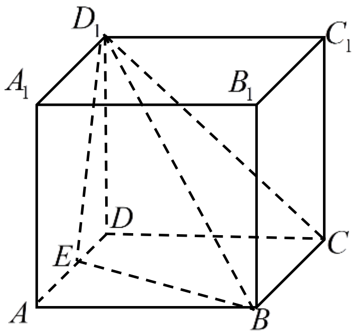
空间向量解题格式

1、已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱 $AB=BC=2$， $AA_1=3$，点 E 是棱 AD 的中点.

(1)联结 CE，求三棱锥 D_1-EBC 的体积 V；

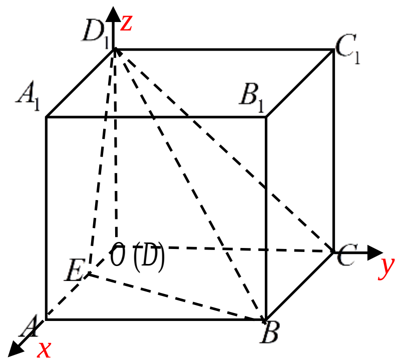
(2)求直线 CD_1 和平面 D_1EB 所成角的大小.

（结果用反三角函数值表示）



解(1) $\because$ $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体, 棱 $AB=BC=2$， $AA_1=3$，

$\therefore$ $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，即三棱锥 D_1-EBC 的高等于 AA_1.



$\therefore$ $S_{\Delta EBC}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AB=2$.

$\therefore$ $V_{D_1-EBC}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\Delta EBC}\cdot AA_1=2$.

(2)按如图所示建立空间直角坐标系，可得 $E\left(1,0,0\right)$，

$C\left(0,2,0\right)$ ，$B\left(2,2,0\right)$ ， $D_1\left(0,0,3\right)$.

$\overrightarrow{EB}=\left(1,2,0\right)$ ， $\overrightarrow{ED_1}=\left(-1,0,3\right)$， $\overrightarrow{D_1C}=\left(0,2,-3\right)$

设平面 EBD_1 的法向量 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$ ，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ED_1}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+2y=0,\\ -x+3z=0.\end{cases}$

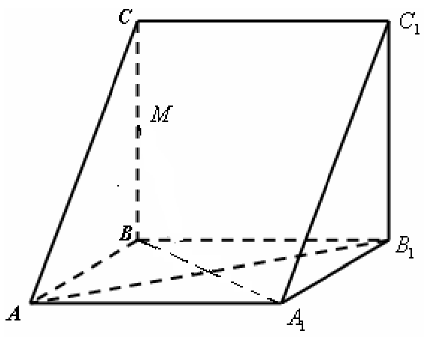
取 $x=6$，得 $\begin{cases}y=-3,\\ z=2.\end{cases}$ 故平面 EBD_1 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(6,-3,2\right)$.

设直线 CD_1 和平面 EBD_1 所成的角为 θ ，则

$$\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{D_1C}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{D_1C}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{12}{\sqrt{13}\times 7}=\frac{12\sqrt{13}}{91}.$$

所以直线 CD_1 和平面 EBD_1 所成角的大小为 $\arcsin\dfrac{12\sqrt{13}}{91}$.

2．（本题满分 14 分，第（1）小题 6 分，第（2）小题 8 分）



如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BA\perp BC$，

$BA=BC=BB_1=2$.

（1）求异面直线 AB_1 与 A_1C_1 所成角的大小；

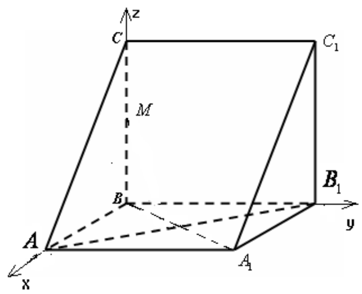
（2）若 M 是棱 BC 的中点. 求点 M 到平面 A_1B_1C 的距离.

【解】由于 $A_1C_1//AC$，所以 $\angle CAB_1$（或其补角）即为异面直线 AB_1 与 A_1C_1 所成角，2 分

连接 CB_1，在 ΔAB_1C 中，由于 $AB_1=B_1C=AC=2\sqrt{2}$，所以 ΔAB_1C 是等边三角形，

所以 $\angle CAB_1=\dfrac{\pi}{3}$，所以异面直线 AB_1 与 A_1C_1 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$. --------6 分

（2）如图所示，建立空间直角坐标系，可得有关点的坐标为 $C(0,0,2)$、$\mathrm{B}_1(0,2,0)$、$\mathrm{A}_1(2,2,0)$、$\mathrm{M}(0,0,1)$. ------------------------------8 分



设平面 $\mathrm{A_1B_1C}$ 的法向量为 $\vec{n}=(u,v,w)$，则 $\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB_1}}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}$.

$\because\overrightarrow{\mathrm{CB_1}}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}=(-2,0,0)$，

且 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB_1}}=0,\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}=0$，$\therefore\begin{cases}2v-2w=0\\-2u=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w=v\\u=0\end{cases}$，取

$v=1$，得平面 $\mathrm{A_1B_1C}$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,1,1)$，-----------------11 分

且 $|\vec{n}|=\sqrt{2}$，又 $\because\overrightarrow{\mathrm{MB_1}}=(0,2,-1)$，于是点 M 到平面 $\mathrm{A_1B_1C}$ 的距离

$$d=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB_1}}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|0\times0+1\times2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以，点 M 到平面 A_1B_1C 的距离等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ---------------------------------------14 分

解法二：过点 M **作** $MN\perp CB_1$ **交** CB_1 **于** N**，由** $\begin{cases}MN\perp CB_1\\MN\perp A_1B_1\\CB_1\cap A_1B_1=B_1\end{cases}\Rightarrow MN\perp$ 平面 A_1B_1C.

在 $Rt\Delta CMN$ 中，由 $\angle MCN=\dfrac{\pi}{4}$，$CM=1$，得 $MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以，点 M 到平面 A_1B_1C 的距离等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.（解法三：利用等体积法，略.）