

Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

Tema 9: Trifásica

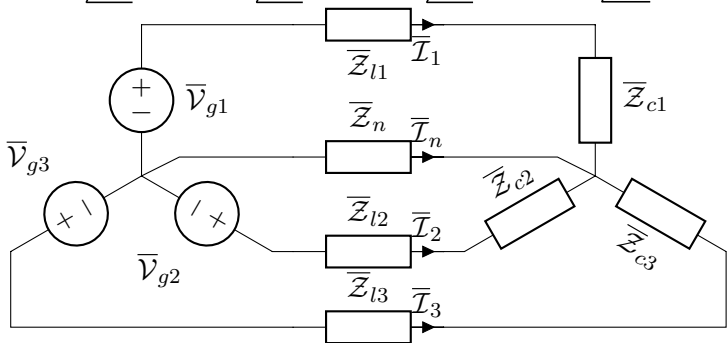
- Alternador trifásico
- Carga trifásica
- Línea trifásica
- Sistemas trifásicos equilibrados
- Circuitos monofásicos equivalentes

Ejercicio 9-1

Resuelve el circuito usando el método de mallas y calcula

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) I_1 [A] | c) I_2 [A] | e) I_3 [A] | g) I_n [A] |
| b) ϕ_1 [°] | d) ϕ_2 [°] | f) ϕ_3 [°] | h) ϕ_n [°] |

donde $\bar{I}_1 = I_1 / \underline{\phi_1^\circ}$ $\bar{I}_2 = I_2 / \underline{\phi_2^\circ}$ $\bar{I}_3 = I_3 / \underline{\phi_3^\circ}$ $\bar{I}_n = I_n / \underline{\phi_n^\circ}$



$$\bar{V}_{g1} = 200 + 10 \cdot \alpha / 0^\circ \text{ [V]}, \bar{V}_{g2} = 200 + 10 \cdot \alpha / 120^\circ \text{ [V]}, \bar{V}_{g3} = 200 + 10 \cdot \alpha / 240^\circ \text{ [V]}$$

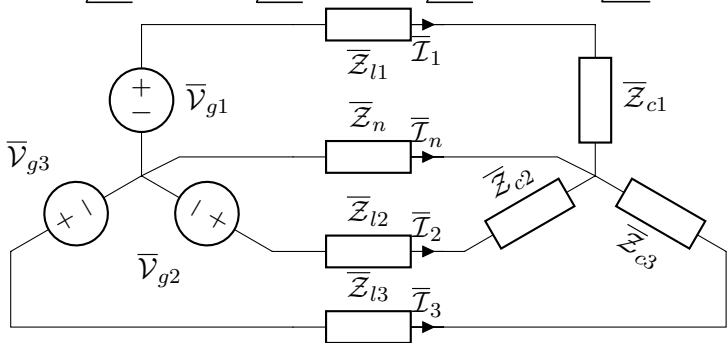
$$\bar{Z}_{l1} = \bar{Z}_{l2} = \bar{Z}_{l3} = \beta + j\gamma \text{ [\Omega]}, \bar{Z}_{c1} = \bar{Z}_{c2} = \bar{Z}_{c3} = \delta + j\epsilon \text{ [\Omega]}, \bar{Z}_n = \eta + j\theta \text{ [\Omega]}$$

Ejercicio 9-2

Resuelve el circuito usando el método de mallas y calcula

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) I_1 [A] | c) I_2 [A] | e) I_3 [A] | g) I_n [A] |
| b) ϕ_1 [°] | d) ϕ_2 [°] | f) ϕ_3 [°] | h) ϕ_n [°] |

donde $\bar{I}_1 = I_1 / \underline{\phi_1^\circ}$ $\bar{I}_2 = I_2 / \underline{\phi_2^\circ}$ $\bar{I}_3 = I_3 / \underline{\phi_3^\circ}$ $\bar{I}_n = I_n / \underline{\phi_n^\circ}$



$$\bar{V}_{g1} = 200 + 10 \cdot \alpha / \underline{0^\circ} \text{ [V]}, \bar{V}_{g2} = 200 + 10 \cdot \alpha / \underline{120^\circ} \text{ [V]}, \bar{V}_{g3} = 200 + 10 \cdot \alpha / \underline{240^\circ} \text{ [V]}$$

$$\bar{Z}_{l1} = \bar{Z}_{l2} = \bar{Z}_{l3} = \beta + j\gamma \text{ } [\Omega], \bar{Z}_{c1} = \delta + j\epsilon \text{ } [\Omega], \bar{Z}_{c2} = \kappa + j\lambda \text{ } [\Omega]$$

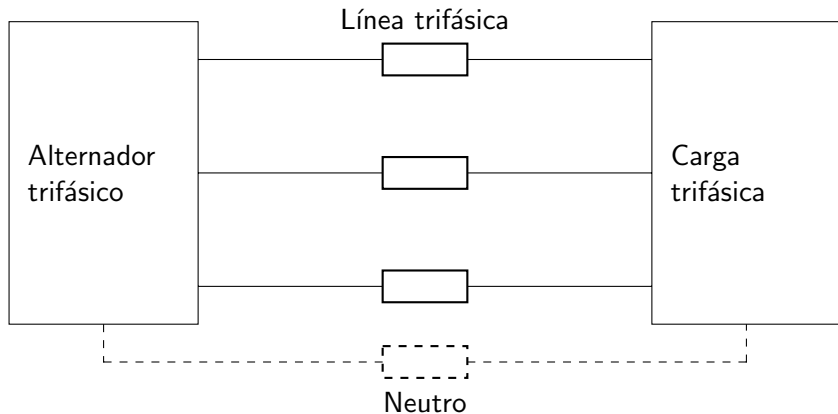
$$\bar{Z}_{c3} = \alpha + j\beta \text{ } [\Omega], \bar{Z}_n = \eta + j\theta \text{ } [\Omega]$$

Ejercicio 9-1 y 9-2

Compara los resultados de los ejercicios 9-1 y 9-2. ¿Qué conclusiones se derivan de los resultados?

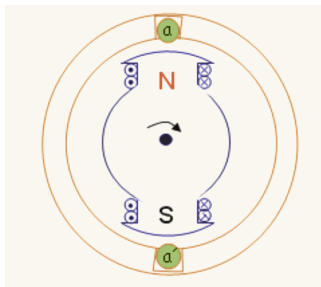
	Ejercicio 9-1	Ejercicio 9-2
I_1 [A]		
ϕ_1 [°]		
I_2 [A]		
ϕ_2 [°]		
I_3 [A]		
ϕ_3 [°]		
I_n [A]		
ϕ_n [°]		

Circuito trifásico

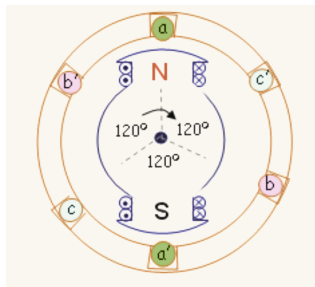


Alternador trifásico

Alternador monofásico

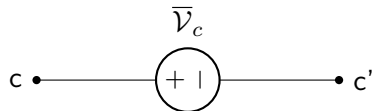
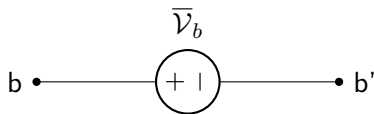
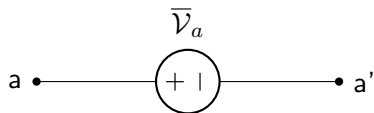


Alternador trifásico



Alternador trifásico

Un alternador trifásico está formado por tres fuentes de tensión sinusoidales de misma amplitud y frecuencia y desfasados 120°

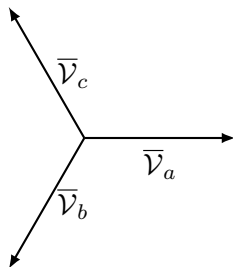


$$\bar{V}_a = V \angle 0^\circ \text{ [V]}$$

$$\bar{V}_b = V \angle -120^\circ \text{ [V]}$$

$$\bar{V}_c = V \angle +120^\circ \text{ [V]}$$

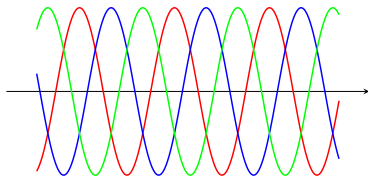
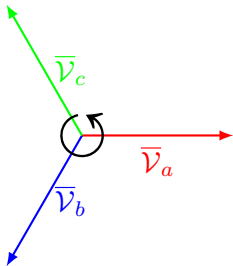
$$\bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c = 0$$



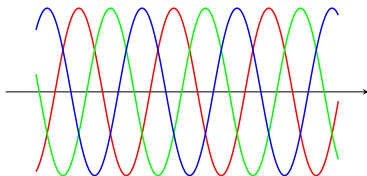
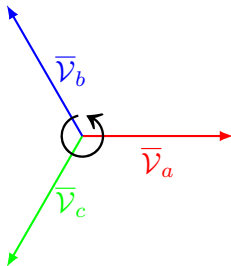
Alternador trifásico

La secuencia de fase establece el orden en el que se suceden los fasores de tensión (a-b-c, 1-2-3, R-S-T)

Secuencia directa

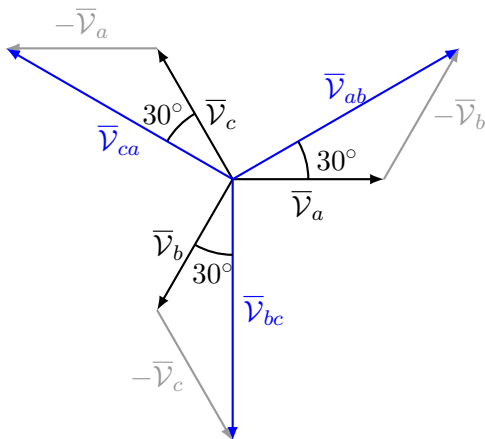
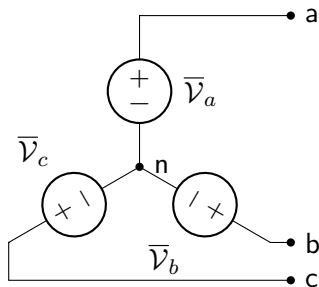


Secuencia inversa



Alternador trifásico

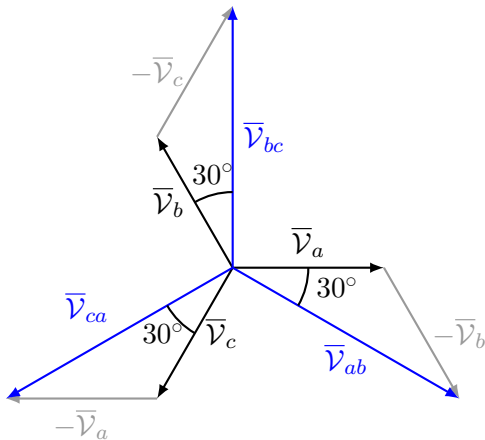
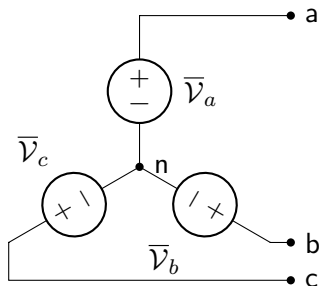
\bar{V}_a , \bar{V}_b y \bar{V}_c forman un sistema trifásico de tensiones equilibrado (s. directa)



- El módulo de la tensión entre dos fases es $\sqrt{3}$ veces el de la tensión de fase
- La tensión entre dos fases **adelanta** 30° a la tensión de fase

Alternador trifásico

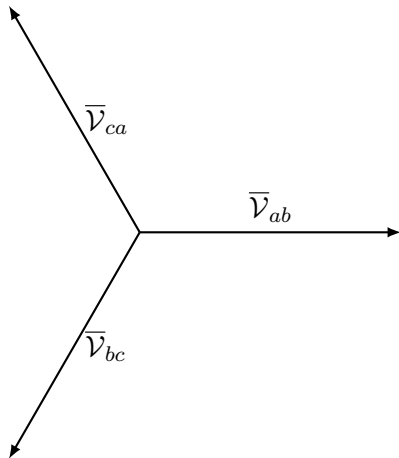
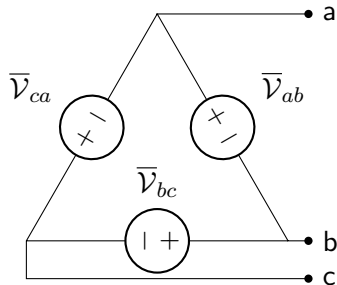
\bar{V}_a , \bar{V}_b y \bar{V}_c forman un sistema trifásico de tensiones equilibrado (s. inversa)



- El módulo de la tensión entre dos fases es $\sqrt{3}$ veces el de la tensión de fase
- La tensión entre dos fases **retrasa** 30° a la tensión de fase

Alternador trifásico

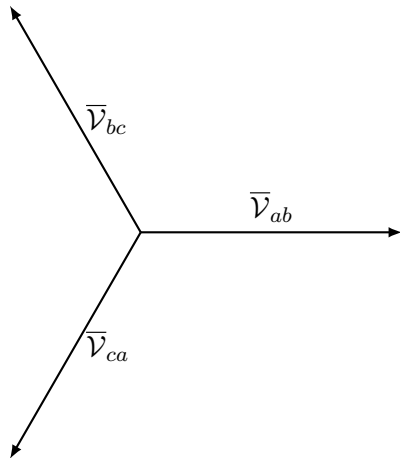
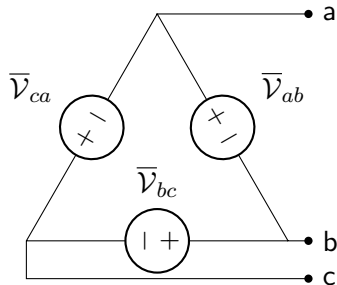
\bar{V}_{ab} , \bar{V}_{bc} y \bar{V}_{ca} forman un sistema trifásico de tensiones equilibrado (s. directa)



- La tensión entre dos fases coincide con la tensión de fase

Alternador trifásico

\bar{V}_a , \bar{V}_b y \bar{V}_c forman un sistema trifásico de tensiones equilibrado (s. inversa)

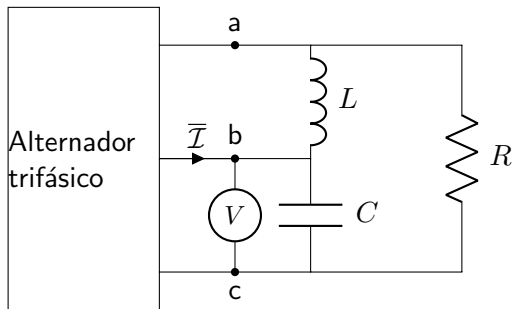


- La tensión entre dos fases coincide con la tensión de fase

Ejercicio 9-3

Tenemos un alternador trifásico equilibrado. Calcula el módulo de la intensidad \bar{I} [A] para los siguientes casos:

- a) Alternador trifásico en estrella y secuencia directa
- b) Alternador trifásico en triángulo y secuencia directa
- c) Alternador trifásico en estrella y secuencia inversa
- d) Alternador trifásico en triángulo y secuencia inversa



Datos:

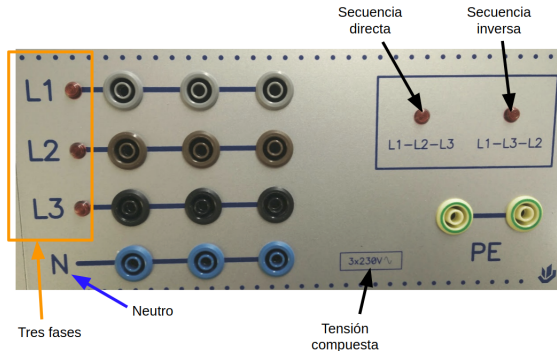
$$V = 200 + 10 \cdot \alpha \text{ [V]}, f = 50 \text{ [Hz]}, L = 10 + \beta \text{ [mH]}, C = \gamma \text{ [\mu F]}, R = \delta \text{ [\Omega]}$$

Solución 9-3

- Dibuja los fasores de las tensiones de fase del alternador trifásico. Ten en cuenta si la secuencia es directa o inversa
- Dibuja los fasores de las tensiones en bornas de la bobina, el condensador y la resistencia
- Dibuja los fasores de las intensidades que atraviesan la bobina, el condensador y la resistencia
- Determina el módulo de las intensidades que atraviesan la bobina, el condensador y la resistencia
- Dibuja el fasor de $\overline{\mathcal{I}}$ aplicando leyes de Kirchhoff
- Calcula el módulo de $\overline{\mathcal{I}}$

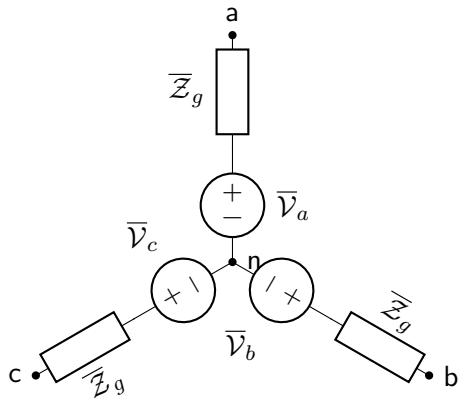
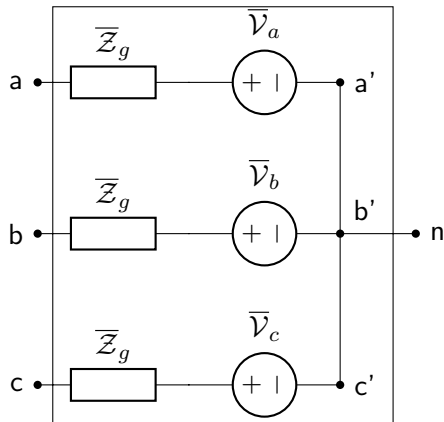
Alternador trifásico

- Lo que nos interesa de un alternador trifásico es:
 - El módulo de la tensión entre dos fases (tensión compuesta)
 - La secuencia



Alternador trifásico real

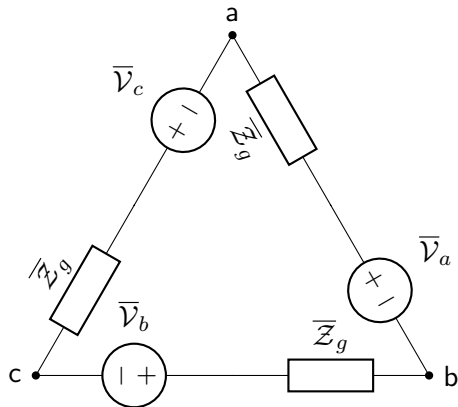
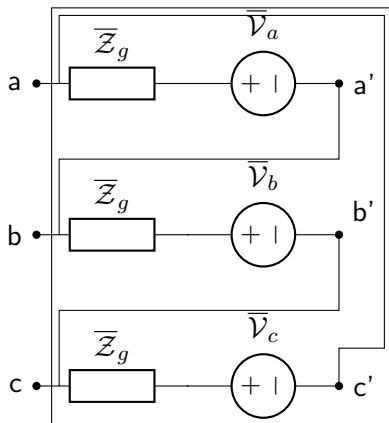
Conexión en estrella de un alternador trifásico equilibrado y real



$\overline{V}_{an}, \overline{V}_{bn}, \overline{V}_{cn} \rightarrow$ Tensiones de fase

Alternador trifásico real

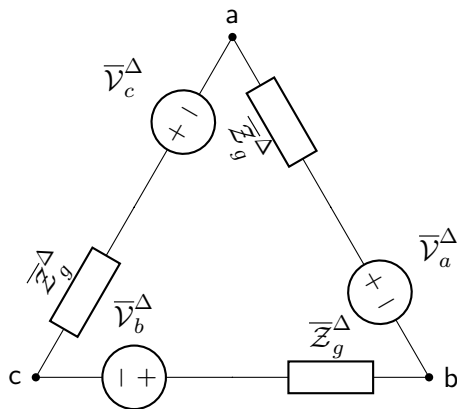
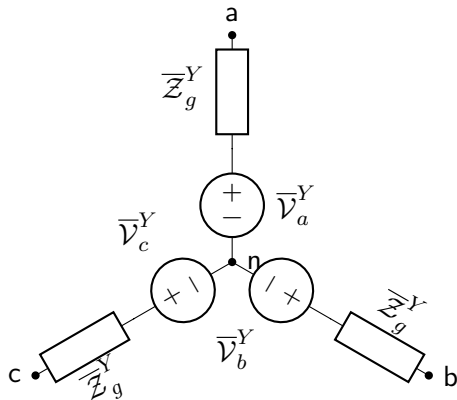
Conexión en triángulo de un alternador trifásico equilibrado y real



$\bar{V}_{ab}, \bar{V}_{bc}, \bar{V}_{ca} \rightarrow$ Tensiones de fase

Alternador trifásico real

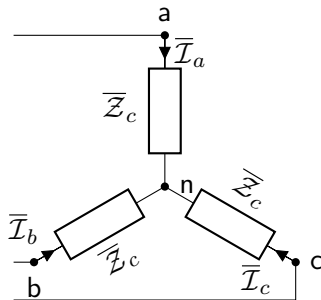
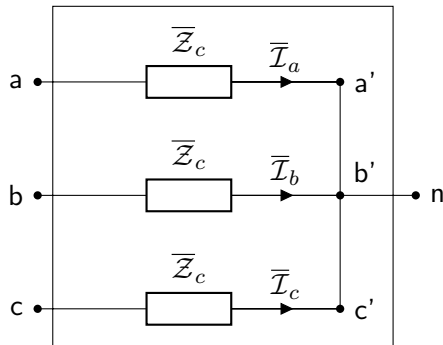
Conversión estrella-triángulo de un alternador trifásico equilibrado y real



$$\overline{Z}_g^\Delta = 3\overline{Z}_g^Y \quad \overline{V}_a^\Delta = \sqrt{3}/30^\circ \cdot \overline{V}_a^Y \quad \overline{V}_b^\Delta = \sqrt{3}/30^\circ \cdot \overline{V}_b^Y \quad \overline{V}_c^\Delta = \sqrt{3}/30^\circ \cdot \overline{V}_c^Y$$

Carga trifásica

Conexión en estrella de una carga trifásica equilibrada

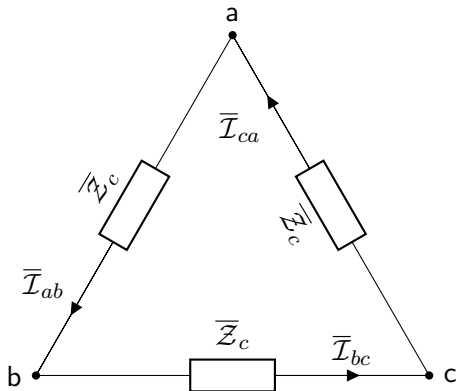
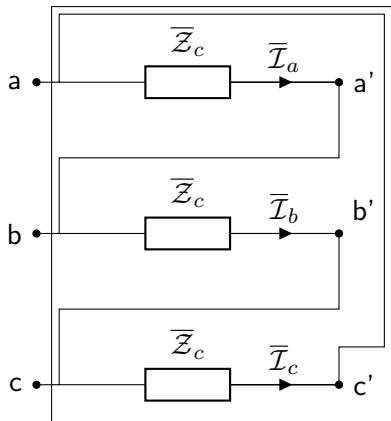


$\overline{V}_{an}, \overline{V}_{bn}, \overline{V}_{cn} \rightarrow$ Tensiones de fase

$\overline{I}_a, \overline{I}_b, \overline{I}_c \rightarrow$ Intensidades de fase

Carga trifásica

Conexión en triángulo de una carga trifásica equilibrada

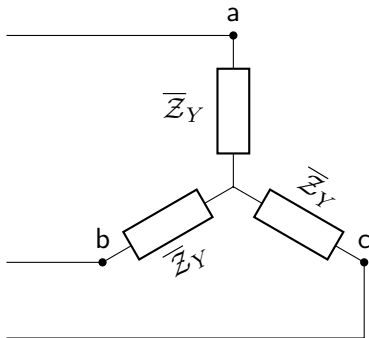
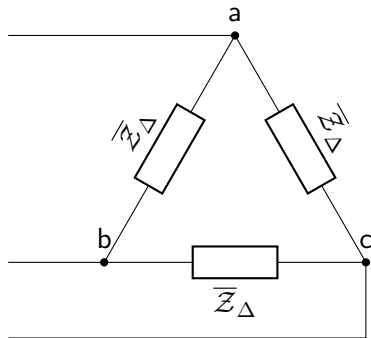


$\bar{V}_{ab}, \bar{V}_{bc}, \bar{V}_{ca} \rightarrow$ Tensiones de fase

$\bar{I}_{ab}, \bar{I}_{bc}, \bar{I}_{ca} \rightarrow$ Intensidades de fase

Carga trifásica

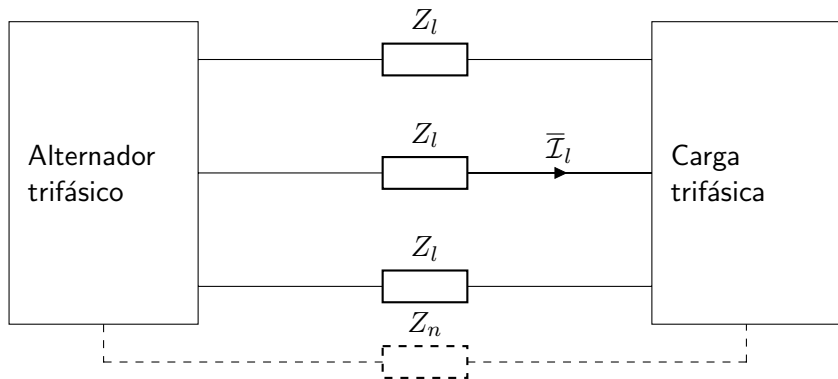
Conversión estrella-triángulo de cargas trifásicas equilibradas



$$\overline{Z}_{\Delta} = 3\overline{Z}_Y$$

Línea trifásica

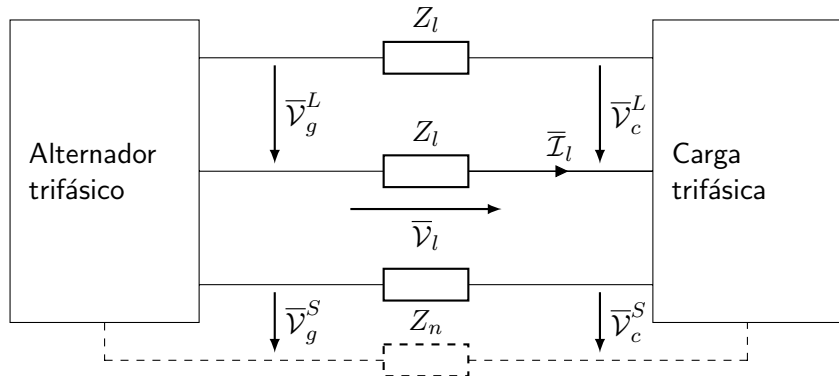
Una línea trifásica conecta un alternador trifásico y una carga trifásica



- Normalmente la conexión es a 3 cables (circuitos equilibrados)
- La conexión a 4 cables sólo es posible para alternador y carga en estrella

Línea trifásica

Una línea trifásica conecta un alternador trifásico y una carga trifásica



$\bar{V}_g^L / \bar{V}_g^S \rightarrow$ Tensión de línea/simple en bornas del generador

$\bar{V}_c^L / \bar{V}_c^S \rightarrow$ Tensión de línea/simple en bornas de la carga

$\bar{I}_L \rightarrow$ Intensidad de línea

$\bar{V}_L \rightarrow$ Caída de tensión en la línea

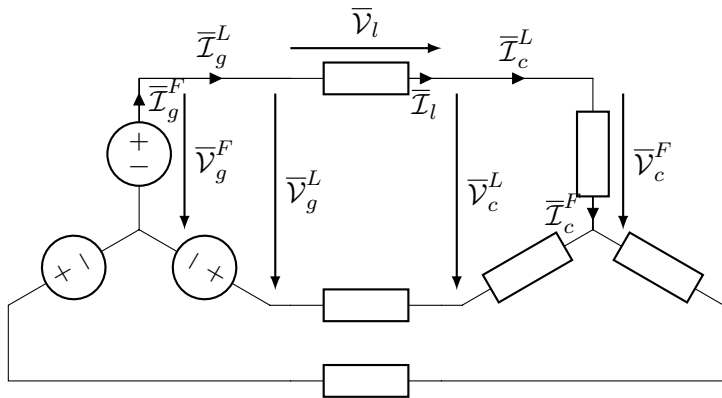
Magnitudes en circuitos trifásicos

- Magnitudes en generadores y cargas
 - Tensión de fase: tensión en cada fase del generador/carga
 - Intensidad de fase: intensidad en cada fase del generador/carga
- Magnitudes en líneas
 - Intensidad de línea: intensidad por cada conductor
 - Tensión de línea/fase-fase/compuesta: tensión entre dos fases
 - Tensión fase-neutro/simple: tensión entre fase y neutro
 - Se puede calcular la tensión de línea en bornes de generadores y cargas
 - No confundir tensión de línea con caída de tensión en la línea

Circuitos trifásicos equilibrados

- Un circuito trifásico equilibrado está compuesto por
 - Un alternador trifásico equilibrado (tensiones con mismo módulo y desfasadas $\pm 120^\circ$)
 - Líneas trifásica (misma impedancia)
 - Cargas trifásicas equilibradas (misma impedancia en cada fase)
- En un circuito trifásico equilibrado se cumple que:
 - Las tres intensidades de línea están equilibradas (mismo módulo y desfasadas $\pm 120^\circ$)
 - Las tensiones de línea y simples en cualquier punto de la línea trifásica también están equilibradas (mismo módulo y desfasadas $\pm 120^\circ$)

Circuitos trifásicos equilibrados



$$|\bar{V}_g^L| = \sqrt{3}|\bar{V}_g^F|$$

$$|\bar{V}_c^L| = \sqrt{3}|\bar{V}_c^F|$$

$$|\bar{I}_g^L| = |\bar{I}_g^F|$$

$$|\bar{I}_c^L| = |\bar{I}_c^F|$$

$\bar{V}_g^F \rightarrow$ Tensión de fase generador

$\bar{I}_g^F \rightarrow$ Intensidad de fase generador

$\bar{V}_c^F \rightarrow$ Tensión de fase carga

$\bar{I}_c^F \rightarrow$ Intensidad de fase carga

$\bar{V}_l \rightarrow$ Caída de tensión en la línea

$\bar{V}_g^L \rightarrow$ Tensión de línea generador

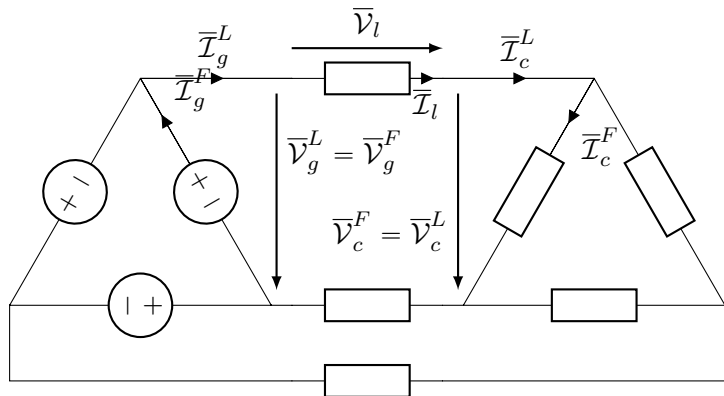
$\bar{I}_g^L \rightarrow$ Intensidad de línea generador

$\bar{V}_c^L \rightarrow$ Tensión de línea carga

$\bar{I}_c^L \rightarrow$ Intensidad de línea carga

$\bar{I}_l \rightarrow$ Intensidad de la línea

Circuitos trifásicos equilibrados



$$\begin{aligned} |\bar{V}_g^L| &= |\bar{V}_g^F| \\ |\bar{V}_c^L| &= |\bar{V}_c^F| \\ |\bar{I}_g^L| &= \sqrt{3} |\bar{I}_g^F| \\ |\bar{I}_c^L| &= \sqrt{3} |\bar{I}_c^F| \end{aligned}$$

$\bar{V}_g^F \rightarrow$ Tensión de fase generador

$\bar{I}_g^F \rightarrow$ Intensidad de fase generador

$\bar{V}_c^F \rightarrow$ Tensión de fase carga

$\bar{I}_c^F \rightarrow$ Intensidad de fase carga

$\bar{V}_l \rightarrow$ Caída de tensión en la línea

$\bar{V}_g^L \rightarrow$ Tensión de línea generador

$\bar{I}_g^L \rightarrow$ Intensidad de línea generador

$\bar{V}_c^L \rightarrow$ Tensión de línea carga

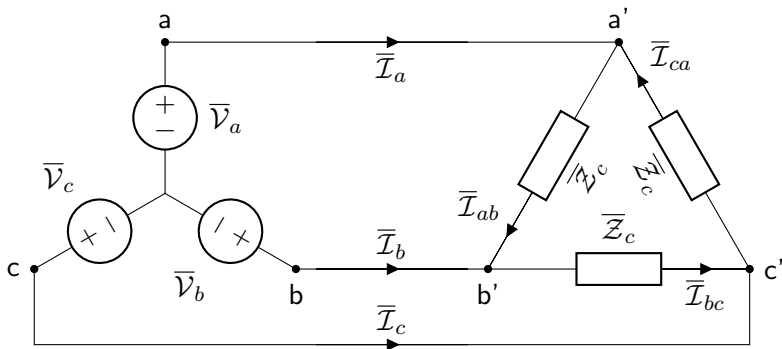
$\bar{I}_c^L \rightarrow$ Intensidad de línea carga

$\bar{I}_l \rightarrow$ Intensidad de la línea

Ejercicio 9-4

Para el circuito trifásico equilibrado de la figura (s. directa) calcula

- | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--|--|
| a) $ \bar{\mathcal{I}}_a $ [A] | d) $\angle \bar{\mathcal{I}}_b$ [°] | g) $ \bar{\mathcal{I}}_{ab} $ [A] | j) $\angle \bar{\mathcal{I}}_{bc}$ [°] |
| b) $\angle \bar{\mathcal{I}}_a$ [°] | e) $ \bar{\mathcal{I}}_c $ [A] | h) $\angle \bar{\mathcal{I}}_{ab}$ [°] | k) $ \bar{\mathcal{I}}_{ca} $ [A] |
| c) $ \bar{\mathcal{I}}_b $ [A] | f) $\angle \bar{\mathcal{I}}_c$ [°] | i) $ \bar{\mathcal{I}}_{bc} $ [A] | l) $\angle \bar{\mathcal{I}}_{ca}$ [°] |

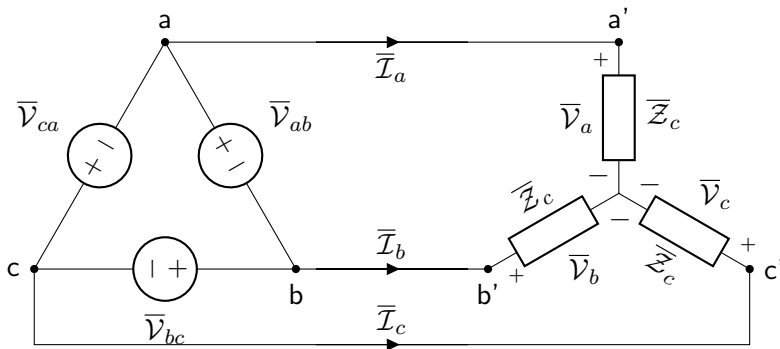


Datos: $\bar{V}_a = 200 + 10 \cdot \lambda / 0^\circ$, $\bar{V}_b = 200 + 10 \cdot \lambda / -120^\circ$, $\bar{V}_c = 200 + 10 \cdot \lambda / 120^\circ$, $\bar{Z}_c = \alpha + \beta j$ [Ω]

Ejercicio 9-5

Para el circuito trifásico equilibrado de la figura (s. directa) calcula

- | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $ \bar{\mathcal{I}}_a $ [A] | d) $\angle \bar{\mathcal{I}}_b$ [°] | g) $ \bar{\mathcal{V}}_a $ [A] | j) $\angle \bar{\mathcal{V}}_b$ [°] |
| b) $\angle \bar{\mathcal{I}}_a$ [°] | e) $ \bar{\mathcal{I}}_c $ [A] | h) $\angle \bar{\mathcal{V}}_a$ [°] | k) $ \bar{\mathcal{V}}_c $ [A] |
| c) $ \bar{\mathcal{I}}_b $ [A] | f) $\angle \bar{\mathcal{I}}_c$ [°] | i) $ \bar{\mathcal{V}}_b $ [A] | l) $\angle \bar{\mathcal{V}}_c$ [°] |

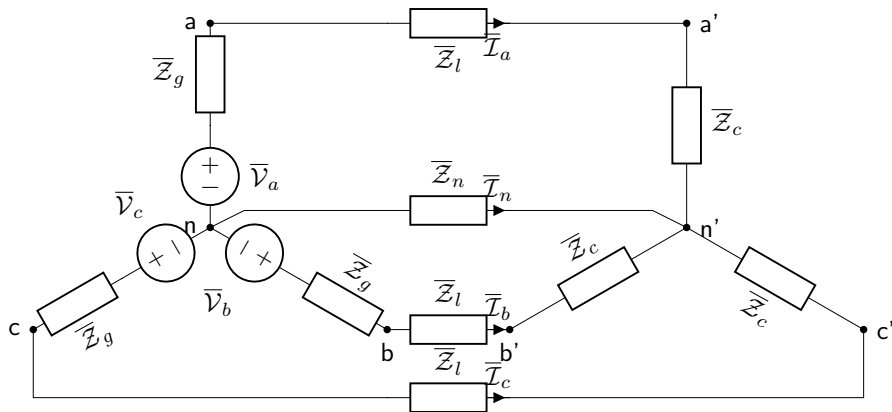


Datos: $\bar{\mathcal{V}}_{ab} = 200 + 10 \cdot \lambda / 0^\circ$, $\bar{\mathcal{V}}_{bc} = 200 + 10 \cdot \lambda / -120^\circ$, $\bar{\mathcal{V}}_{ca} = 200 + 10 \cdot \lambda / 120^\circ$, $\bar{\mathcal{Z}}_c = \alpha + \beta j$ [Ω]

Circuitos monofásicos equivalentes

- En los circuitos trifásicos equilibrados (CTE) todas las tensiones e intensidades están equilibradas (mismo módulo y desfasadas 120°).
- El análisis de CTE se suele hacer usando el circuito monofásico equivalente
- En un circuito monofásico equivalente solo consideramos una de las fases
- Los circuitos monofásicos equivalentes que vamos a ver son dos:
 - Conexión estrella-estrella
 - Conexión triángulo-triángulo
- Si el circuito no tiene ninguna de estas disposiciones aplicaremos transformación de fuentes o cargas trifásicas

Circuitos monofásicos equivalentes (Estrella-Estrella)



Como el circuito trifásico es equilibrado

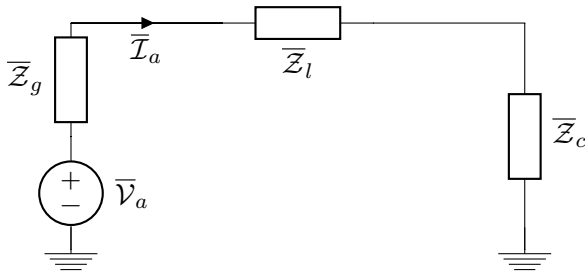
$$\bar{I}_n = 0 \implies \bar{V}_{nn'} = 0 \implies \bar{V}_n = \bar{V}_{n'}$$

Aplicando LKT entre n y n' por la fase a obtenemos la siguiente ecuación

$$-\bar{V}_a + \bar{Z}_g \bar{I}_a + \bar{Z}_l \bar{I}_a + \bar{Z}_c \bar{I}_a = 0$$

Circuitos monofásicos equivalentes (Estrella-Estrella)

Construimos el siguiente circuito monofásico equivalente



Aplicamos la LKT al circuito monofásico

$$-\bar{V}_a + \bar{Z}_g \bar{I}_a + \bar{Z}_l \bar{I}_a + \bar{Z}_c \bar{I}_a = 0$$

Observamos que la ecuación es exactamente la misma que en el caso del circuito trifásico. El monofásico de un CTE estrella-estrella incluye:

- Las impedancias originales de generador, líneas y cargas
- Las tensiones simples o de fase-neutro
- La intensidad de línea

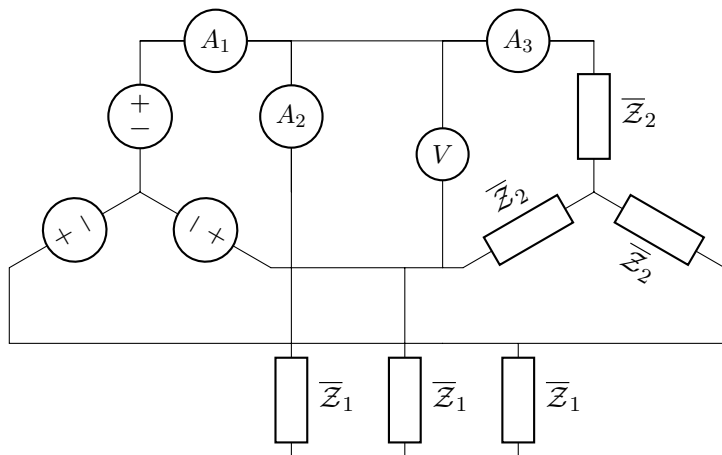
Ejercicio 9-6

Usa el circuito monofásico equivalente Y-Y del CTE de la figura y calcula

a) A_1 [A]

b) A_2 [A]

c) A_3 [A]



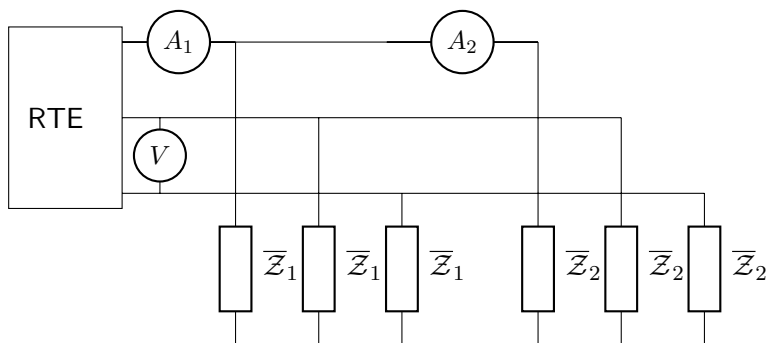
Datos: $V = 200 + 10 \cdot \gamma$ [V], $\bar{Z}_1 = \delta + j\epsilon$ [Ω], $\bar{Z}_2 = \eta - j\theta$ [Ω]

Ejercicio 9-7

Una red trifásica equilibrada (RTE) alimenta dos cargas. Usa el circuito monofásico equivalente Y-Y para calcular

a) A_1 [A]

b) a

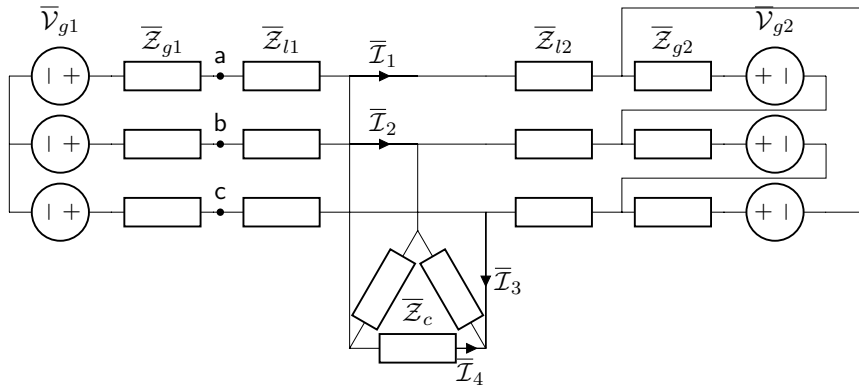


Datos: $V = 200 + 10 \cdot \kappa$ [V], $A_2 = 10 + \alpha$ [A], $\bar{Z}_1 = a$ [Ω], $\bar{Z}_2 = ja$ [Ω]

Ejercicio 9-8

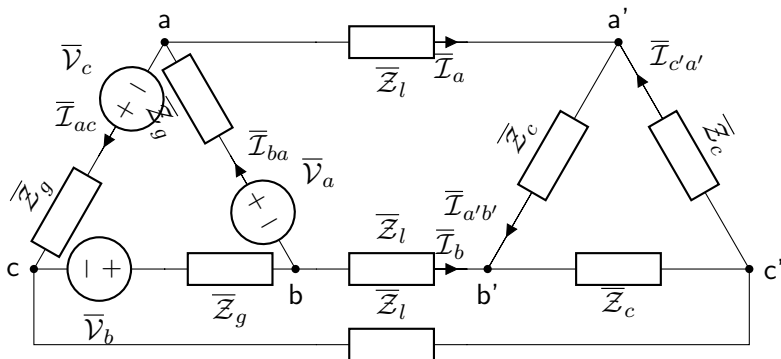
Los dos alternadores del CTE tienen secuencia directa. Usa el equivalente monofásico Y-Y para calcular

- a) $|\bar{I}_1|$ [A] b) $|\bar{I}_2|$ [A] c) $|\bar{I}_3|$ [A] d) $|\bar{I}_4|$ [A]



Datos: $\bar{V}_{g1} = 200 + 10 \cdot \beta \angle 0^\circ$ [V], $\bar{V}_{g2} = 200 + 10 \cdot \gamma \angle 30^\circ$ [V], $\bar{Z}_{g1} = j\delta$ [Ω], $\bar{Z}_{l1} = \epsilon + j\eta$ [Ω], $\bar{Z}_c = \theta - j\kappa$ [Ω], $\bar{Z}_{l2} = \lambda + j\alpha$ [Ω], $\bar{Z}_{g2} = j\beta$ [Ω]

Circuitos monofásicos equivalentes (Triángulo-Triángulo)



Suponemos secuencia directa y obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_a &= \bar{I}_{a'b'} - \bar{I}_{c'a'} = \sqrt{3} \angle -30^\circ \bar{I}_{a'b'} \\ \bar{I}_a &= \bar{I}_{ba} - \bar{I}_{ac} = \sqrt{3} \angle -30^\circ \bar{I}_{ba} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{I}_{a'b'} = \bar{I}_{ba}$$

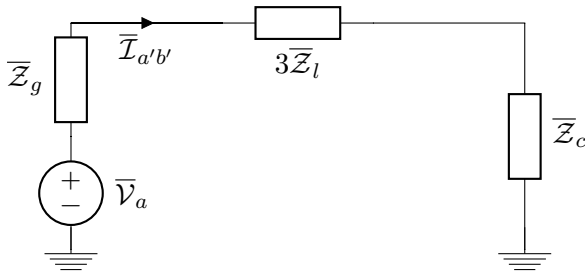
$$\bar{I}_a - \bar{I}_b = \sqrt{3} \angle 30^\circ \bar{I}_a = \sqrt{3} \angle 30^\circ \sqrt{3} \angle -30^\circ \bar{I}_{a'b'} = 3 \bar{I}_{a'b'}$$

Aplicando LKT

$$\bar{V}_a = \bar{Z}_g \bar{I}_{ba} + \bar{Z}_l \bar{I}_a + \bar{Z}_c \bar{I}_{a'b'} - \bar{Z}_l \bar{I}_b = (\bar{Z}_g + 3\bar{Z}_l + \bar{Z}_c) \bar{I}_{a'b'}$$

Circuitos monofásicos equivalentes (Triángulo-Triángulo)

Construimos el siguiente circuito monofásico equivalente



Aplicamos la LKT al circuito monofásico

$$\bar{V}_a = (\bar{Z}_g + 3\bar{Z}_l + \bar{Z}_c)\bar{I}_{a'b'}$$

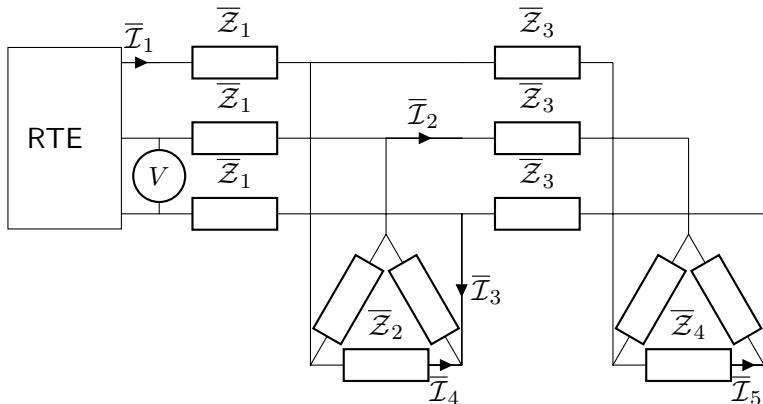
El monofásico de un CTE triángulo-triángulo incluye:

- Las impedancias originales de generador y cargas
- Las impedancias de las líneas multiplicadas por 3
- Las tensiones compuestas o de fase-fase
- La intensidad de fase

Ejercicio 9-9

Una red trifásica equilibrada (RTE) alimenta dos cargas. Usa el circuito monofásico equivalente D-D para calcular

- a) $|\bar{I}_1|$ [A] b) $|\bar{I}_2|$ [A] c) $|\bar{I}_3|$ [A] d) $|\bar{I}_4|$ [A] e) $|\bar{I}_5|$ [A]



Datos: $V = 200 + 10 \cdot \kappa$ [V], $\bar{Z}_1 = \alpha + j\beta$ [Ω], $\bar{Z}_2 = 10(\gamma - j\delta)$ [Ω], $\bar{Z}_3 = \epsilon + j\eta$ [Ω], $\bar{Z}_4 = 10(\kappa + j\lambda)$ [Ω]

Ejercicio 9-10

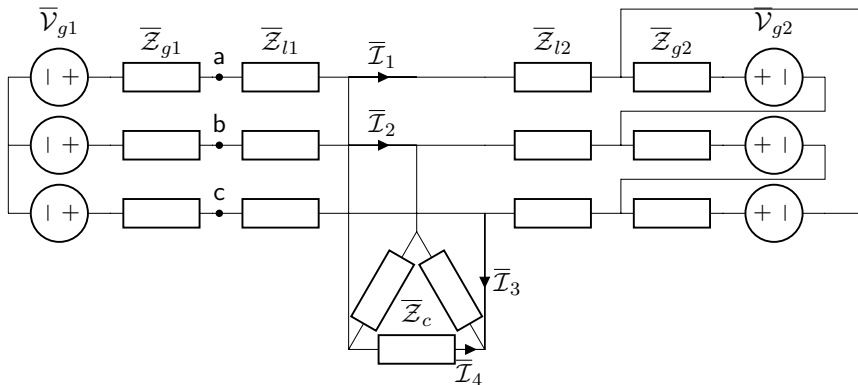
Los dos alternadores del CTE tienen secuencia directa. Usa el equivalente monofásico D-D para calcular

a) $|\bar{I}_1|$ [A]

b) $|\bar{I}_2|$ [A]

c) $|\bar{I}_3|$ [A]

d) $|\bar{I}_4|$ [A]



Datos: $\bar{V}_{g1} = 200 + 10 \cdot \gamma / 0^\circ$ [V], $\bar{V}_{g2} = 200 + 10 \cdot \delta / 30^\circ$ [V], $\bar{Z}_{g1} = j\epsilon$ [Ω], $\bar{Z}_{l1} = \eta + j\theta$ [Ω], $\bar{Z}_c = \kappa - j\lambda$ [Ω], $\bar{Z}_{l2} = \alpha + j\beta$ [Ω], $\bar{Z}_{g2} = j\gamma$ [Ω]