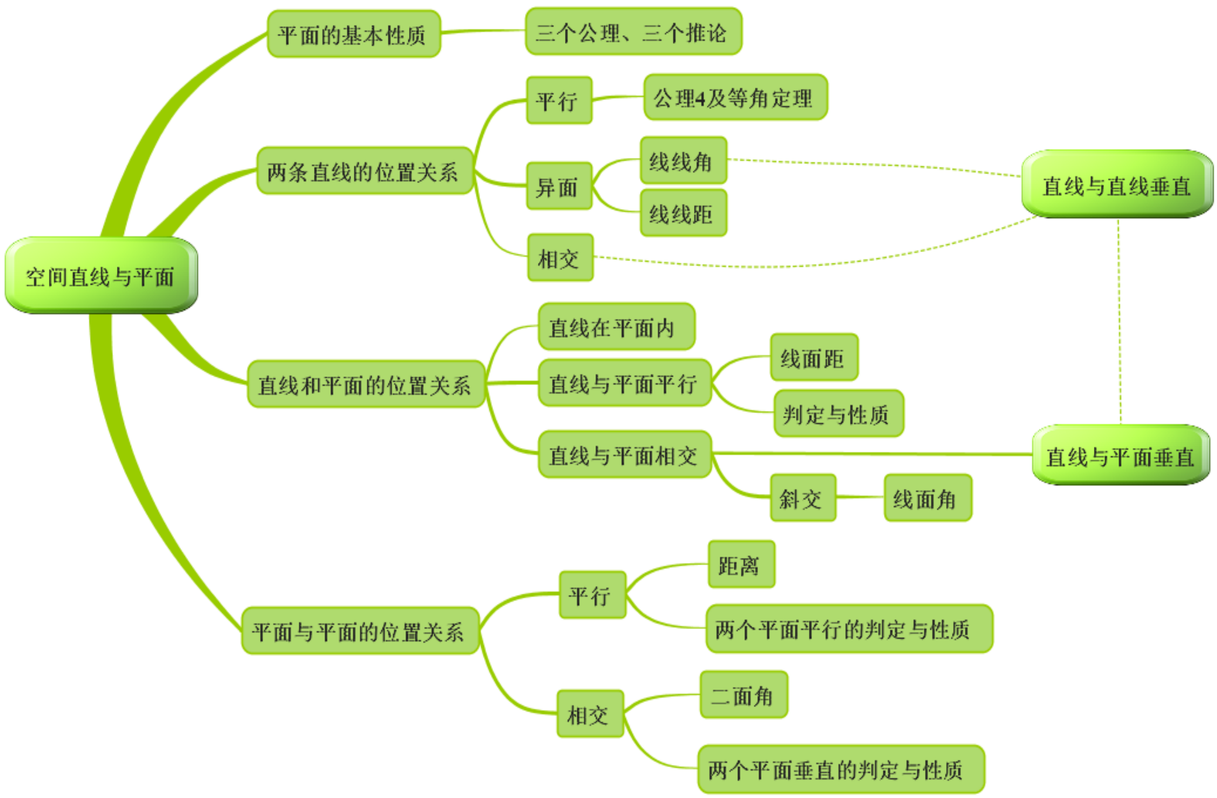
空间直线与平面概念总结



1. 平面的基本性质

（1）点、线、面的符号表示：

点：A，B，C.....

线：l，m，n......

面：α，β，γ......

（2）点、线、面之间关系的符号表示：

点 A 在直线 l 上：$A \in l$　　点 A 不在直线 l 上：$A \notin l$

点 A 在平面 α 上：$A \in \alpha$　　点 A 不在平面 α 上：$A \notin \alpha$

直线 m 与直线 n 平行：$m \parallel n$　　直线 m 与直线 n 相交于点 A：$m \cap n = A$

直线 m 与平面 α 平行：$m \parallel \alpha$　　直线 m 与平面 α 相交于点 A：$m \cap \alpha = A$

直线 m 与平面 α 垂直：$m \perp \alpha$　　直线 m 在平面 α 内（平面 α 经过直线 m）：$m \subsetneqq \alpha$

平面 α 与平面 β 平行：$\alpha \parallel \beta$　　平面 α 与平面 β 相交于直线 l：$\alpha \cap \beta = l$

平面 α 与平面 β 垂直：$\alpha \perp \beta$

【注意】平面的特征：无限延展，无厚度.

（3）三个公理、三个推论：

公理 1： 若一条直线上有两个点在一个平面内，则该直线上所有的点都在这个平面内.

即：$\left.\begin{array}{l} A\in l，\ B\in l \\ A\in\alpha，\ \mathrm{B}\in\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow l \subsetneqq \alpha$

公理 2： 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

即：$\mathrm{A}\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$且$\mathrm{A}\in l$

公理 3： 经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

推论 1： 经过一条直线和这条直线外一点有且只有一个平面.

推论 2： 两条相交直线确定一个平面.

推论 3： 两条平行直线确定一个平面.

【注意】 搞清楚公理及其推论的基本应用：

公理 1 是判定直线在平面内的依据；

公理 2 是判定两个平面相交的依据，同时应注意其内容的完整性，即当两个平面有一个公共点时，首先可得到这两个平面相交，其次是这两个平面有且只有一条公共直线（即交线），还有就是这个公共点在公共直线上或称公共直线经过公共点；

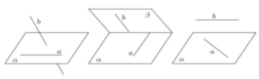
公理 3 以及三个推论都是确定平面的依据，应注意由于三点共线时，经过他们可以作无数个平面，因此公理 3 中“三点不共线”的条件必不可少.

2. 空间直线与直线的位置关系

（1）两条直线的位置关系

$$\begin{cases} \text{共面直线}\begin{cases} \text{平行直线：在同一平面内，没有公共点；} \\ \text{相交直线：有且只有一个公共点；} \end{cases} \\ \text{异面直线：不能同在任何平面内的两条直线，没有公共点.} \end{cases}$$

空间两条异面直线的画法：



异面直线的判定 ：不平行、不相交的直线.

【注意】证明两条直线异面一般采用反证法.

（2）公理 4： 平行于同一直线的两条直线相互平行.

（3）等角定理： 如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补.

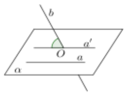
推论： 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等.

（4）异面直线定理：

连结平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过此点的直线是异面直线.

（5）异面直线所成的角及两条异面直线间的距离

① **异面直线所成的角**：已知两条异面直线a,b，经过空间任一点O作直线$a'//a,b'//b$，a',b'所成的角的大小与点O的选择无关，把a',b'所成的锐角（或直角）叫异面直线a,b所成的角（或夹角）.为了简便，点O通常取在异面直线的一条上.



异面直线所成的角的范围：$(0,\dfrac{\pi}{2}]$.

② **异面直线垂直**：如果两条异面直线所成的角是直角，则叫两条异面直线垂直．两条异面直线a,b垂直，记作$a\perp b$.

【注意】空间直线与直线垂直，是不平行的两条直线的特殊位置情况，这时这两条直线所成的角等于$\dfrac{\pi}{2}$，而它们可能是相交直线，也可能是异面直线.

③ **求异面直线所成的角的方法：**

（1）范围：$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2}]$；

（2）求法：计算异面直线所成角的关键是平移（中点平移，顶点平移以及补形法：把空间图形补成熟悉的或完整的几何体，如正方体、平行六面体、长方体等，以便易于发现两条异面直线间的关系）转化为相交两直线的夹角。

④ **异面直线公垂线的概念：**

（i）和两异面直线都垂直相交的直线为异面直线的公垂线.

（ii）公垂线是唯一存在的.

（iii）两条异面直线间的公垂线段的长度即为两异面直线间的距离.

⑤ **求异面直线距离的方法：**

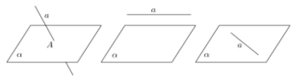
（i）公垂线法：找出或作出两异面直线的公垂线，再计算公垂线段的长度.

（ii）线面平行法：过其中一直线作和另一直线平行的平面，则异面直线的距离转化为线到面的距离.

（iii）面面平行法：作出过两异面直线的两个平行平面，则异面直线的距离转化为两平行平面的距离.

3.　空间直线与平面的位置关系

$$\text{直线和平面}\begin{cases}\text{直线在平面内---有无数个公共点}\\ \text{直线在平面外}\begin{cases}\text{直线与平面平行---没有公共点}\\ \text{直线与平面相交---有且只有一个公共点}\end{cases}\end{cases}$$



$a\cap\alpha=A$　　　　　$a\parallel\alpha$　　　　　$a\subsetneqq\alpha$

（1）直线与平面平行：

直线和平面平行的判定定理：如果平面外一条直线和这个平面内一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行，即$a\not\subseteq\alpha, b\subsetneqq\alpha, a//b\Rightarrow a\parallel\alpha$.

直线和平面平行的性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.，即$a//\alpha, a\subsetneqq\beta, \beta\cap\alpha=b\Rightarrow a\parallel b$.

（2）直线与平面垂直：

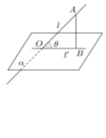
定义：一般地，如果一条直线l与平面α上的任何直线都垂直，那么我们就说直线l与平面α垂直，记作：$l\perp\alpha$，直线l叫做平面α的垂线，平面α叫做直线l的垂面，l与面α的交点叫做垂足.

直线和平面垂直的判定定理：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面，即$m,n\subsetneqq\alpha, m\cap n=O, l\perp m, l\perp n\Rightarrow l\perp\alpha$.

直线和平面垂直的性质定理：如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.即$m\perp\alpha, n\perp\alpha\Rightarrow m\parallel n$.

（3）直线与平面所成的角：

如图，l是平面α的一条斜线，点O是斜足，A是l上任意一点，AB是α的垂线，点B是垂足，所以直线OB（记作l'）是l在α内的射影，$\angle AOB$（记作θ）是l与α所成的角.



定义：平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的角，叫做这条斜线和平面所成的角.

【规定】

（1）一条直线垂直于平面，定义这直线与平面所成的角是直角；

（2）一条直线和平面平行，或在平面内，定义它和平面所成的角是 0^0 的角.

【注意】

（1）直线 l 与平面 α 所成的角的大小与点 A 在 l 上的取法无关；

（2）直线和平面所成角的范围是 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$；

（3）斜线和平面所成角的范围是 $(0,\dfrac{\pi}{2})$.

直线与平面所成角求解方法：

第一步：作出斜线在平面上的射影，找到斜线与射影所成的角 θ；

第二步：解含 ϑ 的三角形，求出其大小.

射影长定理：

从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中：

（1）射影相等的两条斜线段相等，射影较长的斜线段也较长；

（2）相等的斜线段的射影相等，较长的斜线段的射影也较长；

（3）垂线段比任何一条斜线段都短.

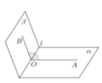
4．空间平面和平面的位置关系 $\begin{cases}\text{两 平 面 平 行–没 有 公 共 点}\\ \text{两 平 面 相 交–有 一 条 公 共 直}\end{cases}$

（1）平面与平面平行：

平面和平面平行的判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行，若 $a\subsetneqq\alpha$，$b\subsetneqq\alpha$，$a\cap b=A$,且 $a\parallel\alpha$，$b\parallel\alpha$，则 $\alpha\parallel\beta$.

平面和平面平行的性质定理：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行，若 $\alpha\parallel\beta$， $\gamma\cap\beta=b$，$\gamma\cap\alpha=a$，则 $a\parallel b$.

（2）二面角：平面内的一条直线把平面分为两个部分，其中的每一部分叫做半平面；从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，这条直线叫做二面角的棱，每个半平面叫做二面角的面.若棱为 l，两个面分别为 α,β 的二面角记为 $\alpha-l-\beta$；



二面角的平面角：

（1）过二面角的棱上的一点O分别在两个半平面内作棱的两条垂线OA,OB，则$\angle AOB$叫做二面角$\alpha-l-\beta$的平面角.

（2）一个平面垂直于二面角$\alpha-l-\beta$的棱l，且与两半平面交线分别为OA,OB,O为垂足，则$\angle AOB$也是$\alpha-l-\beta$的平面角.

【说明】

（1）二面角的平面角范围是$[0^\circ,180^\circ]$；

（2）二面角平面角为直角时，则称为直二面角，组成直二面角的两个平面互相垂直；

（3）二面角的求法：① 几何法；② 向量法.

（3）平面与平面垂直：

平面和平面垂直的判定定理：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直，若$l\perp\alpha$，$l\subsetneqq\beta$，则$\alpha\perp\beta$.

平面和平面垂直的性质定理：如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一平面，若$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m\subsetneqq\alpha$，且$m\perp l$，则$m\perp\beta$.

5．空间有关点、线、面间的距离：

①点到直线的距离

②点到平面的距离

③异面直线的距离

④直线到平面的距离

⑤平面到平面的距离.