FMP Binomial Negativa

Uma V.A. $\boldsymbol{X}$ que representa o número de tentativas até ocorrerem $\boldsymbol{r = 1,2,\ldots}$ sucessos, num conjunto de ensaios de Beroulli independentes, é chamada de V.A. binomial negativa, sendo que é uma generalização da distribuição geométrica e tem uma FMP binomial negativa onde:

$$p_X(x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^r \qquad x = r, r+1, r+2\ldots$$

A probabilidade de sucesso em cada tentativa, $\boldsymbol{0 < p < 1}$, é constante

Nota: Quando $\boldsymbol{r = 1}$, obtém-se uma FMP Geométrica

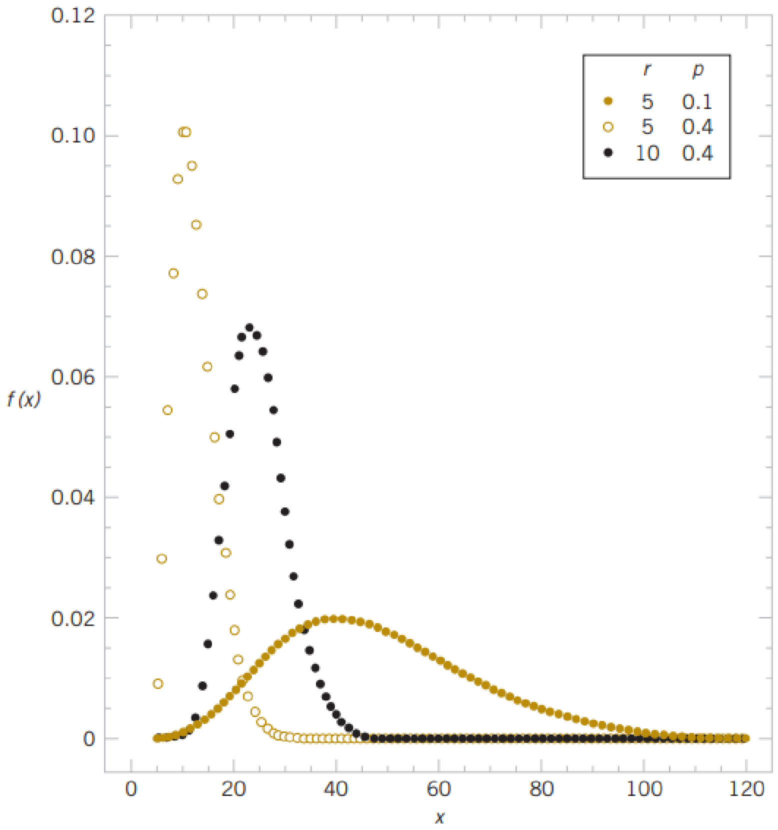
FMP Binomial Negativa

Sendo X uma V.A. binomial negativa com os parâmetros r e p, a média de X é:

$$m_x = \mathrm{E}[X] = \frac{r}{p}$$

A variância de X é:

$$\sigma^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$$



Exemplo 1/2

1. A probabilidade de uma câmara passar num teste é de 0.8, e as câmaras funcionam de forma independente. Seja X o número de câmaras testadas até se obterem três falhas, a qual segue uma distribuição binomial negativa. Qual é a probabilidade da terceira falha ser obtida em cinco ou menos ensaios?

Exemplo 2/2

1. A probabilidade de uma câmara passar num teste é de 0.8, e as câmaras funcionam de forma independente. Seja X o número de câmaras testadas até se obterem três falhas, a qual segue uma distribuição binomial negativa. Qual é a probabilidade da terceira falha ser obtida em cinco ou menos ensaios?

Ou seja, nós queremos $P(X \leq 5)$, onde X segue uma distribuição binomial negativa (número de câmaras testadas até se obterem três falhas.), onde $p = 1 - 0.8 = 0.2$ e $r = 3$

Portanto

$$P(X \leq 5) = \sum_{i=3}^{5} p_X(i) = \sum_{i=3}^{5} \binom{i-1}{3-1} (1-0.2)^{i-3} 0.2^3 = 0.056$$

$$i = 3, já\ que\ x = r, r+1, \ldots$$

FMP Hipergeométrica

Uma V.A. $\boldsymbol{X}$ que representa o número de objetos com sucesso, numa amostra de $\boldsymbol{N}$ objetos, dos quais $\boldsymbol{K}$ objetos são classificados como sucessos, $\boldsymbol{N-K}$ como falhas e $\boldsymbol{n}$ é um conjunto de objetos selecionados aleatoriamente de $\boldsymbol{N}$, onde $K \leq N$ e $n \leq N$.

A V.A. $\boldsymbol{X}$ é chamada de V.A. hipergeométrica e tem uma FMP hipergeométrica onde:

$$p_X(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = \max\{0, n+K-N\}\; to \; \min\{K, n\}$$

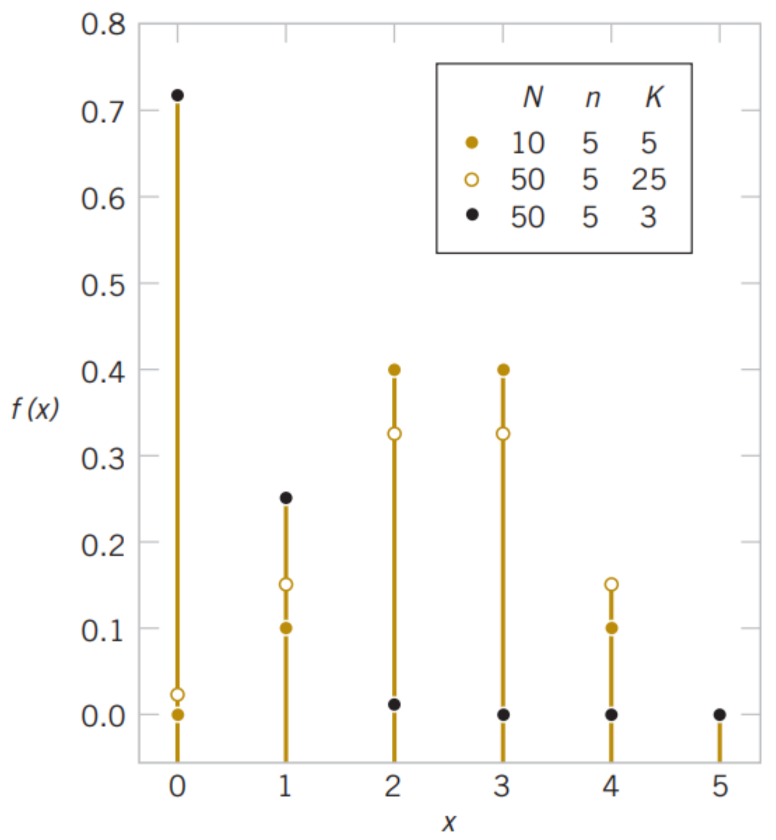
FMP Hipergeométrica

Sendo X uma V.A. hipergeométrica com os parâmetros $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{n}$, a média de X é:

$$m_x = \mathrm{E}[X] = np \qquad , \; p = \frac{K}{N}$$

A variância de X é:

$$\sigma^2 = np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \qquad , \; p = \frac{K}{N}$$



Exemplo 1/4

1. Um lote de peças contém 100 de um fornecedor local de placas de circuito e 200 de um fornecedor no estado vizinho. Se quatro peças forem selecionadas aleatoriamente e sem substituição, qual é a probabilidade de serem todas do fornecedor local? Seja X igual ao número de peças na amostra do fornecedor local e X tem uma distribuição hipergeométrica ($P(X = 4)$).
2. Qual é a probabilidade de duas ou mais peças serem do mesmo fornecedor local ($P(X \geq 2)$)?
3. Qual é a probabilidade de pelo menos uma das peças ser do fornecedor local ($P(X \geq 1)$)?

Exemplo 2/4

1. Um lote de peças contém 100 de um fornecedor local de placas de circuito e 200 de um fornecedor no estado vizinho. Se quatro peças forem selecionadas aleatoriamente e sem substituição, qual é a probabilidade de serem todas do fornecedor local? Considera X igual ao número de peças na amostra do fornecedor local e X tem uma distribuição hipergeométrica.

$$N = 200 + 100 = 300; K = 100; n = 4$$

$$P(X = 4) = p_X(4) = \frac{\binom{100}{4}\binom{300-100}{4-4}}{\binom{300}{4}} = 0.0119$$

Exemplo 3/4

2. Qual é a probabilidade de duas ou mais peças serem do mesmo fornecedor local ($P(X \geq 2)$)?

$$N = 200 + 100 = 300; K = 100; n = 4$$

$$P(X \geq 2) = p_X(2) + p_X(3) + p_X(4) = \frac{\binom{100}{2}\binom{200}{4-2}}{\binom{300}{4}} + \frac{\binom{100}{3}\binom{200}{4-3}}{\binom{300}{4}} + \frac{\binom{100}{4}\binom{200}{4-4}}{\binom{300}{4}}$$

$$= 0.298 + 0.098 + 0.0119 = 0.407$$

Exemplo 4/4

3. Qual é a probabilidade de pelo menos uma das peças ser do fornecedor local ($P(X \geq 1)$)?

$$N = 300; K = 100; n = 4$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p_X(0) = \frac{\binom{100}{0}\binom{200}{4-0}}{\binom{300}{4}} = 0.804$$

Exercícios

Seja X uma V.A. discreta com a seguinte FMP:

$$p_X(x) = 0.3\delta(x-1) + 0.2\delta(x-2) + 0.1\delta(x-3) + 0.2\delta(x-4) + 0.2\delta(x-5)$$

a) Verifique se $p_X(x)$ é válida (soma das probabilidades é igual a 1)

b) Represente esta FMP (fazer o gráfico com os delta dirac)

c) Represente $F(x)$

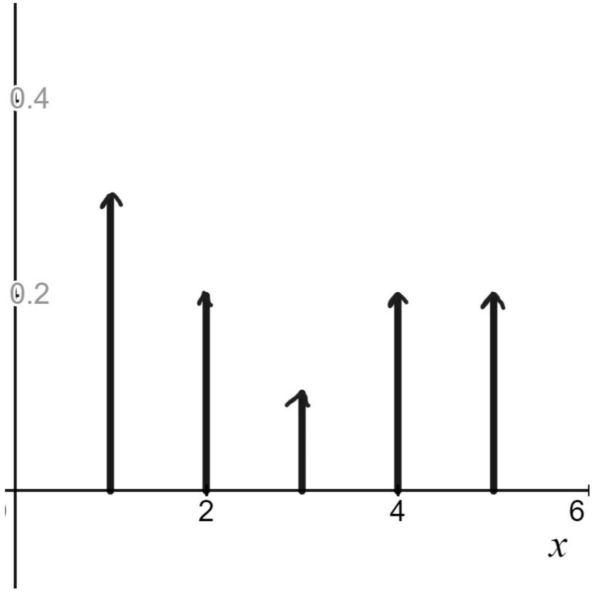
Soluções

Seja X uma V.A. discreta com a seguinte FMP:

$$p_X(x) = 0.3\delta(x-1) + 0.2\delta(x-2) + 0.1\delta(x-3) + 0.2\delta(x-4) + 0.2\delta(x-5)$$

a) $\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i) = 0.3 + 0.2 + 0.1 + 0.2 + 0.2 = 1$ logo é válida

b)



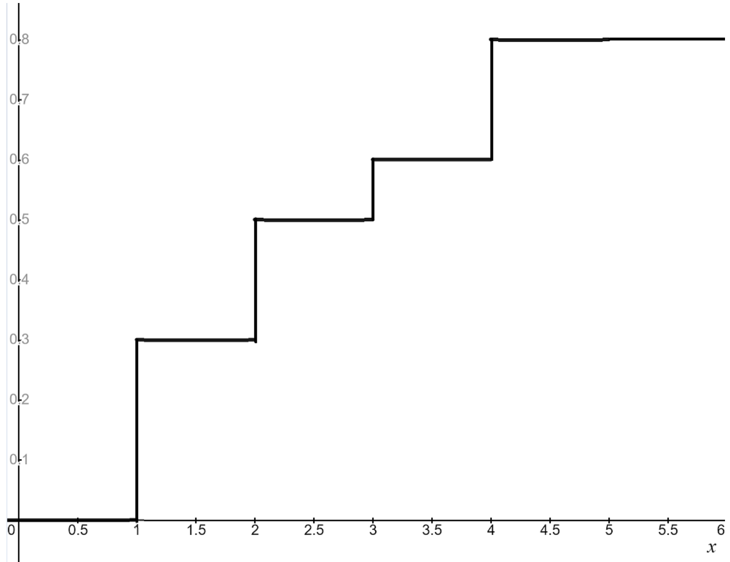
c) $F(1) = P(X \leq 1) = 0,3$

F(2) = P(X ≤ 2) = 0,3 + 0,2 = 0,5

F(3) = P(X ≤ 3) = 0,3 + 0,2 + 0,1 = 0,6

F(4) = P(X ≤ 4) = 0,3 + 0,2 + 0,1 + 0,2 = 0,8

F(5) = P(X ≤ 5) = 0,3 + 0,2 + 0,1 + 0,2 + 0,2 = 1



Exercícios

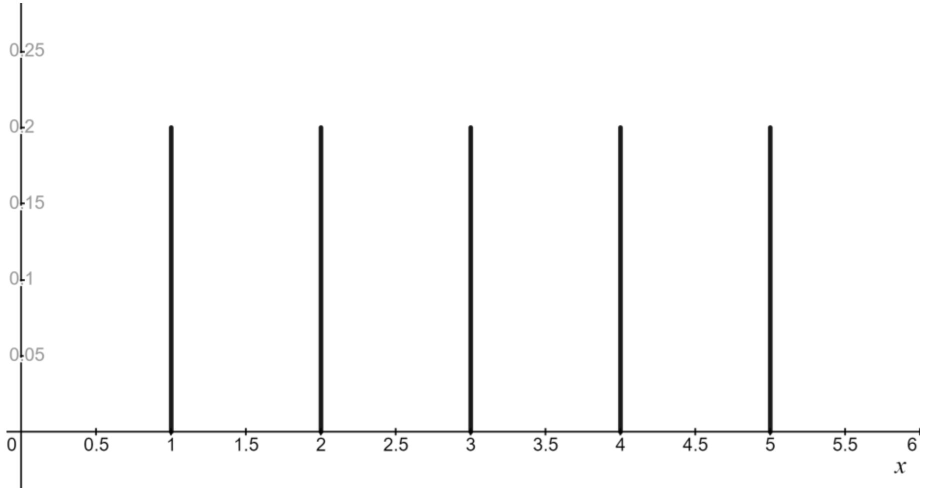
1. Dada uma V.A. X com distribuição uniforme discreta em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   a) Calcule $P(X = 3)$
   b) Calcule $P(X \geq 4)$
   c) Represente a FMP de X
2. Uma V.A. X segue uma distribuição binomial com $n = 8$ e $p = 0.3$
   a) Calcule $P(X = 3)$
   b) Calcule $P(X \geq 6)$
3. Se uma V.A. X segue uma distribuição geométrica com $p = 0.2$,
   a) Calcule $P(X = 2)$
   b) Calcule a média de X.
   c) Calcule a variância da distribuição.
   d) Calcule $F(3)$.
4. Se uma V.A. X segue uma distribuição de Poisson com $\lambda = 3$
   a) Calcule a média da distribuição.
   b) Calcule a variância da distribuição.
   c) Calcule $P(X = 2)$

Soluções

1. a) $P(X = 3) = \frac{1}{5}$

b) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

c)



2. a) $p_X(3) = \binom{8}{3} 0.3^3 (1 - 0.3)^{8-3} = 0.278$

b) $P(X \geq 6) = p_X(6) + p_X(7) + p_X(8) = 0.011$

3. a) $P(X = 2) = (1 - 0.2)^{2-1} \times 0.2 = (0,8)^1 \times 0,2 = 0.16$

b) $m_X = \frac{1}{p} = 5$

c) $\sigma^2 = \frac{(1 - 0,2)}{(0,2^2)} = 20$

d) $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.2 + 0.16 + 0.128 = 0.488$

4. a) $m_X = 3$

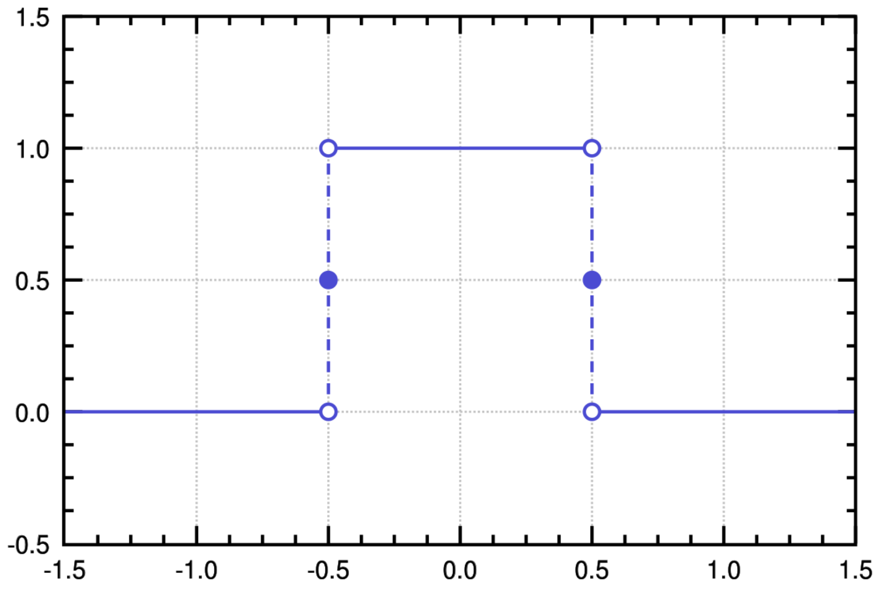
b) $\sigma^2 = 3$

c) $\mathrm{P(X = 2)} = p_X(2) = \frac{e^{-3}(3)^2}{2!} = 0.224$

Função retângulo

Funções retangulares são muito usadas para representar FDP. Estas podem ser definidas de seguinte modo:

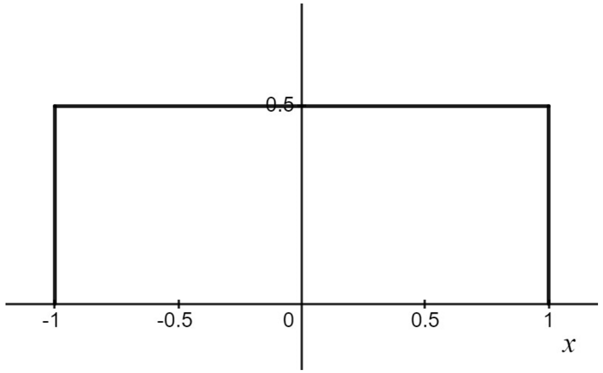
$$rect\left(\frac{t}{a}\right) = \begin{cases} 0 \; se \; |t| > \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{1}{2} \; se \; |t| = \dfrac{a}{2} \\ 1 \; se \; |t| < \dfrac{a}{2} \end{cases}$$



$a = 1$

Função retângulo

Tendo a seguinte representação de uma FDP:



Usando a função retângulo podemos obter a seguinte FDP:

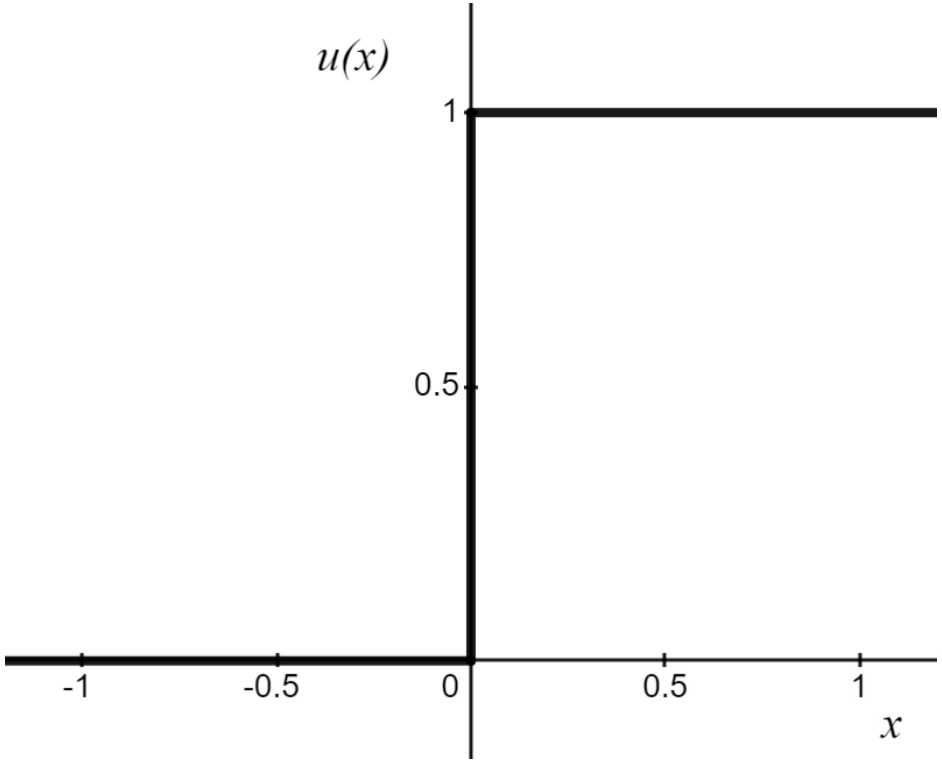
$$p_x(x) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{x}{2}\right)$$

Função degrau

Uma alternativa da função retângulo é a função degrau, que é mais adequada para representar as FDP e de mais fácil compreensão onde:

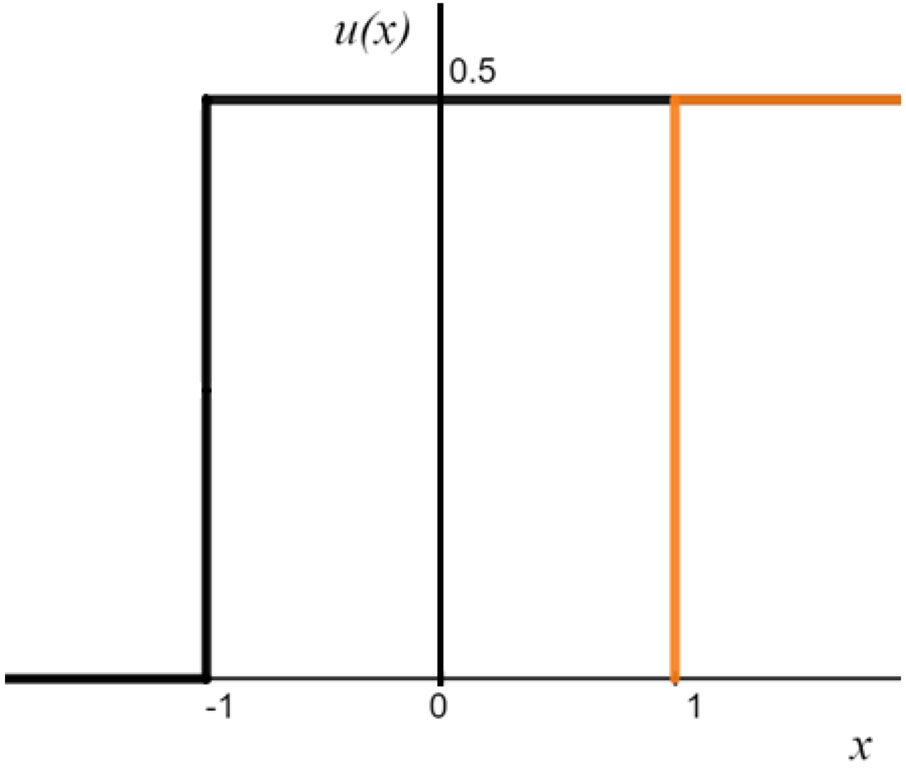
$$u(x-a) = \begin{cases} 0 \; se \; x < a \\ 1 \; se \; x \geq a \end{cases}$$

Se então tivermos $u(x)$, esta pode ser representada da seguinte forma:

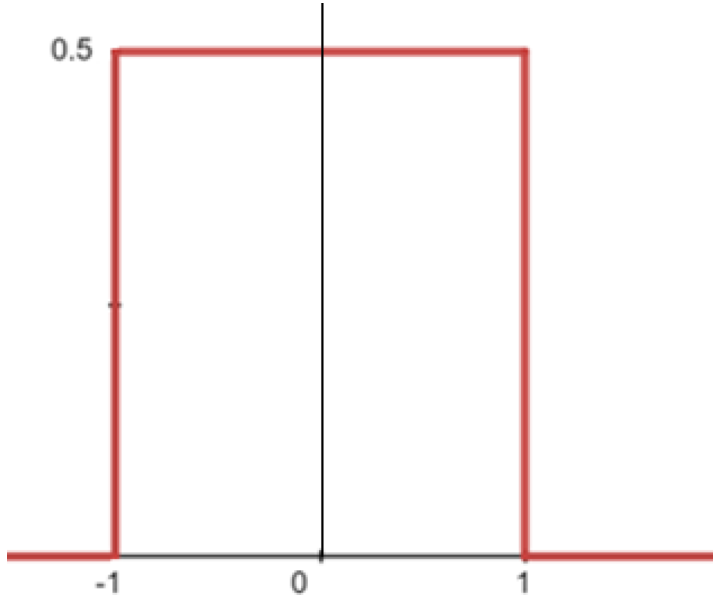


Função degrau

Portanto, agora com a função degrau caso queiramos representar a FDP $p_x(x) = \frac{1}{2} rect\left(\frac{x}{2}\right)$, podemos:



$$p_X(x) = \frac{1}{2}[u(x+1) - u(x-1)]$$



Variáveis aleatórias contínuas

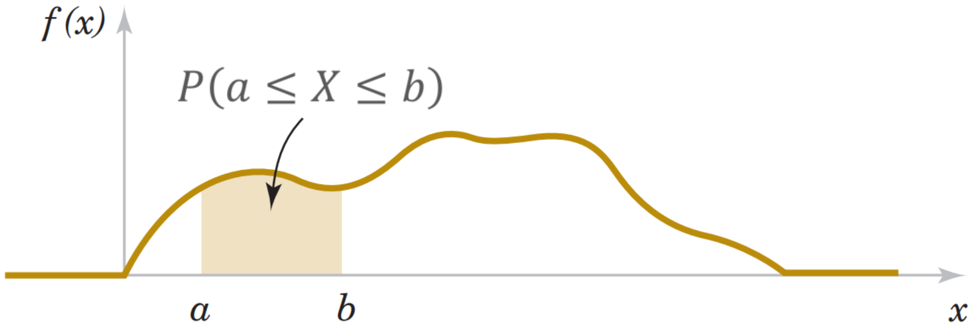
Variáveis aleatórias contínuas (V.A. contínuas) são aquelas que podem assumir um número infinito não contável de valores dentro de um intervalo específico. Estes valores são geralmente números reais e resultam de eventos que podem ser medidos.

Exemplos:

A altura de uma pessoa, o tempo que leva para chegar ao trabalho, a quantidade de chuva que cai num dia, o peso de uma maçã.

Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade (FDP, ou distribuição) $f(x)$, permite atribuir uma probabilidade a cada valor possível dentro de um intervalo contínuo de uma V.A. contínua $X \in [a, b]$, onde:



(1) $p_X(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = 1$

(3) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p_X(x)dx = área\ abaixo\ de\ p_X(x), com\ x = [a, b]$

(4) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

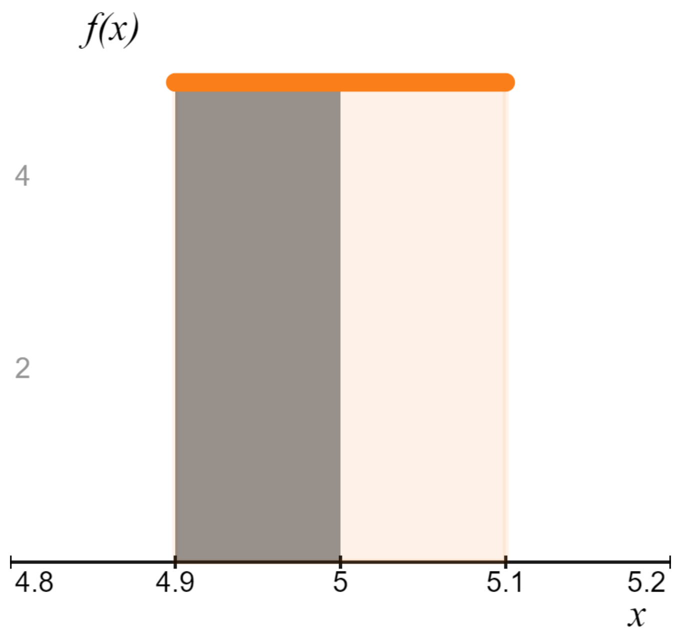
Exemplo 1/3

Com base na seguinte FDP $p_X(x) = 5[u(x-4.9) - u(x-5.1)]$

a) Calcula $P(4.9 \leq X \leq 5)$.

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = \int_{4.9}^{5} p_X(x)dx = \int_{4.9}^{5} 5\ dx = [5x]_{4.9}^{5}$$

$$= (5 \times 5) - (5 \times 4.9) = 0.5$$



Exemplo 2/3

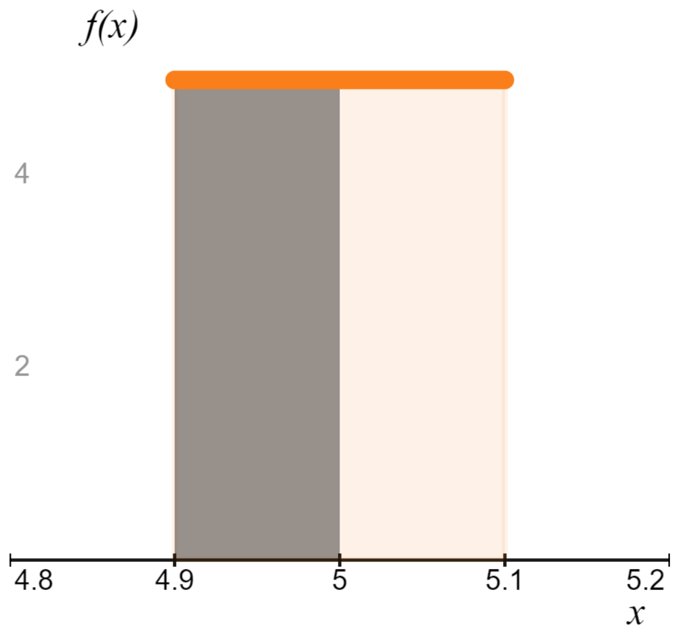
Com base na seguinte FDP $p_X(x) = 5[u(x-4.9) - u(x-5.1)]$

b) Verifica se a FDP, $p_X(x)$ é válida?

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{4.9}^{5.1} p_X(x)dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{4.9}^{5.1} 5\,dx = 1 \Leftrightarrow [5x]_{4.9}^{5.1} = 1$$

$$\Leftrightarrow (5 \times 5.1) - (5 \times 4.9) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$$



Exemplo 3/3

Com base na seguinte FDP $p_X(x) = 5[u(x-4.9) - u(x-5.1)]$

c) Calcula $P(4.95 < X < 5.1)$.

$$(3)\ P(4.95 < X < 5.1) = \int_{4.95}^{5.1} p_X(x)dx = \int_{4.95}^{5.1} 5\, dx$$

$$= [5x]_{4.95}^{5.1} = (5 \times 5.1) - (5 \times 4.95)$$

$$= 0.75$$