Hold 09 mach: Opg3

Ali Kadum Hassan, Frederik Henriques Altmann, Gustav Mark-Hansen

December 12, 2021

1

a

Chancen for at få X kast der lander på krone i træk, er: $(\frac{1}{2})^X$
Skrevet i R:

```
pmf = \(throws) 0.5^throws
```

b

Profiten $f(X)$ er givet ved $f(a, X) = a2^X - a$
Skrevet i R:

```
profit = \(buyin, throws) buyin * 2^(throws) - buyin
```

c

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(b,n)|p(n) = \sum_{n=1}^{\infty} b \tag{1}$$

$$|f(x)|p(x) = b2^{x+1}0.5^x = b \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(b,n)|p(n) = \sum_{n=1}^{\infty} b = \infty \tag{3}$$

Da $E(X)$ divergerer mod positiv uendelig har spillet ikke noget forventet udfald.

2

a

Da hele pmf p, bortset fra $p(x = -1, y = 3)$ er kendt kan z beregnes ved at isolere.

p(x, y)	y = 1	y = 1	y = 3
x = 1	0.1	0.1	z
x = 1	0.3	0.05	0.05

$$\int p(x, y) = 1 \tag{4}$$

$$1 = 0.1 + 0.1 + 0.3 + 0.05 + 0.05 + z = 0.6 + z \tag{5}$$

$$z = 1 - 0.6 = 0.4 \tag{6}$$

Skrevet i R:

```
p <- matrix(c(0.1,0.1,z,0.3,0.05,0.05), 2, 3, TRUE)
z <- 1 - (0.1 + 0.1 + 0.3 + 0.05 + 0.05)
```

b

Beregn den forventede gevinst

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \tag{7}$$

$$E[X] = -1 * 0.6 + 1 * 0.4 = -0.2 \tag{8}$$

$$E[Y] = -1 * 0.4 + 1 * 0.15 + 3 * 0.45 = 1.1 \tag{9}$$

$$E[X + Y] = 1.1 - 0.2 = 0.9 \tag{10}$$

Skrevet i R (fortsat):

```
x <- -sum(p[1,]) + sum(p[2,])
y <- -sum(p[,1]) + sum(p[,2]) + 3*sum(p[,3])
E <- x + y # Forventede gevinst
```

c

beregn kovariansen mellem X og Y. Er X og Y uafhængige?

Skrevet i R (fortsat):

```
xy <- c(z, 0.3+0.1, 0.15, 0.05)
-3*xy[1]+ (-1)*xy[2] +xy[3]+3*xy[4] #-> E(xy) = -1.3
-1.3-(mean(x)*mean(y)) #->             Cov(x,y)= -1.08
```

Hvilket betyder at de er afhængige af hinanden, da cov $/=$ 0 og at de 2 bevæger sig modsat af hinanden

3

a

Vi ved at hvis A har et udfald som er givet, har den altid en sandsynlighed 1 betinget at det er udfaldet.

CPT	A=1	A=0
P(T=1 givet A)	0.998	a
P(T=0 givet A)	b	0.993
sum	1	1

Derfor må $a = 1 - 0.993$ og $b = 1 - 0.998$.

CPT	A=1	A=0
P(T=1 givet A)	0.998	0.007
P(T=0 givet A)	0.002	0.993
sum	1	1

Sandsynligheden for at have en peanut allergi er $P(A = 1) = 0.01$, 1%, samt $P(A = 0) = 0.99$, 99% for ikke at have allergien.

Da

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$$

kan en **pmf** beregnes.

PMF	A=1	A=0	sum
T=1	0.00998	0.00693	0.01691
T=0	0.00002	0.98307	0.98309
sum	0.01	0.99	1

Summen af rækkerne er så hhv. $P(T = 1)$ og $P(T = 0)$.

b

Sandsynligheden for ikke at have allergien givet en negativ test er:

$$P(A=0|T=0) = \frac{P(A=0,T=0)}{P(T=0)} = \frac{0.98307}{0.98309} = 0.9999797$$

c

Sandsynligheden for at have allergien givet en positiv test er:

$$P(A=1|T=1) = \frac{P(A=1,T=1)}{P(T=1)} = \frac{0.00998}{0.01} = 0.998$$

4

a

$$p_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{365} & if \quad x \in \{1, \cdots, 365\} \\ 0 & if \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \cdots, 365\} \end{cases} \tag{11}$$

b

Sandsynligheden for et givet udfald er stadig uniformt for enhver vektor $V = (X_1, \cdots, X_n)$. Derfor er sandsyndligheden for et specifikt udfald for alle elementer i vektoren produktet af de individuelle elementer.

$$p_2(V) = \prod_{i=1}^{n} p_1(x_i)$$

c

$$\forall x, \quad p(x) \geq 0 \tag{12}$$
$$\sum_x p(x) = 1 \tag{13}$$
$$\tag{14}$$

$p_2(x)$ er et produkt af to muglige faktorer 0 og $\frac{1}{365}$, derfor er $Im(p_2) = [\frac{1}{365}; 0]$.

$$0 \geq 0 \quad \frac{1}{365} \geq 0$$

Udfaldsrummet er af størrelse u^d hvor d antal elementer i vektoren og u er antallet af udfald per element. Da udfaldrummet er uniformt må et udfald give at $p(V) = \frac{1}{u^d}$.

$$X_i \in \{1, \cdots, 365\} \implies p_2(V) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{365} \tag{15}$$
$$= \frac{1}{365^n} \tag{16}$$
$$= \frac{1}{u^d} \tag{17}$$

d

Sandsynligheden for nogen i en gruppe har fødseldag på samme dag er det omvendte $(1-p)$ af at ingen i gruppen har fødseldag på samme dag. Denne betingede sandsyndlighed er 1 for $n = 0$ og $1\frac{364}{365}$ for $n = 1$, fordi den første fødseldag fjerner en dag fra udfaldsrummet hvor fødseldagene ikke kolliderer. Generelt er sekvensen $\frac{365}{365}\frac{364}{365}\cdots\frac{365-n}{365}$. Dette kan omskrives til $\frac{1}{365^n}\frac{365!}{(365-n)!}$. Dvs. $p(n) = 1 - \frac{1}{365^n}\frac{365!}{(365-n)!}$.

Skrevet i R (muligvis med forstærkede afrundingsfejl):

```
p = \(n) 1 - prod(c((365-n):365)/365)
p(10) # 0.1411414
p(20) # 0.4436883
p(50) # 0.974432
```