立体几何概念、方法、题型、易误点及应试技巧总结

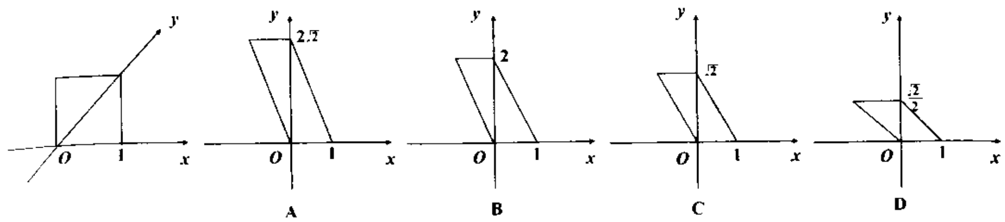
1、三个公理和三条推论：

（1）**公理 1**：一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有的点都在这个平面内。这是**判断直线在平面内的常用方法**。

（2）**公理 2**、如果两个平面有两个公共点，它们有无数个公共点，而且这无数个公共点都在同一条直线上。这是**判断几点共线**（证这几点是两个平面的公共点）和**三条直线共点**（证其中两条直线的交点在第三条直线上）的方法之一。

（3）**公理** 3：经过不在同一直线上的三点有且只有一个平面。推论 1：经过直线和直线外一点有且只有一个平面。推论 2：经过两条相交直线有且只有一个平面。推论 3：经过两条平行直线有且只有一个平面。公理 3 和三个推论是**确定平面的依据**。**如（1）**在空间四点中，三点共线是四点共面的_____条件（答：充分非必要）；**（2）**给出命题：①若 A∈l，A∈α，B∈l，B∈α，则 l ⊂α；②若 A∈α，A∈β，B∈α，B∈β，则 α∩β＝AB；③若 l⊄α，A∈l，则 A∉α ④若 A、B、C∈α，A、B、C∈β，且 A、B、C 不共线，则 α 与 β 重合。上述命题中，真命题是_____（答：①②④）；**（3）**长方体中 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，AB=8，BC=6，在线段 BD，A_1C_1 上各有一点 P、Q，在 PQ 上有一点 M，且 PM=MQ，则 M 点的轨迹图形的面积为_______（答：24）

2、直观图的画法（斜二侧画法规则）：在画直观图时，要注意：（1）使 $\angle x'o'y'=135^0$，$x'o'y'$ 所确定的平面表示水平平面。（2）已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持长度和平行性不变，**平行于 y 轴的线段平行性不变，但在直观图中其长度为原来的一半**。**如（1）**用斜二测画法画一个水平放置的平面图形为如下图的一个正方形，则原来图形的形状是（ ）（答：A）



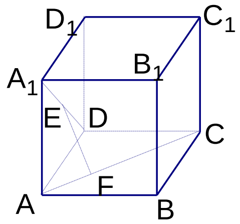
（2）已知正 ΔABC 的边长为 a，那么 ΔABC 的平面直观图 $\Delta A'B'C'$ 的面积为_____（答：$\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$）

3、空间直线的位置关系：（1）相交直线——有且只有一个公共点。（2）平行直线——在同一平面内，没有公共点。（3）异面直线——不在同一平面内，也没有公共点。**如（1）**空间四边形 ABCD 中，E、F、G、H 分别是四边上的中点，则直线 EG 和 FH 的位置关系_____（答：相交）；**（2）**给出下列四个命题：①异面直线是指空间既不平行又不相交的直线；②两异面直线 a,b，如果 a 平行于平面 α，那么 b 不平行平面 α；③两异面直线 a,b，如果 $a\perp$ 平面 α，那么 b 不垂直于平面 α；④两异面直线在同一平面内的射影不可能是两条平行直线 。其中正确的命题是_____（答：①③）

4、异面直线的判定：反证法。 **如（1）**“a 、b 为异面直线”是指：①a∩b＝Φ，但 a 不平行于 b；②a⊂面 α，b⊂面 β 且 a∩b＝Φ；③a⊂面 α，b⊂面 β 且 α∩β＝Φ；④a⊂面 α，b⊄面 α ；⑤不存在平面 α，能使 a⊂面 α 且 b⊂面 α 成立。上述结论中，正确的是_____（答：①⑤）；**（2）**在空间四边形 ABCD 中，M、N 分别是 AB、CD 的中点，设 BC+AD=2a，则 MN 与 a 的大小关系是_____（答：MN<a）；**（3）**若 E、F、G、H 顺次为空间四边形 ABCD 四条边 AB、BC、CD、DA 的中点，且 EG=3，FH=4，则 AC^2+BD^2= ________________（答：50）；**（4）**如果 a 、b 是异面

直线，P 是不在 a 、 b 上的任意一点，下列四个结论：①过点 P 一定可以作直线 l 与 a 、 b 都相交；②过点 P 一定可以作直线 l 与 a 、 b 都垂直；③过点 P 一定可以作平面 α 与 a 、 b 都平行； ④过点 P 一定可以作直线 l 与 a 、 b 都平行。其中正确的结论是_____（答：②）；**（5）** 如果两条异面直线称作一对，那么正方体的十二条棱中异面直线的对数为_____（答：24）；**（6）** 已知平面 $\alpha \cap 平面\beta = a, b \subset \alpha, b \cap a = A, c \subset \beta 且 c // a,$ 求证：b、c 是异面直线.

5、异面直线所成角 θ 的求法：（1）**范围**：$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$；（2）**求法**：计算异面直线所成角的关键是平移（中点平移，顶点平移以及补形法：把空间图形补成熟悉的或完整的几何体，如正方体、平行六面体、长方体等，以便易于发现两条异面直线间的关系）转化为相交两直线的夹角。**如（1）** 正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长相等，E 是 PC 的中点，那么异面直线 BE 与 PA 所成的角的余弦值等于____（答：$\frac{\sqrt{3}}{3}$）；**（2）** 在正方体 AC_1 中，M 是侧棱 DD_1 的中点，O 是底面 ABCD 的中心，P 是棱 A_1B_1 上的一点，则 OP 与 AM 所成的角的大小为____（答：90°）；**（3）** 已知异面直线 a、b 所成的角为 50°，P 为空间一点，则过 P 且与 a、b 所成的角都是 30°的直线有且仅有____条（答：2）；**（4）** 若异面直线 a, b 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，且直线 $c \perp a$，则异面直线 b, c 所成角的范围是____（答：$[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$）；



6、异面直线的距离的概念：和两条异面直线**都垂直相交**的直线叫异面直线的公垂线。两条异面直线的公垂线有且只有一条。而和两条异面直线都垂直的直线有无数条，因为空间中，垂直不一定相交。**如（1）** ABCD 是矩形，沿对角线 AC 把 ΔADC 折起，使 AD⊥BC，求证：BD 是异面直线 AD 与 BC 的公垂线；**（2）** 如图，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，EF 是异面直线 AC 与 A_1D 的公垂线，则由正方体的八个顶点所连接的直线中，与 EF 平行的直线有____条（答：1）；

7、两直线平行的判定：（1）**公理 4**：平行于同一直线的两直线互相平行；（2）**线面平行的性质**：如果一条直线和一个平面平行，那么经过这条直线的平面和这个平面相交的交线和这条直线平行；（3）**面面平行的性质**：如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行；（4）**线面垂直的性质**：如果两条直线都垂直于同一个平面，那么这两条直线平行。

8、两直线垂直的判定：（1）转化为证线面垂直；（2）三垂线定理及逆定理。

9、直线与平面的位置关系：（1）直线在平面内；（2）直线与平面相交。其中，如果一条直线和平面内**任何一条**直线都垂直，那么这条**直线和这个平面垂直**。**注意**：任一条直线并不等同于无数条直线；（3）直线与平面平行。其中直线与平面相交、直线与平面平行都叫作直线在平面外。**如（1）** 下列命题中，正确的是 A、若直线 a 平行于平面 α 内的一条直线 b，则 $a // \alpha$ B、若直线 a 垂直于平面 α 的斜线 b 在平面 α 内的射影，则 $a \perp$ b C、若直线 a 垂直于平面 α，直线 b 是平面 α 的斜线，则 a 与 b 是异面直线 D、若一个棱锥的所有侧棱与底面所成的角都相等，且所有侧面与底面所成的角也相等，则它一定是正棱锥（答：D）；**（2）** 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在侧面 BCC_1B_1 及其边界上运动，并且总保持 $AP \perp BD_1$，则动点 P 的轨迹是___________（答：线段 B_1C）。

10、直线与平面平行的判定和性质：（1）**判定**：①**判定定理**：如果平面内一条直线和这个平面平面平行，那么这条直线和这个平面平行；②**面面平行的性质**：若两个平面平行，则其中一个平面内的任何直线与另一个平面平行。（2）**性质**：如果一条直线和一个平面平行，那么经过这条直线的平面和这个平面相交的交线和这条直线平行。**在遇到线面平行时，常需作出过已知直线且与已知平面相交的辅助平面，以便运用线面平行的性质**。**如（1）** α、β 表示平面，a、b 表示直线，则 a∥α 的

一个充分不必要条件是　A、α⊥β，a⊥β　　　　　　B、α∩β＝b，且 a∥b　C、a∥b 且 b∥α　D、α∥β 且 a⊂β（答：*D*）；**（2）**正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，点 N 在 BD 上，点 M 在 B_1C 上，且 CM=DN，求证：MN∥面 AA_1B_1B。

11、直线和平面垂直的判定和性质：（1）**判定**：①如果一条直线和一个平面内的**两条相交**直线都垂直，那么这条直线和这个平面垂直。②两条平行线中有一条直线和一个平面垂直，那么另一条直线也和这个平面垂直。（2）**性质**：①如果一条直线和一个平面垂直，那么这条直线和这个平面内所有直线都垂直。②如果两条直线都垂直于同一个平面，那么这两条直线平行。**如（1）**如果命题"若 $x \perp y, y \parallel z$，则 $x \perp z$"不成立，那么字母 *x*、y、z 在空间所表示的几何图形一定是_____（答：*x*、y 是直线，z 是平面）；**（2）**已知 a，b，c 是直线，α、β 是平面，下列条件中能得出直线 a⊥平面 α 的是　A、a⊥b，a⊥c 其中 b⊂α，c⊂α　B、a⊥b，b∥α　C、α⊥β，a∥β　D、a∥b，b⊥α（答：*D*）；**（3）**AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上的一点，AD⊥面 ABC，AE⊥BD 于 E，AF⊥CD 于 F，求证：BD⊥平面 AEF。

12、三垂线定理及逆定理：（1）**定理**：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。（2）**逆定理**：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线，那么它也和这条斜线在平面内的射影垂直。**其作用是证两直线异面垂直和作二面角的平面角**。

13、直线和平面所成的角：（1）**定义**：平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫这条直线和这个平面所成的角。（2）**范围**：$[0^\circ,90^\circ]$；（3）**求法**：作出直线在平面上的射影；（4）斜线与平面所成的角的**特征**：斜线与平面中所有直线所成角中最小的角。**如（1）**在正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，已知 AB=1，D 在棱 BB_1 上，BD=1，则 AD 与平面 AA_1C_1C 所成的角为______（答：$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$）；**（2）**正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 AB、C_1D_1 的中点，则棱 A_1B_1 与截面 A_1ECF 所成的角的余弦值是______（答：$\frac{1}{3}$）；**（3）**PA,PB,PC 是从点 P 引出的三条射线，每两条的夹角都是 $60°$，则直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值为______（答：$\frac{\sqrt{3}}{3}$）；**（4）**若一平面与正方体的十二条棱所在直线都成相等的角 θ，则 sinθ 的值为______（答：$\frac{\sqrt{3}}{3}$）。

14、平面与平面的位置关系：（1）平行——没有公共点；（2）相交——有一条公共直线。

15、两个平面平行的判定和性质：（1）**判定**：一个如果平面内有**两条相交**直线和另一个平面平行，则这两个平面平行。（2）**性质**：如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平行。**如（1）**α,β 是两个不重合的平面，在下列条件中，不能判定平面 $\alpha // \beta$ 的条件是 A、m,n 是 α 内一个三角形的两条边，且 $m // \beta, n // \beta$　B、α 内有不共线的三点到 β 的距离都相等　C、α,β 都垂直于同一条直线 a　D、m,n 是两条异面直线，$m \subset \alpha, n \subset \beta$，且 $m // \beta, n // \alpha$（答：B）；**（2）**给出以下六个命题：①垂直于同一直线的两个平面平行；②平行于同一直线的两个平面平行；③平行于同一平面的两个平面平行；④与同一直线成等角的两个平面平行；⑤一个平面内的两

条相交直线于另一个平面内的两条相交直线平行，则这两个平面平行；⑥两个平面分别与第三个平面相交所得的两条交线平行，则这两个平面平行。其中正确的序号是___________（答：①③⑤）；**（3）**正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中 AB=a。①求证：平面 AD_1B_1∥平面 C_1DB；②求证：A_1C⊥平面 AD_1B_1；③求平面 AD_1B_1与平面 C_1DB 间的距离（答：$\frac{\sqrt{3}}{3}a$）；

16、二面角：（1）**平面角的三要素**：①顶点在棱上；②角的两边分别在两个半平面内；③角的两边与棱都垂直。（2）**作平面角的主要方法**：①定义法：直接在二面角的棱上取一点（特殊点），分别在两个半平面内作棱的垂线，得出平面角，用定义法时，要认真观察图形的特性；②三垂线法：过其中一个面内一点作另一个面的垂线，用三垂线定理或逆定理作出二面角的平面角；③垂面法：过一点作棱的垂面，则垂面与两个半平面的交线所成的角即为平面角；（3）**二面角的范围**：$[0,\pi]$；（4）**二面角的求法**：①转化为求平面角；②面积射影法：利用面积射影公式$S_{射}=S_{原}\cdot\cos\theta$，其中$\theta$为平面角的大小。对于一类没有给出棱的二面角，应先延伸两个半平面，使之相交出现棱，然后再选用上述方法（尤其可考虑面积射影法）。**如（1）**正方形 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，二面角 B-A_1C-A 的大小为________（答：60°）；**（2）**将∠A 为 60°的棱形 ABCD 沿对角线 BD 折叠，使 A、C 的距离等于 BD，则二面角 A-BD-C 的余弦值是______（答：$\frac{1}{3}$）；**（3）**正四棱柱 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$中对角线 BD_1＝8，BD_1与侧面 B_1BCC_1所成的为 30°，则二面角 C_1—BD_1—B_1的大小为______（答：$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$）；**（4）**从点 P 出发引三条射线 PA、PB、PC，每两条的夹角都是 60°，则二面角 B-PA-C 的余弦值是______（答：$\frac{1}{3}$）；**（5）**二面角 α-l-β 的平面角为 120°，A、B∈l，AC⊂α，BD⊂β，AC⊥l，BD⊥l，若 AB=AC=BD=1，则 CD 的长______（答：2）；**（6）**ABCD 为菱形，∠DAB＝60°，PD⊥面 ABCD，且 PD＝AD，则面 PAB 与面 PCD 所成的锐二面角的大小为______（答：$\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$）。

17、两个平面垂直的判定和性质：（1）**判定**：①判定定理：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直。②定义法：即证两个相交平面所成的二面角为直二面角；（2）**性质**：如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面。**如（1）**三个平面两两垂直，它们的交线交于一点 O，P 到三个面的距离分别为 3、4、5，则 OP 的长为_____（答：$5\sqrt{2}$）；**（2）**在四棱锥 P-ABCD 中，PA⊥底面 ABCD，底面各边都相等，M 是 PC 上的一动点，当点 M 满足___________时，平面 MBD⊥平面 PCD（答：$BM\perp PC$）；**（3）**过 S 引三条长度相等但不共面的线段 SA、SB、SC，且∠ASB=∠ASC=60°，∠BSC＝90°，求证：平面 ABC⊥平面 BSC。

特别指出：立体几何中平行、垂直关系的证明的基本思路是利用线面关系的转化，即：

$$\begin{array}{c} 线/\!/线\longleftrightarrow 线/\!/面\longleftrightarrow 面/\!/面 \\ \xrightarrow{判定} 线\perp线\longleftrightarrow 线\perp面\longleftrightarrow 面\perp面 \xleftarrow{性质} \\ 线/\!/线\longleftrightarrow 线\perp面\longleftrightarrow 面/\!/面 \end{array}$$

如（1）已知直线$l \perp$平面α，直线$m \subset$平面β，给出下列四个命题：①$\alpha // \beta \Rightarrow l \perp m$ ②$\alpha \perp \beta \Rightarrow l // m$；③$l // m \Rightarrow \alpha \perp \beta$；④$l \perp m \Rightarrow \alpha // \beta$。其中正确的命题是_____（答：①③）；**（2）**设a, b是两条不同直线，α, β是两个不同平面，给出下列四个命题：①若$a \perp b, a \perp \alpha, b \not\subset \alpha,$则$b // \alpha$；②若$a // \alpha, \alpha \perp \beta$，则$a \perp \beta$；③若$a \perp \beta, \alpha \perp \beta$，则$a // \alpha$或$a \subset \alpha$；④若$a \perp b, a \perp \alpha, b \perp \beta$则$\alpha \perp \beta$。其中正确的命题是_____（答：①③④）

18、空间距离的求法：（**特别强调**：立体几何中有关角和距离的计算，要遵循"一作，二证，三计算"的原则）

（1）异面直线的距离：①直接找公垂线段而求之；②转化为求直线到平面的距离，即过其中一条直线作平面和另一条直线平行。③转化为求平面到平面的距离，即过两直线分别作相互平行的两个平面。**如**已知正方体ABCD- $A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，则异面直线BD与B_1C的距离为_____（答：$\frac{\sqrt{3}}{3}a$）。

（2）点到直线的距离：一般用三垂线定理作出垂线再求解。**如（1）**等边三角形ABC的边长为$2\sqrt{2}$，AD是BC边上的高，将ΔABD沿AD折起，使之与ΔACD所在平面成$120°$的二面角，这时A点到BC的距离是_____（答：$\frac{\sqrt{26}}{2}$）；**（2）**点P是120°的二面角α-l-β内的一点，点P到α、β的距离分别是3、4，则P到l的距离为 _______（答：$\frac{2\sqrt{39}}{3}$）；**（3）**在正方体ABCD—$A_1B_1C_1D_1$的侧面AB_1内有一动点P到棱A_1B_1与棱BC的距离相等，则动点P所在曲线的形状为_______（答：抛物线弧）。

（3）点到平面的距离：①垂面法：借助于面面垂直的性质来作垂线，其中过已知点确定已知面的垂面是关键；②体积法：转化为求三棱锥的高；③等价转移法。**如（1）**长方体$ABCD - A_1B_1C_1D_1$的棱$AB = AD = 4cm, AA_1 = 2cm$，则点$A_1$到平面$AB_1D_1$ 的距离等于______（答：$\frac{2\sqrt{6}}{3}$）；**（2）**在棱长为a的正方体ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，M是AA_1的中点，则A_1到平面MBD的距离为______（答：**错误!**a）。

（4）直线与平面的距离：前提是直线与平面平行，利用直线上任意一点到平面的距离都相等，转化为求点到平面的距离。

（5）两平行平面之间的距离：转化为求点到平面的距离。