une déformation  $\psi$  à extrémités fixes quelconque de  $\gamma$ ). Cette condition implique que la courbure géodésique  $k_g$  de  $\gamma$  est identiquement nulle et donc  $\gamma$  est géodésique.

□

Une géodésique ne minimise pas toujours la distance entre ses extrémités, toutefois c'est le cas localement ; et cette propriété caractérise les géodésiques :

**Théorème 5.2.7.** Une courbe de classe  $C^2$  sur une surface régulière  $S$  est une géodésique de cette surface si et seulement si

- (i) La vitesse  $V$  de  $\gamma$  est constante.
- (ii) La courbe  $\gamma$  réalise localement les distances minimales entre les points qu'elle parcourt. De façon plus précise, pour tout  $t_0 \in I$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que si  $t_1, t_2 \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ , alors la distance  $d_S(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$  est égale à la longueur de l'arc  $\gamma|_{[t_1, t_2]}$

Il suit du corollaire précédent que si la courbe  $\gamma$  vérifie les conditions (i) et (ii), alors c'est une géodésique. La preuve de l'affirmation sort du cadre de ce cours.

**Remarque.** La notion de géodésique est une notion *cinématique* puisqu'elle fait intervenir l'accélération de la courbe. On définit parfois une géodésique comme une courbe qui réalise localement la distance entre les points de cette courbe. Cela revient à garder la condition (ii) du corollaire et à oublier la condition (i) ; avec cette définition alternative la notion de géodésique devient une notion *géométrique*, équivalente à la condition que la courbure géodésique s'annule.

### 5.2.3 Le théorème de Meusnier

Le théorème de Meusnier<sup>2</sup> dit que la courbure normale d'une courbe tracée sur une surface en un point  $p$  ne dépend que de la direction de cette courbe en ce point :

**Théorème 5.2.8** (Meusnier, 1785). Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe régulière de classe  $C^2$  tracée sur une surface co-orientée  $S$ . Alors sa courbure normale en  $t \in I$  ne dépend que de la direction de  $\dot{\gamma}(t)$ . Plus précisément, nous avons la formule

$$k_n(t) = -\langle d\nu(\mathbf{T}_\gamma(t)), \mathbf{T}_\gamma(t) \rangle, \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{T}_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$  est le vecteur tangent à  $\gamma$  en  $t$ . En particulier la courbure normale ne dépend pas de l'accélération de la courbe.

**Preuve.** Il s'agit essentiellement de la seconde équation de Darboux.

Nous avons  $\langle \nu(\gamma(t)), \mathbf{T}_\gamma(t) \rangle = 0$  pour tout  $t \in I$ , donc

$$\left\langle \nu(t), \frac{d\mathbf{T}_\gamma(t)}{dt} \right\rangle = - \left\langle \frac{d\nu(t)}{dt}, \mathbf{T}_\gamma(t) \right\rangle = - \langle d\nu(\dot{\gamma}(t)), \mathbf{T}_\gamma(t) \rangle.$$

L'équation (5.2) se déduit alors du fait que  $\dot{\gamma}(t) = V(t)\mathbf{T}_\gamma(t)$  et  $\dot{\mathbf{T}}_\gamma(t) = V(t)\mathbf{K}_\gamma(t)$ .

□

Remarquons que (5.2) peut aussi s'écrire

$$k_n(t) = - \frac{\langle d\nu(\dot{\gamma}(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2}. \quad (5.3)$$

Nous avons immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 5.2.9.** Si  $\gamma_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  et  $\gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  sont deux courbes régulières de classe  $C^2$  sur une surface régulière co-orientée  $S \subset \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  telles que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$  et  $\dot{\gamma}_1(0) = \lambda \dot{\gamma}_2(0)$  avec  $\lambda \neq 0$ , alors  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont même courbure normale en  $t = 0$ .

---

2. Jean-Baptiste Meusnier (1754–1793).

### 5.3 L'application de Weingarten et la deuxième forme fondamentale

Dans cette section, nous présentons différentes notions de courbure liées à une surface. Nous commençons par la définition suivante, qui est motivée par la preuve du théorème de Meusnier :

**Définition 5.3.1.** On appelle *application de Weingarten* en un point  $p$  d'une surface  $S \subset \mathbb{R}^3$  co-orientée, régulière de classe  $C^2$ , la différentielle en ce point de l'application de Gauss. On la note  $L_p = d\nu_p$ .

**Remarque 5.3.2.** (1) L'application de Weingarten s'appelle souvent *the shape operator* dans les livres en anglais.

(2) Certains livres définissent l'application de Weingarten avec le signe opposé (i.e.  $L_p = -d\nu_p$ ).

(3) L'application de Weingarten est à priori une application linéaire entre le plan tangent en  $p$  à la surface  $S$  et le plan tangent à  $\nu(p)$  à la sphère unité  $\mathbb{S}^2$ . Cependant le vecteur  $\nu(p)$  est à la fois vecteur normal de  $T_p S$  et vecteur normal à  $T_{\nu(p)} \mathbb{S}^2$ , donc ces deux plans tangents coïncident et on peut donc considérer que l'application de Weingarten au point  $p \in S$  est un endomorphisme du plan tangent  $T_p S$  :

$$L_p = d\nu_p : T_p S \rightarrow T_p S.$$

**Définition 5.3.3.** La *seconde forme fondamentale* en un point  $p$  d'une surface régulière de classe  $C^2$  co-orientée  $S \subset \mathbb{R}^3$  est l'application bilinéaire  $\mathbf{h}_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur le plan tangent  $T_p S$  par

$$\mathbf{h}_p(\xi, \eta) = -\mathbf{g}_p(L_p(\xi), \eta)$$

où  $\mathbf{g}$  est le tenseur métrique associé à  $\psi$ .

La formule (5.3) nous dit que la courbure normale d'une courbe de  $C^2$  sur la surface  $S$  peut s'écrire

$$k_n(t) = -\frac{\mathbf{g}_p(L_p(\dot{\gamma}(t)), \dot{\gamma}(t))}{\mathbf{g}_p(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} = \frac{\mathbf{h}_p(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}{\mathbf{g}_p(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} \quad (5.4)$$

**Proposition 5.3.4.** Soit  $\psi : \Omega \rightarrow S$  une surface paramétrée régulière de classe  $C^2$  et notons  $\mathbf{b}_i = \frac{\partial \psi}{\partial u_i}$ , alors les coefficients de la seconde forme fondamentale dans la base  $\{\mathbf{b}_1(u), \mathbf{b}_2(u)\}$  de  $T_p S$  adaptée à la paramétrisation  $\psi$  en un point  $p = \psi(u)$  sont donnés par

$$h_{ij}(u) = \mathbf{h}_p(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \left\langle \nu(p), \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j}(u) \right\rangle. \quad (5.5)$$

**Preuve.** Pour simplifier la suite, on notera  $\nu(u)$  pour  $\nu(\psi(u))$ . Pour tout  $u \in \Omega$ , nous avons  $\langle \nu(u), \mathbf{b}_j(u) \rangle = 0$ , par conséquent

$$\left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u_i}, \mathbf{b}_j \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial u_i} \right\rangle = 0.$$

Or, par définition de l'application de Weingarten, on a

$$L(\mathbf{b}_i) = d\boldsymbol{\nu}(\mathbf{b}_i) = d\boldsymbol{\nu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{\nu} \circ \psi}{\partial u_i}.$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j}.$$

Par conséquent :

$$\mathbf{h}_p(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = -\langle L(\mathbf{b}_i), \mathbf{b}_j \rangle = -\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\nu} \circ \psi}{\partial u_i}, \mathbf{b}_j \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\nu}, \frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial u_i} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\nu}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle.$$

□

**Corollaire 5.3.5.** Si  $\psi : \Omega \rightarrow S$  une surface paramétrée régulière de classe  $C^2$ , alors la seconde forme fondamentale  $h$  est une forme bilinéaire symétrique en tout point de  $S$  :

$$\mathbf{h}_p(\xi, \eta) = \mathbf{h}_p(\eta, \xi),$$

pour tous  $\xi, \eta \in T_p S$ . De façon équivalente, l'application de Weingarten  $L$  est auto-adjointe, i.e. on a

$$\mathbf{g}_p(L_p(\xi), \eta) = \mathbf{g}_p(\xi, L_p(\eta)).$$

**Preuve.** Il suffit de vérifier que  $h(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = h(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1)$ , ce qui se déduit immédiatement de la proposition précédente car  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_2 \partial u_1} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_2}$ .

□

**Proposition 5.3.6.** Notons  $\mathbf{G}$  la matrice du tenseur métrique dans la base  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$  en un point donné de la surface paramétrée  $\psi : \Omega \rightarrow S$ . Notons de même  $\mathbf{H}$  la matrice de la seconde forme fondamentale et  $\mathbf{L}$  la matrice de l'application de Weingarten. Alors on a

$$\mathbf{H} = -\mathbf{G}\mathbf{L} = -\mathbf{L}^\top \mathbf{G}$$

Cette formule est utile en pratique car il est souvent plus facile de calculer la deuxième forme fondamentale que l'application de Weingarten. On peut donc calculer d'abord  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$ , puis  $\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$ .

**Preuve.** Pour deux vecteurs tangents quelconques  $\xi = \xi_1 \mathbf{b}_1 + \xi_2 \mathbf{b}_2$  et  $\eta = \eta_1 \mathbf{b}_1 + \eta_2 \mathbf{b}_2$ , nous avons  $\mathbf{h}(\xi, \eta) = -\mathbf{g}(L(\xi), \eta) = -\mathbf{g}(\xi, L(\eta))$ . Cette relation s'écrit matriciellement

$$\xi^\top \mathbf{H} \eta = -\xi^\top \mathbf{G}(\mathbf{L} \eta) = -\xi^\top (\mathbf{G}\mathbf{L}) \eta.$$

Comme  $\xi$  et  $\eta$  sont quelconques, on doit avoir  $\mathbf{H} = -\mathbf{G}\mathbf{L}$ .

On a également  $\xi^\top \mathbf{H} \eta = -(\mathbf{L}\xi)^\top \mathbf{G} \eta = -\xi^\top (\mathbf{L}^\top \mathbf{G}) \eta$ , qui entraîne  $\mathbf{H} = -\mathbf{L}^\top \mathbf{G}$ .

□

## 5.4 Courbures d'une surface

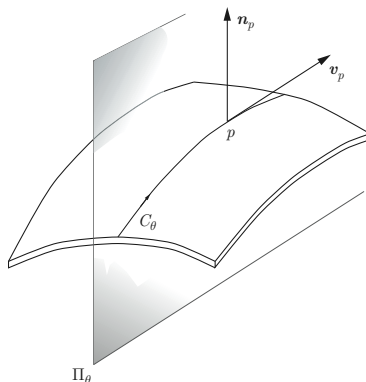
### 5.4.1 Courbure normale

Le théorème de Meusnier, ou plus précisément la formule (5.3), nous suggère la définition suivante :

**Définition 5.4.1.** Soit  $p$  un point d'une surface régulière de classe  $C^2$  co-orientée. La *courbure normale en direction du vecteur tangent* non nul  $\mathbf{v} \in T_p S \setminus \{0\}$  est définie par

$$k_n(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{h}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\mathbf{g}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = -\frac{\mathbf{g}_p(L_p(\mathbf{v}), \mathbf{v})}{\mathbf{g}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$$

La preuve du théorème de Meusnier montre que la courbure normale d'une courbe régulière  $\gamma$  tracée sur  $S$  et est précisément égale à  $k_n(\dot{\gamma}(t))$ . En particulier, la courbure normale  $k_n(\mathbf{v})$  en  $p$  est la courbure de l'intersection de la surface  $S$  avec le plan  $\Pi_{\mathbf{v}}$  passant par  $p$  et de directions  $\boldsymbol{\nu}$  et  $\mathbf{v}$ . Une telle courbe s'appelle une *section normale* de la surface  $S$ .



Section normale d'une surface

Rappelons que l'application de Weingarten  $L_p$  est un point  $p$  d'une surface régulière  $S$  de classe  $C^2$  est un endomorphisme autoadjoint du plan tangent  $T_p S$ . Par le théorème spectral, on sait donc que les valeurs propres de  $L_p$  sont réelles et qu'il existe une base orthonormée de  $T_p S$  formée de vecteurs propres de  $L_p$ .

### 5.4.2 Courbures principales, moyenne et de Gauss

**Définitions.**

- 1.) Les valeurs propres de  $-L_p$  s'appellent les *courbures principales* de  $S$  au point  $p$ . On les notes  $k_1(p)$  et  $k_2(p)$  ; on supposera que  $k_1 \leq k_2$ .
- 2.) Le déterminant de  $L_p$  s'appelle la *courbure de Gauss* de  $S$  au point  $p$ . On note

$$K(p) = \det(L_p) = k_1(p)k_2(p).$$

3.) Le point  $p \in S$  est dit

- *elliptique* si  $K(p) > 0$ , c'est-à-dire si les courbures principales en  $p$  ont le même signe.
- *hyperbolique* si  $K(p) < 0$ , c'est-à-dire si les courbures principales en  $p$  ont des signes opposés.
- *parabolique* si l'une (et une seule) des courbures principales en  $p$  est nulle.
- *planaire* si les deux courbures principales en  $p$  sont nulles :  $k_1(p) = k_2(p) = 0$ .
- *ombilique* si les deux courbures principales en  $p$  sont égales :  $k_1(p) = k_2(p)$  (de façon équivalente, le point  $p$  est ombilique si  $L_p$  est scalaire).

4.) La *courbure moyenne* de  $S$  en  $p$  est la moyenne des courbures principales, on la note<sup>3</sup>

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) = -\frac{1}{2}\text{Trace}(L_p).$$

5.) Les *directions principales* de  $S$  en un point non ombilique sont les directions des vecteurs propres de  $L_p$ .

6.) Une courbe de classe  $C^1$  tracée sur la surface  $S$  est une *ligne de courbure* de  $S$  si elle est tangente en chaque point à une direction principale.

**Remarque.** Il suit immédiatement de la proposition 5.3.6 que la courbure de Gauss est donnée par

$$K(p) = \frac{\det(\mathbf{H}(p))}{\det(\mathbf{G}(p))}, \quad (5.6)$$

où  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{H}$  sont les matrices de la première et la seconde forme fondamentale de  $S$ .

Le résultat suivant, dû à Euler, nous dit que la courbure normale d'une surface dans une direction non nulle s'exprime en fonction des courbures principales et de l'angle que fait la direction considérée avec les directions principales :

**Proposition 5.4.2.** Soit  $p$  un point non ombilique d'une surface régulière de classe  $C^2$ . On note  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  les vecteurs unités de  $T_p S$  dans les directions principales. Alors la courbure normale du vecteur  $\mathbf{v}_\theta = \cos(\theta)\mathbf{v}_1 + \sin(\theta)\mathbf{v}_2 \in T_p S$  est donnée par

$$k_n(\mathbf{v}_\theta) = k_1 \cos(\theta)^2 + k_2 \sin(\theta)^2,$$

où  $k_1, k_2$  sont les courbures principales de  $S$  en  $p$ . En particulier les courbures principales sont les valeurs minimale et maximale de la courbure normale de  $S$  au point  $p$ .

Nous laissons la preuve de cette proposition en exercice.

---

3. Attention aux notations, ne pas confondre la seconde forme fondamentale et la courbure moyenne, ça devrait être clair dans chaque cas selon le contexte.

### 5.4.3 Interprétation locale des courbures principales.

Pour étudier la géométrie locale d'une surface  $S$  de classe  $C^2$  au voisinage d'un point régulier  $p$ , il est commode d'introduire un système de coordonnées cartésien  $Oxyz$  dont l'origine  $0$  coïncide avec le point  $p$  et le plan tangent à  $S$  en  $0$  est le plan  $Oxy$ . Dans ce cas, on dit que le système de coordonnées cartésien est *adapté à la surface  $S$  en point  $p$* . La surface est alors localement représentée comme le graphe  $z = \varphi(x, y)$  d'une fonction  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un voisinage de  $(0, 0)$  dans le plan. De plus on a

$$\varphi(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Une paramétrisation locale de la surface est alors donnée par l'application  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\psi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$  et la base adaptée en  $0$  est

$$\mathbf{b}_1(0, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, 0) = (1, 0, 0) = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{b}_2(0, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(0, 0) = (0, 1, 0) = \mathbf{e}_2.$$

Pour la suite nous choisirons la co-orientation définie par le vecteur normal  $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_3$ . Le tenseur métrique à l'origine prend la valeur  $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Les coefficients de la seconde forme fondamentale en  $(0, 0)$  sont les produits scalaires

$$h_{11} = \langle \boldsymbol{\nu}, \psi_{xx} \rangle = \langle \mathbf{e}_3, \psi_{xx} \rangle = \varphi_{xx},$$

et de même  $h_{12} = \varphi_{xy}$  et  $h_{22} = \varphi_{yy}$ , on a donc

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{pmatrix}$$

(c'est la matrice hessienne de  $\varphi$  en  $(0, 0)$ ). La matrice de l'application de Weingarten est alors donnée par

$$\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = -\begin{pmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{xy} & \varphi_{yy} \end{pmatrix}$$

On a finalement

$$K = \det(\mathbf{L}) = \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 \quad \text{et} \quad H = -\frac{1}{2}\text{Trace}(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}).$$

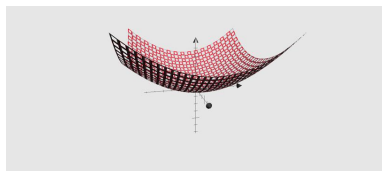
Noter que tous ces calculs sont valables en  $0$ , et a priori uniquement en  $0$ .

Quitte à effectuer une rotation de notre système de coordonnées autour de l'axe  $Oz$ , on peut supposer que les directions principales de  $S$  en  $0$  sont les directions des vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ . On a donc le développement de Taylor

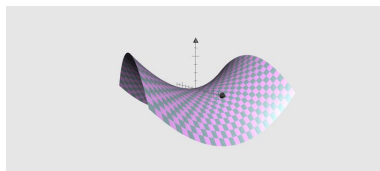
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) + o(x^2 + y^2),$$

avec  $a = \varphi_{xx}(0, 0)$  et  $b = \varphi_{yy}(0, 0)$  (et on a  $\varphi_{xy}(0, 0) = 0$ ). Ainsi les courbures principales de  $S$  en  $0$  sont  $k_1 = a$  et  $k_2 = b$ , la courbure de Gauss est  $K = ab$  et la courbure moyenne est  $H = \frac{1}{2}(a + b)$ .

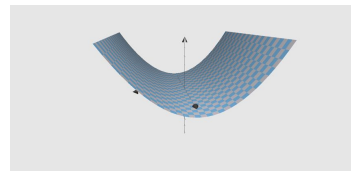




Point elliptique



Point hyperbolique



Point parabolique

La représentation locale de la surface comme un graphe dans un système de coordonnées nous permet donc de facilement interpréter la géométrie des différents types de point : le point 0 est elliptique si  $a$  et  $b$  ont le même signe (non nul), il est hyperbolique si  $a$  et  $b$  ont des signes opposés (non nuls), il est parabolique si  $a$  ou  $b$  est nul mais pas les deux et il est plat si  $a = b = 0$ . Le point est ombilique si  $a = b$ .

### Une remarque sur l'orientation des surfaces.

Si on change le signe de la co-orientation  $\nu$  de la surface  $S$ , alors l'application de Weingarten  $L$  change de signe. Par conséquent le signe des courbures principales et de la courbure moyenne est sensible au choix de la co-orientation. Un calcul montre que dans le cas de la sphère, ces courbures sont positives pour le choix de la normale intérieure à la sphère et elles sont négatives pour le choix de la normale extérieure. Cela s'explique géométriquement par le fait que l'accélération d'une courbe tracée sur une sphère pointe vers l'intérieur de cette sphère. D'une manière générale, si la surface  $S$  est le bord d'un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , il est préférable de choisir le champ normal  $\nu$  pointant du côté intérieur, avec cette convention le bord d'un domaine convexe de  $\mathbb{R}^3$  est de courbure moyenne positive. Observons en revanche que la courbure de Gauss  $K = \det(L)$  ne dépend pas du choix de la co-orientation.

### 5.4.4 Courbure des surfaces de révolution

Considérons le cas d'une surface de révolution  $S$  autour de l'axe  $Oz$  dont le profil est la courbe  $\alpha(v) = (r(v), z(v))$  ( $v \in I$ ). On suppose que  $\alpha$  est de classe  $C^2$ , paramétrée normalement, et que  $r(v) > 0$  pour tout  $v \in U$ . Le paramétrage standard de cette surface est donné par  $\psi : \Omega = [0, 2\pi] \times I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  :

$$\psi(u, v) = (r(v) \cos(u), r(v) \sin(u), z(v)).$$

Le repère adapté est

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{pmatrix} -r(v) \sin(u) \\ r(v) \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v} = \begin{pmatrix} \dot{r}(v) \cos(u) \\ \dot{r}(v) \sin(u) \\ \dot{z}(v) \end{pmatrix}, \quad \nu = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|} = \begin{pmatrix} \dot{z}(v) \cos(u) \\ \dot{z}(v) \sin(u) \\ -\dot{r}(v) \end{pmatrix},$$

où on a noté  $\dot{\cdot}$  pour la dérivée par rapport à  $v$ . Rappelons que  $\dot{r}(v)^2 + \dot{z}(v)^2 = 1$  par hypothèse, le tenseur métrique est donc

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} r^2(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(qu'on peut aussi écrire  $ds^2 = r^2(v)du^2 + dv^2$ ). Les dérivées secondes de  $\psi$  sont

$$\mathbf{b}_{11}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} -r(v) \cos(u) \\ -r(v) \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{12}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial u} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} -\dot{r}(v) \sin(u) \\ \dot{r}(v) \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{b}_{22}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial v} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} \ddot{r}(v) \cos(u) \\ \ddot{r}(v) \sin(u) \\ \ddot{z}(v) \end{pmatrix}.$$

La matrice de la seconde forme fondamentale est alors donnée par  $h_{ij} = \langle \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b}_{ij} \rangle$ ,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -r(v)\dot{z}(v) & 0 \\ 0 & (\ddot{r}(v)\dot{z}(v) - \ddot{z}(v)\dot{r}(v)) \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne la courbure de Gauss :

$$K = \frac{\det(\mathbf{H})}{\det(\mathbf{G})} = -\frac{\dot{z}(v)(\ddot{r}(v)\dot{z}(v) - \ddot{z}(v)\dot{r}(v))}{r(v)}.$$

En utilisant la relation  $\dot{r}(v)^2 + \dot{z}(v)^2 = 1$ , on peut simplifier cette expression. On a

$$0 = \frac{d}{dv}(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) = 2\dot{r}\ddot{r} + 2\dot{z}\ddot{z},$$

donc

$$\dot{z}^2 = 1 - \dot{r}^2 \quad \text{et} \quad \dot{z}\ddot{z} = -\dot{r}\ddot{r},$$

d'où l'on déduit que

$$K = -\frac{1}{r}(\ddot{r}\dot{z}^2 - \dot{z}\ddot{z}\dot{r}) = -\frac{1}{r}(\ddot{r}(1 - \dot{r}^2) + \dot{r}^2\ddot{r}) = -\frac{\ddot{r}}{r}.$$

On a donc montré que la courbure de Gauss de notre surface de révolution est

$$K(v) = -\frac{1}{r(v)} \frac{d^2 r(v)}{dv^2}. \quad (5.7)$$

**Remarque.** La matrice de l'application de Weingarten dans la base  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$  en un point quelconque de la surface de révolution  $S$  est donnée par

$$\mathbf{L} = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{z}(v)}{r(v)} & 0 \\ 0 & -(\ddot{r}(v)\dot{z}(v) - \ddot{z}(v)\dot{r}(v)) \end{pmatrix}.$$

En particulier, les vecteurs  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  sont les vecteurs propres de  $\mathbf{L}$ , cela prouve que les directions principales sur la surface sont les directions des parallèles et des méridiens.

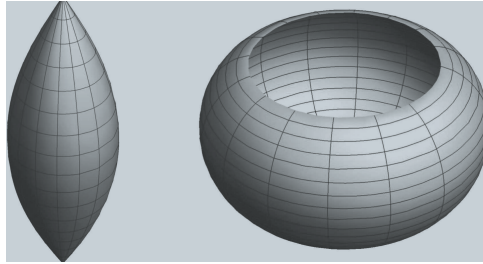
### Surfaces de révolution à courbure de Gauss constante.

La formule (5.7), nous permet de déterminer toutes les surfaces de révolution à courbure constante. Il s'agit en effet de résoudre les équations

$$\ddot{r} + Kr = 0, \quad \dot{z} = \sqrt{1 - \dot{r}^2}.$$

**Exemple 1.** Supposons  $K = 1$ , alors une solution est donnée par  $r(v) = \cos(v)$  et  $z(v) = \sin(v)$ , ce qui nous donne la sphère unité standard.

Il y a d'autres solutions, qui donnent d'autres surfaces de révolutions à courbure de Gauss constante positives :



**Exemple 2.** Si  $K = -1$ , une solution est donnée par

$$r(v) = e^{-v}, \quad z(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2s}} ds.$$

Cette dernière intégrale ne peut pas s'exprimer par des fonctions élémentaires, toutefois la courbe de profil  $\alpha(v) = (r(v), z(v))$  peut-être décrite (et donc dessinée) par les propriétés suivantes :

$$(r(0), z(0)) = (1, 0) \quad \text{et} \quad \alpha(v) + \mathbf{T}_\alpha(v)\dot{\alpha}(v) \text{ est un point de l'axe vertical } Oz.$$

En effet, le vecteur tangent  $\mathbf{T}_\alpha$  est égal à  $\dot{\alpha}$  puisque  $\alpha$  est paramétrée naturellement, on a donc

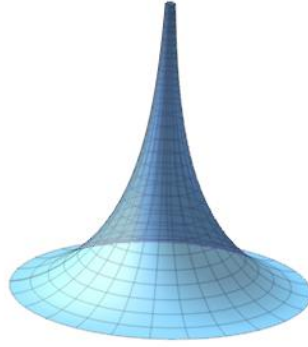
$$\begin{aligned} \alpha(v) + \mathbf{T}_\alpha(v) &= \alpha(v) + \dot{\alpha}(v) \\ &= (r(v), z(v)) + (\dot{r}(v), \dot{z}(v)) \\ &= (r(v) + \dot{r}(v), z(v) + \dot{z}(v)) \\ &= (0, z(v) + \dot{z}(v)), \end{aligned}$$

$$\text{car } (v) + \dot{r}(v) = e^{-v} + (-e^{-v}) = 0.$$

Une telle courbe s'appelle une *tractrice* d'axe  $Oz$  et la surface de révolution d'une tractrice autour de son axe est la *pseudo-sphère de Minding-Beltrami*<sup>4</sup>

---

4. La pseudo-sphère apparaît dans les travaux de Ferdinand Minding en 1839, puis de Eugenio Beltrami en 1868.



## 5.5 Quelques théorèmes classiques de la théorie des surfaces

Dans ce paragraphe nous énonçons, sans démonstration quelques théorèmes importants de la théorie des surfaces dans  $\mathbb{R}^3$ . Rappelons pour commencer qu'un point d'une surface est *ombilique* si les deux courbures principales en ce point sont égales.

**Théorème 5.5.1.** *Si tous les points d'une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$  de classe  $C^3$  sont ombiliques, alors  $S$  est contenue dans un plan ou dans une sphère.*

**Preuve.** Supposons que tout les points de  $S$  soient ombiliques, alors il existe une fonction  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $L_p(\xi) = \lambda(p)\xi$  pour tout  $p \in S$  et tout  $\xi \in T_p S$ . Soit  $\psi : \Omega \rightarrow S$  une paramétrisation locale de  $S$ , nous avons alors avec les notations de la proposition 5.3.4

$$\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial u_i} = L(\mathbf{b}_i(u)) = \lambda(\psi(u))\mathbf{b}_i(u) = \lambda(\psi(u))\frac{\partial \psi}{\partial u_i}.$$

Écrivons  $\lambda(u) = \lambda(\psi(u))$  pour simplifier, alors

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\nu}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} + \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \mathbf{b}_2 + \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_2}.$$

La même équation est vérifiée en échangeant les indices 1 et 2, on a donc pour tout  $u \in \Omega$  :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} \mathbf{b}_2 - \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} \mathbf{b}_1 = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\nu}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{\nu}}{\partial u_2 \partial u_1} + \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_2} - \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_2 \partial u_1} = 0.$$

Puisque les vecteurs  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  sont en tout points linéairement indépendants, on doit avoir

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = 0,$$

et donc  $\lambda$  est constant. Si  $\lambda = 0$ , alors  $\boldsymbol{\nu}$  est constant et  $S$  est contenu dans un plan orthogonal à ce vecteur. Si  $\lambda \neq 0$ , alors  $c = \psi - \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\nu}$  est constant et la surface  $S$  est donc contenue dans la sphère de centre  $c$  et de rayon  $1/|\lambda|$ . □

Le résultat le plus important sur la courbure des surfaces est probablement le célèbre *théorème egregium* démontré par K. F. Gauss en 1827. Il dit que la courbure de Gauss est une notion intrinsèque de la géométrie des surfaces (deux surfaces intrinsèquement isométriques ont même courbure de Gauss).

**Théorème 5.5.2** (Théorème Egregium de Carl Friedrich Gauss (1827)). *Si  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est une isométrie entre deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  pour la distance intrinsèque, alors on a  $K_1 = K_2 \circ f$  où  $K_i$  est la courbure de Gauss de  $S_i$ .*

**Exemple.** On sait qu'un cône ou un cylindre sont des surfaces localement isométriques au plan, donc ces surfaces sont de courbure nulle. Le théorème egregium nous dit aussi qu'il n'existe pas d'isométrie entre un ouvert d'un ouvert d'une sphère et un ouvert du plan.

Dans le cas des surfaces à courbure de Gauss constante, F. Minding<sup>5</sup> a démontré le résultat suivant, qui est une réciproque partielle du théorème egregium :

**Théorème 5.5.3** (Théorème de Ernst Ferdinand Minding, 1839.). *Deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  qui ont même courbure de Gauss constante sont localement isométriques pour la distance intrinsèque.*

En particulier, ce théorème dit que toute surface de courbure nulle est localement isométrique au plan et toute surface dont la courbure de Gauss est constante positive est localement isométrique à une sphère.

Le résultat précédents étaient concernaient la géométrie locale des surfaces, i.e. la géométrie au voisinage d'un point quelconque de la surface. Les théorèmes suivants sont de nature globale.

**Théorème 5.5.4** (Formule de Gauss-Bonnet). *Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux surfaces compactes sans bord de  $\mathbb{R}^3$  qui sont homéomorphes, alors elles ont la même courbure totale :*

$$\iint_{S_1} K_1 dA_1 = \iint_{S_2} K_2 dA_2$$

*de plus cette courbure totale appartient à  $4\pi\mathbb{Z}$ .*

**Théorème 5.5.5** (H. Liebmann, 1900.). *Soit  $S$  une surface compacte (sans bord) de classe  $C^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  dont la courbure de Gauss est partout positive. Supposons que ou bien la courbure de Gauss est constante ou bien la courbure moyenne est constante. Alors  $S$  est une sphère.*

Nous avons aussi les résultats suivants qui sont intéressants sur les surfaces convexe

**Théorème 5.5.6** (Théorème de Jacques Hadamard sur les surfaces à courbure positive). *Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière compacte de classe  $C^3$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La courbure de Gauss de  $S$  est strictement positive en tout point de  $S$ .*
- (ii)  *$S$  est le bord d'un domaine bornée strictement convexe  $D \subset \mathbb{R}^3$ .*
- (iii) *L'application de Gauss  $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ .*

**Théorème 5.5.7.** *Toute surface compacte sans bord de  $\mathbb{R}^3$  admet au moins un point où la courbure de Gauss est strictement positive.*

---

5. Ferdinand Minding (1806-1885)

Par comparaison, nous avons le résultat suivant sur les surfaces complètes à courbure constante négative :

**Théorème 5.5.8** (Théorème de David Hilbert (1901)). *Il n'existe pas de surface régulière de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  qui soit complète, sans bord, et dont la courbure de Gauss est constante négative.*

Rappelons qu'une surface est complète si toute suite de Cauchy dans cette surface converge.

**Théorème 5.5.9** (Théorème de Nikolaï Vladimirovitch Efimov (1964)). *Il n'existe pas de surface régulière de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  qui soit complète, sans bord, et dont la courbure de Gauss vérifie  $\sup_S(K) < 0$ .*

En 1964, N. Efimov a démontré à théorème plus général suivant : *Pour toute surface régulière complète de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  à courbure de Gauss négative, on a  $\sup K = 0$ .*

## 5.6 Les symboles de Christoffel

La seconde forme fondamentale d'une surface paramétrée contrôle les composantes normales des dérivées des vecteurs de bases  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$  adaptés. Les composantes tangentielles de ces dérivées s'expriment à partir des *symboles de Christoffel*, que nous introduisons ci-dessous. Ces quantités interviennent dans l'équation des géodésiques et jouent un rôle central dans la preuve du théorème egregium.

Rappelons que le repère mobile adapté à un paramétrage  $\psi : \Omega \rightarrow S$  se définit de la façon suivante :

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\partial \psi}{\partial u_2}, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|}.$$

Nous noterons  $\mathbf{b}_{ij}$  les dérivées de  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  :

$$\mathbf{b}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{b}_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j}$$

où  $i, j$  prennent les valeurs 1 ou 2. Nous pouvons développer les vecteurs  $\mathbf{b}_{ij}$  dans la base  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \boldsymbol{\nu}\}$  :

$$\mathbf{b}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{b}_2 + h_{ij} \boldsymbol{\nu}. \quad (5.8)$$

Observer que les  $h_{ij}$  sont les coefficients de la deuxième forme fondamentale.

**Définition 5.6.1.** (i) Les coefficients  $\Gamma_{ij}^k$  s'appellent les *symboles de Christoffel* de *deuxième espèce* de la surface paramétrée.

(ii) Les *symboles de Christoffel* de *première espèce* sont les produits scalaires de  $\mathbf{b}_{ij}$  avec  $\mathbf{b}_k$ .  
On les notes

$$\Gamma_{ijk} = \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_k \rangle.$$

**Remarques.**

1. Les symboles de Christoffel sont des fonctions des paramètres  $(u_1, u_2) \in \Omega$ .
2. Les symboles de Christoffel de première et deuxième espèce s'expriment linéairement les uns en fonctions des autres. On a en effet

$$\Gamma_{ijk} = \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_k \rangle = \langle \Gamma_{ij}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{ij}^2 \mathbf{b}_2 + h_{ij} \boldsymbol{\nu}, \mathbf{b}_k \rangle = \Gamma_{ij}^1 g_{1k} + \Gamma_{ij}^2 g_{2k},$$

de façon spécifique :

$$\Gamma_{ij1} = g_{11}\Gamma_{ij}^1 + g_{12}\Gamma_{ij}^2 \quad \text{et} \quad \Gamma_{ij2} = g_{21}\Gamma_{ij}^1 + g_{22}\Gamma_{ij}^2. \quad (5.9)$$

On peut inverser cette relation :

$$\Gamma_{ij}^1 = \frac{g_{22}\Gamma_{ij1} - g_{12}\Gamma_{ij2}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad \text{et} \quad \Gamma_{ij}^2 = \frac{g_{11}\Gamma_{ij2} - g_{12}\Gamma_{ij1}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (5.10)$$

3. Les symboles de Christoffel sont symétriques en leur deux premiers indices :

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} \quad \text{et} \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Cela découle de l'égalité  $\mathbf{b}_{21} = \mathbf{b}_{12}$ , qui provient de la symétrie des dérivées partielles d'ordre 2 pour une fonction de classe  $C^2$  :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_2 \partial u_1} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial u_2}.$$

Le lemme suivant jouera un rôle fondamental dans la suite. Il nous dit Les symboles de Christoffel ne dépendent que de la géométrie intrinsèque de la surface.

**Lemme 5.6.2** (Levi-Civita). *Les symboles de Christoffel d'une surface paramétrée  $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  de classe  $C^2$  ne dépendent que des coefficients  $g_{ij}$  du tenseur métrique et de leur dérivées du premier ordre.*

**Preuve.** En dérivant le coefficient  $g_{jk}$  du tenseur métrique, on voit que

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k \rangle = \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_k \rangle + \langle \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{ik} \rangle.$$

C'est-à-dire

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj}.$$

De même on a

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{jki} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}.$$

On a donc, en tenant compte de la symétrie  $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$ ,

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = (\Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj}) + (\Gamma_{jik} + \Gamma_{jki}) - (\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}) = 2\Gamma_{ijk}.$$

Les symboles de Christoffel de première espèce sont donc donnés par la somme suivante de dérivées des coefficients du tenseur métrique :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) \quad (5.11)$$

En appliquant (5.10), on voit que les symboles de Christoffel de deuxième espèce ne dépendent également que des coefficients du tenseur métrique et de leur dérivées.

□

## 5.7 Sur l'accélération des courbes tracées sur une surface

Les courbes sur les surfaces possèdent la propriété remarquable suivante.

**Théorème 5.1** *Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe de classe  $C^2$  tracée sur la surface  $S$  supposée également de classe  $C^2$ . Alors son accélération normale en un point est donnée par*

$$\langle \boldsymbol{\nu}, \ddot{\gamma} \rangle = \mathbf{h}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \quad (5.12)$$

où  $h$  est la seconde forme fondamentale. En particulier, l'accélération normale en un point ne dépend que du vecteur vitesse en ce point.

Ce théorème nous dit que si deux courbes sur  $S$  passent par un même point  $p$ , et ont le même vecteur vitesse en ce point, alors elles ont aussi la même accélération normale.

**Preuve.** Nous présentons deux preuves de ce résultat. La première preuve est très courte : on sait que  $\langle \boldsymbol{\nu}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$  pour tout  $t \in S$ , on a donc

$$\langle \boldsymbol{\nu}(\gamma(t)), \ddot{\gamma}(t) \rangle = - \left\langle \frac{d}{dt} \boldsymbol{\nu}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \right\rangle = - \langle d\boldsymbol{\nu}(\dot{\gamma}(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \mathbf{h}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

La seconde preuve donne plus de détails sur le vecteur accélération : On peut représenter la courbe  $\gamma$  dans le paramétrage de la surface par  $\gamma(t) = \psi(u_1(t), u_2(t))$ , et donc

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \dot{u}_2 \mathbf{b}_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(t) &= \ddot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \ddot{u}_2 \mathbf{b}_2 + \dot{u}_1 \dot{\mathbf{b}}_1 + \dot{u}_2 \dot{\mathbf{b}}_2 \\ &= \ddot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \ddot{u}_2 \mathbf{b}_2 + \dot{u}_1 (\dot{u}_1 \mathbf{b}_{11} + \dot{u}_2 \mathbf{b}_{12}) + \dot{u}_2 (\dot{u}_1 \mathbf{b}_{21} + \dot{u}_2 \mathbf{b}_{22}) \\ &= \ddot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \ddot{u}_2 \mathbf{b}_2 + (\dot{u}_1)^2 \mathbf{b}_{11} + 2\dot{u}_1 \dot{u}_2 \mathbf{b}_{12} + (\dot{u}_2)^2 \mathbf{b}_{22}. \end{aligned}$$

Les vecteurs  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{b}_2$  sont orthogonaux à  $\boldsymbol{\nu}$ , et comme  $h_{ij} = \langle \mathbf{b}_{ij}, \boldsymbol{\nu} \rangle$  on a

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \boldsymbol{\nu} \rangle = h_{11}(\dot{u}_1)^2 + 2h_{12}\dot{u}_1\dot{u}_2 + h_{22}(\dot{u}_2)^2 = \mathbf{H}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

□

A l'aide des symboles de Christoffel, nous pouvons développer plus complètement le calcul de l'accélération. Nous avons vu lors de la démonstration précédente que

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{u}_1 \mathbf{b}_1 + \ddot{u}_2 \mathbf{b}_2 + (\dot{u}_1)^2 \mathbf{b}_{11} + 2\dot{u}_1 \dot{u}_2 \mathbf{b}_{12} + (\dot{u}_2)^2 \mathbf{b}_{22}.$$

En développant les vecteurs  $\mathbf{b}_{ij}$  dans la base  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \boldsymbol{\nu}$  via l'équation (5.8), nous trouvons

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(t) &= (\ddot{u}_1 + \Gamma_{11}^1 \dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22}^1 \dot{u}_2^2) \mathbf{b}_1 \\ &\quad + (\ddot{u}_2 + \Gamma_{11}^2 \dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22}^2 \dot{u}_2^2) \mathbf{b}_2 \\ &\quad + \mathbf{h}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \boldsymbol{\nu}. \end{aligned}$$

L'équation des géodésiques peut en particulier se récrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + \Gamma_{11}^1 \dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22}^1 \dot{u}_2^2 = 0 \\ \ddot{u}_2 + \Gamma_{11}^2 \dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22}^2 \dot{u}_2^2 = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Ces équations, avec le lemme (5.6.2), montrent en particulier que la notion de géodésique ne dépend que de la géométrie intrinsèque de la surface.



## 5.8 Le Théorème Egregium

Nous reformulons le théorème Egregium de la façon suivante :

**Théorème 5.8.1** (Théorème Egregium, Gauss 1827). *La courbure de Gauss d'une surface paramétrée  $\psi : \Omega \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  de classe  $C^3$  ne dépend que des coefficients  $g_{ij}$  du tenseur métrique et de leur dérivées jusqu'à l'ordre 2.*

Le démonstration utilise les deux lemmes suivants qui sont de nature calculatoire. Leur preuve ne présentent pas de difficulté particulière autre qu'une attention soutenues aux indices, l'effort se justifie par l'importance du théorème egregium.

**Lemme 5.8.2.** *On a*

$$\langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_{km} \rangle = \Gamma_{km}^1 \Gamma_{ij1} + \Gamma_{km}^2 \Gamma_{ij2} + h_{km} h_{ij}.$$

**Preuve.** Rappelons que  $\mathbf{b}_{km} = \Gamma_{km}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{km}^2 \mathbf{b}_2 + h_{km} \boldsymbol{\nu}$ , donc

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_{km} \rangle &= \langle \mathbf{b}_{ij}, \Gamma_{km}^1 \mathbf{b}_1 + \Gamma_{km}^2 \mathbf{b}_2 + h_{km} \boldsymbol{\nu} \rangle \\ &= \Gamma_{km}^1 \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_1 \rangle + \Gamma_{km}^2 \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_2 \rangle + h_{km} \langle \mathbf{b}_{ij}, \boldsymbol{\nu} \rangle \\ &= \Gamma_{km}^1 \Gamma_{ij1} + \Gamma_{km}^2 \Gamma_{ij2} + h_{km} h_{ij} \end{aligned}$$

□

**Lemme 5.8.3.** *On a*

$$\langle \mathbf{b}_{11}, \mathbf{b}_{22} \rangle - \|\mathbf{b}_{12}\|^2 = \frac{\partial}{\partial u_1} \Gamma_{221} - \frac{\partial}{\partial u_2} \Gamma_{121}.$$

**Preuve.** Calculons

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \Gamma_{221} = \frac{\partial}{\partial u_1} \langle \mathbf{b}_{22}, \mathbf{b}_1 \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_{22}}{\partial u_1}, \mathbf{b}_1 \right\rangle + \left\langle \mathbf{b}_{22}, \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_{22}}{\partial u_1}, \mathbf{b}_1 \right\rangle + \langle \mathbf{b}_{22}, \mathbf{b}_{11} \rangle.$$

On a donc

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_{22}}{\partial u_1}, \mathbf{b}_1 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u_1} \Gamma_{221} - \langle \mathbf{b}_{22}, \mathbf{b}_{11} \rangle.$$

De même

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{b}_{12}}{\partial u_2}, \mathbf{b}_1 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u_2} \Gamma_{121} - \langle \mathbf{b}_{12}, \mathbf{b}_{12} \rangle.$$

La différence de ces deux identités prouve le lemme car<sup>6</sup>

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial \mathbf{b}_{12}}{\partial u_2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial u_2 \partial u_2 \partial u_1} = 0.$$

□

**Démonstration du Théorème Egregium.** En appliquant les deux lemmes précédents, on voit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} \Gamma_{221} - \frac{\partial}{\partial u_2} \Gamma_{121} &= \langle \mathbf{b}_{11}, \mathbf{b}_{22} \rangle - \|\mathbf{b}_{12}\|^2 \\ &= (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{221} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{222} + h_{11} h_{22}) - (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{121} + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{122} + h_{12} h_{12}) \\ &= (h_{11} h_{22} - h_{12}^2) + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{221} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{222} - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{121} - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{122}). \end{aligned}$$

---

6. C'est à cet endroit qu'on doit supposer que  $\psi$  est de classe  $C^3$ .

On a donc

$$h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = \frac{\partial}{\partial u_1}\Gamma_{221} - \frac{\partial}{\partial u_2}\Gamma_{121} - \Gamma_{11}^1\Gamma_{221} - \Gamma_{11}^2\Gamma_{222} + \Gamma_{12}^1\Gamma_{121} + \Gamma_{12}^2\Gamma_{122}.$$

Par conséquent la courbure de Gauss  $K = \frac{\det(\mathbf{H})}{\det(\mathbf{G})}$  peut s'écrire

$$K = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \left( \frac{\partial}{\partial u_1}\Gamma_{221} - \frac{\partial}{\partial u_2}\Gamma_{121} - \Gamma_{11}^1\Gamma_{221} - \Gamma_{11}^2\Gamma_{222} + \Gamma_{12}^1\Gamma_{121} + \Gamma_{12}^2\Gamma_{122} \right). \quad (5.14)$$

Il suit alors du lemme (5.6.2) que la courbure de Gauss est fonction des coefficients  $g_{ij}$  et de leur dérivées premières et secondes.

□

**Exemple.** Supposons que le tenseur métrique est donné par  $ds^2 = du_1^2 + a^2 du_2^2$ , où  $a$  est une fonction positive de  $(u_1, u_2)$ . On a donc  $g_{11} = 1$ ,  $g_{12} = g_{21} = 0$  et  $g_{22} = a^2$ . Les symboles de Christoffel de première espèce se calculent à partir de (5.11). On trouve que

$$\Gamma_{221} = -a \frac{\partial a}{\partial u_1}, \quad \Gamma_{122} = \Gamma_{212} = a \frac{\partial a}{\partial u_1}, \quad \Gamma_{222} = a \frac{\partial a}{\partial u_2},$$

et tous les autres  $\Gamma_{ijk}$  sont nuls. Pour les coefficients de seconde espèce, nous avons  $\Gamma_{ij}^1 = \Gamma_{ij1}$  et  $\Gamma_{ij}^2 = \frac{1}{a^2}\Gamma_{ij2}$ . Donc la formule (5.14) se réduit à

$$K = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial}{\partial u_1}\Gamma_{221} + \Gamma_{12}^2\Gamma_{122} \right) = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial}{\partial u_1}\Gamma_{221} + \frac{1}{a^2}(\Gamma_{122})^2 \right) = -\frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial u_1^2}. \quad (5.15)$$

## Annexe A

# Notions de topologie et espaces vectoriels normés

### A.1 Rappels de topologie

La topologie étudie et formalise les notions de *voisinage*, de *convergence* et de *continuité*.

**Définition A.1.1.** Soit  $X$  un ensemble. On appelle *topologie* sur  $X$  une famille de sous-ensembles  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$  telle que

- i.)  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$  ;
- ii.) si  $U, V \in \mathcal{O}$ , alors  $U \cap V \in \mathcal{O}$  ;
- iii.) si  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{O}$  est une famille quelconque d'éléments de  $\mathcal{O}$ , alors  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$ .

On dit que  $U \subset X$  est *ouvert* si  $U \in \mathcal{O}$  et on dit que  $F \subset X$  est *fermé* si  $F^c = X \setminus F \in \mathcal{O}$ . L'ensemble  $A \subset X$  est un *voisinage* du point  $p \in X$  s'il existe un ouvert  $U \in \mathcal{O}$  tel que  $p \in U \subset A$ . Un *espace topologique* est un couple  $(X, \mathcal{O})$  où  $X$  est un ensemble et  $\mathcal{O}$  est une topologie sur  $X$ .

Il est clair que l'intersection d'une famille quelconque de fermés d'un espace topologique  $(X, \mathcal{O})$  est un fermé. Pour tout  $A \in \mathcal{O}$ , on note  $\bar{A}$  l'intersection de tous les fermés qui contiennent  $A$  :

$$\bar{A} = \bigcap_{F \supset A, F \text{ fermé}} F.$$

L'ensemble  $\bar{A}$  est donc le plus petit ensemble fermé qui contient  $A$ . On l'appelle l'*adhérence* ou la *fermeture* de  $A$ . On le note aussi  $\text{Cl}(A)$  ("Cl" pour *closure* = fermeture en anglais).

On définit aussi l'*intérieur* de  $A$ . C'est le plus grand ouvert qui est contenu dans  $A$ , on le note  $A^\circ$  ou  $\text{Int}(A)$ , il est défini par

$$\text{Int}(A) = A^\circ = \bigcup_{U \subset A, U \text{ ouvert}} U.$$

Il est clair que  $\text{Int}(A) \subset \text{Cl}(A)$ , la différence s'appelle la *frontière* de  $A$  et se note

$$\text{Fr}(A) = \text{Cl}(A) \setminus \text{Int}(A).$$

Une application  $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  entre deux espaces topologiques est *continue* si l'image inverse d'un ouvert de  $Y$  est un ouvert de  $X$ , i.e.  $f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subset \mathcal{O}_X$ . L'application est *ouverte* si l'image directe d'un ouvert de  $X$  est un ouvert de  $Y$ , i.e.  $f(\mathcal{O}_X) \subset \mathcal{O}_Y$ .

L'application  $f$  est un *homéomorphisme* si elle est bijective, continue et ouverte (et donc  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est aussi continue).

L'espace topologique  $(X, \mathcal{O})$  est *séparé* (on dit aussi qu'il est *de Hausdorff*) si toute paire de points distincts admet des voisinages disjoints, i.e. si pour tous  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$ , il existe  $U, V \in \mathcal{O}$  tels que  $U \cap V = \emptyset$  et  $p \in U$ ,  $q \in V$ . L'espace topologique  $(X, \mathcal{O})$  est *connexe* si tout sous-ensemble qui est à la fois ouvert et fermé est égal à  $X$  ou  $\emptyset$ . La réunion de tous les sous ensembles connexes contenant un point  $x \in X$  s'appelle la *composante connexe* de  $x$ . L'ensemble  $X$  est réunion disjointe des ses composantes connexes, et chaque composante connexe est un sous-ensemble connexe et maximal (i.e. qui n'est contenu dans aucun sous-ensemble connexe plus grand). L'espace  $X$  est *localement connexe* si tout point admet un voisinage connexe. Lorsque  $X$  est localement connexe, les composantes connexes de  $X$  sont les sous-ensembles qui sont ouverts, fermés et connexes.

L'espace topologique  $(X, \mathcal{O})$  admet une *base dénombrable d'ouverts* (on dit aussi qu'il vérifie le *second axiome de dénombrabilité*) s'il existe une suite dénombrable d'ouverts  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  telle que tout ouvert est réunion d'éléments de cette suite.

### Exemples d'espaces topologiques.

- 1.) Pour tout ensemble  $X$ , l'ensemble  $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$  de toutes les parties de  $X$  est une topologie séparée appelée la *topologie discrète*.
- 2.)  $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$  est une topologie appelée la *topologie grossière*. Elle est non séparée dès que  $X$  contient au moins deux points.
- 3.) La collection des sous-ensembles de  $X$  qui sont vides ou de complémentaire fini est une topologie sur  $X$  (en général non séparée). On l'appelle la *topologie cofinie*.
- 4.) Si  $(X, d)$  est un espace métrique, alors il existe une topologie séparée dont les ouverts sont les parties  $U \subset X$  qui sont réunion de boules ouvertes, i.e. d'ensembles du type

$$B(p, \varepsilon) = \{q \in X \mid d(p, q) < \varepsilon\}.$$

Un espace topologique  $(X, \mathcal{O})$  est dit *métrisable* s'il existe une distance  $d$  sur  $X$  induisant la topologie  $\mathcal{O}$ .

- 5.) Si  $(X, \mathcal{O}_X)$  est un espace topologique et  $Y \subset X$ , alors

$$\mathcal{O}_Y := \{V = U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}_X\}$$

est une topologie sur  $Y$ . On l'appelle la *topologie relative* ou la *topologie induite* sur  $Y$  par  $\mathcal{O}_X$ .

### Le théorème d'invariance du domaine

Un théorème fondamental sur la topologie de  $\mathbb{R}^n$  est le suivant :

**Théorème A.1.2** (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer (1912)). *Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application continue et injective, alors  $f$  est une application ouverte (et c'est donc un homéomorphisme sur son image).*

Nous admettons ce théorème sans démonstration.

**Corollaire A.1.3** (Invariance de la dimension). *Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  non vide, et  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ . Si  $U$  et  $V$  sont homéomorphes, alors  $m = n$ .*

Rappelons que Cantor avait démontré qu'il existe une bijection entre  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  pour toute paire d'entiers  $n, m \geq 1$ , le corollaire ci-dessus nous dit qu'une telle bijection ne peut pas être un homéomorphisme si  $n \neq m$ , ce qui est conforme à notre intuition de la notion de dimension.

**Preuve.** Supposons que  $n > m$  et que  $g : U \rightarrow V$  est un homéomorphisme. Considérons l'application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x), \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}).$$

Alors  $f$  est continue et injective, donc  $f(U) \subset \mathbb{R}^n$  est ouvert par le théorème précédent. Mais c'est impossible car  $f(U) \subset \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n = 0\}$  qui ne contient aucun sous-ensemble ouvert non vide. Donc il est impossible que  $n > m$ . De même  $m \not> n$ .

□

## A.2 Rappels sur la notion de norme

Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps de réels. Rappelons qu'une *norme* sur  $E$  est une fonction  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les trois propriétés suivantes pour tous  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

- i.)  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .
- ii.)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iii.)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

A toute norme sur  $E$  on définit une distance  $d$  sur  $E$  définie par  $d(x, y) = \|y - x\|$ , en particulier une norme définit une topologie sur  $E$  et on peut alors parler d'ouverts, de fermés, d'ensembles compacts, de convergence, de continuité etc.

Deux normes  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  sur  $E$  sont dites *équivalentes* (ou *topologiquement équivalentes*) si elles définissent la même topologie.

**Lemme A.2.1.** *a) Les normes  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  sur l'espace vectoriel  $E$  sont équivalentes si et seulement s'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $x \in E$  on a*

$$\frac{1}{c} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c \|x\|_2.$$

*b) Deux normes sur un espace vectoriel de dimension finies sont toujours équivalentes.*

La preuve est un simple exercice du cours d'analyse 2.

**Exemples de normes.**

- 1.) Si  $\langle , \rangle$  est un produit scalaire, alors  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est une norme (lorsque c'est le cas, on dit que la norme  $\| \cdot \|$  *dérive d'un produit scalaire*).
- 2.) Pour  $1 \leq p < \infty$ , on définit la norme  $\| \cdot \|_p$  sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

- 3.) Toujours sur  $\mathbb{R}^n$ , on définit la norme  $\| \cdot \|_\infty$  par

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|.$$

- 4.) Sur  $C^0([0, 1])$  on définit aussi des normes  $\| \cdot \|_p$  :

$$\|f\|_p = \left( \int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

- 5.) Si  $(V_1, \| \cdot \|_1)$  et  $(V_2, \| \cdot \|_2)$  sont deux espaces normés de dimensions finies, on définit la *norme d'opérateurs* sur l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(V_1, V_2)$  des homomorphismes linéaires de  $V_1$  dans  $V_2$  par

$$\|\Phi\|_{\text{Op}} = \sup\{\|\Phi(x)\|_2 \mid \|x\|_1 \leq 1\}.$$

- 6.) La *norme de Hilbert-Schmidt* sur l'espace  $M_n(\mathbb{R})$  des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels est définie par

$$\|A\|_{\text{HS}} = \text{Trace}(A^\top A) = \sum_{i,j} \sqrt{A_{ij}^2}.$$

**Proposition A.2.2.** *Toute application linéaire entre deux espaces vectoriels réels normés de dimension finie est continue.*

**Preuve.** Soit  $\Phi : V_1 \rightarrow V_2$  une application linéaire entre deux espaces normés de dimensions finies  $(V_1, \| \cdot \|_1)$  et  $(V_2, \| \cdot \|_2)$ , et soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $V_1$  et notons  $C = \max_{1 \leq i \leq n} \|\Phi(e_i)\|_2$ . Si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ , alors

$$\begin{aligned} \|\Phi(y) - \Phi(x)\|_2 &= \|\Phi(y - x)\|_2 = \left\| \Phi \left( \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) e_i \right) \right\|_2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \Phi(e_i) \right\|_2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| \|\Phi(e_i)\|_2 \\ &\leq C \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|. \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $y \rightarrow x$  alors  $\Phi(y) \rightarrow \Phi(x)$ .

□

## Annexe B

# Sur les notations classiques de la géométrie différentielle des surfaces

Parmi les textes historiquement important traitant de la la géométrie différentielle des surfaces, on doit citer *Recherches sur la courbure des surfaces*. par Leonhard Euler en 1760, *Application de l'analyse à la géométrie*, à l'usage de l'École impériale polytechnique par Gaspard Monge en 1807 et les *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal* en 4 volumes par Gaston Darboux publiés entre 1887 et 1896. Ces développements historiques ont conduit à un système de notations assez différentes de celles que nous avons exposées dans ces notes de cours, mais qui sont efficace pour les calculs.

On se donne d'abord un système d'axes orthonormés  $Oxyz$  dans l'espace euclidien, en sorte qu'un point  $p$  peut être représenté par son *vecteur position* (ou *rayon vecteur*)  $\mathbf{r} = \overrightarrow{Op} = (x, y, z)$ . On obtient une courbe  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  lorsque le point dépend d'un paramètre  $t$ ; l'abscisse curviligne le long de cette courbe est données par l'intégrale

$$s = \int \|\dot{\mathbf{r}}\| dt, \quad \text{où} \quad \|\dot{\mathbf{r}}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

La différentielle  $ds = \|\dot{\mathbf{r}}\| dt$  s'appelle l'*élément linéaire*, et il est commode d'écrire

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Lorsque le point dépend de deux paramètre  $u, v$ , on obtient une surface

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

On demandera à cette surface d'être régulière, ce qu'on exprimera par la condition

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \text{ est non nul, où } \mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Cette condition nous dit que l'application  $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$  est une immersion d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}^3$  et les vecteurs  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  forment la base adaptée du plan tangent à la surface au point  $\mathbf{r}(u, v)$ . On note qu'une co-orientation de la surface est donnée en tout point  $p = \mathbf{r}(u, v)$  par

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}.$$

L'élément linéaire peut donc se réécrire en fonction des différentielles  $du$  et  $dv$  :

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right) \\ &= E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right), \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \\ G &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2. \end{aligned}$$

L'élément d'aire s'écrit alors

$$dA = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Les paramètres  $u$  et  $v$  sont vus comme des coordonnées curvilignes sur la surface et les différentielles  $du$ ,  $dv$  sont des coordonnées linéaires sur l'espace tangent à la surface au point  $p = \mathbf{r}(u, v)$ . Le  $ds^2$  s'appelle aussi la *première forme fondamentale* et se note  $I = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ , en comparant avec nos notations on note que

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G.$$

Comme premier exemple, considérons l'hélicoïde  $\mathbf{r}(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$ . On a

$$d\mathbf{r} = (-v \sin(u), v \cos(u), 1) du + (\cos(u), \sin(u), 0) dv,$$

donc l'élément linéaire est donné par

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (1 + v^2) du^2 + dv^2.$$

Le tenseur métrique est donc  $E = g_{11} = (1 + v^2)$ ,  $F = g_{12} = 0$  et  $G = g_{22} = 1$ . On a aussi

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-\sin(u), \cos(u), -v),$$

et

$$dA = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv = \sqrt{1 + v^2} dudv.$$

Comme second exemple, on considère maintenant la surface de révolution autour de l'axe  $Oz$  paramétrée par

$$\mathbf{r}(u, v) = (\rho(v) \cos(u), \rho(v) \sin(u), z(v)).$$

Alors

$$d\mathbf{r} = (-\rho(v) \sin(u), \rho(v) \cos(u), 0) du + (\rho'(v) \cos(u), \rho'(v) \sin(u), z'(v)) dv,$$

l'élément linéaire est donné par

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \rho(v)^2 du^2 + (\rho'(v)^2 + z'(v)^2) dv^2$$



On peut écrire le tenseur métrique matriciellement :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(v)^2 & 0 \\ 0 & (\rho'(v)^2 + z'(v)^2) \end{pmatrix}.$$

On a aussi

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\rho(v)z'(v)\cos(u), \rho(v)z'(v)\sin(u), -\rho(v)\rho'(v)),$$

et

$$dA = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv = \rho(v)\sqrt{\rho'(v)^2 + z'(v)^2} du dv.$$

La deuxième forme fondamentale s'obtient en dérivant une seconde fois le vecteurs position  $\mathbf{r}(u, v)$ . On pose

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{r}_u \cdot \boldsymbol{\nu}_u, \\ M &= \mathbf{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{r}_u \cdot \boldsymbol{\nu}_v, \\ N &= \mathbf{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\mathbf{r}_v \cdot \boldsymbol{\nu}_v. \end{aligned}$$

Alors la *seconde forme fondamentale* est donnée par

$$\text{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Les notations  $(e, f, g)$  sont parfois utilisées pour les coefficients  $(L, M, N)$ , bien évidemment nous avons  $L = h_{11}$ ,  $M = h_{12}$  et  $N = h_{22}$ . Avec ces notations, la courbure normale d'une courbe  $\gamma(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$  est donnée par

$$k_n(t) = \frac{\text{II}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}{\text{I}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}.$$

La courbure de Gauss est

$$K = \frac{\det(\text{II})}{\det(\text{I})} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Revenons aux exemples : Pour l'hélicoïde, nous avons

$$\mathbf{r}_u = (-v \sin(u), v \cos(u), 1), \quad \mathbf{r}_v = (\cos(u), \sin(u), 0), \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} = \frac{(-\sin(u), \cos(u), -v)}{\sqrt{1 + v^2}},$$

et les coefficients de la seconde forme fondamentale sont donc

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \\ M &= \mathbf{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}}, \\ N &= \mathbf{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \end{aligned}$$

La courbure de Gauss de l'hélicoïde est alors

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1 + v^2)^2}$$

Pour la surface de révolution, on a

$$\mathbf{r}_u = (-\rho(v) \sin(u), \rho(v) \cos(u), 0), \quad \mathbf{r}_v = (\rho'(v) \cos(u), \rho'(v) \sin(u), z'(v)),$$

et

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} = \frac{(z'(v) \cos(u), z'(v) \sin(u), -\rho'(v))}{\sqrt{\rho'(v)^2 + z'(v)^2}}.$$

Les coefficients de la seconde forme fondamentale sont alors

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu} \cdot \boldsymbol{\nu} = -\frac{\rho(v)z'(v)}{\sqrt{\rho'(v)^2 + z'(v)^2}}, \\ M &= \mathbf{r}_{uv} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \\ N &= \mathbf{r}_{vv} \cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{\rho''(v)z'(v) - \rho'(v)z''(v)}{\sqrt{\rho'(v)^2 + z'(v)^2}}. \end{aligned}$$

La courbure de Gauss est alors

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{z'(v)(\rho''(v)z'(v) - \rho'(v)z''(v))}{\rho(v)}$$

## Annexe C

# Formulaire

• **Produit scalaire** Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire (i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive) qu'on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dans une base orthonormée il est donné par  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ . A partir de la norme le produit scalaire s'exprime

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{4} \left( \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 \right).$$

On a aussi

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \ \mathbf{a}\ ^2$	$ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle  \leq \ \mathbf{a}\  \ \mathbf{b}\ $
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \ \mathbf{a}\  \ \mathbf{b}\  \cos(\vartheta(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$	$\text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\ \mathbf{a}\ ^2} \mathbf{a}$
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\ \mathbf{a} + \mathbf{b}\ ^2 - \ \mathbf{a}\ ^2 - \ \mathbf{b}\ ^2)$	$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} (\ \mathbf{a}\ ^2 + \ \mathbf{b}\ ^2 - \ \mathbf{a} - \mathbf{b}\ ^2)$

• **Produits vectoriel et mixte dans  $\mathbb{R}^3$ .**

1.) Dans une base orthonormée d'orientation positive on a

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$$

2.)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}$

3.)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$

4.)  $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

5.)  $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$ .

6.) Le *produit mixte* de trois vecteurs  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}^3$  est défini par  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle$  il est trilinéaire et est donné par le déterminant  $3 \times 3$  formé par la matrice dont les colonnes sont les coefficients des 3 vecteurs.

7.) on a  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}] \mathbf{c} - [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \mathbf{d}$ .

• **Produits extérieur dans le plan.** Dans le plan orienté  $\mathbb{R}^2$ , le produit extérieur de deux vecteurs est

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle \mathbf{J}(\mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle$$

où  $\mathbf{J}$  est l'opérateur de rotation d'angle  $\pi/2$  dans le sens positif.

---

• **Courbes.** Le vecteur vitesse d'une courbe  $\gamma$  de  $\mathbb{R}^n$  se note  $\dot{\gamma}$ . La vitesse est  $V = V_\gamma(u) = \|\dot{\gamma}(u)\|$  et l'abscisse curviligne depuis le point initial  $\gamma(u_0)$  est

$$s(u) = \int_{u_0}^u V_\gamma(\tau) d\tau.$$

La formule de l'accélération est

$$\ddot{\gamma}(u) = \dot{V}\mathbf{T} + V^2\mathbf{K}$$

où  $\mathbf{T} = \frac{1}{V}\dot{\gamma}$  et  $\mathbf{K} = \frac{1}{V}\dot{\mathbf{T}}$  est le vecteur de courbure. La courbure de  $\gamma$  est la fonction scalaire  $\kappa(u) = \|\mathbf{K}(u)\|$ .

• **Repère de Frenet.** Si  $\gamma(u) \in \mathbb{R}^3$  est  $C^3$  et birégulière, le repère mobile de Frenet est le repère orthonormé direct d'origine  $\gamma(u)$  et de base

$$\mathbf{T} = \frac{1}{V}\dot{\gamma}, \quad \mathbf{N} = \frac{\dot{\mathbf{T}}}{\|\dot{\mathbf{T}}\|} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{K}, \quad \mathbf{B} = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}.$$

La torsion est  $\tau = \frac{1}{V}\langle \mathbf{B}, \dot{\mathbf{N}} \rangle$  et on a les équations de Serret-Frenet :

$$\frac{1}{V}\dot{\mathbf{T}} = \kappa\mathbf{N}, \quad \frac{1}{V}\dot{\mathbf{N}} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \quad \frac{1}{V}\dot{\mathbf{B}} = -\tau\mathbf{N}$$

On a aussi

$$\kappa = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{V^3}, \quad \tau = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}]}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2} = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}]}{\kappa^2 V^6}$$

Le vecteur de Darboux est le champ de vecteurs le long de  $\gamma$  défini par

$$\mathbf{D} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B}$$


---

• **Surfaces paramétrée.** Si  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une surface paramétrée, le repère mobile adapté est

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\overrightarrow{\partial \psi}}{\partial u_1}(u_1, u_2), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\overrightarrow{\partial \psi}}{\partial u_2}(u_1, u_2), \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\|}$$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  engendrent le plan tangent à la surface au point  $p = \psi(u_1, u_2)$  et  $\boldsymbol{\nu}$  est vecteur normal. Si  $f(x, y, z) = 0$  est une équation pour la surface alors on a aussi

$$\boldsymbol{\nu} = \pm \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\|\overrightarrow{\nabla f}\|}.$$

Le tenseur métrique  $G = (g_{ij})$  est la matrice de Gram de  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ , i.e.  $g_{ij} = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle$ .

L'élément d'aire infinitésimale est

$$dA = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \cdot du_1 du_2 = \|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2\| du_1 du_2$$

et l'élément de longueur infinitésimale est

$$ds = \sqrt{g_{11} du_1^2 + 2g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2}$$

• **Repère de Darboux, courbures normales et géodésiques.** Si  $\gamma$  est tracée sur la surface  $S$ , on note  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{T}$ . Le repère de Darboux est  $\{\boldsymbol{\nu}, \mathbf{T}_\gamma, \boldsymbol{\mu}\}$ . La courbure normale, la courbure géodésique et la torsion géodésique de  $\gamma$  sont définis par

$$k_n(u) = \langle \mathbf{K}_\gamma(u), \boldsymbol{\nu}(u) \rangle, \quad k_g(u) = \langle \mathbf{K}_\gamma(u), \boldsymbol{\mu}(u) \rangle \quad \text{et} \quad \tau_g(u) = \frac{1}{V_\gamma(u)} \langle \dot{\boldsymbol{\nu}}(u), \boldsymbol{\mu}(u) \rangle.$$

Les équations de Darboux sont :

$$\frac{1}{V} \dot{\mathbf{T}} = k_g \boldsymbol{\mu} + k_n \boldsymbol{\nu}, \quad \frac{1}{V} \dot{\boldsymbol{\nu}} = -k_n \mathbf{T} + \tau_g \boldsymbol{\mu}, \quad \frac{1}{V} \dot{\boldsymbol{\mu}} = -k_g \mathbf{T} - \tau_g \boldsymbol{\nu}.$$

• **Application de Weingarten et deuxième forme fondamentale.** L'application de Weingarten  $L_p$  en un point d'une surface  $S$  est l'endomorphisme de  $T_p S$  défini par  $L_p = d\boldsymbol{\nu}_p$ . La deuxième forme fondamentale est la forme bilinéaire sur  $T_p S$  définie par  $h_p(\xi, \eta) = -\langle L_p(\xi), \eta \rangle$ . Les coefficients de  $h_p$  dans la base adaptée sont

$$h_{ij} = h(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \left\langle \boldsymbol{\nu}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle.$$

La matrice de l'application de Weingarten dans la même base est définie par  $L(\mathbf{b}_i) = \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial u_i}$  et on a

$$\mathbf{H} = -\mathbf{GL}.$$

Les courbures principales, de Gauss et moyenne de  $S$  en  $p$  sont les valeurs propre, le déterminant et la demi trace de  $-L_p$ . Le point  $p$  est ombilique si les deux courbures principales coïncident en ce point.