第 14 章：点、直线、平面之间的位置关系

1、公理 1：如果一条直线上两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内。

2、公理 2：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。

3、公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线。

4、公理 4：平行于同一条直线的两条直线平行.

5、定理：空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补。

6、线线位置关系：平行、相交、异面。

7、线面位置关系：直线在平面内、直线和平面平行、直线和平面相交。

8、面面位置关系：平行、相交。

9、**线面平行**：

⑴**判定**：平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行（简称**线线平行，则线面平行**）。

⑵**性质**：一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行（简称**线面平行，则线线平行**）。

10、**面面平行**：

⑴**判定**：一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行（简称**线面平行，则面面平行**）。

⑵**性质**：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行（简称**面面平行，则线线平行**）。

11、**线面垂直**：

⑴**定义**：如果一条直线垂直于一个平面内的任意一条直线，那么就说这条直线和这个平面垂直。

⑵**判定**：一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直（简称**线线垂直，则线面垂直**）。

⑶**性质**：垂直于同一个平面的两条直线平行。

12、**面面垂直**：

⑴**定义**：两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直。

⑵**判定：**一个平面经过另一个平面的一条垂线，则这两个平面垂直（**简称线面垂直，则面面垂直**）。

⑶**性质：**两个平面互相垂直，则一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面。（**简称面面垂直，则线面垂直**）。

空间角问题

（1）直线与直线所成的角

①两平行直线所成的角：规定为0°。

②两条相交直线所成的角：两条直线相交其中不大于直角的角，叫这两条直线所成的角。

③两条异面直线所成的角：过空间任意一点 O，分别作与两条异面直线 a，b 平行的直线 a'，b'，形成两条相交直线，这两条相交直线所成的不大于直角的角叫做两条异面直线所成的角。

（2）直线和平面所成的角

①平面的平行线与平面所成的角：规定为0°。②平面的垂线与平面所成的角：规定为90°。

③平面的斜线与平面所成的角：平面的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角。

求斜线与平面所成角的思路类似于求异面直线所成角："一作，二证，三计算"。在"作角"时依定义关键作射影，由射影定义知关键在于斜线上一点到面的垂线，在解题时，注意挖掘题设中两个主要信息：（1）斜线上一点到面的垂线；（2）过斜线上的一点或过斜线的平面与已知面垂直，由面面垂直性质易得垂线。

（3）二面角和二面角的平面角

①二面角的定义：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角，这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面。

②二面角的平面角：以二面角的棱上任意一点为顶点，在两个**面内**分别作**垂直于**棱的两条射线，这两条射线所成的角叫二面角的平面角。

③直二面角：平面角是直角的二面角叫直二面角。

两相交平面如果所组成的二面角是直二面角，那么这两个平面垂直；反过来，如果两个平面垂直，那么所成的二面角为直二面角

④求二面角的方法

定义法：在棱上选择有关点，过这个点分别在两个面内作垂直于棱的射线得到平面角

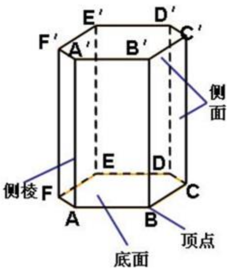
垂面法：已知二面角内一点到两个面的垂线时，过两垂线作平面与两个面的交线所成的角为二面角的平面角

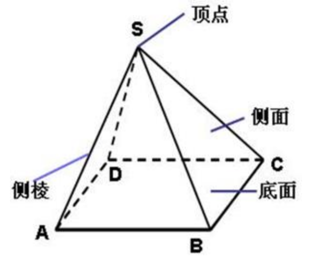
三垂线定理法

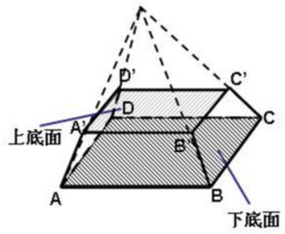
第 15 章 简单几何体

⑴常见的多面体有：棱柱、棱锥、棱台；常见的旋转体有：圆柱、圆锥、圆台、球。

⑵柱、锥、台、球的结构特征







棱柱：有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫做棱柱。

分类：以底面多边形的边数作为分类的标准分为三棱柱、四棱柱、五棱柱等。

表示：用各顶点字母，如五棱柱 $ABCDE-A'B'C'D'E'$ 或用对角线的端点字母，如五棱柱 AD'

几何特征：两底面是对应边平行的全等多边形；侧面、对角面都是平行四边形；侧棱平行且相等；平行于底面的截面是与底面全等的多边形。

棱锥：有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体

分类：以底面多边形的边数作为分类的标准分为三棱锥、四棱锥、五棱锥等

表示：用各顶点字母，如五棱锥 $P-A'B'C'D'E'$

几何特征：侧面、对角面都是三角形；平行于底面的截面与底面相似，其相似比等于顶点到截面距离与高的比的平方。

圆柱: 以矩形的一边所在的直线为轴旋转,其余三边旋转所成的曲面所围成的几何体

几何特征：①底面是全等的圆；②母线与轴平行；③轴与底面圆的半径垂直；④侧面展开图是一个矩形。

圆锥：以直角三角形的一条直角边为旋转轴,旋转一周所成的曲面所围成的几何体

几何特征：①底面是一个圆；②母线交于圆锥的顶点；③侧面展开图是一个扇形。

球体：以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的几何体

几何特征：①球的截面是圆；②球面上任意一点到球心的距离等于半径。

3、空间几何体的直观图——斜二测画法

斜二测画法特点：①原来与 x 轴平行的线段仍然与 x 平行且长度不变；

②原来与 y 轴平行的线段仍然与 y 平行，长度为原来的一半。

4、柱体、锥体、台体的表面积与体积

（1）几何体的表面积为几何体各个面的面积的和。

（2）特殊几何体表面积公式（c 为底面周长，h 为高，h' 为斜高，l 为母线）

$$S_{直棱柱侧面积}=ch$$

$$S_{圆柱侧}=2\pi rh$$

$$S_{正棱锥侧面积}=\frac{1}{2}ch'$$

$$S_{圆锥侧面积}=\pi rl$$

$$S_{圆柱表}=2\pi r(r+l)$$

$$S_{圆锥表}=\pi r(r+l)$$

（3）柱体、锥体的体积公式

$$V_{柱}=Sh$$

$$V_{圆柱}=Sh=\pi r^2h$$

$$V_{锥}=\frac{1}{3}Sh$$

$$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

（4）球体的表面积和体积公式：$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$；　$S_{球面}=4\pi R^2$

空间向量可解决的立体几何问题

假设用$\vec{a},\vec{b}$表示直线a,b的方向向量，用$\vec{m},\vec{n}$表示平面α,β的法向量

1、判定类

（1）线面平行：$a /\!/ b \Leftrightarrow \vec{a} /\!/ \vec{b}$

（2）线面垂直：$a \perp b \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

（3）面面平行：$\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \vec{m} /\!/ \vec{n}$

（4）面面垂直：$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \vec{m} \perp \vec{n}$

2、计算类：

（1）两直线所成角：$\cos\theta = \left|\cos\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle\right| = \left|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\right|$

（2）线面角：$\sin\theta = \left|\cos\left\langle \vec{a},\vec{m}\right\rangle\right| = \left|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{m}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{m}\right|}\right|$

（3）二面角：$\cos\theta = \cos\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle = \dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}$或$\cos\theta = -\cos\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle = -\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}$（视平面角与法向量夹角关系而定）

（4）点到平面距离：设A为平面α外一点，P为平面α上任意一点，则A到平面α的距离为$d_{A-\alpha} = \left|\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}\right|$，即$\overrightarrow{AP}$在法向量$\vec{n}$上投影的绝对值。