**Universidad de El Salvador**

**Facultad de Ciencias Naturales y Matemática**

**Maestría en Estadística y Ciencia de Datos**

**Inferencia Estadística y Regresión**

**Desarrollo de la tarea 2**

**Presentado por:** Salvador Enrique Rodríguez Hernández (rh06006)

**Fecha de entrega:** 04 de diciembre de 2024

1. *Estimar los parámetros ) y de un modelo de regresión lineal simple por el método de máxima verosimilitud y comparar los resultados obtenidos con el método de mínimos cuadrados.*

**Solución**

Estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

El método de mínimos cuadrados ordinarios (OLS) minimiza la suma de los errores cuadráticos:

Para encontrar las estimaciones y , se deriva respecto a y y se igualan a cero:

……. (1)

……. (2)

Resolviendo la ecuación 1:

Dividiendo entre :

Así:

Despejando la ecuación (2) se tiene que:

Usando :

Despejando :

Multiplicando le numerador y denominador por :

Expresando el numerador como la covarianza y el denominador como la varianza se tiene:

Finalmente, se sustituye en .

Estimación por Máxima Verosimilitud (MLE)

Dado el modelo de regresión:

La función de verosimilitud es:

Tomando el logaritmo natural:

Para maximizar , se deriva respecto a , y , y se iguala a cero:

Respecto a y :

Estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones normales de OLS. Por lo tanto:

Respecto a :

Resolviendo para :

Comparación entre OLS y MLE

* Ambos métodos proporcionan las mismas estimaciones para y bajo la suposición de normalidad en los residuos.
* MLE además estima , la varianza de los residuos, lo que no es calculado explícitamente por OLS.

1. *En la regresión lineal múltiple, la idea es minimizar la suma de los cuadrados de los residuos definida como:*

*Donde:*

*Vector de respuestas (variable dependiente).*

*: Matriz de diseño de las variables independientes.*

*: Vector de parámetros del modelo (coeficientes).*

*Vector de residuos.*

*Al desarrollar :*

*Usamos las propiedades del álgebra matricial para expandir el producto:*

*Demostrar que son escalarmente equivalentes porque es un escalar , y la transposición no afecta el valor escalar y, por lo tanto, podemos combinarlos:*

**Solución**

Para justificar que y son escalares y equivalentes, se comienza analizando sus dimensiones y propiedades fundamentales.

Dado que:

* es un vector columna de dimensión ,
* es una matriz de diseño de dimensión,
* es un vector columna de dimensión ,

se tiene que siendo la transpuesta de , tiene dimensión . Al multiplicar por (la izquierda) , el resultado es un vector columna de dimensión . Posteriormente, al multiplicar este resultado por , que tiene dimensión , se obtiene un escalar de dimensión . Por lo tanto, el término es un escalar.

De manera similar, en el término , el vector , siendo la transpuesta de , tiene dimensión . Al multiplicarlo (por la izquierda) por de dimensión , se genera un vector fila de dimensión . Este vector fila, al multiplicarse por , de dimensión , produce nuevamente un escalar de dimensión . Por consiguiente,  también es un escalar.

Dado que es un escalar, su traspuesto es igual a sí mismo (el escalar es una matriz de ), es decir, , lo que implica que:

En consecuencia, se tiene que:

Es decir, y son escalares equivalentes porque ambos representan el mismo valor. Esta equivalencia permite combinarlos directamente en la expansión cuadrática de .

Sustituyendo la equivalencia escalar en la expansión original, se tiene que: