

2021 年上海市高考数学试卷

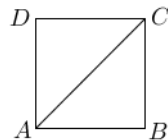
一. 填空题 (本大题共 12 题, 满分 54 分, 第 1~6 题每题 4 分, 第 7~12 题每题 5 分)

1. 已知 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$, 则 $z_1 + z_2 =$ _____

2. 已知 $A = \{x | 2x \leq 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____

3. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, 则该圆的圆心坐标为 _____

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 3, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____



5. 已知 $f(x) = \frac{3}{x} + 2$, 则 $f^{-1}(1) =$ _____

6. 已知二项式 $(x+a)^5$ 展开式中, x^2 项的系数为 80, 则 $a =$ _____

7. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \\ 3x + y - 8 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x - y$ 的最大值为 _____

8. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 满足 $a_1 = 3$, $b_n = a_{2n}$, a_n 的各项和为 9, 则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为 _____

9. 已知圆柱的底面半径为 1, 高为 2, AB 为上底面圆的一条直径, C 为下底面圆周上的一个动点, 则 $\triangle ABC$ 的面积取值范围为 _____

10. 已知花博会有四个不同的场馆 A, B, C, D , 甲、乙两人每人选 2 个去参观, 则他们的选择中, 恰有一个场馆相同的概率为 _____

11. 已知抛物线: $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 若第一象限的 A, B 两点在抛物线上, 焦点为 F , $|AF| = 2$, $|BF| = 4$, $|AB| = 3$, 则直线 AB 的斜率为 _____

12. 已知 $a_i \in \mathbf{N}^*$ ($i = 1, 2, \dots, 9$), 对任意的 $k \in \mathbf{N}^*$ ($2 \leq k \leq 8$), $a_k = a_{k-1} + 1$ 或 $a_k = a_{k+1} - 1$ 中有且仅有一个成立, 且 $a_1 = 6$, $a_9 = 9$, 则 $a_1 + \dots + a_9$ 的最小值为 _____

二. 选择题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 共 20 分)

13. 下列函数中, 既是奇函数又是减函数的是 ()

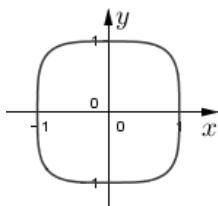
A. $y = -3x$

B. $y = x^3$

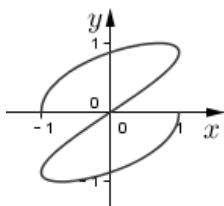
C. $y = \log_3^x$

D. $y = 3^x$

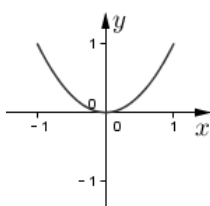
14. 已知参数方程 $\begin{cases} x = 3t - 4t^3 \\ y = 2t\sqrt{1-t^2} \end{cases}$, $t \in [-1, 1]$, 下列选项的图中, 符合该方程的是 ()



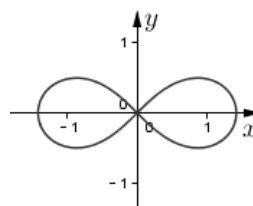
A.



B.



C.



D.

15. 已知 $f(x) = 3\sin x + 2$, 对任意的 $x_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 都存在 $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 使得 $f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$ 成立,

则下列选项中, θ 可能的值为 ()

- A. $\frac{3\pi}{5}$ B. $\frac{4\pi}{5}$ C. $\frac{6\pi}{5}$ D. $\frac{7\pi}{5}$

16. 已知实数 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 同时满足: ① $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$;

- ② $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$; ③ $x_1 y_1 + x_3 y_3 = 2x_2 y_2 > 0$, 则下列选项中恒成立的是 ()

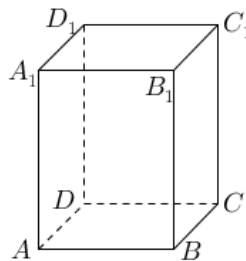
- A. $2x_2 < x_1 + x_3$ B. $2x_2 > x_1 + x_3$ C. $x_2^2 < x_1 x_3$ D. $x_2^2 > x_1 x_3$

三. 解答题 (本大题共 5 题, 共 14+14+14+16+18=76 分)

17. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 中, 已知 $AB = BC = 2$, $AA_1 = 3$.

(1) 若点 P 是棱 $A_1 D_1$ 上的动点, 求三棱锥 $C - PAD$ 的体积;

(2) 求直线 AB_1 与平面 $ACC_1 A_1$ 的夹角大小.



18. 已知在 $\triangle ABC$ 中, A 、 B 、 C 所对边分别为 a 、 b 、 c , 且 $a=3$, $b=2c$.

(1) 若 $A = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $2\sin B - \sin C = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

19. 已知某企业今年 (2021 年) 第一季度的营业额为 1.1 亿元, 以后每个季度的营业额比上个季度增加 0.05 亿元, 该企业第一季度的利润为 0.16 亿, 以后每季度比前一季度增长 4%.

(1) 求 2021 年起前 20 季度营业额的总和;

(2) 请问哪一季度的利润首次超过该季度营业额的 18%?

20. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, F_1 、 F_2 是其左右焦点, 直线 l 过点 $P(m, 0)$ ($m < -\sqrt{2}$) 交椭圆

Γ 于 A 、 B 两点, 且 A 、 B 在 x 轴上方, 点 A 在线段 BP 上.

(1) 若 B 是上顶点, $|\overrightarrow{BF_1}| = |\overrightarrow{PF_1}|$, 求 m 的值;

(2) 若 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3}$, 且原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{4\sqrt{15}}{15}$, 求直线 l 的方程;

(3) 对于任意点 P , 是否存在唯一直线 l , 使得 $\overrightarrow{F_1A} // \overrightarrow{F_2B}$ 成立, 若存在, 求出直线 l 的斜率, 若不存在, 请说明理由.

21. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数，若对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ， $x_1 - x_2 \in S$ ，均有 $f(x_1) - f(x_2) \in S$ ，则称 $f(x)$ 是 S 关联.

(1) 判断和证明 $f(x) = 2x + 1$ 是否是 $[0, +\infty)$ 关联？ 是否是 $[0, 1]$ 关联？

(2) 若 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联，当 $x \in [0, 3)$ 时， $f(x) = x^2 - 2x$ ，解不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$ ；

(3) 证明：“ $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联，且是 $[0, +\infty)$ 关联”的充要条件是“ $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联”.

参考答案

一、填空题

1. $3+4i$ 2. $\{-1,0\}$ 3. $(1,2)$ 4. 9 5. -3 6. 2

7. 4 8. $\frac{18}{5}$ 9. $[2, \sqrt{5}]$ 10. $\frac{2}{3}$ 11. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 12. 31

二、选择题

13. A 14. B 15. D 16. A

三、解答题

17. (1) 2

$$(2) \arcsin \frac{\sqrt{26}}{13}$$

$$18. (1) \frac{9\sqrt{3}}{14}$$

$$(2) 3+4\sqrt{2} \pm \sqrt{5}$$

19. (1) 31.5 亿元

(2) 今年起第 26 个季度时满足条件

$$20. (1) m = -1 - \sqrt{2}$$

$$(2) y = \frac{1}{3}(x + \frac{4\sqrt{6}}{3})$$

(3) 证明略

21. (1) 是；不是

$$(2) [1+\sqrt{3}, 5]$$

(3) 证明略