Consignas

1. Considere el problema de calcular la temperatura de una varilla delgada, como ejemplo de un problema de estado estacionario unidimensional (1). La ecuación diferencial gobernante y las condiciones de borde se pueden establecer de la siguiente manera:

$$\begin{cases} k\dfrac{d^2T}{dx^2} - \dfrac{h_p p}{A}(T - T_a) = 0, \\ T(0) = T_0, \\ \left.\dfrac{dT}{dx}\right|_{x=L} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $T(x)$ es la temperatura en la posición x, k es el coeficiente de conductividad térmica, A es la sección de la varilla, h_p es el coeficiente de transferencia por convección, L es la longitud de la varilla, p es el perímetro y T_a es la temperatura del ambiente.

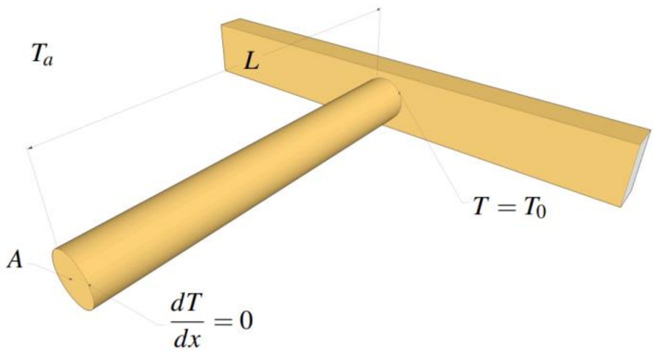


Figura 1: Problema de conducción de calor de varilla delgada.

a. Explique que significan las condiciones de borde.

b. Resuelva utilizando el Método de Diferencias Finitas, para diferentes tamaños de paso.

c. Escriba la formulación variacional de este problema.

d. Resuelva utilizando el Método de Galerkin para diferentes tamaños de paso, con funciones lineales a trozos.

e. Compare los resultados entre los diferentes métodos y la solución analítica.

Para el último punto considere la varilla de aluminio de 100 mm, con un diámetro de 8 mm, la temperatura ambiente de 20°C y T_0 = 50°C. Para el aluminio se tiene que h_p = 200 W/(m^2 K) y k = 164 W/(m K).

AYUDA: Realizando el cambio de variables u(x) = T(x) − T0, la ecuación se vuelve homogénea. La solución para este problema es:

$$u(x) = u_0 \frac{\cosh\left[\sqrt{a}(L-x)\right]}{\cosh(\sqrt{a}L)}$$

donde $a = h_p p/kA$

Resolución

a. *Explique qué significan las condiciones de borde.*

La condición $T\,(0) = T_0$ nos dice cuál es la temperatura en $x = 0$, es decir, al comienzo de la varilla, donde hace contacto con una superficie. Se trata de una condición de tipo Dirichlet.

La condición $\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L} = 0$ significa que no hay flujo de calor en el otro extremo de la varilla ($x = L$). Se trata de una condición de tipo Neumann.

Estas condiciones, en conjunto, definen el problema de estado estacionario unidimensional y permiten encontrar una solución que es única para la distribución de temperatura en la varilla.

b. *Resuelva utilizando el Método de Diferencias Finitas, para diferentes tamaños de paso.*

Para comenzar, recordemos que partimos de la siguiente ecuación:

$$k\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h_p p}{A}(T - T_a) = 0$$

Lo primero que haremos, por cuestiones de notación, es dividir ambos miembros por k.

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h_p p}{Ak}(T - T_a) = 0$$

Además, reemplazando $a = h_p p/Ak$ se obtiene:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - a(T - T_a) = 0$$

A continuación, procederemos como fue sugerido y usaremos el cambio de variables $u(x) = T(x) - T_a$. De esta forma, la ecuación será homogénea y la podremos escribir de esta manera:

$$\begin{cases} -u''(x) - au(x) = 0 & 0 < x < L \\ u(0) = T_0 - T_a & \\ u'(L) = 0 & \end{cases} \qquad (1)$$

Ya con la ecuación homogénea lista, dividiremos la varilla en $N + 1$ puntos, incluidos los extremos. Estos serán x_i, para $i = 0, 1, \dots, N$. Además, llamaremos Δx a la distancia entre dos puntos vecinos, es decir $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Asimismo, $x_0 = 0$ y $x_N = L$.

Usaremos las siguientes aproximaciones de la derivada:

- $u'(x_0) \approx \frac{u(x_0) - u(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$
- $u''(x_0) \approx \frac{u(x_0 + \Delta x) - 2u(x_0) + u(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2}$

O, escritas de otra forma,

- $u_i{}' \approx \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}$
- $u_i{}'' \approx \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}$

Reemplazando las aproximaciones en la ecuación diferencial homogénea, se obtiene:

$$\frac{u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - a u_i = 0$$

Multiplicando Δx^2 en ambos miembros,

$$u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1} - a u_i \Delta x^2 = 0$$

Y agrupando se llega a la siguiente expresión:

$$u_{i+1} - (2 + a\Delta x^2)\,u_i + u_{i-1} = 0$$

Esto se aplica para los puntos $i = 1, 2, \ldots, N-1$, pues para los extremos (0 y N) tenemos condiciones de borde.

Si llamamos $R = -(2 + a\Delta x^2)$ podemos armar una matriz A tal que $A \cdot u = b$.

Como para el externo inferior por la condición de Dirichlet se tiene que $u_1 = T_0 - T_a$, hacemos los siguientes cambios: (1) colocamos un uno en $A_{1,1}$ y (2) ponemos $T_0 - T_a$ en b_1.

En la última fila, en cambio, se realiza el siguiente razonamiento:

$$u'(L) \approx \frac{u(L) - u(L - \Delta x)}{\Delta x}$$
$$u'(L) = 0$$

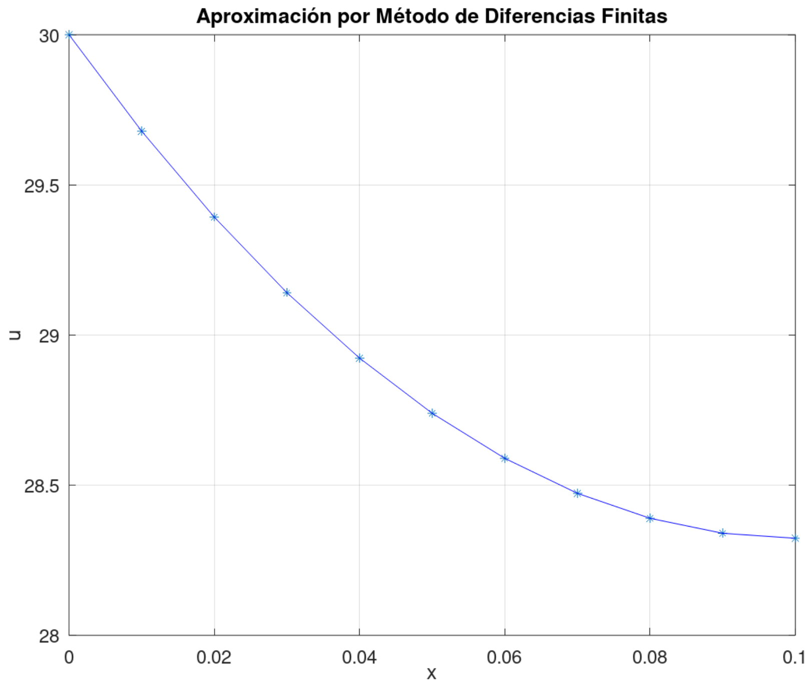
Entonces, $u(L) = u(L - \Delta x)$

Por lo tanto, se escribe como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & R & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & R & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & R & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & R & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & R & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & R & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{n-3} \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 - T_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver esto en Octave/MATLAB se puede utilizar el archivo *EJ1_MDF.m* de la carpeta adjunta.

A continuación exponemos los resultados obtenidos al ejecutar dicho código.



c. *Escriba la formulación variacional de este problema.*

Se quiere hallar una solución aproximada $\tilde{u}$ de la ecuación. Entonces, la ecuación no será homogénea, sino habrá un residuo $R(x) = \tilde{u}''(x) - a\tilde{u}(x) \neq 0$

Como se quiere minimizarlo, usamos una función de prueba ω y tratamos de que el producto interno del espacio de estas funciones sea igual a cero. Entonces, $\tilde{u}$ sería una proyección ortogonal de u y, por lo tanto, la diferencia sería mínima.

$$\int_0^L R(x) \cdot \omega(x)\, dx = 0$$

$$\int_0^L (\tilde{u}''(x) - a\tilde{u}(x)) \cdot \omega(x)\, dx = 0$$

$$\int_0^L (\tilde{u}''(x) \cdot \omega(x) - a\tilde{u}(x) \cdot \omega(x))\, dx = 0$$

$$\int_0^L \tilde{u}''(x) \cdot \omega(x)\, dx - a \int_0^L \tilde{u}(x) \cdot \omega(x)\, dx = 0$$

Integrando por partes el primer término, de la forma $\int_{x_1}^{x_2} u\, dv = u \cdot v|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v\, du$ donde,

- $u = \omega(x)$
- $du = \omega'(x)$
- $v = \tilde{u}'(x)$
- $dv = \tilde{u}''(x)$

Por lo que se tendrá:

$$\omega(x) \cdot \tilde{u}'(x)|_0^L - \int_0^L \tilde{u}'(x) \cdot \omega'(x)\, dx - a \int_0^L \tilde{u}(x) \cdot \omega(x)\, dx = 0$$

Pero el primer término se anula por las condiciones de borde y así cumplimos naturalmente la condición de Neumann. Entonces, tenemos:

$$-\int_0^L \tilde{u}'(x) \cdot \omega'(x)\, dx - a \int_0^L \tilde{u}(x) \cdot \omega(x)\, dx = 0$$

O lo que es lo mismo,

$$\int_0^L \tilde{u}'(x) \cdot \omega'(x)\, dx + a \int_0^L \tilde{u}(x) \cdot \omega(x)\, dx = 0 \qquad (2)$$

d. *Resuelva utilizando el Método de Galerkin para diferentes tamaños de paso, con funciones lineales a trozos.*

El método de Galerkin propone plantear la función solución aproximada de esta forma,

- $\tilde{u}(x) = \tilde{u}_1\varphi_1 + \tilde{u}_2\varphi_2 + \tilde{u}_3\varphi_3 + \cdots + \tilde{u}_n\varphi_n$
- $\tilde{u}'(x) = \tilde{u}_1{\varphi_1}' + \tilde{u}_2{\varphi_2}' + \tilde{u}_3{\varphi_3}' + \cdots + \tilde{u}_n{\varphi_n}'$

Donde las funciones de prueba φ se definen tal que

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq x_{i-1} o\ x \geq x_{i+1} \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & si\ x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & si\ x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases}$$

Entonces, ahora se puede reemplazar esto en (2):

$$\int_0^L (\tilde{u}_1{\varphi_1}' + \tilde{u}_2{\varphi_2}' + \cdots + \tilde{u}_n{\varphi_n}') \cdot \omega'(x)\, dx + a \int_0^L (\tilde{u}_1\varphi_1 + \tilde{u}_2\varphi_2 + \cdots + \tilde{u}_n\varphi_n) \cdot \omega(x)\, dx = 0$$

Extrayendo factor común

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \tilde{u}_i \left[\int_0^L \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} {\varphi_i}'\right) \cdot \omega'(x)\, dx + a \int_0^L \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} \varphi_i\right) \cdot \omega(x)\, dx\right] = 0$$

Como ω es cualquier función que queramos, tomamos $\omega = \varphi$, por lo que podemos ahora plantear un sistema de ecuaciones lineales $Ku = F$, siendo K la matriz de rigidez, u el vector de incógnitas y F el vector de términos independientes. Entonces, un elemento de la matriz de rigidez, con $i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots n$, se define como:

$$k_{ij} = \int_0^L {\varphi_i}'\, \omega_j' dx + a \int_0^L \varphi_i\, \omega_j dx$$

Sabiendo que Δx especifica la separación entre los puntos de la malla, los cuales son $x_i, i = 1..n$. Por lo tanto, $\Delta x = \frac{x_n - x_1}{n-1}$. Ahora podemos plantear los primeros elementos de la matriz:

- $k_{11} = \int_0^{\Delta x} {\varphi_1}'\, \omega_1' dx + a \int_0^{\Delta x} \varphi_1\, \omega_1 dx$

  Como φ es una función definida a trozos en $[0, \Delta x]$, entonces $\varphi_1 = 1 - x\ /\Delta x$. Además, recordamos que elegimos la función $\varphi_1 = \omega_1$, por lo que $\omega_1 = 1 - x\ /\Delta x$. Derivando esta expresión tenemos $\varphi_1' = \omega_1' = -1\ /\Delta x$.

Sustituyendo,

$$k_{11} = \int_0^{\Delta x} \left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right) dx + a \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)\left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right) dx$$

Integrando se obtiene que: $k_{11} = \frac{1}{\Delta x} + a\frac{\Delta x}{3}$

- $k_{12} = \int_0^{\Delta x} \varphi_1{}' \, \omega_2' dx + a \int_0^{\Delta x} \varphi_1 \, \omega_2 dx$

En el intervalo la función se define como $\varphi_2 = \omega_2 = x/ \mathit{\Delta} x$. Si derivamos, $\varphi_2' = \omega_2' = 1/\mathit{\Delta} x$.

Sustituyendo,

$$k_{12} = \int_0^{\Delta x} \left(-\frac{1}{\Delta x}\right)\left(\frac{1}{\Delta x}\right) dx + a \int_0^{\Delta x} \left(1 - \frac{x}{\Delta x}\right)\left(\frac{x}{\Delta x}\right) dx$$

Integrando se obtiene que: $k_{12} = \frac{-1}{\Delta x} + a\frac{\Delta x}{6}$

Debido a que la matriz es simétrica, $k_{21} = k_{12}$

- $k_{22} = \int_0^{2\Delta x} \varphi_2{}' \, \omega_2' dx + a \int_0^{2\Delta x} \varphi_2 \, \omega_2 dx$

Como no se tienen los valores de φ en $[0, 2\mathit{\Delta} x]$ podemos reescribirla tal que

$$k_{22} = \int_0^{\Delta x} \varphi_2{}' \, \omega_2' dx + a \int_0^{\Delta x} \varphi_2 \, \omega_2 dx + \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \varphi_2{}' \, \omega_2' dx + a \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \varphi_2 \, \omega_2 dx$$

Recordando que nuestra función toma estos valores:

- $[0; \Delta x] \rightarrow \varphi_1 = \omega_1 = 1 - \frac{x}{\Delta x} \rightarrow \varphi_1' = \omega_1' = -\frac{1}{\Delta x} \wedge \varphi_2 = \omega_2 = \frac{x}{\Delta x} \rightarrow \varphi_2' = \omega_2' = \frac{1}{\Delta x}$.
- $[\Delta x; 2\Delta x] \rightarrow \varphi_2 = \omega_2 = 1 - \frac{x}{\Delta x} \rightarrow \varphi_2' = \omega_2' = -\frac{1}{\Delta x} \wedge \varphi_3 = \omega_3 = \frac{x}{\Delta x} \rightarrow \varphi_3' = \omega_3' = \frac{1}{\Delta x}$.

Integrando se obtiene que: $k_{22} = \frac{2}{\Delta x} + \frac{2a\Delta x}{3}$

Ahora bien, para expresar el sistema de ecuaciones podemos establecer dos constantes en la matriz de rigidez:

$$E = -\frac{1}{\mathit{\Delta} x} + a\frac{\mathit{\Delta} x}{6}$$

$$S = \frac{2}{\mathit{\Delta} x} + 2a\frac{\mathit{\Delta} x}{3}$$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{S}{2} & E & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E & S & E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & S & E & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & S & E & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & E & S & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E & S & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & E & S & E \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & E & \frac{S}{2}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{n-3} \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

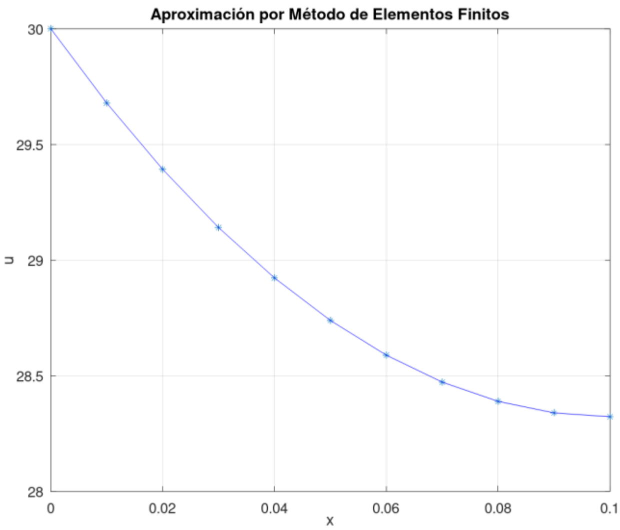
En cuanto a las condiciones de borde, por la de Dirichlet tenemos que hacer que la temperatura en el nodo inicial sea la establecida. Entonces, modificamos la primera fila para conseguir lo siguiente:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E & S & E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & S & E & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & S & E & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & E & S & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E & S & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & E & S & E \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & E & \frac{S}{2}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{n-3} \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T0 - Ta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Además, la condición de Neumann se encuentra aplicada naturalmente, por lo que no debemos realizar ninguna modificación al sistema.

Al igual que en el ejercicio anterior, se puede encontrar un archivo *EJ1_MEF.m* con la resolución del problema en la carpeta adjunta.

Si ejecutamos dicho código, hallamos esta solución numérica:



e. Compare los resultados entre los diferentes métodos y la solución analítica.

Para comparar los resultados entre los distintos métodos y la solución analítica, se puede plantear una función error que evalúe en cada nodo el valor de la solución aproximada y le reste el de la solución analítica.

Del mismo modo que se realizó anteriormente, el código se encuentra en la carpeta adjunta. El nombre de los archivos es *EJ1_ERROR_MDF.m* y *EJ1_ERROR_MEF.m.*

Al ejecutar el código, hallamos los siguientes gráficos: