МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

Факультет информационных технологий и программирования

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Модели массового обслуживания с ожиданием

Выполнили студенты группы M3306:
Шакирова Владислава Эдуардовна
Залкин Виктор Михайлович

Проверила:
Москаленко Мария Александровна

Санкт-Петербург
2019

Исходные данные

Вариант 7			
Интенсивность входящего потока заявок λ**, час**$^{-1}$	**Интенсивность обслуживания заявки** μ**, час**$^{-1}$	**Количество каналов** **r**	**Возможная длина очереди** **m**
8,63	2,2	2	1

Таблица 1. Исходные данные

Согласно кодировке Д.Г.Кендалла, рассматриваемая система относится к классу M / M / 2 / 1.

Практическая часть

Возможные состояния системы

- S_0 – в системе бревен нет, машины свободны от рубки;
- S_1 – в системе 1 бревно, 1 машина занята рубкой;
- S_2 – в системе 2 бревна, 2 машины заняты рубкой;
- S_3 – в системе 3 бревна, 2 машины заняты рубкой и 1 бревно находится в очереди;

Граф состояний

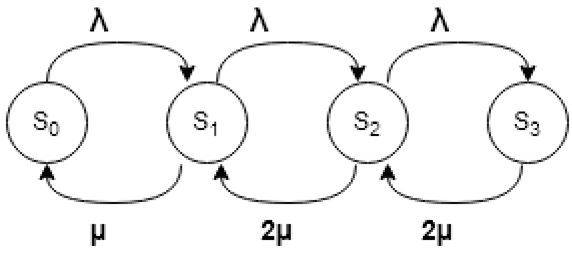

Рисунок 1. Граф состояний системы M / M / 2 / 1

Переходы слева направо связаны с поступлением в систему очередного бревна, поэтому все интенсивности переходов одинаковы и равны $\lambda = 8.63$ час$^{-1}$. Переходы справа налево обусловлены окончанием рубки бревна. В состоянии S_1 работает одна машина, поэтому интенсивность перехода из состояния S_1 в состояние S_0 равна $\mu = 2.2$ час$^{-1}$. В состояниях S_2 и S_3 работает две машины, поэтому соответствующие интенсивности переходов равны $2\mu = 4.4$ час$^{-1}$. Данный граф описывает процесс размножения и гибели.

Математическая модель стационарного режима

Пусть p_k – стационарная вероятность пребывания системы в состоянии S_k, $k = 0, 1, 2, 3$. Тогда имеет место следующая система алгебраических уравнений, описывающая стационарный режим:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_0 - (\mu + \lambda) p_1 + 2\mu p_2 = 0 \\ \lambda p_1 - (2\mu + \lambda) p_2 + 2\mu p_3 = 0 \\ \lambda p_2 - 2\mu p_3 = 0 \end{cases} \succ \begin{cases} -8.63 * p_0 + 2.2 * p_1 = 0 \\ 8.63 * p_0 - 10.83 * p_1 + 4.4 * p_2 = 0 \\ 8.63 * p_1 - 13.03 * p_2 + 4.4 * p_3 = 0 \\ 8.63 * p_2 - 4.4 * p_3 = 0 \end{cases}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 - \text{условие нормировки}$$

Стационарные вероятности:

$$p_0 = \frac{42592000}{1180102807} = 0.03609,$$
$$p_1 = \frac{167076800}{1180102807} = 0.14158,$$
$$p_2 = \frac{327698360}{1180102807} = 0.27769,$$
$$p_3 = \frac{642735647}{1180102807} = 0.54464.$$

Расчет стационарных характеристик работы системы

На основе полученных значений вероятностей пребывания системы в состояниях определяются требуемые показатели эффективности стационарного режима. А именно,

- $p_0 = 0.03609 -$ вероятность того, что все машины не работают;
- $p_1 = 0.14158 -$ вероятность того, что одна машина занята рубкой;
- $p_2 = 0.27769 -$ вероятность того, что две машины заняты рубкой;
- $p_3 = 0.54464 -$ вероятность того, что две машины занята рубкой и одно бревно ожидает в очереди;

Рассмотрим другие показатели эффективности работы системы массового обслуживания.

Пусть X – число машин, занятых рубкой. Это есть случайная величина с возможными значениями: 0, 1, 2. Вероятности этих значений соответственно равны:

- $P(X = 0) = p_0 = 0.03609$
- $P(X = 1) = p_1 = 0.14158$
- $P(X = 2) = p_2 + p_3 = 0.82233$

Тогда среднее число машин, занятых рубкой, есть математическое ожидание случайной величины X, которое равно

$$M(X) = 0 * P(X = 0) + 1 * P(X = 1) + 2 * P(X = 2) = 1.78624$$

Следовательно, среднее число работающих машин равно 1,79.

Пусть Y – число машин, свободных от рубки. Это есть случайная величина с возможными значениями: 0, 1, 2. Вероятности этих значений соответственно равны

- $P(Y = 0) = p_2 + p_3 = 0.82233$
- $P(Y = 1) = p_1 = 0.14158$
- $P(Y = 2) = p_0 = 0.03609$

Тогда среднее число машин, свободных от рубки, есть математическое ожидание случайной величины Y, которое равно

$$M(Y) = 0 * P(Y = 0) + 1 * P(Y = 1) + 2 * P(Y = 2) = 0.21376$$

Следовательно, среднее число простаивающих машин равно 0,21. Общее число занятых и свободных от рубки машин равно

$$M(X) + M(Y) = r = 2$$

Коэффициент загрузки машин равен отношению среднего числа загруженных машин к общему числу машин в цехе, т.е.

$$k_3 = \frac{M(X)}{r} * 100\% = 89\%$$

Коэффициент простоя машин равен отношению среднего числа машин, свободных от рубки, к общему числу машин в цехе, т.е.

$$k_{\Pi} = \frac{M(Y)}{r} * 100\% = 11\%$$

Пусть Z – число бревен в очереди. Это есть случайная величина с возможными значениями: 0, 1. Вероятности этих значений соответственно равны

- $P(Z = 0) = p_0 + p_1 + p_2 = 0.45536$
- $P(\mathrm{Z} = 1) = p_3 = 0.54464$

Тогда среднее бревен в очереди есть математическое ожидание случайной величины Z, которое равно

$$M(Z) = 0 * P(Z = 0) + 1 * P(Z = 1) = 0.54464$$

Таким образом, среднее число бревен, находящихся в очереди на рубку, равно 0,54, т.е. менее одного бревна.

Математическая модель нестационарного режима

Обозначим через $p_k(t)$ вероятность пребывания системы в момент времени t в состоянии S_k, $k = 0, 1, 2, 3$. Это – переходные вероятности, изменяющиеся со временем. Нестационарный режим описывается следующей системой дифференциальных уравнений, составленной по графу состояний:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_1'(t) = \lambda p_0(t) - (\mu + \lambda) p_1(t) + 2\mu p_2(t) \\ p_2'(t) = \lambda p_1(t) - (2\mu + \lambda) p_2(t) + 2\mu p_3(t) \\ p_3'(t) = \lambda p_2(t) - 2\mu p_3(t) \end{cases}$$

$$\succ \begin{cases} p_0'(t) = -8.63 * p_0(t) + 2.2 * p_1(t) \\ p_1'(t) = 8.63 * p_0(t) - 10.83 * p_1(t) + 4.4 * p_2(t) \\ p_2'(t) = 8.63 * p_1(t) - 13.03 * p_2(t) + 4.4 * p_3(t) \\ p_3'(t) = 8.63 * p_2(t) - 4.4 * p_3(t) \end{cases}$$

Решение этой системы должно удовлетворять начальному условию

$p_0(0) = 1,\ p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0$, означающему, что в момент времени $t = 0$ система находится в состоянии S_0: бревен в цехе нет, рубильные машины простаивают и очередь отсутствует. Контролем правильности решения системы является условие нормировки

$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$, которое означает, что для любого момента времени сумма вероятностей постоянна и равна $p_0 = 1$.

Вероятности $p_{\mathrm{k}}(t)$ с ростом времени t стремятся к своим стационарным значениям p_{k}, не зависящим от времени и полученным в пункте с построением математической модели стационарного режима. Решение системы дифференциальных уравнений совпало с решением системы алгебраических уравнений, описывающей стационарный режим:

- $p_0 = 0.03609$ – вероятность того, что все машины не работают;
- $p_1 = 0.14158$ – вероятность того, что одна машина занята рубкой;
- $p_2 = 0.27769$ – вероятность того, что две машины заняты рубкой;
- $p_3 = 0.54464$ – вероятность того, что две машины занята рубкой и одно бревно ожидает в очереди;

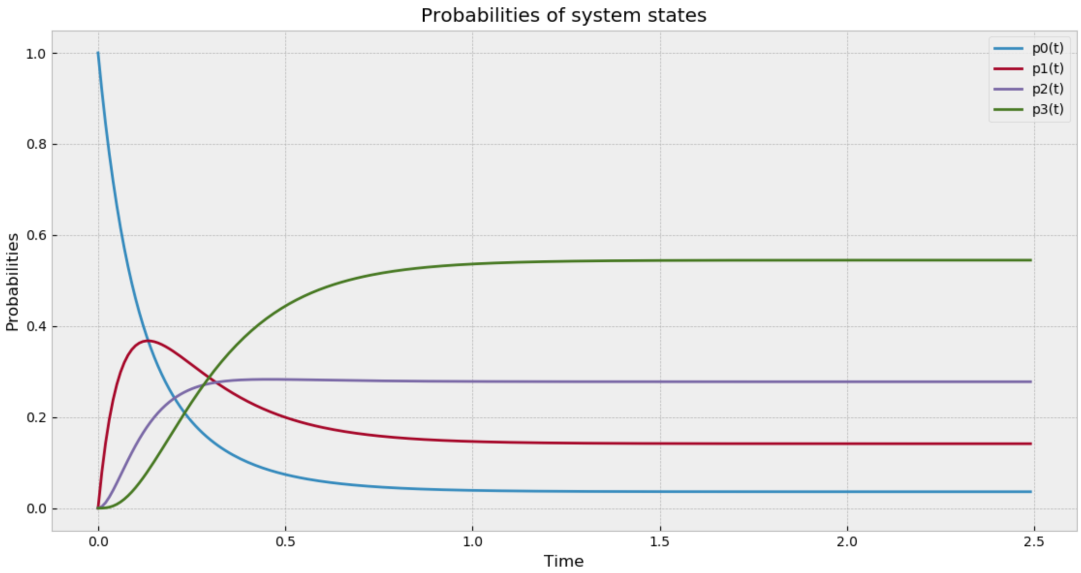

Рисунок 2. Вероятности состояний системы

Рис.2 свидетельствует о достаточно быстром вхождении процесса в стационарный режим, при котором вероятности практически не изменяются, а графики становятся параллельными оси времени.

Вычисление нестационарных характеристик, определение коэффициентов загрузки и простоя системы как функций времени

Рассчитанные вероятности состояний системы, а также соотношения коэффициенты загрузки и простоя машин позволяют определить коэффициенты загрузки и простоя системы в зависимости от времени. Для СМО вида M / M / 2 / 1 указанные соотношения принимают вид

$$k_З(t) = \frac{M(X)}{r} = \frac{p_1(t) + 2 * (p_2(\mathrm{t}) + p_3(t))}{2}$$

$$k_П(t) = \frac{M(Y)}{r} = \frac{p_1(t) + 2 * p_0(t)}{2}$$

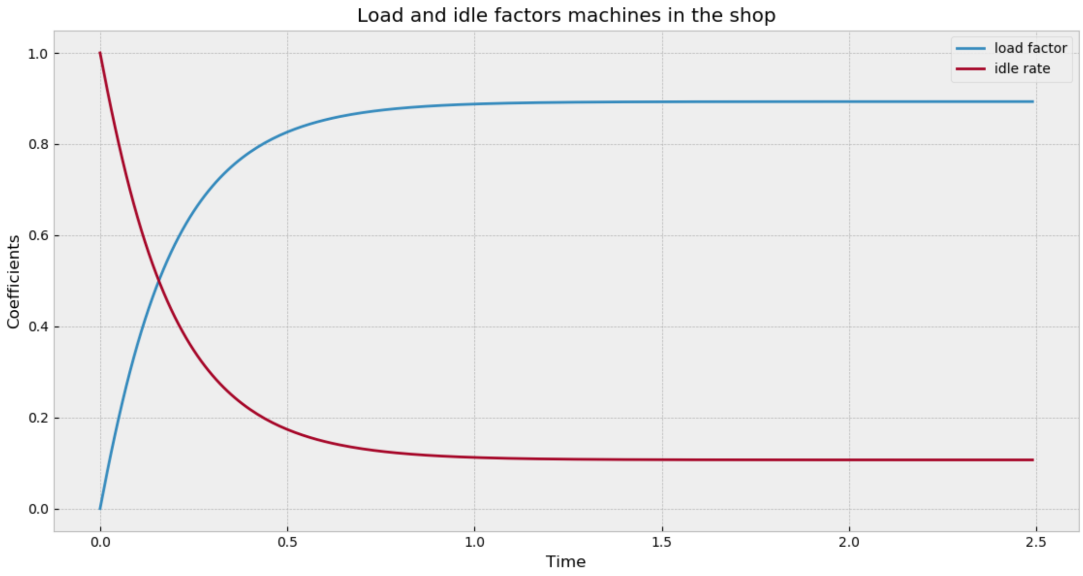

Рисунок 3. Коэффициенты загрузки и простоя машин в цехе

Видим, что функции $k_З(t)$ и $k_П(t)$ с течением времени приближаются к своим стационарным значениям, равным 0,89 и 0,11 соответственно. Графики этих функций приведены на рис. 3.

Выводы по результатам исследований

Из рис. 3 можно сделать следующие выводы. С течением времени загрузка машин возрастает, и уже через 1,5 часа становится равной 89%. Коэффициент простоя машин с течением времени убывает и через 1,5 часа составляет 11%. Это значит, что машины загружены достаточно сильно и вполне возможно осуществление в цехе таких мероприятий, как

- уменьшение потока бревен,
- установка в цехе еще одной рубительной машины.