复数概念技巧总结

1. ⑴复数的单位为 i，它的平方等于－1，即$i^2=-1$.

⑵复数及其相关概念：

① 复数—形如 $a+bi$ 的数（其中a，$b\in R$）；

② 实数—当 b = 0 时的复数 $a+bi$，即 a;

③ 虚数—当$b\neq 0$时的复数 $a+bi$;

④ 纯虚数—当 $a=0$ 且$b\neq 0$时的复数 $a+bi$，即 bi.

⑤ 复数 $a+bi$ 的实部与虚部—a 叫做复数的实部，b 叫做虚部（注意 a，b 都是实数）

⑥ 复数集 C—全体复数的集合，一般用字母 C 表示.

⑶两个复数相等的定义：

$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c$且$b=d$（其中，$a$，$b$，$c$，$d$，$\in R$）特别地$a+bi=0\Leftrightarrow a=b=0$.

⑷两个复数，如果不全是实数，就不能比较大小.

注：①若 z_1,z_2 为复数，则1° 若 $z_1+z_2\succ 0$，则 $z_1\succ -z_2$.（×）[z_1,z_2 为复数，而不是实数]

2° 若 $z_1\prec z_2$，则 $z_1-z_2\prec 0$.（√）

②若 $a,b,c\in C$，则 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ 是 $a=b=c$ 的<u>必要不充分条件</u>.（当$(a-b)^2=i^2$，$(b-c)^2=1,(c-a)^2=0$时，上式成立）

2. ⑴复平面内的两点间距离公式：$d=|z_1-z_2|$.

其中z_1，z_2是复平面内的两点z_1和z_2所对应的复数，d表示z_1和z_2间的距离.

由上可得：复平面内以z_0为圆心，r为半径的圆的复数方程：$|z-z_0|=r$（$r\succ 0$）.

⑵曲线方程的复数形式：

①$|z-z_0|=r$表示以z_0为圆心，r 为半径的圆的方程.

②$|z-z_1|=|z-z_2|$表示线段z_1z_2的垂直平分线的方程.

③$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$（$a\succ 0$且$2a\succ|z_1z_2|$）表示以Z_1，Z_2为焦点，长半轴长为 a 的椭圆的方程（若 $2a=|z_1z_2|$，此方程表示线段Z_1，Z_2）.

④$||z-z_1|-|z-z_2||=2a$（$0\prec 2a\prec|z_1z_2|$），表示以Z_1，Z_2为焦点，实半轴长为 a 的双曲线方程（若 $2a=|z_1z_2|$，此方程表示两条射线）.

⑶绝对值不等式：

设z_1，z_2是不等于零的复数，则

① $||z_1|-|z_2||\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

左边取等号的条件是$z_2=\lambda z_1$（$\lambda\in R$，且$\lambda\prec 0$），右边取等号的条件是

$z_2=\lambda z_1$（$\lambda\in R$，$\lambda\succ 0$）.

② $||z_1|-|z_2||\le|z_1-z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

左边取等号的条件是$z_2=\lambda z_1$（$\lambda\in R$，$\lambda\succ 0$），右边取等号的条件是

$z_2=\lambda z_1$（$\lambda\in R$，$\lambda\prec 0$）.

注：$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

3. 共轭复数的性质：

$\overline{\overline{z}}=z$　　$\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$　　$z+\overline{z}=2a$，$z-\overline{z}=2bi$（$z=a+bi$）

$z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$　　$\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$　　$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$（$z_2\neq 0$）　　$\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

注：两个共轭复数之差是纯虚数.（×）[之差可能为零，此时两个复数是相等的]

4. ⑴①复数的乘方：$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot z\ldots z}_{n}(n\in N^+)$

②对任何z，$z_1,z_2\in C$及$m,n\in N_+$有$z^m\cdot z^n=z^{m+n},(z^m)^n=z^{m\cdot n},(z_1\cdot z_2)^n=z_1^n\cdot z_2^n$

注：①以上结论不能拓展到分数指数幂的形式，否则会得到荒谬的结果，如 $i^2=-1,i^4=1$ 若由 $i^2=(i^4)^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1$ 就会得到 $-1=1$ 的错误结论.

②在实数集成立的 $|x|=x^2$. 当 x 为虚数时，$|x|\neq x^2$，所以复数集内解方程不能采用两边平方法.

⑵常用的结论：

$$i^2=-1,i^{4n+1}=i,i^{4n+2}=-1,i^{4n+3}=-i,i^{4n}=1$$

$$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0,(n\in Z) \qquad (1\pm i)^2=\pm 2i,\frac{1+i}{1-i}=i,\frac{1-i}{1+i}=-i$$

若 ω 是 1 的立方虚数根，即 $\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

则 $\omega^3=1,\omega^2=\overline{\omega},\omega=\frac{1}{\overline{\omega}},1+\omega+\omega^2=0,\omega^n+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}=0(n\in Z)$.

5. ⑴复数 z 是实数及纯虚数的充要条件：

① $z\in R\Leftrightarrow z=\overline{z}$.　　② z 是纯虚数 $\Leftrightarrow z+\overline{z}=0$ 且 $z\neq 0$.

⑵模相等且方向相同的向量，不管它的起点在哪里，都认为是相等的，而相等的向量表示同一复数. 特例：零向量的方向是任意的，其模为零.

注：$|z|=|\overline{z}|$.

6. 复数集中解一元二次方程：

在复数集内解关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 时，应注意下述问题：

①当 $a,b,c\in R$ 时，若 Δ＞0，则有二不等实数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$；若 Δ=0，则有二相等实数根 $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$；若 Δ＜0，则有二相等复数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|\Delta|}i}{2a}$（$x_{1,2}$ 为共轭复数）.

②当 a,b,c 不全为实数时，不能用 Δ 判断方程根的情况.

③不论 a,b,c 为何复数，都可用求根公式求根，并且韦达定理也成立.