Лабораторная работа 3

МОДЕЛИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ

1. Постановка задачи

В систему, состоящую из r рубительных машин, поступает простейший поток бревен с интенсивностью λ. Каждая машина имеет показательный закон рубки с интенсивностью μ. Если количество бревен, поступивших в рубку, больше числа машин, то образуется очередь, длина которой ограничена и не может превосходить m единиц. Требуется проанализировать работу цеха, как системы массового обслуживания с очередью конечной длины.
Для этого необходимо выполнить следующие пункты:

1. Указать возможные состояния системы и описать ее функционирование графом состояний. На графе показать интенсивности перехода из состояния в состояние.
2. Составить математическую модель функционирования системы для стационарного режима в виде системы линейных алгебраических уравнений. Найти решение системы.
3. Определить следующие стационарные характеристики эффективности системы:
   а) вероятность, что k машин заняты рубкой ($0 \le k \le r$);
   б) вероятность, что все машины заняты рубкой и l бревен находится в очереди ($0 \le l \le m$);
   в) среднее число машин, занятых рубкой;
   г) среднее число машин, свободных от рубки;
   д) коэффициент загрузки машин;
   е) коэффициент простоя машин;
   ж) среднее число бревен в очереди.
4. Составить математическую модель функционирования системы для нестационарного режима в виде системы линейных дифференциальных уравнений. Решить систему численно. Найти вероятности пребывания системы в каждом состоянии как функции времени.
5. Определить изменение коэффициентов загрузки и простоя машин в зависимости от времени. Построить соответствующие графики.
6. Указать мероприятия по улучшению работы цеха

2. Сведения из теории

2.1. Основные понятия

Системой массового обслуживания называется совокупность потока заявок (требований), поступающих в систему, и приборов (каналов), обслуживающих эти заявки. Поток заявок, как правило, носит случайный характер. Теория массового обслуживания занимается разработкой и анализом математических моделей, описывающих системы массового обслуживания.
Примерами систем массового обслуживания являются: автоматические телефонные станции и поступающие на них вызовы, магазины и покупатели, предприятия бытового обслуживания и клиенты, ремонтные мастерские и техника, требующая ремонта, ЭВМ и задачи, поступающие на решение, аэропорты и самолеты, требующие посадки, преподаватели и сдающие экзамены студенты, и т.д.
Неотъемлемой частью систем массового обслуживания является образование очереди на обслуживание, и поэтому теорию массового обслуживания принято называть также математической теорией очередей. Важно понимать, что в теории массового обслуживания речь идет о разработке математических моделей, обладающих достаточной

степенью абстракции. Поэтому не важна природа обслуживаемых заявок и их физические свойства. Существенными являются лишь моменты появления этих заявок, так как от них зависит эволюция модели во времени. В абстрактной модели нет необходимости рассматривать физическую сторону процесса обслуживания. Обслужить заявку - это значит затратить на нее некоторое время в соответствии с принятой дисциплиной обслуживания. Всякая система массового обслуживания может быть изображена, как показано на рис.1.

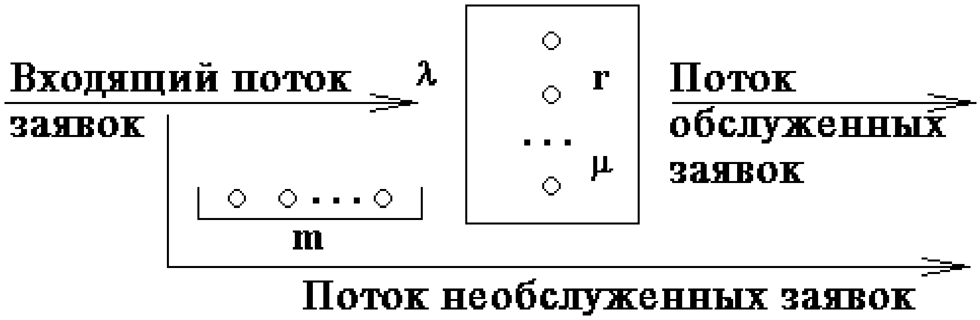

Рис.1. Схематическое изображение системы массового обслуживания

Опишем один из возможных вариантов функционирования системы. Предположим, что на обслуживание поступает поток заявок, который характеризуется параметром λ. В системе имеется r обслуживающих каналов (приборов). Если в системе есть свободные каналы, то вновь пришедшая заявка поступает на свободный канал и начинается ее обслуживание. Время обслуживания случайное и характеризуется параметром μ. По окончании обслуживания образуется поток обслуженных заявок. Если все каналы заняты обслуживанием, то вновь пришедшая заявка становится в очередь (поступает в бункер или накопитель) емкостью m. Это значит, что в очереди может находиться не более, чем m заявок. Если количество заявок в очереди превысит m, то такие заявки покидают систему не обслуженными, образуя поток необслуженных заявок.

Работа системы массового обслуживания сопровождается рядом случайных факторов. Поток поступающих заявок представляет собой случайный процесс – число заявок является случайной функцией времени. Время, которое требуется для обслуживания одной заявки (время обслуживания) является случайной величиной.

Основными понятиями систем массового обслуживания являются следующие:

* входящий поток заявок и его интенсивность,
* очередь на обслуживание,
* число обслуживающих каналов (приборов),
* время обслуживания заявки,
* дисциплина и приоритет обслуживания заявки (порядок выбора заявок из очереди),
* потоки обслуженных и необслуженных заявок.

Системы массового обслуживания классифицируются в зависимости от вида потока заявок и характера их обслуживания. Различают системы с потерями (с отказами) и с очередью (с ожиданием). Если заявка поступает в *систему с потерями* в то время, когда все каналы заняты ($m = 0$), то она получает «отказ» и теряется. Примером такой системы может быть телефонная станция. В *системах с очередью* заявка, пришедшая в момент, когда каналы заняты, встает в очередь и ожидает, пока не освободится один из каналов. Существуют системы с неограниченной очередью, когда число мест в очереди не ограниченно ($m = \infty$) и системы с ограниченной очередью. Ограничения могут быть разными - по числу заявок, одновременно стоящих в очереди, по времени пребывания заявки в очереди, по времени работы системы и т.д.

По числу обслуживающих каналов различают *одноканальные* ($r = 1$) и *многоканальные* ($r > 1$) системы массового обслуживания. Для многоканальной системы будем предполагать, что каждая заявка может быть обслужена любым из каналов. Такая система каналов называется *полнодоступным пучком.*

В системах с очередью учитывается также *дисциплина обслуживания*. Обычно заявки обслуживаются в порядке их поступления в систему по принципу «первый пришел - первый обслужен» (прямой приоритет). Однако возможны и другие правила обслуживания заявок: «последний пришел - первый обслужен» (обратный приоритет), или «первой обслуживается заявка с заданным номером» (назначенный приоритет), или «первой обслуживается заявка со случайным номером» (случайный приоритет). Возможно также обслуживание заявки вне очереди. При этом заявка с более высоким приоритетом, поступив в систему, может оборвать уже начавшееся обслуживание заявки с меньшим приоритетом, а может дождаться окончания ее обслуживания. В первом случае говорят об *абсолютном*, а во втором - об *относительном приоритете*.

Основоположником теории массового обслуживания принято считать датского математика А.К.Эрланга, который в 1909 г. опубликовал важные результаты, полученные им при изучении математических моделей телефонных систем. В настоящее время модели и методы массового обслуживания находят приложения во многих областях науки и техники, начиная с контроля над приземлением самолетов и кончая теорией управления запасами, от исследований, связанных с ростом бактерий, – до составления больничных графиков.

2.2. Простейший поток

Поток заявок называется простейшим, если вероятность поступления в систему ровно k заявок, $k = 0,1,2,...$, в течение времени t определяется по формуле

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где $\lambda > 0$ – постоянное число, называемое интенсивностью потока.

2.3. Описание функционирования марковского процесса с непрерывным временем

Предположим, что в любой момент времени система может находиться в одном из состояний $S_1, S_2, ..., S_m$. Пусть $X(t)$ – случайный процесс, равный номеру состояния, в котором находиться система в момент времени t. Рассматривая изменение состояния системы, будем говорить, что процесс перешел из одного состояния в другое. При этом время на такой переход не тратится.

Случайный процесс $X(t)$ называется *марковским*, если будущее процесса зависит только от его настоящего и не зависит от прошлого. Это свойство называется *отсутствием последействия*. Конечно, предыстория процесса влияет на его дальнейшее развитие, но все это влияние сосредоточено в настоящем. Выделение марковских процессов вызвано рядом причин, важнейшими из которых являются относительная простота случайного процесса, описывающего эволюцию системы, наличие возможности использовать хорошо разработанный математический аппарат для аналитического исследования марковских процессов, возможность получения аналитических выражений для показателей качества систем, и, наконец, возможность сведения к указанным моделям более общих моделей.

Однородный марковский процесс $X(t)$ с дискретным множеством состояний $S_1, S_2, ..., S_m$ и непрерывным временем определяется постоянными интенсивностями перехода

$$\lambda_{i,j} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X(t + \Delta t) = j / X(t) = i)}{\Delta t}$$

из состояния S_i в состояние S_j, а также начальным вектором распределения вероятностей: $p_i(0) = P(X(0) = i)$, $i = 1,2,...,m$.

Пусть $p_i(t)$ вероятность пребывания системы в момент времени t в состоянии S_i, $i = 1,2,...,m$. Эти вероятности удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений А.Н.Колмогорова:

$$p_i'(t) = -\sum_j \lambda_{i,j} p_i(t) + \sum_j \lambda_{i,j} p_j(t),\ i = 1,2,...,m, \quad (1)$$

которая составляется по следующему правилу: для каждого состояния S_i записывается уравнение, в левой части которого стоит производная от $p_i(t)$, а в правой части - сумма произведений вероятностей всех состояний, умноженных на интенсивности перехода из этих состояний в состояние S_i, причем произведения, соответствующие выходам из состояния S_i, берутся со знаком «-», а произведения, соответствующие входам в состояние S_i, берутся со знаком «+».

Из системы уравнений Колмогорова можно получить модель функционирования системы при длительной ее эксплуатации, то есть при $t \to \infty$. В этом случае $p_i(t) \to p_i$ и $p_i'(t) \to 0$. Вероятности p_i называются *стационарными или финальными вероятностями*. Относительно этих вероятностей имеет место система линейных алгебраических уравнений

$$-\sum_j \lambda_{i,j} p_i + \sum_j \lambda_{i,j} p_j = 0,\ \text{i=1,2,...,m}, \quad (2)$$

которая должна решаться вместе с условием $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Пример. На рис.2 представлен граф состояний системы, дугам которого приписаны постоянные интенсивности перехода из состояния в состояние. В момент времени $t = 0$ система находилась в состоянии S_1. Требуется составить математическую модель для нестационарного и стационарного режима функционирования системы.

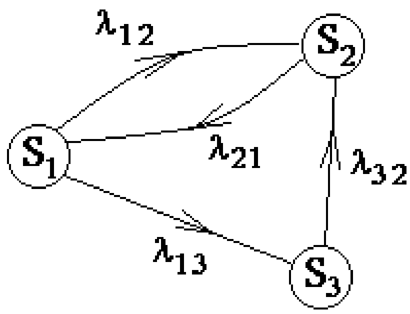

Рис.2. Граф состояний системы

Приведенное выше правило позволяет записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) p_1(t) + \lambda_{21} p_2(t) \\ p_2'(t) = \lambda_{12} p_1(t) - \lambda_{21} p_2(t) + \lambda_{32} p_3(t). \\ p_3'(t) = \lambda_{13} p_1(t) - \lambda_{32} p_3(t) \end{cases}$$

Так как при $t = 0$ система находилась в состоянии S_1, то имеют место начальные условия: $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = 0$, $p_3(0) = 0$. Решение системы при заданных начальных условиях (аналитическими или численными методами) позволяет найти вероятности пребывания системы $p_i(t)$ в каждом состоянии, $i = 1,2,3$.

Из системы дифференциальных уравнений получается математическая модель функционирования системы при длительной эксплуатации:

$$\begin{cases} -\left(\lambda_{12}+\lambda_{13}\right)p_1+\lambda_{21}p_2=0 \\ \lambda_{12}p_1-\lambda_{21}p_2+\lambda_{32}p_3=0 \\ \lambda_{13}p_1-\lambda_{32}p_3=0 \end{cases}.$$

Полученная система является неопределенной и должна решаться при дополнительном условии: $p_1+p_2+p_3=1$. Из решения системы алгебраических уравнений определяются финальные вероятности p_i, $i=1,2,3$.

2.4. Процессы размножения и гибели

Рассмотрим более подробно процесс размножения и гибели. На рис.3 изображен граф состояний этого процесса. Возможными состояниями процесса являются состояния S_0, S_1,…, S_k,…, представляющие собой вершины графа, возможные переходы процесса из состояния в состояние – дуги графа, рядом с которыми указаны интенсивности соответствующих переходов. Пусть λ_i – интенсивность размножения в состоянии S_{i-1}, μ_i – интенсивность гибели в этом состоянии.

Для иллюстрации рассмотрим цех рубительных машин, моделируя его работу с помощью случайного процесса размножения и гибели. Состояние S_k соответствует тому положению, когда в цехе находится k бревен, λ_i – среднее число бревен, поступающей в

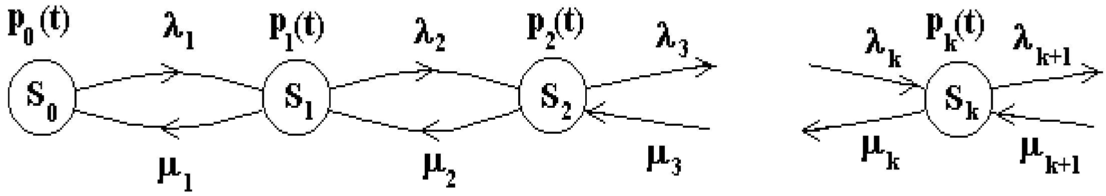

Рис.3. Граф состояний процесса размножения и гибели

цех в единицу времени при условии, что в цехе уже находится точно $i-1$ бревен, μ_i – среднее число бревен, обработанных рубительными машинами в единицу времени при условии, что в цехе находится точно i бревен. Будем предполагать, что эти интенсивности не зависят от времени. Укажем на графе также вероятности $p_k(t)$ того, что в момент t процесс находился в состоянии S_k.

В случае процесса размножения и гибели система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} p_0'(t)=-\lambda_1 p_0(t)+\mu_1 p_1(t) \\ p_1'(t)=-(\lambda_2+\mu_1)p_1(t)+\lambda_1 p_0(t)+\mu_2 p_2(t) \\ p_2'(t)=-(\lambda_3+\mu_2)p_2(t)+\lambda_2 p_1(t)+\mu_3 p_3(t) \\ \ldots \\ p_k'(t)=-(\lambda_{k+1}+\mu_k)p_k(t)+\lambda_k p_{k-1}(t)+\mu_{k+1} p_{k+1}(t) \\ \ldots \end{cases} \quad (3)$$

Запишем нормировочное условие

$$p_0(t)+p_1(t)+p_2(t)+\ldots+p_k(t)+\ldots=1, \quad (4)$$

которое следует из того, что в момент времени $t=0$ процесс обязательно находится в каком-то состоянии, а эти события несовместные и образуют полную группу.

Решая систему дифференциальных уравнений (3) с учетом начальных условий, можно определить значения интересующих нас вероятностей.

При выполнении некоторых условий вероятности $p_k(t)$ с ростом времени t стремятся к стационарным вероятностям p_k, не зависящим от времени. На практике вычислительный интерес часто представляют именно эти стационарные вероятности p_k. Так как они не зависят от времени, то $p'_k(t)=0$, и мы из системы дифференциальных уравнений (3) для стационарного случая получаем следующую систему алгебраических уравнений, к которой добавлено нормирующее условие:

$$\begin{cases} -\lambda_1 p_0 + \mu_1 p_1 = 0 \\ -(\lambda_2 + \mu_1)p_1 + \lambda_1 p_0 + \mu_2 p_2 = 0 \\ -(\lambda_3 + \mu_2)p_2 + \lambda_2 p_1(t) + \mu_3 p_3 = 0 \\ \dots \\ -(\lambda_{k+1} + \mu_k)p_k + \lambda_k p_{k-1} + \mu_{k+1} p_{k+1} = 0 \\ \dots \\ p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots = 1 \end{cases}. \quad (5)$$

Решая систему (5), последовательно получим: из первого уравнения $p_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} p_0$.

Подставляя полученное выражение для p_1 во второе уравнение, разрешим его относительно p_2: $p_2 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} p_1 = \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2} p_0$.

Подставляя выражение для p_2 в третье уравнение, выразим p_3 через p_0 и т.д. Из k-го уравнения получим

$$p_k = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1}} p_0.$$

Обозначим

$$A_k = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1}}, \quad (6)$$

тогда $p_k = A_k p_0$, и последнее уравнение в системе (5) можно представить в виде

$$p_0 + A_1 p_0 + A_2 p_0 + \dots + A_k p_0 + \dots = 1,$$

откуда

$$p_0 = \frac{1}{1 + A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots}.$$

Таким образом,

$$p_k = \frac{A_k}{1 + A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots}, \quad (7)$$

где A_k определяются равенствами (6). Очевидно, для существования стационарных вероятностей p_k необходимо, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ был сходящимся.

2.5. Кодирование систем массового обслуживания

Для различия систем массового обслуживания мы будем пользоваться кодировкой систем, предложенной Д.Г.Кендаллом. Систему принято обозначать в виде символического представления: $A/B/r/m$. Первая компонента A характеризует входящий поток заявок, вторая компонента B характеризует время обслуживания заявок, число r - количество обслуживающих каналов, m - число мест для ожидания в очереди (емкость накопителя). Если $A = M$, то входящий поток заявок есть процесс Пуассона, если $A = E_k$, то поток заявок есть поток Эрланга k -го порядка с плотностью распределения времени между соседними заявками $f_k(t) = \dfrac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$ при $t \ge 0$. Если $A = D$, то поток заявок регулярный, то есть заявки приходят через равные промежутки времени. Если $A = G$, то поток общего вида.

Аналогичные обозначения имеют место для параметра B. Если $B = M$, то время обслуживания заявки является экспоненциальным, если $B = E_k$, то время обслуживания заявки имеет распределение Эрланга k -го порядка. Если $B = D$, то время обслуживания заявки постоянно. Если $B = G$, то время обслуживания есть случайная величина общего вида. Так, например, система $M/M/1/0$ представляет собой одноканальную систему с отказами с пуассоновским входящим потоком заявок и экспоненциальным временем обслуживания.

Дополнительные условия (обратный приоритет обслуживания, ненадежность обслуживающих каналов и т.д.) содержатся в словесном описании системы массового обслуживания.

2.6. Решение системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений n -го порядка, которая в общем случае может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = f_1(t, p_1, p_2, ..., p_n) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = f_2(t, p_1, p_2, ..., p_n) \\ ... \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = f_n(t, p_1, p_2, ..., p_n) \end{cases}. \qquad (8)$$

Неизвестными в этой системе являются функции $p_i(t)$, $i = 1,2,...,n$. В момент времени $t = 0$ значения этих функций известны:

$$p_1(0) = p_{10},\ p_2(0) = p_{20},\ \ldots,\ p_n(0) = p_{n0}. \qquad (9)$$

Они образуют начальные условия функционирования системы. Существует большое число машинных методов решения задачи (8) – (9). Выбирайте тот, который больше понравится.

2.7. Коэффициенты загрузки и простоя машин в СМО вида $M/M/r/m$.

Получим формулы для коэффициентов загрузки и простоя машин в зависимости от времени.

Число машин, занятых рубкой, есть случайная величина X , закон распределения вероятностей которой приведен в табл.2.

Таблица 2

Распределение вероятностей числа машин, занятых рубкой

X	0	1	...	$r-1$	r
$p(t)$	$p_0(t)$	$p_1(t)$	...	$p_{r-1}(t)$	$\sum_{k=r}^{r+m} p_k(t)$

Среднее число таких машин представляет собой математическое ожидание X, рассчитываемое по формуле

$$M(X)=\sum_{k=0}^{r-1}kp_k(t)+r\sum_{k=r}^{r+m}p_k(t).$$

Коэффициент загрузки машин равен отношению среднего числа загруженных машин к общему числу машин в цехе, т.е.

$$k_З(t)=\frac{M(X)}{r}=\frac{\sum_{k=0}^{r-1}kp_k(t)+r\sum_{k=r}^{r+m}p_k(t)}{r}. \qquad (10)$$

Число машин, свободных от рубки, есть случайная величина Y, закон распределения вероятностей которой приведен в табл.3.

Таблица 3

Распределение вероятностей числа машин, свободных от рубки

Y	0	1	...	$r-1$	r
$p(t)$	$\sum_{k=r}^{r+m}p_k(t)$	$p_{r-1}(t)$	...	$p_1(t)$	$p_0(t)$

Среднее число машин, свободных от рубки, представляет собой математическое ожидание Y, рассчитываемое по формуле

$$M(Y)=0\cdot\sum_{k=r}^{r+m}p_k(t)+\sum_{k=1}^{r}kp_{r-k}(t).$$

Коэффициент простоя машин равен отношению среднего числа машин, свободных от рубки, к общему числу машин в цехе, т.е.

$$k_П(t)=\frac{M(Y)}{r}=\frac{0\cdot\sum_{k=r}^{r+m}p_k(t)+\sum_{k=1}^{r}kp_{r-k}(t)}{r}. \qquad (11)$$

3. Краткий пример выполнения лабораторной работы

Исходные данные для анализа системы массового обслуживания содержатся в табл.1.

Таблица 4

$\lambda, час^{-1}$	$\mu, час^{-1}$	r	m
6,07	3,1	2	2

Согласно принятой выше кодировке рассматриваемая система относится к классу $M/M/2/2$.

3.1. Граф состояний

Перечислим возможные состояния системы:

S_0 – в системе бревен нет, машины свободны от рубки;

S_1 – в системе 1 бревно, одна машина занята рубкой;

S_2 – в системе 2 бревна, две машины заняты рубкой;

S_3 – в системе 3 бревна, две машины заняты рубкой, одно бревно находится в очереди;

S_4 – в системе 4 бревна, две машины заняты рубкой, два бревна находятся в очереди.

Граф состояний приведен на рис.4. Переходы слева направо связаны с поступлением в систему очередного бревна, поэтому все интенсивности переходов одинаковы и равны $\lambda = 6{,}07\,час^{-1}$. Переходы справа налево обусловлены окончанием рубки бревна. В состоянии S_1 работает одна машина, поэтому интенсивность перехода из состояния S_1 в состояние S_0 равна $\mu = 3{,}1 час^{-1}$. В состояниях S_2 , S_3 и S_4 работает две машины, поэтому соответствующие интенсивности переходов равны $2\mu = 6{,}2 час^{-1}$.

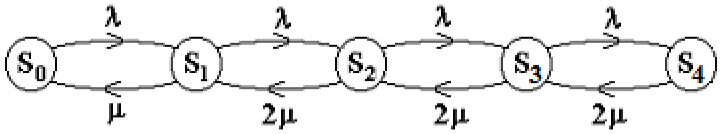

Рис.4. Граф состояний системы $M/M/2/2$

Очевидно, что данный граф описывает процесс размножения и гибели. Поэтому для него справедливы все соотношения п.2.4. Тем не менее, мы получим данные соотношения еще раз непосредственно по графу состояний.

3.2. Математическая модель стационарного режима

Пусть p_k – стационарная вероятность пребывания системы в состоянии S_k , $k = 0,1,2,3,4$. Тогда имеет место следующая система алгебраических уравнений, описывающая стационарный режим:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ \lambda p_0 - (\mu + \lambda) p_1 + 2\mu p_2 = 0 \\ \lambda p_1 - (2\mu + \lambda) p_2 + 2\mu p_3 = 0 \\ \lambda p_2 - (2\mu + \lambda) p_3 + 2\mu p_4 = 0 \\ \lambda p_3 - 2\mu p_4 = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Эту систему следует решать вместе с условием нормировки

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \qquad (13)$$

Решать систему можно любым численным методом.

Стационарные вероятности в данном случае равны $p_0 = 0{,}116423$, $p_1 = 0{,}227965$, $p_2 = 0{,}223185$, $p_3 = 0{,}218505$, $p_4 = 0{,}213923$.

3.3. Стационарные характеристики СМО

На основе полученных значений вероятностей пребывания системы в состояниях определяются требуемые показатели эффективности стационарного режима. А именно,

- $p_0 = 0{,}116423$ – вероятность того, что все машины не работают;
- $p_1 = 0{,}227965$ – вероятность того, что одна машина занята рубкой;
- $p_2 = 0{,}223185$ – вероятность того, что две машины заняты рубкой;
- $p_3 = 0{,}218505$ – вероятность того, что две машины занята рубкой и одно бревно ожидает в очереди;
- $p_4 = 0{,}213923$ – вероятность того, что две машины заняты рубкой и два бревна ожидают в очереди.

Рассмотрим другие показатели эффективности работы системы массового обслуживания.

Пусть X – число машин, занятых рубкой. Это есть случайная величина с возможными значениями: 0, 1, 2. Вероятности этих значений соответственно равны

$P(X = 0) = p_0 = 0{,}116423$,

$P(X = 1) = p_1 = 0{,}227965$,

$P(X = 2) = p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}223185 + 0{,}218505 + 0{,}213923 = 0{,}665513$.

Тогда среднее число машин, занятых рубкой, есть математическое ожидание случайной величины X , которое равно

$M(X)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)=0{,}227965+2\cdot 0{,}655613=1{,}539191$.
Следовательно, среднее число работающих машин равно 1,54.

Пусть Y – число машин, свободных от рубки. Это есть случайная величина с возможными значениями: 0, 1, 2. Вероятности этих значений соответственно равны
$P(Y=0)=p_2+p_3+p_4=0{,}655613$,
$P(Y=1)=p_1=0{,}227965$,
$P(Y=2)=p_0=0{,}116423$.
Тогда среднее число машин, свободных от рубки, есть математическое ожидание случайной величины Y, которое равно
$M(Y)=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)+2\cdot P(Y=2)=0{,}227965+2\cdot 0{,}116423=0{,}460811$.
Следовательно, среднее число простаивающих машин равно 0,46. Общее число занятых и свободных от рубки машин равно
$M(X)+M(Y)=r=2$.

Коэффициент загрузки машин равен отношению среднего числа загруженных машин к общему числу машин в цехе, т.е.
$$k_З=\frac{M(X)}{r}.$$
Тогда в процентах $k_З=\frac{1{,}54}{2}\cdot 100\%=77\%$.
Коэффициент простоя машин равен отношению среднего числа машин, свободных от рубки, к общему числу машин в цехе, т.е.
$$k_П=\frac{M(Y)}{r}.$$
Тогда в процентах $k_П=\frac{0{,}46}{2}\cdot 100\%=23\%$.

Пусть Z – число бревен в очереди. Это есть случайная величина с возможными значениями: 0, 1, 2. Вероятности этих значений соответственно равны
$P(Z=0)=p_0+p_1+p_2=0{,}116423+0{,}227965+0{,}223185=0{,}567573$,
$P(Z=1)=p_3=0{,}218505$,
$P(Z=2)=p_4=0{,}213923$.
Тогда среднее бревен в очереди есть математическое ожидание случайной величины Z, которое равно
$M(Z)=0\cdot P(Z=0)+1\cdot P(Z=1)+2\cdot P(Z=2)=0{,}218505+2\cdot 0{,}213923=0{,}466352$.
Таким образом, среднее число бревен, находящихся в очереди на рубку, равно 0,47, т.е. менее одного бревна.

3.4.Математическая модель нестационарного режима

Обозначим через $p_k(t)$ вероятность пребывания системы в момент времени t в состоянии S_k, $k=0,1,2,3,4$. Это – переходные вероятности, изменяющиеся со временем. Согласно правилу, сформулированному в п.2.3, нестационарный режим описывается следующей системой дифференциальных уравнений, составленной по графу состояний, изображенному на рис.4:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ p_1'(t) = \lambda p_0(t) - (\mu + \lambda) p_1(t) + 2\mu p_2(t) \\ p_2'(t) = \lambda p_1(t) - (2\mu + \lambda) p_2(t) + 2\mu p_3(t) \\ p_3'(t) = \lambda p_2(t) - (2\mu + \lambda) p_3(t) + 2\mu p_4(t) \\ p_4'(t) = \lambda p_3(t) - 2\mu p_4(t) \end{cases}. \qquad (14)$$

Решение этой системы должно удовлетворять начальному условию

$$p_0(0) = 1,\ p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0, \qquad (15)$$

означающему, что в момент времени $t = 0$ система находится в состоянии S_0: бревен в цехе нет, рубительные машины простаивают и очередь отсутствует. Контролем правильности решения системы является условие нормировки

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1, \qquad (16)$$

которое означает, что для любого момента времени сумма вероятностей постоянна и равна $p_0 = 1$. Это следует из замечания п.2.6.

/*решение...*/

Вероятности $p_k(t)$ с ростом времени t стремятся к своим стационарным значениям p_k, не зависящим от времени и полученным в п.3.2. Поэтому таблицу вероятностей следует вычислять до тех пор, пока ни будут выполняться соотношения:

$p_0(t) \approx 0{,}116423$, $p_1(t) \approx 0{,}227965$, $p_2(t) \approx 0{,}223185$, $p_3(t) \approx 0{,}218505$, $p_4(t) \approx 0{,}213923$.

Графическая иллюстрация вероятностей приведена на рис.5.

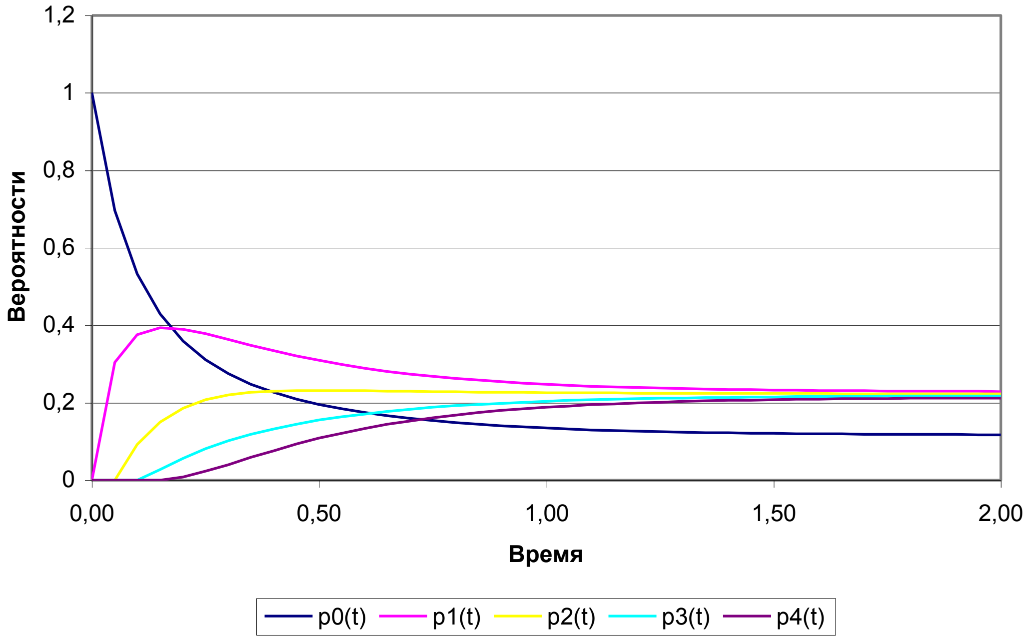

Рис.5. Вероятности состояний системы

Рис.5 свидетельствует о достаточно быстром вхождении процесса в стационарный режим, при котором вероятности практически не изменяются, а графики становятся параллельными оси времени.

3.5. Нестационарные характеристики СМО

Рассчитанные вероятности состояний системы, а также соотношения (10) – (11) позволяют определить коэффициенты загрузки и простоя системы в зависимости от времени. Для СМО вида $M/M/2/2$ указанные соотношения принимают вид

$$k_З(t)=\frac{p_1(t)+2(p_2(t)+p_3(t)+p_4(t))}{2}$$

и

$$k_П(t)=\frac{p_1(t)+2p_0(t)}{2}.$$

/*вычисление...*/

Видим, что функции $k_З(t)$ и $k_П(t)$ с течением времени приближаются к своим стационарным значениям, равным 0,77 и 0,23 соответственно. Графики этих функций приведены на рис. 6.

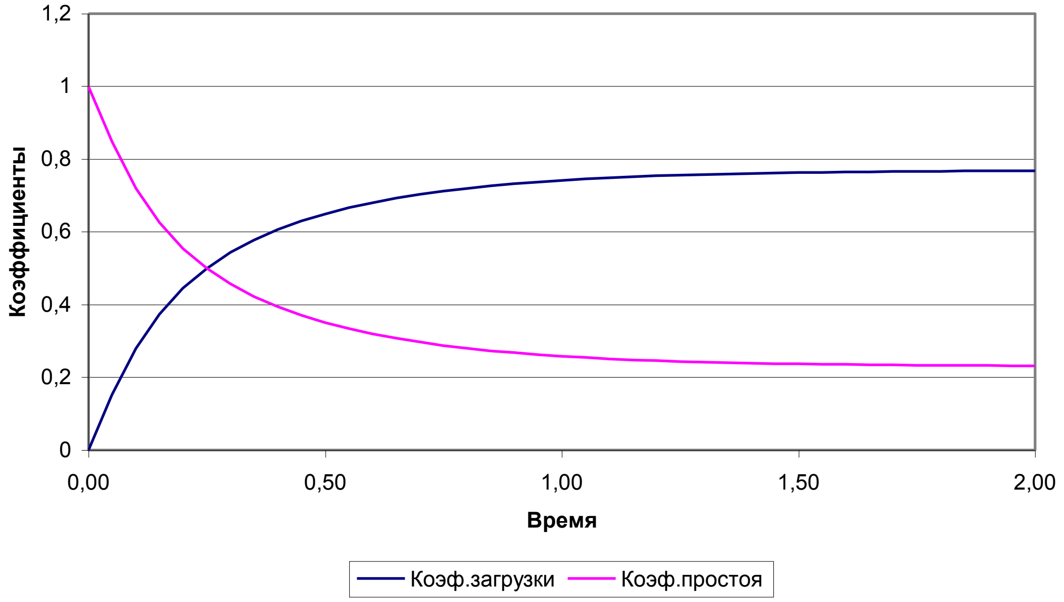

Рис.6. Коэффициенты загрузки и простоя машин в цехе

Из рис.6 можно сделать следующие выводы. С течением времени загрузка машин возрастает, и уже через 2 часа становится равной 77%. Коэффициент простоя машин с течением времени убывает и через 2 часа составляет 23%. Это значит, что машины загружены достаточно сильно и вполне возможно осуществление в цехе таких мероприятий, как

- уменьшение потока бревен,
- установка в цехе еще одной рубительной машины.

4. Форма отчета

По результатам выполненной лабораторной работы представляется отчет, в котором должны содержаться следующие пункты:

- указание возможных состояний системы;
- граф состояний;
- система алгебраических уравнений, составленная относительно стационарных вероятностей; решение системы;
- расчет стационарных характеристик работы системы;

- система дифференциальных уравнений, неизвестными которой являются вероятности состояний, зависящие от времени;
- вычисление нестационарных характеристик; определение коэффициентов загрузки и простоя системы как функций времени;
- выводы по результатам исследований.

5. Задания к лабораторной работе

Вариант 1			
Интенсивность входящего потока заявок λ, час$^{-1}$	**Интенсивность обслуживания заявки μ, час$^{-1}$**	**Количество каналов r**	**Возможная длина очереди m**
7,23	4,9	4	1

Вариант 2			
Интенсивность входящего потока заявок λ, час$^{-1}$	**Интенсивность обслуживания заявки μ, час$^{-1}$**	**Количество каналов r**	**Возможная длина очереди m**
4,46	2,7	1	2

Вариант 3			
Интенсивность входящего потока заявок λ, час$^{-1}$	**Интенсивность обслуживания заявки μ, час$^{-1}$**	**Количество каналов r**	**Возможная длина очереди m**
1,70	3,6	2	1

Вариант 4			
Интенсивность входящего потока заявок λ, час$^{-1}$	**Интенсивность обслуживания заявки μ, час$^{-1}$**	**Количество каналов r**	**Возможная длина очереди m**
7,92	3,6	3	1

Вариант 5			
Интенсивность входящего потока заявок λ, час$^{-1}$	**Интенсивность обслуживания заявки μ, час$^{-1}$**	**Количество каналов r**	**Возможная длина очереди m**
5,16	4,5	1	4

Вариант 6			
Интенсивность входящего потока заявок λ, час$^{-1}$	**Интенсивность обслуживания заявки μ, час$^{-1}$**	**Количество каналов r**	**Возможная длина очереди m**
2,39	2,2	1	4

Вариант 7			
Интенсивность входящего потока заявок λ, час$^{-1}$	**Интенсивность обслуживания заявки μ, час$^{-1}$**	**Количество каналов r**	**Возможная длина очереди m**
8,63	2,2	2	1

6. Контрольные вопросы

1. Что такое одноканальная система?
2. Что такое однофазовая система?
3. Что такое очередь?
4. Что такое распределение времени обслуживания?
5. Что означает и как определяется среднее время в очереди?
6. Что означает и как определяется среднее время в системе?
7. Что означает и как определяется среднее число клиентов в очереди?
8. Что означает и как определяется среднее число клиентов в системе?
9. Что означает и как определяется средний темп поступления заявок?
10. Что означает и как определяется средняя длина очереди?