Математическая модель

Нерастяжимую мнущуюся поверхность представим в виде прямоугольной сетки. В каждом ее узле сосредоточена определенная масса (в общем случае, массы узлов могут различаться). Узлы соединены между собой невесомыми пружинами (ребрами). Искомая коническая поверхность имеет N_z+1 слоев, каждый из которых состоит из N_φ узлов. Положение и скорость *(i, j)*-ого узла определяется векторами $\mathbf{x}_{i,j}$ и $\mathbf{v}_{i,j}$.

Каждый *(i, j)*-ый узел имеет 4 ребра - $l_{i,j}$, $r_{i,j}$, $t_{i,j}$, $b_{i,j}$ - левое, правое, верхнее, нижнее ребра соответственно. Очевидно,

$$b_{i,j+1}=t_{i,j}$$

$$l_{i,j}=r_{i-1,j}$$

Конечно-разностная схема

Формируется регулярная прямоугольная (вначале) лагранжева сетка (рисунок).

Узел *(i, j)* обладает массой $m_{i,j}$, элементарной площадью $\sigma_{i,j}$. Поскольку узлы расставлены изначально на недеформированной поверхности, то углы между ребрами можно считать прямыми. Прямоугольная зона с центром в *(i,j)*-ом узле рассчитывается как

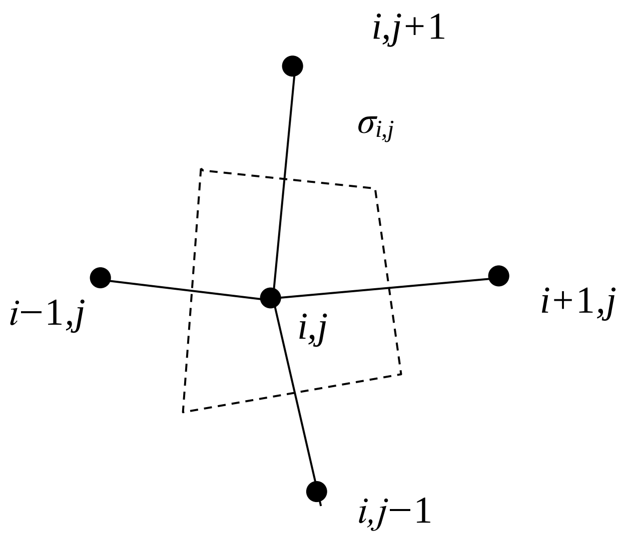

Рисунок . Пятиточечный шаблон разностной схемы

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{2}(t_{i,j} + b_{i,j}) \cdot \frac{1}{2}(l_{i,j} + r_{i,j}) = \frac{1}{4}(t_{i,j} + b_{i,j})(l_{i,j} + r_{i,j})$$

Площадь, соответствующую каждому узлу, при характерных малых относительных растяжениях/сжатиях можно просто считать постоянной по времени и задавать вначале для неискаженной сетки.

Массу можно выразить как

$$m_{i,j} = \rho \cdot \sigma_{i,j}\,,$$

где ρ - поверхностная плотность массы.

Введем обозначения:

$\mathbf{x}_{i,j}$ - положение (i, j)-ого узла в n-й момент времени;

$\mathbf{v}_{i,j}$ - скорость (i, j)-ого узла в n-й момент времени;

P_{int}^{n} - давление в n-ый момент времени.

Тогда конечно-разностная схема будет выглядеть так:

$$m_{i,j} \cdot \frac{\mathbf{v}^{n+1}_{i,j} - \mathbf{v}^{n}_{i,j}}{\Delta t_n} = (P^n_{\text{int}} - P_0) \cdot \sigma_{i,j} \cdot \mathbf{n}^0_{i,j} + m_{i,j} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{F}^n_{mp\_i,j} + \mathbf{F}^n_{t\_i,j} + \mathbf{F}^n_{y\_i,j}$$

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$$

Силы записаны в векторной форме.

Т. о.,

$$\mathbf{v}^{n+1}_{i,j} = \mathbf{v}^{n}_{i,j} + \Delta t_n \cdot \mathbf{F}^n_{i,j} = \mathbf{v}^{n}_{i,j} + \Delta t_n \cdot \left(\frac{1}{\rho}(P^n_{\text{int}} - P_0) \cdot \mathbf{n}^0_{i,j} + \mathbf{g} + \frac{1}{m_{i,j}} \cdot \mathbf{F}^n_{t\_i,j} + \frac{1}{m_{i,j}} \cdot \mathbf{F}^n_{mp\_i,j} + \frac{1}{m_{i,j}} \cdot \mathbf{F}^n_{y\_i,j} \right)$$

$$\mathbf{x}^{n+1}{}_{i,j} = \mathbf{x}_{i,j} + \Delta t_n \cdot \mathbf{v}^{n+1}_{i,j}$$

Силы рассчитываются следующим образом:

1. Сила упругости изгиба. На первом проходе рассчитываются силы соседей и текущего узла

$$\mathbf{F}^n_{t\_i-1,j} = k \cdot \mathbf{T}_{-1}(\mathbf{x}^n_{i,j}, \mathbf{x}^n_{i-1,j}, \mathbf{x}^n_{i+1,j})$$

$$\mathbf{F}^n_{t\_i+1,j} = k \cdot \mathbf{T}_{+1}(\mathbf{x}^n_{i,j}, \mathbf{x}^n_{i-1,j}, \mathbf{x}^n_{i+1,j})$$

$$\mathbf{F}^n_{t\_i,j} = -(\mathbf{F}^n_{t\_i-1,j} + \mathbf{F}^n_{t\_i+1,j})$$

Здесь $\mathbf{T}_{-1}, \mathbf{T}_{+1}$ - вектор-функции 3 точек, определяющие силы, крутящие точки (i-1) и (i+1) относительно (i) соответственно. Они рассчитываются следующим образом

$$\mathbf{T}_{-1}(\mathbf{x}^n_{i,j}, \mathbf{x}^n_{i-1,j}, \mathbf{x}^n_{i+1,j}) = \frac{(\mathbf{x}^n_{i-1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j}) \times ((\mathbf{x}^n_{i-1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j}) \times \mathbf{C}(\mathbf{x}^n_{i,j}, \mathbf{x}^n_{i-1,j}, \mathbf{x}^n_{i+1,j}))}{\left\| (\mathbf{x}^n_{i-1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j}) \times ((\mathbf{x}^n_{i-1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j}) \times \mathbf{C}(\mathbf{x}^n_{i,j}, \mathbf{x}^n_{i-1,j}, \mathbf{x}^n_{i+1,j})) \right\|} \cdot \frac{C(\mathbf{x}^n_{i,j}, \mathbf{x}^n_{i-1,j}, \mathbf{x}^n_{i+1,j})}{\left\| \mathbf{x}^n_{i-1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j} \right\|}$$

$$\mathbf{T}_{+1}(\mathbf{x}^n_{i,j}, \mathbf{x}^n_{i-1,j}, \mathbf{x}^n_{i+1,j}) = \frac{(\mathbf{x}^n_{i+1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j}) \times ((\mathbf{x}^n_{i+1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j}) \times \mathbf{C}(\mathbf{x}^n_{i,j}, \mathbf{x}^n_{i-1,j}, \mathbf{x}^n_{i+1,j}))}{\left\| (\mathbf{x}^n_{i+1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j}) \times ((\mathbf{x}^n_{i+1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j}) \times \mathbf{C}(\mathbf{x}^n_{i,j}, \mathbf{x}^n_{i-1,j}, \mathbf{x}^n_{i+1,j})) \right\|} \cdot \frac{C(\mathbf{x}^n_{i,j}, \mathbf{x}^n_{i-1,j}, \mathbf{x}^n_{i+1,j})}{\left\| \mathbf{x}^n_{i+1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j} \right\|}$$

Аналогично определяются силы и вертикального случая. Таким образом, каждая точка содержит 5 компонентов силы, определяемых соседями. Они суммируются на втором проходе.

$\mathbf{C}$ - вектор-функция трех аргументов – пространственных координат. Она определяется следующим образом:

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}$$

$$a = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

$$b = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|$$

$$c = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|$$

$$p = \frac{(a+b+c)}{2}$$

2. Сила упругости сдвига

$$\mathbf{F}^n_{y\_i,j} = -k_{Lhor}\left(\left(\left|\mathbf{l}^n_{i,j}\right| - l^0_{i,j}\right)\frac{\mathbf{l}^n_{i,j}}{\left|\mathbf{l}^n_{i,j}\right|} + \left(\left|\mathbf{r}^n_{i,j}\right| - r^0_{i,j}\right)\frac{\mathbf{r}^n_{i,j}}{\left|\mathbf{r}^n_{i,j}\right|}\right) -$$

$$-k_{Lver}\left(\left(\left|\mathbf{b}^n_{i,j}\right| - b^0_{i,j}\right)\frac{\mathbf{b}^n_{i,j}}{\left|\mathbf{b}^n_{i,j}\right|} + \left(\left|\mathbf{t}^n_{i,j}\right| - t^0_{i,j}\right)\frac{\mathbf{t}^n_{i,j}}{\left|\mathbf{t}^n_{i,j}\right|}\right)$$

$$\mathbf{l}^n_{i,j} = \mathbf{x}^n_{i-1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j}$$

$$\mathbf{r}^n_{i,j} = \mathbf{x}^n_{i+1,j} - \mathbf{x}^n_{i,j}$$

$$\mathbf{b}^n_{i,j} = \mathbf{x}^n_{i,j-1} - \mathbf{x}^n_{i,j}$$

$$\mathbf{t}^n_{i,j} = \mathbf{x}^n_{i,j+1} - \mathbf{x}^n_{i,j}$$

где k_{Lhor} и k_{Lver} - горизонтальный и вертикальный коэффициенты упругости сдвига соответственно.

3. Сила трения.

$\mathbf{n}^0_{i,j}$ - единичная нормаль к узлу *(i, j)*. Нормаль определяется следующим образом: проводятся плоскости через текущий узел и его соседей, т.е. условно горизонтальную и вертикальную плоскости. Вдоль прямой, являющейся пересечением этих плоскостей, откладываем внешний вектор [1]:

[1] Обоснование метода на http://webmath.exponenta.ru/dnu/lc/agw/geometry/chapters/5-3.html

$$\mathbf{n}_{i,j}^{0} = \frac{\left[\left[\mathbf{l}_{i,j}^{n}, \mathbf{r}_{i,j}^{n}\right], \left[\mathbf{b}_{i,j}^{n}, \mathbf{t}_{i,j}^{n}\right]\right]}{\left\|\left[\left[\mathbf{l}_{i,j}^{n}, \mathbf{r}_{i,j}^{n}\right], \left[\mathbf{b}_{i,j}^{n}, \mathbf{t}_{i,j}^{n}\right]\right]\right\|}$$

$$\mathbf{F}_{mp\_i,j}^{n} = \mu(P_{\text{int}}^{n} - P_0) \cdot \sigma_{i,j} \cdot \boldsymbol{\tau}_{i,j}^{0},$$

где $\boldsymbol{\tau}_{i,j}^{0}$ - единичный вектор, направленный противоположно вектору скорости по касательной к поверхности, т.е. он удовлетворяет следующим условиям:

$\boldsymbol{\tau}_{i,j}^{0} \perp \mathbf{n}_{i,j}^{0}$

$\boldsymbol{\tau}_{i,j}^{0} \cdot \mathbf{v}_{i,j}^{n} < 0$

$\boldsymbol{\tau}_{i,j}^{0}, \mathbf{n}_{i,j}^{0}, \mathbf{v}_{i,j}^{n}$ - компланарны

Исходя из этих условий, расчетные соотношения следующие:

$$\boldsymbol{\tau}_{i,j}^{0} = \frac{\left[\mathbf{n}_{i,j}^{0}, \left[\mathbf{n}_{i,j}^{0}, \mathbf{v}_{i,j}^{n}\right]\right]}{\left\|\left[\mathbf{n}_{i,j}^{0}, \left[\mathbf{n}_{i,j}^{0}, \mathbf{v}_{i,j}^{n}\right]\right]\right\|}$$

ГУ и НУ

Для N_z-ого слоя (самого верхнего) положения постоянны:

$$\mathbf{x}_{i,N_z}^{n} = \mathbf{x}_{i,N_z}^{0}$$

Для нижнего слоя не учитываются вертикальные составляющие сил упругости сдвига и изгиба. Т.е.,

$$\mathbf{F}_{y\_i,0}^{n} = -k_{Lhor}\left(\left(\left|\mathbf{l}_{i,0}^{n}\right| - l_{i,0}^{0}\right)\frac{\mathbf{l}_{i,0}^{n}}{\left|\mathbf{l}_{i,0}^{n}\right|} + \left(\left|\mathbf{r}_{i,0}^{n}\right| - r_{i,0}^{0}\right)\frac{\mathbf{r}_{i,0}^{n}}{\left|\mathbf{r}_{i,0}^{n}\right|}\right)$$

$$\mathbf{F}_{t\_i,0}^{n} = k_{hor} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x}_{i,0}^{n}, \mathbf{x}_{i-1,0}^{n}, \mathbf{x}_{i+1,0}^{n})$$

Особенного рассмотрения требует ситуация, когда конус «проникает» сквозь ландшафт. Ландшафт задан некой функцией $s(\mathbf{x}) = 0$, или $z = z_L(x, y), \mathbf{x} = (x, y, z)$. Ландшафт можно покрыть треугольниками (провести триангуляции) и таким образом считать поверхность кусочно-плоской. Триангулировать можно множеством способов, в работе принят следующий метод. Плоскость Oxy покрывается равномерной прямоугольной сеткой, затем нечетные ряды узлов сдвигаются на полшага в поперечном направлении. Таким образом, на плоскости появляются равнобедренные треугольники. Перпендикуляры из этих точек пересекают поверхность в каких-то точках. Поскольку эти точки по сути задают ландшафт, то мы можем принять, что они изначально даны.

После того как $\mathbf{x}_{i,j}$ найдены, необходимо определить, находятся ли узлы под ландшафтом. Этому случаю соответствует неравенство

$$z \le z_L(x, y),$$
$$\mathbf{x} = (x, y, z)$$

Если это произошло, то нужно "поместить" узел на ландшафт. Переходим к ДСК 1, связанной с ландшафтом:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{s} + \mathbf{M}\mathbf{x}$$

Здесь $\mathbf{x}'$ - координаты в ДСК 1, $\mathbf{x}$ - в ДСК 2, $\mathbf{s}$ - вектор переноса начала координат, $\mathbf{M}$ - матрица поворота[2]. По координатам *(x,y)* можно определить, на какой треугольник попадает узел. Допустим, этот треугольник задан вершинами A,B,C. Вектор

$$\mathbf{n} = \frac{[AB, AC]}{\|[AB, AC]\|}$$

определяет нормаль к треугольнику. Расстояние до узла (назовем его P) равно:

$$d = (AP, \mathbf{n})$$

Теперь можно найти необходимую точку на ландшафте, сместив точку P:

$$P' = P - d \cdot \mathbf{n}$$

Затем найденная точка переводится обратно в ДСК 2:

$$\mathbf{x} = -\mathbf{s} + \mathbf{M}^T \mathbf{x}'$$

Таким образом, все точки, соответствующие решению, лежат не ниже ландшафта.

---

[2] Как считается матрица поворота через углы Эйлера, можно узнать здесь