**Universidad de El Salvador**

**Facultad de Ciencias Naturales y Matemática**

**Maestría en Estadística y Ciencia de Datos**

**Inferencia Estadística y Regresión**

**Desarrollo de la tarea 2**

**Presentado por:** Salvador Enrique Rodríguez Hernández (rh06006)

**Fecha de entrega:** 04 de diciembre de 2024

1. *Estimar los parámetros ) y de un modelo de regresión lineal simple por el método de máxima verosimilitud y comparar los resultados obtenidos con el método de mínimos cuadrados.*

**Solución**

Estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

El método de mínimos cuadrados ordinarios (OLS) minimiza la suma de los errores cuadráticos:

Para encontrar las estimaciones y , se deriva respecto a y y se igualan a cero:

……. (1)

……. (2)

Resolviendo la ecuación 1:

Dividiendo entre :

Así:

Despejando la ecuación (2) se tiene que:

Usando :

Despejando :

Multiplicando le numerador y denominador por :

Expresando el numerador como la covarianza y el denominador como la varianza se tiene:

Finalmente, se sustituye en .

Estimación por Máxima Verosimilitud (MLE)

Dado el modelo de regresión:

La función de verosimilitud es:

Tomando el logaritmo natural:

Para maximizar , se deriva respecto a , y , y se iguala a cero:

Respecto a y :

Estas ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones normales de OLS. Por lo tanto:

Respecto a :

Resolviendo para :

Comparación entre OLS y MLE

* Ambos métodos proporcionan las mismas estimaciones para y bajo la suposición de normalidad en los residuos.
* MLE además estima , la varianza de los residuos, lo que no es calculado explícitamente por OLS.

1. *En la regresión lineal múltiple, la idea es minimizar la suma de los cuadrados de los residuos definida como:*

*Donde:*

*Vector de respuestas (variable dependiente).*

*: Matriz de diseño de las variables independientes.*

*: Vector de parámetros del modelo (coeficientes).*

*Vector de residuos.*

*Al desarrollar :*

*Usamos las propiedades del álgebra matricial para expandir el producto:*

*Demostrar que son escalarmente equivalentes porque es un escalar , y la transposición no afecta el valor escalar y, por lo tanto, podemos combinarlos:*

**Solución**

En la regresión lineal múltiple, la suma de los cuadrados de los residuos se define como:

Donde:

: Vector de respuestas (variable dependiente).

: Matriz de diseño de las variables independientes.

: Vector de parámetros del modelo (coeficientes).

: Vector de residuos.

Expandiendo el producto matricial:

Equivalencia de los términos y

Para demostrar que los términos y son escalarmente equivalentes, se debe recordar que:

es un escalar , ya que el producto resultante de matrices cumple con las dimensiones adecuadas.

también es un escalar por las mismas razones.

Dado que la transposición de un escalar no afecta su valor, se cumple que:

Y debido a que la transposición de un escalar no cambia su valor, se puede escribir como:

Por lo tanto, ambos términos son equivalentes y se pueden combinar.

Sustituyendo la equivalencia escalar en la expansión original:

Esta es la expresión final para la suma de los cuadrados de los residuos en términos del vector de parámetros , el vector de respuestas , y la matriz de diseño .

Conclusión

Por lo tanto, se ha demostrado que los términos y son escalarmente equivalentes y pueden combinarse en la expansión de . Esto lleva a la forma compacta y comúnmente utilizada: