# 圆锥曲线概念技巧总结

**1. 圆锥曲线的定义**：

要**重视"括号"内的限制条件**：**椭圆中**，与两个定点 $F_1$，$F_2$ 的距离的和等于常数 $2a$，且此**常数 $2a$ 一定要大于 $|F_1F_2|$**，当常数等于 $|F_1F_2|$ 时，轨迹是线段 $F_1F_2$，当常数小于 $|F_1F_2|$ 时，无轨迹；**双曲线中**，与两定点 $F_1$，$F_2$ 的距离的差的绝对值等于常数 $2a$，且此常数 $2a$ 一定要小于 $|F_1F_2|$，定义中的**"绝对值"与 $2a<|F_1F_2|$ 不可忽视**。若 $2a=|F_1F_2|$，则轨迹是以 $F_1$，$F_2$ 为端点的两条射线，若 $2a>|F_1F_2|$，则轨迹不存在。若去掉定义中的绝对值则轨迹仅表示双曲线的一支。**如（1）** 已知定点 $F_1(-3,0),F_2(3,0)$，在满足下列条件的平面上动点 P 的轨迹中是椭圆的是 A．$|PF_1|+|PF_2|=4$ B．$|PF_1|+|PF_2|=6$ C．$|PF_1|+|PF_2|=10$ D．$|PF_1|^2+|PF_2|^2=12$（答：C）；**（2）** 方程 $\sqrt{(x-6)^2+y^2}-\sqrt{(x+6)^2+y^2}=8$ 表示的曲线是_____（答：双曲线的左支）

**2. 圆锥曲线的标准方程**（标准方程是指中心（顶点）在原点，坐标轴为对称轴时的标准位置的方程）：

（1）**椭圆**：焦点在 $x$ 轴上时 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），焦点在 $y$ 轴上时 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）。方程 $Ax^2+By^2=C$ 表示椭圆的充要条件是什么？（ABC≠0，且 A，B，C 同号，A≠B）。**如(1)** 已知方程 $\frac{x^2}{3+k}+\frac{y^2}{2-k}=1$ 表示椭圆，则 $k$ 的取值范围为____（答：$(-3,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},2)$）；**(2)** 若 $x,y\in R$，且 $3x^2+2y^2=6$，则 $x+y$ 的最大值是____，$x^2+y^2$ 的最小值是___（答：$\sqrt{5},2$）

（2）**双曲线**：焦点在 $x$ 轴上：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，焦点在 $y$ 轴上：$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）。方程 $Ax^2+By^2=C$ 表示双曲线的充要条件是什么？（ABC≠0，且 A，B 异号）。**如（1）** 双曲线的离心率等于 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，且与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 有公共焦点，则该双曲线的方程_______（答：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$）；**(2)** 设中心在坐标原点 $O$，焦点 $F_1$、$F_2$ 在坐标轴上，离心率 $e=\sqrt{2}$ 的双曲线 C 过点 $P(4,-\sqrt{10})$，则 C 的方程为_______（答：$x^2-y^2=6$）

（3）**抛物线**：开口向右时 $y^2=2px(p>0)$，开口向左时 $y^2=-2px(p>0)$，开口向上时 $x^2=2py(p>0)$，开口向下时 $x^2=-2py(p>0)$。

**3. 圆锥曲线焦点位置的判断**（首先化成标准方程，然后再判断）：

（1）**椭圆**：由 $x^2$，$y^2$ 分母的大小决定，焦点在分母大的坐标轴上。**如**已知方程 $\frac{x^2}{|m|-1}+\frac{y^2}{2-m}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 m 的取值范围是__（答：$(-\infty,-1)\cup(1,\frac{3}{2})$）

（2）**双曲线**：由 $x^2$，$y^2$ 项系数的正负决定，焦点在系数为正的坐标轴上；

（3）**抛物线**：焦点在一次项的坐标轴上，一次项的符号决定开口方向。

**特别提醒**：**（1）** 在求解椭圆、双曲线问题时，首先要判断焦点位置，焦点 $F_1$，$F_2$ 的位置，是椭圆、双曲线的定位条件，它决定椭圆、双曲线标准方程的类型，而方程中的两个参数 $a,b$，确定椭圆、双曲线的形状和大小，是椭圆、双曲线的定形条件；在求解抛物线问题时，首先要判断开口方向；（2）在椭圆中，$a$ 最大，$a^2=b^2+c^2$，在双曲线中，$c$ 最大，$c^2=a^2+b^2$。

**4. 圆锥曲线的几何性质**：

（1）**椭圆**（以 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）为例）：①范围：$-a\le x\le a,-b\le y\le b$；②焦点：两个焦点 $(\pm c,0)$；③对称性：两条对称轴 $x=0,y=0$，一个对称中心（0,0），四个顶点

$(\pm a,0),(0,\pm b)$，其中长轴长为 $2a$，短轴长为 $2b$；④准线：两条准线 $x=\pm\frac{a^2}{c}$； ⑤离心率：$e=\frac{c}{a}$，椭圆 $\Leftrightarrow$ $0<e<1$，$e$ 越小，椭圆越圆；$e$ 越大，椭圆越扁。**如（1）**若椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{10}}{5}$，则 $m$ 的值是__（答：3 或 $\frac{25}{3}$）；**（2）**以椭圆上一点和椭圆两焦点为顶点的三角形的面积最大值为 1 时，则椭圆长轴的最小值为__（答：$2\sqrt{2}$）

（2）**双曲线**（以 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）为例）：①范围：$x\le -a$ 或 $x\ge a,y\in R$；②焦点：两个焦点 $(\pm c,0)$；③对称性：两条对称轴 $x=0,y=0$，一个对称中心（0，0），两个顶点 $(\pm a,0)$，其中实轴长为 $2a$，虚轴长为 $2b$，特别地，当实轴和虚轴的长相等时，称为等轴双曲线，其方程可设为 $x^2-y^2=k,k\neq 0$；④准线：两条准线 $x=\pm\frac{a^2}{c}$； ⑤离心率：$e=\frac{c}{a}$，双曲线 $\Leftrightarrow$ $e>1$，等轴双曲线 $\Leftrightarrow$ $e=\sqrt{2}$，$e$ 越小，开口越小，$e$ 越大，开口越大；⑥两条渐近线：$y=\pm\frac{b}{a}x$。**如（1）**双曲线的渐近线方程是 $3x\pm 2y=0$，则该双曲线的离心率等于______（答：$\frac{\sqrt{13}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{13}}{3}$）；**（2）**双曲线 $ax^2-by^2=1$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，则 $a:b=$________（答：4 或 $\frac{1}{4}$）；**（3）**设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0,b>0）中，离心率 e∈[$\sqrt{2}$，2]，则两条渐近线夹角 θ 的取值范围是________（答：$[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$）；

（3）**抛物线**（以 $y^2=2px(p>0)$ 为例）：①范围：$x\ge 0,y\in R$；②焦点：一个焦点 $(\frac{p}{2},0)$，其中 $p$ 的几何意义是：焦点到准线的距离；③对称性：一条对称轴 $y=0$，没有对称中心，只有一个顶点（0,0）；④准线：一条准线 $x=-\frac{p}{2}$； ⑤离心率：$e=\frac{c}{a}$，抛物线 $\Leftrightarrow$ $e=1$。**如**设 $a\neq 0,a\in R$，则抛物线 $y=4ax^2$ 的焦点坐标为________（答：$(0,\frac{1}{16a})$）；

**5、点 $P(x_0,y_0)$ 和椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的关系**：（1）点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆外 $\Leftrightarrow$ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$；（2）点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上 $\Leftrightarrow$ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$；（3）点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆内 $\Leftrightarrow$ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$

**6．直线与圆锥曲线的位置关系：**

（1）相交：$\Delta>0$ $\Leftrightarrow$ 直线与椭圆相交； $\Delta>0$ $\Rightarrow$ 直线与双曲线相交，但直线与双曲线相交不一定有 $\Delta>0$，当直线与双曲线的渐近线平行时，直线与双曲线相交且只有一个交点，故 $\Delta>0$ 是直线与双曲线相交的充分条件，但不是必要条件；$\Delta>0$ $\Rightarrow$ 直线与抛物线相交，但直线与抛物线相交不一定有 $\Delta>0$，当直线与抛物线的对称轴平行时，直线与抛物线相交且只有一个交点，故 $\Delta>0$ 也仅是直线与抛物线相交的充分条件，但不是必要条件。**如（1）**若直线 y=kx+2 与双曲线 $x^2-y^2=6$ 的右支有两个不同的交点，则 k 的取值范围是_______（答：$(-\frac{\sqrt{15}}{3},-1)$）；**（2）**直线 y－kx－1=0 与椭

圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$恒有公共点，则 m 的取值范围是_______（答：[1，5）∪（5，+∞））；**(3)** 过双曲线$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=1$的右焦点直线交双曲线于 A、B 两点，若│AB│=4，则这样的直线有_____条（答：3）；

（2）相切：$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与椭圆相切；$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与双曲线相切；$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与抛物线相切；

（3）相离：$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与椭圆相离；$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与双曲线相离；$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与抛物线相离。

**特别提醒：(1)** 直线与双曲线、抛物线只有一个公共点时的位置关系有两种情形：相切和相交。如果直线与双曲线的渐近线平行时,直线与双曲线相交,但只有一个交点；如果直线与抛物线的轴平行时,直线与抛物线相交,也只有一个交点；**(2)** 过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 外一点$P(x_0,y_0)$的直线与双曲线只有一个公共点的情况如下：①P 点在两条渐近线之间且不含双曲线的区域内时，有两条与渐近线平行的直线和分别与双曲线两支相切的两条切线，共四条；②P 点在两条渐近线之间且包含双曲线的区域内时，有两条与渐近线平行的直线和只与双曲线一支相切的两条切线，共四条；③P 在两条渐近线上但非原点，只有两条：一条是与另一渐近线平行的直线，一条是切线；④P 为原点时不存在这样的直线；**(3)** 过抛物线外一点总有三条直线和抛物线有且只有一个公共点：两条切线和一条平行于对称轴的直线。**如 (1)** 过点$(2,4)$作直线与抛物线$y^2=8x$只有一个公共点，这样的直线有______（答：2）；**(2)** 过点(0,2)与双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$有且仅有一个公共点的直线的斜率的取值范围为______（答：$\left\{\pm\frac{4}{3},\pm\frac{4\sqrt{5}}{3}\right\}$）；**(3)** 过双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$的右焦点作直线$l$交双曲线于 A、B 两点，若$\left|AB\right|=4$,则满足条件的直线$l$有____条（答：3）；**(4)** 对于抛物线 C：$y^2=4x$，我们称满足${y_0}^2<4x_0$的点$M(x_0,y_0)$在抛物线的内部，若点$M(x_0,y_0)$在抛物线的内部，则直线$l$：$y_0y=2(x+x_0)$与抛物线 C 的位置关系是_______（答：相离）；**(5)** 过抛物线$y^2=4x$的焦点$F$作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是$p$、$q$，则$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=$_______（答：1）；**(6)** 设双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的右焦点为$F$，右准线为$l$，设某直线$m$交其左支、右支和右准线分别于$P,Q,R$，则$\angle PFR$和$\angle QFR$的大小关系为___________(填大于、小于或等于)（答：等于）；**(7)** 求椭圆$7x^2+4y^2=28$上的点到直线$3x-2y-16=0$的最短距离（答：$\frac{8\sqrt{13}}{13}$）；**(8)** 直线$y=ax+1$与双曲线$3x^2-y^2=1$交于$A$、$B$两点。①当$a$为何值时，$A$、$B$分别在双曲线的两支上？②当$a$为何值时，以 AB 为直径的圆过坐标原点？（答：①$\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$；②$a=\pm1$）；

**7、焦点三角形**（椭圆或双曲线上的一点与两焦点所构成的三角形）**问题**：常利用第一定义和正弦、余弦定理求解。设椭圆或双曲线上的一点$P(x_0,y_0)$到两焦点$F_1,F_2$的距离分别为$r_1,r_2$，焦点$\Delta F_1PF_2$的面积为$S$，则在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中，①$\theta=\arccos(\frac{2b^2}{r_1r_2}-1)$，且当$r_1=r_2$即$P$为短轴端点时，$\theta$最大为$\theta_{\max}=\arccos\frac{b^2-c^2}{a^2}$；②$S=b^2\tan\frac{\theta}{2}=c|y_0|$，当$|y_0|=b$即$P$为短轴端点时，$S_{\max}$的最大值为 bc；对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点三角形有：①$\theta=\arccos\left(1-\frac{2b^2}{r_1r_2}\right)$；

②$S=\frac{1}{2}r_1r_2\sin\theta=b^2\cot\frac{\theta}{2}$。**如（1）**短轴长为$\sqrt{5}$，离心率$e=\frac{2}{3}$的椭圆的两焦点为$F_1$、$F_2$，过$F_1$作直线交椭圆于 A、B 两点，则$\Delta ABF_2$的周长为________（答：6）；**（2）**设 P 是等轴双曲线$x^2-y^2=a^2(a>0)$右支上一点，F$_1$、F$_2$是左右焦点，若$\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$，|PF$_1$|=6，则该双曲线的方程为__________（答：$x^2-y^2=4$）；**（3）**椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的焦点为F$_1$、F$_2$，点P为椭圆上的动点，当$\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{PF_1}<0$时，点P的横坐标的取值范围是________________（答：$(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5})$）；**（4）**已知双曲线的离心率为2，F$_1$、F$_2$是左右焦点，P为双曲线上一点，且$\angle F_1PF_2=60^\circ$，$S_{\Delta PF_1F_2}=12\sqrt{3}$.求该双曲线的标准方程（答：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$）；

**8、抛物线中与焦点弦有关的一些几何图形的性质**：（1）以过焦点的弦为直径的圆和准线相切；（2）设 AB 为焦点弦， M 为准线与 x 轴的交点，则∠AMF＝∠BMF；（3）设 AB 为焦点弦，A、B 在准线上的射影分别为$A_1$，$B_1$，若 P 为$A_1B_1$的中点，则 PA⊥PB；（4）若 AO 的延长线交准线于 C，则 BC 平行于 x 轴，反之，若过 B 点平行于 x 轴的直线交准线于 C 点，则 A，O，C 三点共线。

**9、弦长公式**：若直线$y=kx+b$与圆锥曲线相交于两点A、B，且$x_1,x_2$分别为A、B的横坐标，则$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$，若$y_1,y_2$分别为A、B的纵坐标，则$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$，若弦AB所在直线方程设为$x=ky+b$，则$|AB|=\sqrt{1+k^2}|y_1-y_2|$。特别地，焦点弦（过焦点的弦）：焦点弦的弦长的计算，一般不用弦长公式计算，而是将焦点弦转化为两条焦半径之和后，利用第二定义求解。**如（1）**过抛物线$y^2=4x$的焦点作直线交抛物线于A（$x_1$，$y_1$），B（$x_2$，$y_2$）两点，若$x_1+x_2=6$，那么|AB|等于_______（答：8）；**(2)**过抛物线$y^2=2x$焦点的直线交抛物线于A、B两点，已知|AB|=10，O为坐标原点，则ΔABC重心的横坐标为_______（答：3）；

**10、圆锥曲线的中点弦问题**：遇到中点弦问题常用**“韦达定理”或“点差法”**求解。在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中，以$P(x_0,y_0)$为中点的弦所在直线的斜率 k=$-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$；在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中，以$P(x_0,y_0)$为中点的弦所在直线的斜率 k=$\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$；在抛物线$y^2=2px(p>0)$中，以$P(x_0,y_0)$为中点的弦所在直线的斜率 k=$\frac{p}{y_0}$。**如（1）**如果椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$弦被点 A（4，2）平分，那么这条弦所在的直线方程是___________（答：$x+2y-8=0$）；**（2）**已知直线 y=－x+1 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$相交于 A、B 两点，且线段 AB 的中点在直线 L：x－2y=0 上，则此椭圆的离心率为_______（答：$\frac{\sqrt{2}}{2}$）；**（3）**试确定 m 的取值范围，使得椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上有不同的两点关于直线$y=4x+m$对称（答：$\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$）；

**特别提醒**：因为$\Delta>0$是直线与圆锥曲线相交于两点的必要条件，故在求解有关弦长、对称问题时，务必别忘了检验$\Delta>0$！

**12．你了解下列结论吗**？

（1）双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$；

（2）以$y=\pm\frac{b}{a}x$为渐近线（即与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$共渐近线）的双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda$为参数，$\lambda\neq0$)。**如**与双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$有共同的渐近线，且过点$(-3,2\sqrt{3})$的双曲线方程为\_\_\_\_\_\_\_（答：$\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$）

（3）中心在原点，坐标轴为对称轴的椭圆、双曲线方程可设为$mx^2+ny^2=1$；

（4）椭圆、双曲线的通径（过焦点且垂直于对称轴的弦）为$\frac{2b^2}{a}$，焦准距（焦点到相应准线的距离）为$\frac{b^2}{c}$，抛物线的通径为$2p$，焦准距为$p$；

（5）通径是所有焦点弦（过焦点的弦）中最短的弦；

（6）若抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点弦为AB，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则①$|AB|=x_1+x_2+p$；②$x_1x_2=\frac{p^2}{4},y_1y_2=-p^2$

（7）若OA、OB是过抛物线$y^2=2px(p>0)$顶点O的两条互相垂直的弦，则直线AB恒经过定点$(2p,0)$

**13．动点轨迹方程**：

（1）求轨迹方程的步骤：建系、设点、列式、化简、确定点的范围；

（2）求轨迹方程的常用方法：

①直接法：直接利用条件建立$x,y$之间的关系$F(x,y)=0$；**如**已知动点P到定点F(1,0)和直线$x=3$的距离之和等于4，求P的轨迹方程.（答：$y^2=-12(x-4)(3\le x\le 4)$或$y^2=4x(0\le x<3)$）；

②待定系数法：已知所求曲线的类型，求曲线方程－－先根据条件设出所求曲线的方程，再由条件确定其待定系数。**如**线段AB过x轴正半轴上一点M（m，0）$(m>0)$，端点A、B到x轴距离之积为2m，以x轴为对称轴，过A、O、B三点作抛物线，则此抛物线方程为__________________（答：$y^2=2x$）；

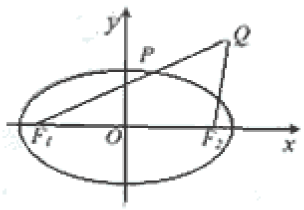
③定义法：先根据条件得出动点的轨迹是某种已知曲线，再由曲线的定义直接写出动点的轨迹方程；**如(1)**由动点P向圆$x^2+y^2=1$作两条切线PA、PB，切点分别为A、B，∠APB=$60^0$，则动点P的轨迹方程为____________________（答：$x^2+y^2=4$）；**(2)**点M与点F(4,0)的距离比它到直线$l$: $x+5=0$的距离小于1，则点M的轨迹方程是_______（答：$y^2=16x$）；**(3)** 一动圆与两圆⊙M：$x^2+y^2=1$和⊙N：$x^2+y^2-8x+12=0$都外切，则动圆圆心的轨迹为____（答：双曲线的一支）；

④代入转移法：动点$P(x,y)$依赖于另一动点$Q(x_0,y_0)$的变化而变化，并且$Q(x_0,y_0)$又在某已知曲线上，则可先用$x,y$的代数式表示$x_0,y_0$，再将$x_0,y_0$代入已知曲线得要求的轨迹方程；**如**动点P是抛物线$y=2x^2+1$上任一点，定点为$A(0,-1)$，点M分$\overrightarrow{PA}$所成的比为2，则M的轨迹方程为__________（答：$y=6x^2-\frac{1}{3}$）；

⑤参数法：当动点$P(x,y)$坐标之间的关系不易直接找到，也没有相关动点可用时，可考虑将$x,y$均用一中间变量（参数）表示，得参数方程，再消去参数得普通方程）。**如（1）**AB是圆O的直径，

且|AB|=2$a$，M 为圆上一动点，作 MN⊥AB，垂足为 N，在 OM 上取点 $P$，使 $|OP|=|MN|$，求点 $P$ 的轨迹。（答：$x^2+y^2=a|y|$）；**（2）**若点 $P(x_1,y_1)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动，则点 $Q(x_1y_1,x_1+y_1)$ 的轨迹方程是____（答：$y^2=2x+1(|x|\le\frac{1}{2})$）；**（3）**过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 作直线 $l$ 交抛物线于 A、B 两点，则弦 AB 的中点 M 的轨迹方程是________（答：$x^2=2y-2$）；

**注意**：①如果问题中涉及到平面向量知识，那么应从已知向量的特点出发，考虑选择向量的几何形式进行"摘帽子或脱靴子"转化，还是选择向量的代数形式进行"摘帽子或脱靴子"转化。**如**已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1$（－c，0）、$F_2$（c，0），Q 是椭圆外的动点，满足 $|\overrightarrow{F_1Q}|=2a.$ 点 P 是线段 $F_1Q$ 与该椭圆的交点，点 T 在线段 $F_2Q$ 上，并且满足 $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0,|\overrightarrow{TF_2}|\ne 0.$（1）设 $x$ 为点 P 的横坐标，证明 $|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x$；（2）求点 T 的轨迹 C 的方程；（3）试问：在点 T 的轨迹 C 上，是否存在点 M，使△$F_1MF_2$ 的面积 S=$b^2$.若存在，求∠$F_1MF_2$ 的正切值；若不存在，请说明理由.（答：（1）略；（2）$x^2+y^2=a^2$；（3）当 $\frac{b^2}{c}>a$ 时不存在；当 $\frac{b^2}{c}\le a$ 时存在，此时∠$F_1MF_2$＝2）




②曲线与曲线方程、轨迹与轨迹方程是两个不同的概念，寻求轨迹或轨迹方程时应注意轨迹上**特殊点**对轨迹的"完备性与纯粹性"的影响.

③在与圆锥曲线相关的综合题中，**常借助于**"平面几何性质"数形结合(如角平分线的双重身份－－对称性、利用到角公式)、"方程与函数性质"化解析几何问题为代数问题、"分类讨论思想"化整为零分化处理、"求值构造等式、求变量范围构造不等关系"等等.

④如果在一条直线上**出现"三个或三个以上的点"**，那么**可选择应用"斜率或向量"为桥梁**转化.

**14、解析几何与向量综合时可能出现的向量内容：**

**（1）** 给出直线的方向向量 $\vec{u}=(1,k)$ 或 $\vec{u}=(m,n)$；

**（2）**给出 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $AB$ 相交,等于已知 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 过 $AB$ 的中点;

**（3）**给出 $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=\vec{0}$,等于已知 $P$ 是 $MN$ 的中点;

**（4）**给出 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\lambda\left(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BQ}\right)$,等于已知 $P,Q$ 与 $AB$ 的中点三点共线;

**（5）** 给出以下情形之一：① $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$；②存在实数 $\lambda$,使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$；③若存在实数 $\alpha,\beta$,且 $\alpha+\beta=1$,使 $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，等于已知 $A,B,C$ 三点共线.

**（6）** 给出 $\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$，等于已知 $P$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点，$\lambda$ 为定比，即 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$

**（7）** 给出 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$,等于已知 $MA\perp MB$,即 $\angle AMB$ 是直角,给出 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=m<0$,等于已知 $\angle AMB$ 是钝角, 给出 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=m>0$,等于已知 $\angle AMB$ 是锐角,

**（8）**给出 $\lambda\left(\frac{\overrightarrow{MA}}{|\overrightarrow{MA}|}+\frac{\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MB}|}\right)=\overrightarrow{MP}$,等于已知 $MP$ 是 $\angle AMB$ 的平分线/

**（9）**在平行四边形 $ABCD$ 中，给出 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=0$，等于已知 $ABCD$ 是菱形;

**（10）** 在平行四边形 $ABCD$ 中，给出 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$，等于已知 $ABCD$ 是矩形;

**（11）**在 $\Delta ABC$ 中，给出 $\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$，等于已知 $O$ 是 $\Delta ABC$ 的外心（三角形外接圆的

圆心，三角形的外心是三角形三边垂直平分线的交点）；

（12） 在$\Delta ABC$中，给出$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，等于已知$O$是$\Delta ABC$的重心（三角形的重心是三角形三条中线的交点）；

**（13）**在$\Delta ABC$中，给出$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，等于已知$O$是$\Delta ABC$的垂心（三角形的垂心是三角形三条高的交点）；

**（14）**在$\Delta ABC$中，给出$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$ $(\lambda\in R^{+})$等于已知$\overrightarrow{AP}$通过$\Delta ABC$的内心；

**（15）**在$\Delta ABC$中，给出$a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0},$等于已知$O$是$\Delta ABC$的内心（三角形内切圆的圆心，三角形的内心是三角形三条角平分线的交点）；

**（16）** 在$\Delta ABC$中，给出$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$,等于已知$AD$是$\Delta ABC$中$BC$边的中线;