排列组合、二项式定理，概率统计总结

1.乘法原理和加法原理

（1）乘法原理：如果完成一件事需要 n 个步骤，第 1 步有 m_1 种不同的方法，第 2 步有 m_2 种不同的方法，$\cdots$，第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1m_2\cdots m_n$ 种不同的方法.

（2）加法原理：如果完成一件事有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法，$\cdots$，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

【注意】
应用两个计数原理的关键是分清“步”与“类”. 完成一件事需要若干步，而每一步缺一不可，则符合乘法原理，需要注意“步”与“步”之间的连续性；完成一件事有若干类方法，每类方法能独立完成这件事，则符合加法原理，需要注意“类”与“类”之间的

2.排列组合

（1）排列的概念：从 n 个不同的元素中取出 $m(m\le n)$ 个元素，按照一定的次序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列；从 n 个不同的元素中取出 $m(m\le n)$ 个元素的所有排列的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 P_n^m 表示.

（2）排列数公式：$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}(m,n\in N^*,m\le n)$，$P_n^n=n!$，规定：$0!=1$.

（3）组合的概念：从 n 个不同的元素中取出 $m(m\le n)$ 个元素组成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合；从 n 个不同的元素中取出 $m(m\le n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示.

（4）组合数公式：$C_n^m=\dfrac{P_n^m}{P_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

（5）组合的两个性质：①$C_n^m=C_n^{n-m}$；②$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$

【注意】

1. 直接法与间接法是解排列与组合的常用方法；重复和遗漏是分析排列与组合问题时易犯的错误!
2. 区分排列与组合问题的关键问题是搞清事件与元素的顺序有关还是无关；搞清解决问题的方法需分步还是分类，是统计排列与组合问题总数的依据；
3. 常用的解题策略有：先选后排、特殊元素优先安排、正难则反、等价转化法、捆绑

3.二项式定理

（1）二项式定理：$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n, n \in N^*$

【注意】

①项数：展开式中总共有 $(n+1)$ 项.

②顺序：注意正确选择 a，b，其顺序不能更改。$(a+b)^n$ 与 $(b+a)^n$ 是不同的.

③指数：a 的指数从 n 逐项减到 0，是降幂排列。b 的指数从 0 逐项减到 n，是升幂排列。各项的次数和等于 n.

④系数：注意正确区分二项式系数与项的系数，二项式系数依次是 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^r, \cdots, C_n^n$. 项的系数是 a 与 b 的系数（包括二项式系数）.

（2）通项：$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r, r = 0,1,2,\cdots,n.$

（3）二项式系数的性质：

①二项式系数的对称性：与首末两端“对距离”的两个二项式系数相等，即 $C_n^0 = C_n^n$，$\cdots C_n^k = C_n^{k-1}$

②二项式系数和：令 $a=b=1$,则二项式系数的和为 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^n = 2^n$，

变形式 $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^n = 2^n - 1$.

③奇数项的二项式系数和=偶数项的二项式系数和：

在二项式定理中，令 $a=1, b=-1$，则 $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$，

从而得到：$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \cdots + C_n^{2r} + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^{2r+1} + \cdots = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$

④奇数项的系数和与偶数项的系数和：

$$(a+x)^n=C_n^0a^nx^0+C_n^1a^{n-1}x+C_n^2a^{n-2}x^2+\cdots+C_n^na^0x^n=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

$$(x+a)^n=C_n^0a^0x^n+C_n^1ax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+\cdots+C_n^na^nx^0=a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$$

令$x=1$，则$a_0+a_1+a_2+a_3\cdots+a_n=(a+1)^n$ ---------①

令$x=-1$，则$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_n=(a-1)^n$ --------②

①＋②得，$a_0+a_2+a_4\cdots+a_n=\dfrac{(a+1)^n+(a-1)^n}{2}$（奇数项的系数和）

①－②得，$a_1+a_3+a_5\cdots+a_n=\dfrac{(a+1)^n-(a-1)^n}{2}$（偶数项的系数和）

⑤二项式系数的最大项：如果二项式的幂指数n是偶数时，则中间一项的二项式系数$C_n^{\frac{n}{2}}$取得最大值.

如果二项式的幂指数n是奇数时，则中间两项的二项式系数$C_n^{\frac{n-1}{2}}, C_n^{\frac{n+1}{2}}$同时取得最大值.

⑥系数的最大项：求$(a+bx)^n$展开式中最大的项，一般采用待定系数法．设展开式中各项系数分别为$A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$，设第$r+1$项系数最大，应有$\begin{cases}A_{r+1}\geq A_r\\A_{r+1}\geq A_{r+2}\end{cases}$，从而解出$r$来.

(4)常用的结论：

令$a=1, b=x$，$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n\ (n\in N^*)$

令$a=1, b=-x$，$(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-\cdots+C_n^rx^r+\cdots+(-1)^nC_n^nx^n\ (n\in N^*)$

【二项式定理主要应用】

求展开式中的特定项或特定项的系数；

求二项式系数和或各项的系数和，主要运用“赋值法”；

整除性的证明、求余数，主要运用“配凑法”、“消去法”；

近似值的计算；

不等式的证明.

1.随机事件的概率

①试验

观察一定条件下发生的现象，通常叫做试验．事件的条件实现一次，称为一次试验．一个试验如果可以在相同的条件下重复进行，而且每次试验的结果可以不同，有偶然性，我们就称它为随机试验，简称试验．

②事件

基本事件：一次试验连同其中可能出现的每一具体结果称为一个基本事件，通常试验的某一事件 A 由几个基本事件组成．

随机事件：在一定条件下可能发生也可能不发生的事件．

必然事件：在一定条件下必然要发生的事件，记作 Ω ．

不可能事件：在一定条件下不可能发生的事件，记作 $\varnothing$．

互斥事件：在同一次试验中，不可能同时发生的两个事件叫做互斥事件，也叫做互不相容事件．

对立事件：在一次试验中，如果两个互斥事件必然有一个发生，那么这两个事件叫做对立事件的一个事件．即设 E 和 F 是两个随机事件，满足（1） $E\bigcup F=\Omega$；（2） $E\bigcap F=\varnothing$.

在任何一次试验中，如果把事件 A 不出现记作事件 $\overline{A}$，那么事件 A 与事件 $\overline{A}$ 互为对立事件．

独立事件：如果事件 A 出现和事件 B 出现，互相之间没有影响，即其中一个事件的发生对另一事件发生的概率没有影响，那么就称事件 A 和事件 B 互相独立．

如果 A 与 B 是独立的，则 $\overline{A}$ 与 B、A 与 $\overline{B}$ 、 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是互相独立的．

2.古典概率模型

【古典概率模型】

（1）一次试验所有的基本事件只有有限个；

（2）每个基本事件出现的可能性相等，这样两个特点的概率模型叫做古典概

3.频率与概率

（1） 频率：在观察某一随机事件 A 时，共进行了 n 次试验，事件 A 发生了 m_A 次，则称 $\frac{m_A}{n}$ 为时间 A 发生的频率．

频率分布直方图：在直角坐标系中，横轴表示样本数据，纵轴表示频率与组距的比值，将频率分布表中各组频率的大小用相应矩形面积的大小来表示，由此画成的统计图叫做频率分布直方图．

频率分布直方图几个比较重要的数据求法：

① 平均数：频率分布直方图各个小矩形的面积*底边中点横坐标之和．

② 中位数：把频率分布直方图分成两个面积相等部分的平行于 y 轴的直线横坐标．

③ 众 数：频率分布直方图中最高矩形的底边中点的横坐标．

注：在图中，各个长方形的面积等于相应各组的频率．

（2） 概率：在大量重复进行同一个试验时，事件 A 发生的频率 $\frac{m_A}{n}$ 总接近某个常数，在它附近摆动，这时就把这个常数叫做事件 A 的概率，记作 $P(A)$．

在古典概型中，事件 A 出现的概率定义为 $P(A)=\frac{\text{事件}A\text{所包含的基本事件数}}{\text{试验中所有的基本事件数}}$．

用集合语言表示，设 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 表示所有的基本事件，基本事件的集合记为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，随机事件 A 看作是 Ω 的某个子集，则 $P(A)=\frac{A\text{所包含的}\omega\text{的个数}}{\Omega\text{中元素}\omega\text{的总个数}}$．

（3） 概率的性质

对任意随机事件 E，有 $0\le P(E)\le 1$．

若 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，则 $P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_n)=1$．

不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing)=0$．

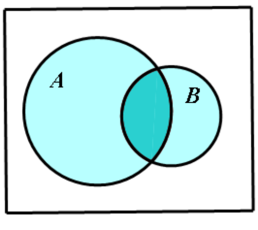
必然事件的概率为 1，即 $P(\Omega)=1$．

对立事件的概率：$P(A)+P(\bar{A})=1$，$P(A+\bar{A})=P(\Omega)=1$．

4.和事件

（1）和事件：设 A、B 为两个随机事件，把“事件 A 与事件 B 至少有一个出现”叫做事件 A 与事件 B 的和．

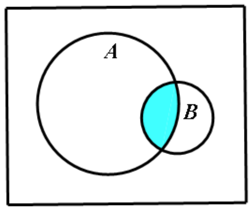
（2）和事件的概率（概率加法公式）：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$．



（3）互斥事件和的概率：如果事件 A、B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$．

5.积事件

（1）积事件：设 A、B 为两个随机事件，把"事件 A 与事件 B 同时出现"叫做事件 A 与事件 B 的积.



（2）独立事件积的概率：如果事件 A、B 互相独立，那么

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

总结：

关系 事件概率	含义	A、B 互斥	A、B 相互独立
$P(A+B)$	A、B 中至少有一个发生的概率	$P(A)+P(B)$	$1-P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$
$P(AB)$	A、B 都发生的概率	0	$P(A)\cdot P(B)$
$P(\bar{A}\bar{B})$	A、B 都不发生的概率	$1-[P(A)+P(B)]$	$P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$
$P(A\bar{B}+\bar{A}B)$	A、B 恰有一个发生的概率	$P(A)+P(B)$	$P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)$
$P(\bar{A}\bar{B}+A\bar{B}+\bar{A}B)$	A、B 至多有一个发生的概率	1	$1-P(A)\cdot P(B)$

6.总体和样本

（1）总体与个体：在统计问题中，我们把研究对象的全体叫做总体，总体中的每一个对象叫做个体.

（2）总体分布：整体取值的概率分布规律.

（3）总体均值：如果总体有 N 个个体，它们的值分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，那么

$\mu=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$ 叫做总体均值．我们用有限总体中所有个体的平均数来表示总体的平均状态.

（4）总体中位数：把总体中的各个个体 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，依由小到大的顺序排列，当 N

为奇数时，位于该数列正中位置的数叫做总体的中位数，记作 m．当 N 为偶数时，位于该数列正中位置的两个数的平均数叫做总体的中位数．总体中位数也可以用来表示总体的“平均”水平．

（5）众数：一组数据中出现次数最多的数据．如：$1,2,3,3,4$的众数是 3．

（6）总体方差：设总体有 N 个个体，它们分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，那么各个个体与总体平均数 μ 的差的平方分别是 $(x_1-\mu)^2,(x_2-\mu)^2,\cdots,(x_N-\mu)^2$，我们把它们的平均数叫做总体方差，记作 σ^2，即 $\sigma^2=\dfrac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_N-\mu)^2}{N}$，其平方根 σ 称为总体标准差．总体方差反映了各个个体

偏离平均数 μ 的程度． σ^2 越大，总体中各个个体之间的差别越大； σ^2 越小，总体中各个个体之间

的差别越小．

7.抽样技术

从总体中抽出一部分个体组成的集合叫做样本（也叫做子样），样本中所含个体的个数叫做样本容量，抽取样本的过程叫做抽样．

（1）随机抽样：如果在抽样过程中能使总体中的每一个个体都有同样的可能性被选入样本，那么这种抽样叫做随机抽样，所得的样本称为随机子样．在样本容量不大时，随机抽样可以用抽签方法；在样本容量较大时，可以使用随机数表．

（2）系统抽样：把总体中的每一个个体编上号，按某种相等的间隔抽取样本的方法，叫做系统抽样．如果总体中个体的总数为 N，样本的容量为 n，那么间隔 $k=\dfrac{N}{n}$．

（3）分层抽样：把总体分成若干个部分，然后在每个部分随机抽样的方法，叫做分层抽样．

【分层抽样的方法】

先将总体个数 N 按要求分成 k 层，每层的个体数分别记作 $N_1,N_2,\cdots,N_k$；

在每层中分别随机抽取 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 个个体组成容量为 n 的样本，使得

$$N=N_1+N_2+\cdots+N_k，\quad n=n_1+n_2+\cdots+n_k，\quad \frac{n_1}{N_1}=\frac{n_2}{N_2}=\cdots=\frac{n_k}{N_k}.$$

8.统计估计

统计估计可分为两类：一类是用样本中某事件出现的频率估计该事件出现的概率，简称概率估计（可能性估计）；另一类是用样本的算数平均数和样本标准差估计总体均值和总体标准差，简称参数估计.

总体均值的点估计值：如果样本为$x_1, x_2, \cdots, x_n$，样本的容量为 n，那么可以用样本的平均值$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$作为总体均值的点估计值.

总体标准差的点估计值：如果样本为$x_1, x_2, \cdots, x_n$，样本的容量为 n，那么可以用样本的标准差$s=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}}$作为总体标准差的点估计值.

σ是总体标准差，s 是样本标准差．当样本容量较大时，s 可用来估计总体标准差σ.