Università degli Studi di Catania

FACOLTÀ DI MATEMATICA E INFORMATICA
Corso di Laurea in Informatica

Riassunti di:

Algebra lineare e Geometria

Candidato:
Salvo Polizzi Salamone
Matricola 1000030092

Relatore:
Prof. Lucia Maria Marino

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Parte I

Algebra lineare

Capitolo 1

INSIEMI

L'**insieme** è un ente che raggruppa elementi che hanno in comune qualcosa che non è per forza legato all'ambito numerico. Per esempio infatti possiamo interpretare come insieme tutti i telefoni, tutti i tavoli o sedie. Inoltre possiamo dire che un insieme si rappresenta con una lettera **maiuscola**, mentre gli elementi al suo interno con una lettera **minuscola**. Si dice infine:

- $a \in A$ se l'elemento a appartiene all'insieme A
- $a \notin A$ se l'elemento a non appartiene all'insieme A

1.1 Rappresentazione degli insiemi

Per rappresentare gli insiemi abbiamo 3 modi:

1. **Elencazione**: $A = \{a, b, c\}$; questo metodo è adatto solamente quando abbiamo un numero finito di elementi.
2. **Caratteristica**: $A = \{a | a \in \mathbb{N}\}$; in questo metodo quindi rappresentiamo gli elementi dell'insieme in base alle loro caratteristiche, ovvero le proprietà che hanno in comune.
3. **Diagrammi di Venn**: è il metodo di rappresentazione grafica di un insieme (figura 1.1)

Figure 1.1: Diagrammi di Venn

1.2 Simbologia degli insiemi numerici

Esistono diversi insiemi che raggruppano tutti i numeri che noi conosciamo:

- $\mathbb{N}$: è l'insieme dei numeri naturali, ovvero quei numeri interi privi di segno (ad es. 0,1,2...);
- $\mathbb{Z}$: è l'insieme dei numeri interi *relativi*, ovvero con il segno (ad es. 0, $\pm 1, \pm 2$...), inoltre $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ [1];
- $\mathbb{Q}$: è l'insieme dei numeri razionali, ovvero le frazioni con il segno (ad es.$\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{6}{1}, \pm\frac{4}{2}$. Affermiamo inoltre tale relazione $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$;
- $\mathbb{Z}$: è l'insieme dei numeri reali, ovvero tutti i numeri, anche quelli con la virgola con un numero infinito di cifre decimali tutte diverse. Parliamo quindi anche di numeri *irrazionali*[2]
- $\mathbb{C}$: è l'insieme dei numeri complessi e rappresenta un "estensione" dei numeri reali nel quale viene aggiunta una parte immaginaria

  $$a + ib \tag{1.1}$$

  dove a rappresenta la parte reale e b la parte immaginaria.

1.3 Operazioni tra gli insiemi

Abbiamo principalmente 4 tipi di operazioni che possiamo eseguire tra gli insiemi:

1. **Unione**: si indica con

   $$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} \tag{1.2}$$

   Gli elementi o appartengono ad A o B
2. **Intersezione**: si indica con

   $$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} \tag{1.3}$$

   Gli elementi appartengono ad A e b
3. **Differenza**: si indica con

   $$A \setminus B = \{x | x \in B \wedge \notin A\} \tag{1.4}$$

   Gli elementi appartengono a B ma **non** ad A
4. **Prodotto cartesiano**: si indica con

   $$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \tag{1.5}$$

   Si forma una coppia di elementi (a, b)

[1] N Contenuto in Z

[2] Per numeri irrazionali si intende tutti quei numeri che non possono essere scritti sotto forma di frazioni come ad esempio alcune radici quadrate o il π

Esempio di prodotto cartesiano Se avessimo un insieme che raggrupperebbe un tavolo e un altro insieme una sedia il prodotto cartesiano sarebbe dato dalla coppia di elementi (tavolo,sedia). Allo stesso modo se dovessimo fare il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avremmo come risultante $\{(x, y)\}$, ovvero il *piano cartesiano*

1.3.1 Operazioni con insiemi vuoti

Se abbiamo un insieme vuoto che si indica: $\emptyset$, consideriamo l'insieme senza nessun[3] elemento. In questo caso avremo:

$$A \cup \emptyset = A; A \cap \emptyset = \emptyset \tag{1.6}$$

[3] 0 è considerato un elemento, quindi se un insieme ha come elemento solo 0 non è vuoto

Capitolo 2

NUMERI COMPLESSI

I **numeri complessi** $\mathbb{C}$ sono delle convenzioni create per riuscire a dare soluzioni per alcune equazioni che nel campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ non potrebbero esistere. Facciamo un esempio:

$$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow \emptyset \tag{2.1}$$

Se fossimo nel campo dei reali questa equazione non avrebbe alcuna soluzione, cioè $\emptyset$. Per ovviare a tale problema i matematici hanno creato i numeri complessi, che sono formati da una parte reale e una **immaginaria**.

2.1 La parte immaginaria dei complessi

Parlando appunto della parte immaginaria esiste una convenzione per la quale $i^2 = -1$, dove i sta per **immaginario**. Adesso prendendo in considerazione la precedente equazione possiamo avere le soluzioni:

$$x^2 + 9 = 0 \tag{2.2}$$
$$x^2 = -9 \tag{2.3}$$
$$x^2 = (-1) * 9\text{sostituisco il -1 con la i} \tag{2.4}$$
$$x^2 = 9i^2 \tag{2.5}$$
$$x = \pm\sqrt{9i^2} \tag{2.6}$$
$$x = \pm 3i \tag{2.7}$$

Notiamo che quindi attraverso l'uso dei numeri complessi riusciamo a risolvere ogni tipo di equazione e in questo senso possiamo immaginare che $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow a + ib$, dove a rappresenta la parte reale mentre ib la parte immaginaria, con $a, b \in \mathbb{R}$. Stiamo quindi parlando di un prodotto cartesiano (sezione 1.3), nel quale $\mathbb{C} = \{a + ib \quad | \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$. Nel piano la soluzione di questo prodotto cartesiano $a + ib$ è identificata da un **vettore posizione** che sarebbe la diagonale del rettangolo avente come lati a e b.

2.2 I reali sono contenuti nei complessi

Perchè diciamo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$? La risposta è molto semplice poichè se ci pensiamo noi possiamo scrivere qualsiasi numero reale come un complesso con parte immaginaria 0 : $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + 0i \in \mathbb{C}$. Facendo un esempio reale potremmo scrivere $3 = 3 + 0i$, e anche $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + 0i$, e così per qualsiasi altro numero $\in \mathbb{R}$

2.3 Somma e prodotto tra 2 complessi

Per quanto riguarda la somma algebrica e il prodotto di due complessi è molto semplice poichè possiamo considerarli come polinomi:

- Per **sommare** due numeri complessi $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ basta semplicemente, come per un polinomio, sommare i termini simili:$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

- Per **moltiplicare** due complessi utilizziamo la proprietà distributiva come nei polinomi: considerando quindi sempre $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, il prodotto è: $(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$, dove $(a_1a_2 - b_1b_2)$ è la parte *reale* e $i(a_1b_2 + b_1a_2)$ è la *parte immaginaria*

2.4 Coniugato di un numero complesso

Daato un numero complesso $z = a + ib \in \mathbb{C}$, si dice suo coniugato $\bar{z} = a - ib$. Quindi possiamo asserire che il coniugato di un numero complesso ha parte immaginaria **opposta**: infatti se sommo o moltiplico z e $\bar{z}$ noterò che si eliderà la parte immaginaria tornando così ad un numero $\in \mathbb{R}$

2.5 Forma trigonometrica di un numero complesso

Figure 2.1: FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

Dato un $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a + ib$:

- Chiamo il **modulo** del vettore posizione ρ;

- Chiamo l'**angolo** che il vettore forma con il verso *positivo* dell'asse x θ;

Ora, ricordando le formule trigonometriche di un triangolo rettangolo[1] possiamo asserire che:

$$a = \rho * \cos\theta \tag{2.8}$$
$$b = \rho * \sin\theta \tag{2.9}$$
$$z = a + ib = \rho * \cos\theta + i(\rho * \sin\theta) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2.10}$$

Inoltre ricordiamo che il modulo del vettore, in quanto lunghezza sarà sempre positivo e si indica con $|z| >= 0$ e inoltre si dice che $|z| = 0 \leftrightarrow z = 0$. Le proprietà della somma e del prodotto in valore assoluto sono inoltre:

- $|z_1 + z_2| <= |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|$

[1]Le formule trigonometriche dicono che l'ipotenusa è uguale a un cateto per il seno dell'angolo opposto o a un cateto per il coseno dell'angolo adiacente, escluso 90 gradi

Capitolo 3

STRUTTURE ALGEBRICHE

3.1 Operazioni binarie

Prima di comprendere bene cosa siano le tre strutture algebriche **gruppo**, **anello** e **campo**, dobbiamo comprendere bene il concetto di **operazione binaria**. Quando noi eseguiamo un'operazione non stiamo facendo altro che dati due numeri ne viene fuori un terzo. Se assumiamo come operazione la somma e prendiamo la coppia di numeri 3 e 5 avremo: $(3, 5) \to 8$. Questo ovviamente vale per qualsiasi operazione, quindi possiamo descrivere un'operazione binaria ϕ come una **funzione** che associa a una **coppia** (non a caso vengono denominate operazioni *binarie*) di elementi una somma, differenza, prodotto... ovvero un numero:

$$\phi : A \times A \to A \tag{3.1}$$

Un'operazione binaria si dice inoltre **interna** se il risultato dell'operazione appartiene all'insieme di partenza. Esempio: assumiamo che $\mathbb{N}$ sia l'insieme di partenza per cui deve essere $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, siano dati $(1, 6)$ come coppia di $\mathbb{N}$:

- Se li **sommiamo**: $(1, 6) \to 7 \in \mathbb{N}$, l'operazione somma **è interna**
- Se li **sottraiamo**: $(1, 6) \to -5 \notin \mathbb{N}$, l'operazione differenza **non è interna**

3.2 Strutture algebriche: Gruppo

Avendo spiegato cosa significhi realmente cosa sia un'operazione binaria possiamo adesso comprendere le strutture algebriche partendo dalla piu semplice, ovvero **il gruppo**. Come operazione di riferimento fissiamo la somma anche se le regole valgono per tutte le operazioni e definiamo $(\mathbf{G}, +) =$ **gruppo**; il gruppo quindi si indica con $\mathbf{G}$ ed è un insieme su cui è definita un'operazione, in questo caso la somma. Affinchè esista il gruppo devono essere soddisfatte 3 **proprietà**:

- **Proprietà associativa**: $(a + b) + c = a + (b + c) \forall a, b, c \in G$, quindi l'operazione deve godere della proprietà associativa, come ad esempio la somma

- Esiste l'**elemento neutro**: è quell'elemento e tale che $e * a = a * e = a$, dove con $*$ si intende qualsiasi operazione. Nella somma in questo caso l'elemento neutro è 0, infatti $a + 0 = 0 + a = a \forall a \in G$

- Esiste l'**inverso** di ogni elemento: in questo caso rispetto alla somma l'inverso dato un elemento a è $(-a) \in G$

Se queste 3 proprietà vengono soddisfatte il gruppo esiste. Se è soddisfatta anche la **proprietà commutativa** $(a+b) = (b+a)$, esiste il **gruppo abeliano**.

Esempio $(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo? Vediamo se soddisfa tutte le proprietà del gruppo:

1. L'associativa vale

2. Esiste l'elemento neutro 0

3. L'inverso $(-a) \notin \mathbb{N}$, quindi **non vale**

Quindi $(\mathbb{N}, +)$ non è un gruppo; se invece avessimo preso in considerazione $(\mathbb{Z}, +)$ dove valgono tutte le proprietà, anche l'inverso, questo è un gruppo.

3.3 Strutture algebriche: Anello

Se nel gruppo avevamo preso in considerazione solo un'operazione, nell'**anello** dobbiamo prenderne in considerazione due. Consideriamo l'anello che indichiamo con **A**: $(A, +, \cdot) =$ anello. Per esistere l'anello devono valere 6 proprietà: le prime 4 le abbiamo elencate già nel gruppo, ovvero la proprietà associativa, l'elemento neutro, l'inverso e la commutativa, e devono valere rispetto alla prima operazione, ovvero la somma, e le altre 2 devono valere rispetto alla seconda, in questo caso il prodotto, e sono:

- La proprietà **associativa**, rispetto al **prodotto** in questo caso, quindi: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

- La proprietà **distributiva**, che distribuisce il **prodotto** sulla **somma** in questo caso, quindi: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Se vale, oltre a queste due, la proprietà **commutativa** della seconda operazione, in questo caso il prodotto, l'anello si dirà **anello commutativo**

3.4 Strutture algebriche: Campo

Si dice **campo** e si indica con K quell'insieme per ogni elemento $\neq 0$ e che ha inverso $\frac{1}{a}$, rispetto alla seconda operazione, appartenente all'insieme di partenza, per cui $\frac{1}{a} \in K$.

Esempio $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è campo? L'insieme $\mathbb{Z}$ comprende gli interi per cui $\mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2 \pm 3....\}$, ora consideriamo l'inverso di -3 che è uguale a $-\frac{1}{3}$, per quanto riguarda il prodotto, ma $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, di conseguenza $\mathbb{Z}$ non contiene tutti gli inversi del prodotto. Possiamo quindi concludere che $\mathbb{Z}$ **non** è campo. La stessa cosa non vale ad esempio per $\mathbb{Q}$ infatti ad esempio l'inverso di $\frac{2}{3} \to \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$, quindi $\mathbb{Q}$ è campo.

In conclusione quando parliamo di campo escludiamo già in partenza $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$. Quindi dato un elemento $a \in K$ esso appartiene ai numeri razionali, reali o complessi.

Capitolo 4

MATRICI

Una **matrice** è una tabella con delle righe e delle colonne. Esempio: visualizziamo una matrice con 3 righe e 4 colonne, che viene denominata matrice 3×4 o 3×4.

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & a_{ij} & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \; (4.1)$$

Quindi abbiamo indicato con n il numero di colonne e con m il numero di righe per cui abbiamo una matrice $m \times n$, la notazione di un elemento di una matrice è a_{ij} dove i rappresenta la riga dell'elemento e j la colonna

4.1 Operazioni tra matrici

Possiamo eseguire diverse operazioni con le matrici, come qui di seguito elencate.

4.1.1 Somma

Due matrici per essere sommate devono avere **uguale grandezza**. Ad esempio una 3×4 posso sommarla solo con una 3×4 e il risultato sarà una 3×4. Una volta soddisfatta questa condizione sommiamo gli elementi delle **corrispondenti** posizioni.

Esempio Sommiamo due 3×4:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 4 & -2 \end{pmatrix}$

A + B= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

4.1.2 Prodotto esterno

Si tratta di un prodotto numero $\times$ matrice quindi dato una costante h e una matrice A calcolo: $h \cdot A$. L'operazione si svolge semplicemente moltiplicando h per tutti gli elementi della matrice.

4.1.3 Prodotto tra matrici

Viene detto anche prodotto riga per colonna. Affinchè $A \cdot B$ si possa fare si deve verificare una **condizione**: ovvero che il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di righe della seconda per cui ad esempio: se $A = 3 \times 4$ e $B = 4 \times 2$ si può moltiplicare e avremo come risultante una 3×2 poichè i "medi" sono uguali. Se invece avessimo avuto $A = 3 \times 4$ $B = 3 \times 4$ il prodotto **non esiste**. Si procede in questo modo:

- Si fissa la prima **riga** e si moltiplicano gli elementi corrispondenti della prima **colonna**(il primo della riga con il primo della colonna, il secondo della riga con il secondo della colonna...), poi della seconda colonna, terza fino a quando non finiscono le colonne

- Si fissa la seconda **riga** e si procede scorrendo le **colonne** moltiplicando i vari elementi corrispondenti

- Il procedimento arriverà fino a quando, fissata l'ultima riga, si scorreranno le colonne moltiplicando sempre gli elementi corrispondenti.

4.2 Proprietà delle matrici

Nelle matrici vi sono proprietà che valgono come nel prodotto tra numeri e proprietà che non valgono:

- La **legge di annullamento del prodotto** non vale: se $A \cdot B =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

  La matrice risultante di soli zeri chiamata Ω, è il risultato del prodotto di $A \cdot B$ dove $A \neq \Omega \wedge B \neq \Omega$. Quindi non è piu come nella legge di annullamento del prodotto in cui se il prodotto risulta 0, almeno uno dei due fattori deve essere 0.

- La **proprietà commutativa** non vale: $A \cdot B \neq B \cdot A$
- La **proprietà associativa** vale: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
- La **proprietà distributiva** vale: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

4.2.1 Matrice quadrata

Una matrice si dice **quadrata**, quando ha lo stesso numero di righe e colonne, ovvero è una $n \times n$ e si può distinguere in due modi in base agli elementi della **diagonale principale** (a_{11}, a_{22}, a_{33}) cioè quella che va da sinistra a destra:

- Se la diagonale è formata solo da 1, e il resto degli elementi è 0, la matrice viene chiamata **identica** o **identità**
- Se la diagonale è formata da elementi $\neq 0$, e il resto degli elementi è 0, la matrice viene chiamata **matrice diagonale**
- Se sopra o sotto la diagonale si forma un **triangolo di zeri**, rispettivamente la matrice viene chiamata **matrice triangolare superiore** o **inferiore**

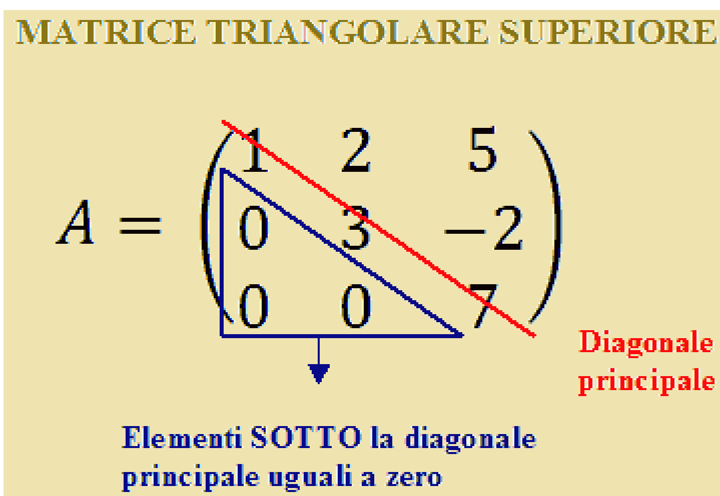


Figure 4.1: Matrice triangolare

4.2.2 Matrice trasposta e simmetrica

- La **Matrice trasposta di una qualsiasi** $m \times n$, si indica con A^t, ed è una matrice dove si scambiano le righe con le colonne

- La **Matrice simmetrica** è una matrice la cui trasposta coincide con quella di partenza, cioè $A^t = A$. Il procedimento per capire se una matrice è simmetrica è molto semplice: bisogna confrontare la riga e la colonna facendo una sorta di "L" rovesciata e vedendo se gli elementi della prima L sono uguali e poi passare all'elemento successivo.

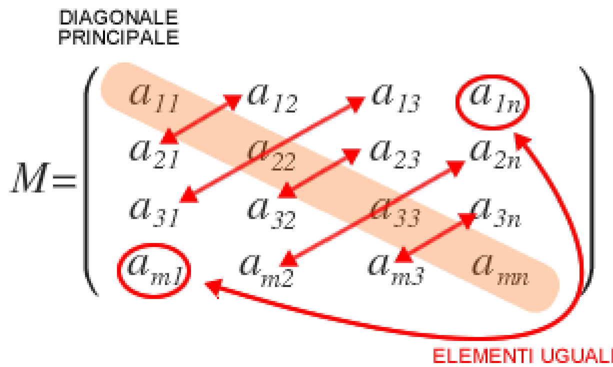


Figure 4.2: Matrice simmetrica

4.3 Determinanti e riduzioni

Il **determinante** è numero che possiamo ricavare solo dalle **matrici quadrate**. Vediamo adesso partendo da una 2×2 come si trova il determinante.

4.3.1 Determinante di una 2×2

Assumendo una qualsiasi matrice 2×2, il suo determinante è la differenza del prodotto degli elementi della **diagonale principale** con il prodotto degli elementi della **diagonale secondaria**.

Esempio Data la matrice: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Il determinante, che può essere indicato come **det A** oppure $|\mathbf{A}|$, sarà: $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

4.3.2 Determinante di una 3×3

Assumendo una qualsiasi matrice 3×3, il suo determinante si trova effettuando la somma delle **tre diagonali principali** meno il prodotto delle **tre diagonali secondarie**. Utilizziamo la **regola di Sarrus** che vale solo per le 3×3. Si trovano le tre diagonali affiancando alla matrice di partenza le prime due colonne ricopiate

Esempio Abbiamo una generica 3×3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Affianchiamo alla matrice le prime due colonne ricopiate: $\begin{matrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

Facciamo la somma dei prodotti delle tre diagonali principali , ovvero le parallele alla principale, e lo sottraiamo alla differenza dei prodotti delle tre secondarie, ovvero le parallele alla secondaria:

$$|A| = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}) - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) \tag{4.3}$$

4.3.3 Determinante di una 4×4

Per trovare il determinante di una 4×4 utilizziamo il **teorema di Laplace n.1** il quale fa uso dei **complementi algebrici**

Complementi algebrici

Il complemento algebrico di un dato elemento a_{ij}, indicato con A_{ij} è :
$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det$ (matrice che si ottiene tagliando la i-esima riga e la j-esima colonna).
Quindi il primo fattore del prodotto $(-1)^{i+j}$ determina il segno del determinante che deve essere calcolato tagliando la i-esima riga della matrice di partenza e la j-esima colonna della matrice di partenza. Se trovassimo tutti i complementi algebrici della matrice di partenza si otterrebbe la cosiddetta **matrice aggiunta**, che sarebbe la matrice dei complementi algebrici **trasposta**, ovvero nel quale scambiamo le righe con le colonne.

Teorema 1 *Il teorema di Laplace per trovare il determinante di una qualsiasi $n \times n$ si sviluppa in tal modo:*

- *Si sceglie una qualsiasi riga o colonna della matrice di partenza. Conviene scegliere sempre la riga o colonna con più zeri per facilitare i calcoli.*
- *Per trovare il determinante si fa il prodotto degli elementi della riga (o colonna) per il loro complemento algebrico e si sommano tutti i prodotti*

Esempio Scegliamo la prima riga per trovare il determinante di una 4×4. Il determinante sarà:

$$detA = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} \tag{4.4}$$

Laplace inoltre formulò un altro teorema, ovvero il **teorema n.2 di Laplace** che dice:

Teorema 2 *Sia A una matrice $n \times n$. Fissiamo* ***due righe parallele*** *i,j con $i \neq j$, o colonne; se moltiplichiamo ogni elemento della riga i-esima con il corrispondente complemento algebrico della riga j-esima e li sommiamo otterremo come risultato* ***zero****.*

4.3.4 Proprietà dei determinanti

I determinanti godono delle seguenti proprietà:

1. Scambiando 2 righe o 2 colonne il determinante **cambia di segno**.

   Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
   $|A| = 10 - 12 = -2$; $|A_1| = 12 - 10 = 2$

2. - Se ho 2 righe o colonne **uguali** il loro determinante sarà 0
   - Se ho una riga o colonna **nulla** il loro determinante sarà 0

3. Se ho una riga o una colonna con un **multiplo** in comune posso trovare il determinante facendo "uscire" il multiplo dalla matrice e facendo il prodotto esterno del multiplo per la nuova matrice

4. Il determinante di una **matrice trasposta** è uguale al determinante della matrice di partenza

5. Il determinante di una **matrice triangolare**, superiore o inferiore, è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale

6. Se eseguo una **trasformazione lineare** di una riga o colonna il determinante della matrice di partenza sarà uguale al determinante della nuova matrice

   Come si fa una trasformazione lineare? Una riga o colonna (in questo caso prendiamo in considerazione una riga R_i) può essere trasformata in tal modo: $R_i \to R_i + \lambda R_j$; in questo caso i rappresenta una riga della matrice che è uguale alla somma di quella riga più λ, che è una **costante** qualsiasi tale che $\lambda \in \mathbb{R}$, moltiplicato per una riga j della matrice, infine sostituiamo la nuova riga creando così una nuova matrice con determinante uguale a quello della matrice di partenza

4.4 Minori di una matrice

Prima di introdurre cosa sono i **minori di una matrice**, diamo una breve definizione dell'**ordine di una matrice**: si dice ordine di una **matrice quadrata**[1],

[1] E' importante comprendere che l'ordine può esistere solo per le matrici quadrate

ovvero di una $n \times n$, il numero di righe o di colonne della stessa(ES: $2 \times 2 =$ matrice di ordine 2). Avendo introdotto il concetto di ordine possiamo definire il minore di ordine p di una matrice: esso non è altro che il determinante di una della **sottomatrici quadrate** [2] di ordine p della matrice di partenza. Si dirà **minore di ordine massimo** il determinante di ordine massimo della matrice di partenza.

Esempio di minore Abbiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Calcoliamo uno dei suoi minori, tagliando ad esempio la prima colonna e trovando una sottomatrice quadrata 3×3: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Calcoliamo il determinante di questa sottomatrice che sarà il minore: minore $= |A_1| = -6$

4.4.1 Teorema di Binet

Il **teorema di Binet** ci dice che il determinante di un prodotto è uguale al prodotto dei determinanti:

Teorema 3 *Siano A e B due* ***matrici quadrate****; si ha che* $|(A \cdot B)| = |A| \cdot |B|$

4.5 Rango di una matrice

Data una matrice A si dice che il rango di A, indicato con $r(A)$ o $\rho(A)$, è:

Definizione 1 *L'****ordine massimo*** *del minore non nullo* ($\neq 0$)[3]

Definizione 2 *Il numero di* ***elementi speciali*** *di una* ***matrice ridotta***[4]

4.5.1 Riduzione e calcolo del rango

Una matrice può essere **ridotta per riga o colonna**:

- Una matrice si dice **ridotta per riga** se presenta in ogni riga almeno un elemento $\neq \mathbf{0}$, detto **elemento speciale**, che al di sotto presenta una **colonna di zeri**[5].

[2] Ovviamente se la matrice di partenza è quadrata, possiamo calcolare direttamente il determinante

[3] utilizziamo il calcolo del minore solitamente per le matrici quadrate

[4] Solitamente utilizzato per le matrici $n \times m$

[5] In ultima riga prendiamo per convenzione l'elemento $\neq 0$ che non ha colonna di zeri per ovvi motivi

Esempio di matrice ridotta per riga $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}$

In questo caso quindi abbiamo 4 elementi speciali che assumiamo $\neq 0$ $(a_{11}, a_{24}, a_{32}, a_{43})$; in questo caso la matrice è ridotta per riga. In relazione al **calcolo del rango** possiamo dire che per una matrice ridotta per riga ha rango $r(A) =$ **numero di elementi speciali**; quindi nel caso di prima il rango sarà uguale a 4. Attenzione alle **righe nulle**, ovvero costituite solo da zeri, se si trovano in ultima riga e come se non valessero; quindi la matrice è lo stesso ridotta per riga.

Operazione di riduzione Esiste un metodo per ricavare una **matrice ridotta**, che chiamiamo A^r, equivalente alla matrice di partenza (con lo **stesso rango**). Questo metodo ciene chiamato **operazione di riduzione** ed è una **trasformazione lineare** di una riga: $R_i \to R_i + \lambda \cdot R_j$. Tradotta praticamente:

- trasformiamo la riga dell'elemento, sotto l'elemento speciale, che devo sostituire con lo zero:
  - Nell'operazione prendiamo la riga fissata in precedenza e gli sommiamo il prodotto tra $\lambda \in k$, che inizializziamo come il rapporto fra l'elemento che devo sostituire e l'elemento speciale, e la riga dell'elemento speciale
- Si procede in tale modo per le altre righe fino ad ottenere una **matrice ridotta**

Esempio di riduzione Abbiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Troviamo la ridotta:

- Definisco nella prima riga un **elemento speciale** $\neq 0$ e scelgo $a_{12} = 1$
- Sotto l'elemento speciale deve esserci la **colonna di zeri** quindi trasformo la riga 2 con la formula precedentemente definita: $R_2 \to R_2 - \frac{1}{1} \cdot R_1 = R_2 - R_1$; in questo caso abbiamo considerato come λ il rapporto tra l'elemento da sostituire con lo zero (1) e l'elemento speciale (1), mentre, la riga dell'elemento speciale da moltiplicare con λ è R_1
- Svolgiamo i calcoli: $R_2 - R_1 = (1, -1, -2, 2) - (-1, 1, 2, 3) = (2, 0, -4, -1)$
- Sostituiamo la riga nella matrice. Quindi $A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & \mathbf{0} & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
- Utilizziamo lo stesso metodo per trovare sostituire l'elemento della terza riga con zero: $R_3 \to R_3 - \frac{1}{1} \cdot R_1 = R_3 - R_1$;

- Sostituiamo direttamente nella matrice la nuova terza riga $A'' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & \mathbf{0} & -4 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & -5 & -2 \end{pmatrix}$

- Abbiamo trovato solamente trovando la colonna di zeri partendo dalla prima riga; anche altri 2 elementi speciali: $a_{21} = 2$ e $a_{33} = 5$

- Sapendo che la matrice ha **3 elementi speciali**, avremo che $\mathbf{r(a) = 3}$

Scambio di righe A volte per trovare le colonne di zeri può essere utile **scambiare le righe**, o colonne di una matrice. Possiamo scambiare le righe di una matrice ma avremo che se facciamo un numero dispari di scambi, ad esempio 1 scambio, il determinante cambia di segno; se facciamo un numero pari di scambi il determinante non cambia di segno. Il rango invece non cambia mai di segno.

4.6 Matrice inversa

Definizione 3 *Data una qualsiasi matrice quadrata A; la **matrice inversa** A^{-1}, con $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$, è:* $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_a)^t$.

Quindi analizzando la matrice inversa notiamo che ha una **condizione di invertibilità** che è $|A| \neq 0$ ed è il risultato del rapporto fra la **matrice aggiunta trasposta**, ovvero la matrice dei complementi algebrici trasposta (quella in cui scambiamo le righe con le colonne), fratto il determinante di A che deve essere sempre $\neq 0$

4.6.1 Teorema sulle matrici invertibili

Data la definizione di matrici inversa si deduce un teorema che dice:

Teorema 4 *Data una matrice $A \in k^{n,n}$:*

1. *A è invertibile* $\leftrightarrow |A| \neq 0$;
2. $|A| \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_a)^t$;
3. *A è invertibile* $\rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$;

Dimostrazione Dimostriamo il **punto 1**, avendo come **ipotesi**, che è il nostro **punto di inizio** e **non** può essere **negata**, IP: "A è invertibile". La tesi, che è il nostro **obiettivo** e può essere negata in una **dimostrazione per assurdo**, è TS: "$|A| \neq 0$". Ricordiamo che essendo una **doppia implicazione** dobbiamo dimostrare l'**andata**, o **condizione necessaria** e il **ritorno**, **condizione sufficiente**.

- A è invertibile (IP) $\rightarrow |A| \neq 0$ (TS) (**condizione necessaria**): se A è invertibile $\rightarrow \exists A^{-1}$, sappiamo inoltre che $A \cdot A^{-1} = I$, dove I è la **matrice identica**, ovvero quella matrice con la diagonale principale fatta da 1 e il resto degli elementi è 0. Calcoliamo i **determinanti** di entrambi i membri e sappiamo per il **teorema di Binet** (Teorema 4.4.1) che $|A \cdot A^{-1}| = |I| \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = |I|$ e sappiamo inoltre che il **determinante di una matrice identica** è **1**. Quindi avremo $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. Ma se il prodotto è uguale a 1 non esiste un fattore che possa essere uguale a 0, quindi $|A| \neq 0$, c.v.d

- $|A| \neq 0 \rightarrow A$ è invertibile (IP) (**condizione sufficiente**): utilizziamo in questo caso la formula della matrice inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_a)^t$. Faccio il prodotto con A e lo impongo uguale alla matrice identica I, e dimostro se questo prodotto risulta: $A \cdot (A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_a)^t) = I$. Supponiamo di avere una 3×3:

$$\frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & ... & ... \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & ... & .... \\ .... & .... & .... \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

  Notiamo già solamente dalle prime due righe che si verificano i due **teoremi di Laplace**, infatti l'elemento $a_{11} = 1$ per **Laplace n.1**(Teorema 1) e $a_{21} = 0$ per **Laplace n.2**(teorema 2). Infine se completiamo tutti i calcoli noteremo che la diagonale principale è formata da soli 1 e, il resto degli elementi, è zero: parliamo quindi di una **matrice identica** c.v.d.

Dimostrando il punto 1; abbiamo dimostrato il **punto 2** poichè abbiamo applicato realmente la formula e abbiamo visto che corrisponde a quella di A^{-1}. Dimostriamo adesso il punto 3:

- IP: **A invertibile**, TS: $\mathbf{A^{-1}}| = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|}|$. Se A invertibile $\rightarrow \exists A^{-1} | A \cdot A^{-1} = I \rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = |I| \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ c.v.d

4.6.2 Proprietà della matrice inversa

La matrice inversa ha la proprietà per cui: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{A^{-1}}$; mentre $(A \cdot B)^{-1} \neq A^{-1} \cdot B^{-1}$

Capitolo 5

VETTORI E SPAZI VETTORIALI

5.1 Grandezze scalari e vettoriali

Fino ad oggi abbiamo parlato di **grandezze scalari**, ovvero grandezze contraddistinte da un numero $\in k$ (campo), solitamente $\in \mathbb{R}$. Introduciamo adesso anche le **grandezze vettoriali** che sono invece contraddistinte da:

1. **Modulo**: ovvero la **lunghezza** di un vettore, che è **sempre positiva**;

2. **Direzione**: ovvero la **retta** su cui giace il vettore;

3. **Verso**: ovvero dove punta il vettore attraverso il simbolo di **freccia**.

In fisica, ad esempio, sono moltissime le grandezze vettoriali che si studiano: la **forza** $\vec{F}$; la **velocità** $\vec{v}$, ecc.

5.2 Modulo di un vettore

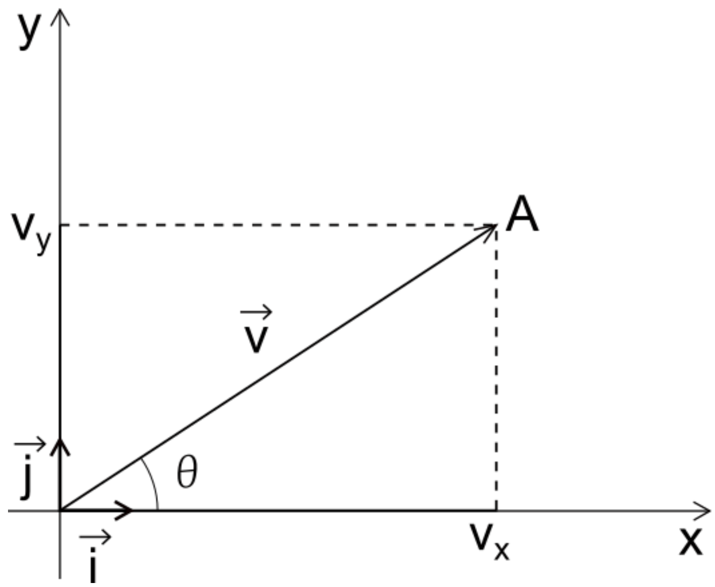


Figure 5.1: Vettore uscente dall'origine

Dato un vettore $\vec{v}$ che parte dall'origine, le coordinate di A, chiamate anche **componenti del vettore**, saranno $a(v_x, v_y)$. Considerando adesso il *triangolo rettangolo* OAH, con $H \equiv v_x$, troveremo il modulo del vettore $\vec{v}$, denominato con $|\vec{v}|$ con il **teorema di pitagora**: $|\vec{v}| = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Questa formula può essere generalizzata anche nello **spazio tridimensionale**: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

5.2.1 Versore

Il vettore con **modulo uguale a 1** è chiamato anche *vettore unitario* o **versore** e si indica $\hat{\imath}$. La caratteristica di questo tipo di vettore è che rappresenta l'unità di misura, il verso e la direzione dell'*asse cartesiano*, quindi, possiamo dire che è una rappresentazione "in piccolo" degli assi cartesiano. Inoltre le componenti di un vettore possono essere scritte anche come versore: se ad esempio abbiamo $v = (1, 2) = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

5.2.2 Vettore nullo

Quando il vettore ha **modulo uguale a 0**, viene chiamato **vettore nullo** $\vec{0}$, e non ha nè modulo (quindi è un **punto**), nè una direzione definita, nè un verso definito.

5.3 Operazioni con i vettori

Possiamo eseguire diverse operazioni con i vettori:

1. **Somma**: Per eseguire la somma fra 2 vettori possiamo utilizzare sia dei metodi *grafici*, che un metodo *algebrico*:

    - Per quanto riguarda i metodi *grafici* esistono 2 modi per sommare i vettori: metodo del **parallelogrammo** o metodo del **punta-coda**. Il primo prende le **parellele** dei vettori per formare appunto un parallelogramma, di cui la diagonale sarà il **vettore somma**. Il secondo metodo si basa sull'unire la punta di un vettore con la coda dell'altro; il vettore somma sarà uguale al vettore che unisce la punta di un vettore con la coda di un altro.

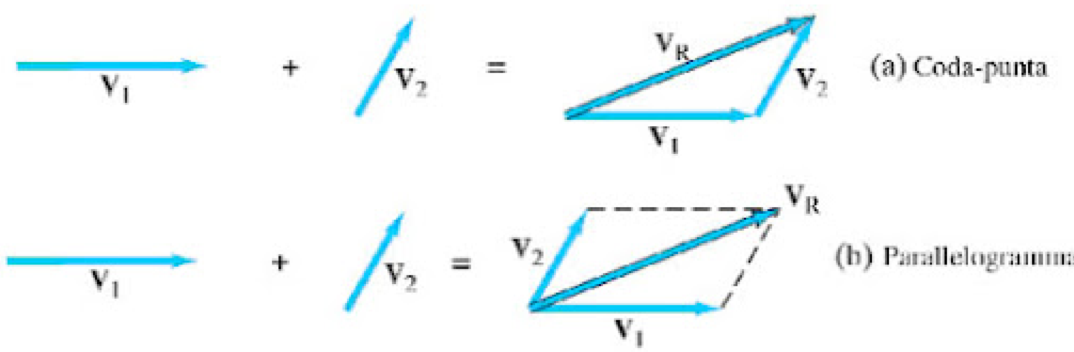


Figure 5.2: Metodo del parallelogramma e del punta coda

    - Per quanto riguarda il metodo *algebrico* si fa la **somma dei componenti**: dati $\vec{v}_1 = \vec{OP}_1 \rightarrow P_1(v_{1x}, v_{1y})$ e $\vec{v}_2 = \vec{OP}_2 \rightarrow P_1(v_{2x}, v_{2y})$ con P_1 e P_2 componenti rispettivamente di $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$; la somma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1x}+v_{2x}, v_{1y}+v_{2y})$. Possiamo inoltre estendere la somma tra componenti in un *piano tridimensionale*: $\vec{v}_1+\vec{v}_2 = (v_{1x}+v_{2x}, v_{1y}+v_{2y}, v_{1z}+v_{2z})$. Esempio: dati $\vec{v}_1 = (5, 1)$ e $\vec{v}_2 = (-2, 3)$; $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (3, 4)$

2. **Differenza**: come per la somma possiamo utilizzare o metodi grafici o il metodo algebrico:

    - Per quanto riguarda i metodi *grafici* utilizziamo i 2 modi che utilizzavamo nella somma per sottrarre i vettori: metodo del **parallelogrammo** o metodo del **punta-coda**. La differenza è che dobbiamo pensare di porre un vettore con **verso negativo** poichè $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$.
    - Per quanto riguarda il metodo *algebrico* si fa la **differenza dei componenti**: è lo stesso metodo che utilizzavamo per la somma, sem-

plicemente però non sommiamo i componenti ma facciamo la differenza: $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (v_{1x} - v_{2x}, v_{1y} - v_{2y})$

3. **Prodotto di uno scalare per un vettore**

   Il prodotto di uno **scalare per un vettore** è un prodotto del tipo $k \cdot \vec{v} \quad \wedge \quad k \in R$. Il **risultato** sarà un **vettore** con:

   - **Modulo**: $|\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$;
   - **Direzione**: direzione uguale al vettore di partenza;
   - **Verso**: verso **uguale** se lo **scalare** è **positivo**; **opposto** se lo scalare è **negativo**.

     Per quanto riguarda le **componenti**: dati k scalare e $\vec{v} = (v_x, v_y)$; $k \cdot \vec{v} = (k \cdot v_x, k \cdot v_y)$. Nello spazio tridimensionale avremo

     $$k \cdot \vec{v} = (k \cdot v_x, k \cdot v_y, k \cdot v_z)$$

4. **Prodotto scalare tra 2 vettori** Il **prodotto scalare tra 2 vettori** è un prodotto del tipo $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e si legge "*v scalare w*" ed è uguale al prodotto del modulo di v per il il modulo di w per il coseno dell'angolo $\hat{vw}$: $|v| \cdot |w| \cdot cos\hat{vw}$. Il **risultato**, utilizzando le componenti, sarà un **valore numerico** dato dal prodotto: $\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_x, v_y) \cdot (w_x, w_y) = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_x$. Esempio: dati i vettori $\vec{v} = (-1, 2)$ e $\vec{w} = (0, -3)$; $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-1 \cdot 0) + (2 \cdot (-3)) = 5$

   Condizione di ortogonalità Avendo visto che nel prodotto uno dei fattori è il **coseno** dell'angolo formato tra i due vettori; abbiamo che se l'angolo è di 90 gradi, ovvero perpendicolare, il prodotto scalare sarà 0 poichè il coseno di 90 è zero. Abbiamo quindi $\vec{v} \perp \vec{w} \leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, di conseguenza vale anche il viceversa, cioè che se il prodotto scalare fra i 2 vettori è 0, allora essi saranno **perpendicolari**. Un esempio applicato della condizione di ortogonalità è il **prodotto scalare fra 2 versori**: i versori sono sempre perpendicolari poichè ricordiamo che sono l'unità del piano cartesiano. Di conseguenza il loro prodotto scalare sarà sempre 0, $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$

5. **Prodotto vettoriale tra 2 vettori**

   Il prodotto vettoriale tra 2 vettori, indicato con $v \wedge w$, da come **risultato** un **vettore** che ha:

   - **Modulo** uguale: $|v| \cdot |w| \cdot |sen|\hat{vw}$;
   - **Direzione** perpendicolare al piano individuato dai due vettori;
   - **Verso** dato dalla mano destra: pollice v, indice w e medio da il verso del prodotto vettoriale;

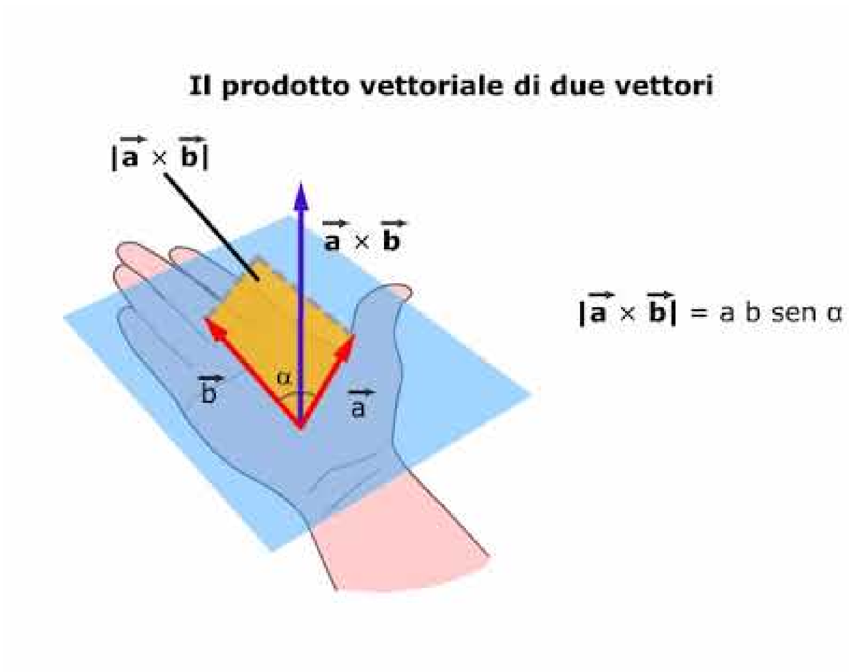


Figure 5.3: Prodotto vettoriale

Se utilizziamo le **componenti**, il prodotto $v \wedge w$ sarà:

$$v \wedge w = det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Ovviamente il determinante di questa matrice viene creato solo per rendere l'idea, poichè non possiamo trovare un determinante di una matrice che contiene vettori e valori numerici. Inoltre:

- Vale la **condizione di parallelismo** per la quale: $v \wedge w = 0 \leftrightarrow v || w$;
- **Non vale** la proprietà **commutativa**;
- Il **prodotto** tra due **versori uguali** è 0 ($\hat{i} \wedge \hat{i} = 0$); il prodotto tra due **versori differenti** da come risultato un **terzo versore** ($\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$);

6. **Prodotto misto**

Il prodotto misto è un prodotto del tipo $u \cdot v \wedge w$, in cui il **prodotto vettoriale** ha la precedenza, e il risultato sarà un valore numerico ($a \in \mathbb{R}$) che rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori. Inoltre se $u \cdot v \wedge w = 0$ allora significa che i vettori sono **complanari**, cioè stanno sullo stesso piano. Per quanto riguarda il prodotto misto tramite **componenti** abbiamo che:

$$u \cdot v \wedge w = det \begin{pmatrix} w_x & w_y & w_z \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

5.4 Spazio vettoriale

Abbiamo trattato fino ad adesso i vettori specificando che fossero bidimensionali o al massimo tridimensionali. In realtà possiamo **generalizzare** il concetto di vettore, estendendo le componenti anche a 4,5 fino alla **n-upla** con lo **spazio vettoriale**.

5.4.1 Gruppo abeliano V

Definizione 4 *Dato un insieme **V**, formato esclusivamente da **vettori**, diremo che (V, +) è un **gruppo abeliano***

Analizzando tale definizione possiamo dire che per la **somma tra 2 vettori** valgono le 4 proprietà del gruppo abeliano:

1. **Proprietà associativa**: $(v + w) + z = v + (w + z)$;
2. **Elemento neutro** che sarebbe il **vettore nullo**: $0 = (0, 0) \in V$;
3. **Inverso** che sarebbe il **vettore opposto**: $-v \in V$;
4. **Proprietà commutativa**: $v + w = w + v$;

5.4.2 Definizione di k-spazio vettoriale

Definito l'insieme V come gruppo abeliano, possiamo estendere questa definizione allo **spazio vettoriale**:

Definizione 5 *Dato un insieme **V**, esso si dice **k-spazio vettoriale**, ovvero con V su un campo k, se prendendo (V, +, ·), cioè includendo nello spazio sia l'operazione **somma** $(v + w)$ che l'operazione **prodotto esterno** $(a \cdot v)$ valgono 5 proprietà:*

1. *(V, +) deve essere un **gruppo abeliano**;*
2. *Proprietà **Associativa** del **prodotto esterno**:* $(ab) \cdot v = a \cdot (bv)$;
3. ***Elemento neutro** del **prodotto esterno**:* $1 \cdot v = v$;
4. *Proprietà **Distributiva** n.1:* $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$;
5. *Proprietà **Distributiva** n.2:* $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$;

Esempio di spazio vettoriale Vediamo alcuni esempi prendendo come insieme di riferimento $\mathbb{R}$:

- Dato $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, per $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ valgono tutte le proprietà, quindi è uno **spazio vettoriale**;
- Dato $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, per $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ valgono tutte le proprietà, quindi è uno **spazio vettoriale**;
- Dato $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$, per $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ valgono tutte le proprietà, quindi è uno **spazio vettoriale**;
- Generalizzando $\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ **n volte** possiamo dire che per $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ valgono tutte le proprietà, quindi l'insieme dei reali **n-upla** è anch'esso uno **spazio vettoriale** sul campo $\mathbb{R}$

Matrice come spazio vettoriale Per quanto riguarda le matrici possiamo anche dire che una **matrice** qualsiasi è un **vettore** "*generalizzato*", cioè formato da **n-componenti**. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow v = (1, 0, -1, 2, 3, -4) \tag{5.3}$$

Cioè abbiamo un **vettore a 6 componenti** $\in \mathbb{R}$. Inoltre avendo compreso che la matrice è un vettore possiamo anche dire che: dato $\mathbb{R}^{m,n} = \{matrici \quad m \times n\}$, $(\mathbb{R}^{m,n}, +, \cdot)$ è uno **spazio vettoriale** sul campo $\mathbb{R}$.

Condizioni di ortogonalità e parallelismo Inoltre per lo spazio vettoriale valgono le seguenti proprietà:

- **Condizione di ortogonalità**: Se il prodotto tra due vettori $v \cdot w$ è **nullo**, allora essi saranno **perpendicolari** $v \perp w$ e viceversa: $v \cdot w \leftrightarrow v \perp w$. Esempio: Dati $v = (1, 3)$ e $w = (3, -1)$; $v \cdot w = 3 - 3 = 0 \rightarrow v \perp w$.
- **Condizione di parallelismo**: $v || w$ se $\exists \lambda \in \mathbb{R} | v = \lambda w$. Esempio: $v = (1, 3)$ e $w = (3, 6) \rightarrow \exists \lambda = \frac{1}{2} | v = \frac{1}{2} w$.

Capitolo 6

SOTTOSPAZI, GENERATORI E BASI

6.1 Sottospazio

Un **sottospazio W** non è altro che uno **spazio vettoriale**, quindi che gode delle sue proprietà, contenuto all'interno di uno **spazio vettoriale** V più **grande**, quindi $W \subseteq V$. (W, +, ·) si dice di conseguenza "*W sottospazio di V*". L'**elemento neutro** sta inoltre nell'**intersezione** dei due insiemi.

6.1.1 Caratterizzazione di un sottospazio

Per verificare se un insieme W è un sottospazio di V, non ci basta quindi dire che uno è un sottoinsieme dell'altro ma abbiamo bisogno di un **criterio** che ci permetta di vedere se W è un sottospazio o meno. Potremmo quindi controllare se il sottospazio gode di tutte le proprietà dello spazio vettoriale; ma in realtà abbiamo un metodo più veloce per vedere se W è sottospazio di V. Si devono verificare due **condizioni**:

1. W deve essere **chiuso rispetto alla somma**: se prendiamo 2 vettori qualsiasi $v, w \in W$ e facciamo la somma $v + w$, questa deve **appartenere** a W: $v + w \in W$;

2. W deve essere **chiuso rispetto al prodotto esterno**: se prendiamo un valore numerico $a \in k$ e un vettore $v \in W$, allora il prodotto esterno deve appartenere a W: $av \in w$.

Esempio di caratterizzazione di un sottospazio Prendiamo adesso un sottoinsieme W dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, tale che $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x - y = 0\}$. In tale caso l'equazione $2x - y = 0$ è chiamata **equazione caratteristica** o **cartesiana** e in questo sottoinsieme W ogni vettore deve soddisfare questa equazione. Può essere anche riscritta in maniera più "compatta" trovando ad esempio la y, per cui avremmo: $y = 2x \to W = \{(x, 2x)\}$; diciamo che con questo metodo troviamo l'**elemento generico**. Adesso verifichiamo se W è sottospazio di $\mathbb{R}^2$:

1. E' chiuso rispetto alla somma? Prendiamo due **vettori generici** di W: $w_1 = (x_1, 2x_1)$ e $w_2 = (x_2, 2x_2)$; calcoliamo la **somma**: $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2))$. In questo caso $(x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in W$ poichè soddisfa l'equazione cartesiana. Di conseguenza **W è chiuso rispetto alla somma**;

2. E' chiuso rispetto al prodotto esterno? Prendiamo al solito un **vettore generico** di W $w = (x, 2x)$ e una costante $a \in k$. Eseguiamo adesso il **prodotto esterno**: $a \cdot w = a(x, 2x) = (ax, 2ax)$. Questo prodotto soddisfa l'equazione cartesiana, quindi $a \cdot w \in W$, cioè **W è chiuso rispetto al prodotto esterno**;

3. Possiamo concludere che W, essendo **chiuso** rispetto alla **somma** e rispetto al **prodotto esterno**, è un **sottospazio** di $\mathbb{R}^2$.

6.2 Intersezione e unione tra 2 sottospazi

Intersezione tra 2 sottospazi Sia V un k-spazio vettoriale con $U, W \subseteq V$, l'**intersezione** $U \cap W$ sarà il sistema formato da:

- le **equazioni cartesiane di U**;
- le **equazioni cartesiane di W**.

Inoltre avremo che $U \cap W$ sarà anch'esso un sottospazio, cioè che gode delle proprietà di uno spazio vettoriale

Unione tra 2 sottospazi Sia V un k-spazio vettoriale con $U, W \subseteq V$, l'**unione** $U \cup W$ in generale **non è sottospazio**, poichè solitamente l'elemento neutro non è contenuto nell'unione. L'unico caso in cui l'unione è sottospazio è nel **caso banale**: se $W \subseteq U \to U \cup W = U$ oppure $U \subseteq W \to U \cup W = W$. Il caso banale è quindi il caso nel quale i due insiemi dell'unione coincidono. L'unione viene calcolata considerando le **basi rispettive** (una per U e una per W), che si scrivono come righe di una matrice della quale si calcola il **rango** che corrisponde alla **dimensione dell'unione**.

6.3 Combinazione lineare

La parola stessa "*combinazione lineare*" ci da una idea di cosa effettivamente si tratti: infatti in matematica una **combinazione** è una **somma algebrica**, in questo caso di vettori; e **lineare**, deriva da linea, cioè retta, significa che i componenti della somma algebrica sono di **primo grado**. Ad esempio $v_1 + v_2 - v_3$ e $v_1 - 3v_2 + 4v_3$ sono entrambe combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3. Il **risultato** di una combinazione lineare quindi è un **vettore risultato**. Generalizzando il concetto possiamo dire che una combinazione lineare di $v_1, ..., v_n \wedge a_1, ..., a_n \in$k-spazio vettoriale è:

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + ... + a_n \cdot v_n \tag{6.1}$$

Inoltre possiamo dire che l'insieme di tutte le combinazioni lineari $\mathcal{L}(v_1, ..., v_n)$ è **sottospazio**. Inoltre abbiamo che se $u \in \mathcal{L} \rightarrow u = a_1v_1 + .. + a_nv_n$. Facciamo un esempio di combinazione lineare:

Dati 3 vettori $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$; calcolare la c.l. $v_1 + v_2 - v_3$: $(2, 1, 0) + (-1, 1, 1) - (0, 1, 1) = (1, 1, 0)$

6.4 Generatori

Anche la stessa parola "*generatori*" ci suggerisce qualcosa sul tema che stiamo trattando: infatti se u_1 è il vettore risultato di una combinazione lineare, allora $(v_1, ..., v_n)$ sono **generatori**. Da qui le definizioni di generatore:

Definizione 6 *$v_1, ..., v_n$ si dicono **generatori** di V, se "generano" altri vettori con le loro **combinazioni lineari***

Definizione 7 *$v_1, ..., v_n$ sono **generatori** di V, se preso un qualsiasi elemento di V, esso si può scrivere come risultato di una **combinazione lineare**. Se $u \in V \rightarrow u = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n$.*

Esempio Prendiamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$; se prendiamo qualsiasi combinazione lineare i generatori saranno sempre 3: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ (rappresentazione tramite versori, sezione 5.2.1). Infatti se prendiamo la terna $u = (1, 2, -3)$ oppure $u' = (0, 2, -4)$; i generatori saranno sempre $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ per le infinite combinazioni lineari di $\mathbb{R}^3$. I generatori dello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^2$ saranno sempre 2: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$. Così vale anche per lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$ in cui i generatori sono n: $e_1, ..., e_n$[1].

6.5 Base

Definizione 8 *La **base** è formata da **generatori** che devono essere **linearmente indipendenti**.*

Ma cosa significa effettivamente linearmente indipendenti?

6.5.1 Vettori linearmente indipendenti

Dati n vettori $\{v_1, ..., v_n\}$, essi si diranno **linearmente indipendenti** se presa una loro **combinazione lineare nulla** $(a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0)$, tutti i **coefficienti** $(a_1, ..., a_n)$ devono essere **uguali a zero**. Ad esempio se avessimo

[1] A partire da $\mathbb{R}^4$, utilizziamo la lettera "e" e non i versori per generalizzare

$v_1 = (1, 1)$ e $v_3 = (3, 3) \rightarrow 3v_1 - v_2 = 0$, quindi i coefficienti sono $\neq 0$ e i vettori sono **linearmente dipendenti**. Il metodo, però, che solitamente si utilizza per stabilire se i vettori sono linearmente indipendenti è il seguente:

- Mettiamo i **vettori** come **righe di una matrice**;
- Calcoliamo il rango che ci darà il **numero di vettori linearmente indipendenti**, e le righe della matrice con elemento speciale saranno quelle linearmente indipendenti

Per quanto riguarda la base, come per i generatori, abbiamo un'altra definizione oltre la 8, che dice:

Definizione 9 *Dato un insieme V* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, *esso si dice* ***base*** *se preso un qualsiasi vettore dell'insieme V, esso si può scrivere con una* ***combinazione lineare unica*** $u = a_1v_1 + .. + a_nv_n$. *Se dovessimo trovare una combinazione lineare* $u = b_1v_1 + ...b_nv_n$, *per essere base, dobbiamo avere che* $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$.

6.6 Lemma di Steinitz

Il **lemma di Steinitz** è un teorema che si basa sul **confronto** tra un **insieme di generatori** e un **insieme di vettori linearmente indipendenti**, **diversi** per **elementi** e **cardinalità**. In particolare dice:

Teorema 5 *Dati un insieme di* ***generatori*** *e* ***vettori linearmente indipendenti****, definite in un k-spazio vettoriale V, con vettori diversi e cardinalità diversa; si ha che la cardinalità dell'insieme di generatori è* ***maggiore o uguale*** *alla cardinalità dell'insieme di vettori linearmente inipendenti:* $|G| \leq |B|$

In pratica con questo teorema affermiamo che un qualsiasi insieme di generatori e un insieme di basi definiti in un k-spazio vettoriale V ; il numero di generatori sarà maggiore o uguale alla cardinalità dell'insieme di basi.

6.6.1 Tutte le basi di V hanno lo stesso numero di vettori

Utilizzando il teorema di Steinitz, si deduce un altro teorema che recita come da titolo:

Teorema 6 *Tutte le* ***basi*** *di uno spazio vettoriale V hanno lo* ***stesso numero di vettori****.*

Dimostrazione In uno spazio vettoriale vi sono **infinite basi**. Per dimostrare questo teorema prendiamo 2 basi con elementi diversi: $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}$; $B_2 = \{v'_1, ..., v'_p\}$. Dobbiamo dimostrare che queste due basi hanno la **stessa cardinalità** $n = p$. Sappiamo che ogni base è formata da **generatori** che devono essere **linearmente indipendenti**:

- Suppongo che il primo insieme B_1 sia fatto solo da generatori, e il secondo insieme B_2 solo da vettori linearmente indipendenti. Dal teorema di Steinitz (teorema 5) sappiamo che la cardinalità di generatori (n) è **maggiore o uguale** di quella dei vettori linearmente indipendenti (p) quindi: $\mathbf{n \geq p}$.

- Suppongo adesso il viceversa, ovvero che il primo insieme B_1 sia fatto solo da vettori linearmente indipendenti, e il secondo insieme B_2 solo da generatori. Dal teorema di Steinitz (teorema 5) sappiamo che la cardinalità di vettori linearmente indipendenti (n) è **minore o uguale** di quella dei generatori (p) quindi: $\mathbf{n \leq p}$.

- Sappiamo che per la definizione di base devono valere entrambe le definizioni:

$$\begin{cases} n \geq p \\ n \leq p \end{cases} \tag{6.2}$$

  Il risultato di questo sistema è solo uno: $n = p$, ovvero la **cardinalità delle 2 basi**, è **uguale c.v.d.**

6.7 Dimensione di uno spazio vettoriale

La **dimensione di uno spazio vettoriale**, indicata con "$dimV$", è rappresentata dalla **cardinalità della base**, ovvero dal numero di vettori che compone una base, che sappiamo essere uguale, in uno spazio vettoriale, per tutte le basi per il teorema 6. Inoltre uno spazio vettoriale ha infinite basi, ma per facilità di rappresentazione per gli **spazi vettoriali euclidei**, che sono $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, ..., \mathbb{R}^n$, hanno una **base canonica**, indicata con $\mathcal{E}$, che è una per ogni spazio euclideo. Un **sottospazio** qualsiasi invece **non ha la stessa base canonica** del suo rispettivo spazio vettoriale poichè sarebbe troppo "grande" per quel determinato sottospazio.

6.7.1 Proprietà della dimensione di uno spazio vettoriale

La **proprietà fondamentale** di uno spazio vettoriale V avente $dimV = n$ dice che se trovo n-vettori **linearmente indipendenti**, allora essi formeranno una **base** di V. Ad esempio: Se $dimV = 2$ e trovo 2 vettori linearmente indipendenti, già ho trovato una base per V.

6.7.2 Dimensione di un sottospazio

Dato un **k-spazio vettoriale** V e un **sottospazio** W di V; in generale se $\mathbf{W \subset V}$, allora $\mathbf{dimW \leq dimV}$. Se invece sia V che W hanno la **stessa dimensione** n: $dimV = n \wedge dimW = n$; non è detto che V e W **coincidono**, cioè $V = W$. Vediamo un esempio nel quale abbiamo 2 spazi vettoriali:

1. $\mathbb{R}^3$: è uno spazio vettoriale con dimensione 3, infatti la sua **base canonica** è $\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$;

2. $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y - t = 0\}$. Anche questo spazio ha dimensione 3

Trovare una base data l'equazione cartesiana Per dimostrare che $\mathbb{R}^3$ e V non coincidono dobbiamo **trovare una base di V data la sua equazione cartesiana**:

- Non possiamo prendere una base canonica su V;
- Consideriamo V con l'**elemento generico**, cioè ricaviamo dall'equazione cartesiana che $x = y + t$, per cui $V = \{(y+t,y,z,t)\}$;
- Adesso in V abbiamo 3 **variabili indipendenti** (y,z,t) e una **variabile dipendente** $(y+t)$;
- Adesso procediamo in maniera simile a una base canonica per cui poniamo 1 a una variabile indipendente e 0 alle altre variabili indipendenti e **shiftiamo** 1 tra le variabili indipendenti; la variabile dipendente per definizione dipenderà dalle indipendenti:
  - $\mathbf{y} = \mathbf{1}$: $v_1 = (0+1,1,0,0) = (1,1,0,0)$;
  - $\mathbf{z} = \mathbf{1}$: $v_2 = (0,0,1,0)$;
  - $\mathbf{t} = \mathbf{1}$: $v_3 = (0+1,0,0,1) = (1,0,0,1)$;
- In conclusione avremo la base: $B_1 = \{(1,1,0,0);(0,0,1,0);(1,0,0,1)\}$

In tal modo ho trovato una base che ha la stessa dimensione di W: $dimW = dimV = 3$ ma i due spazi **non coincidono**, già solo per il fatto che il numero di componenti di $\mathbb{R}^3$ è 3, mentre per V è 4. Per cui in generale due spazi vettoriale possono coincidere solo se sono soddisfatte tali **condizioni**:

$$\begin{cases} dimW = n \\ dimV = n \\ W \subseteq V \end{cases} \tag{6.3}$$

6.8 I 3 modi per assegnare un sottospazio

Negli esercizi può essere assegnato un sottospazio in 3 modi:

- **Equazione cartesiana**;
- **Elemento generico**;
- **Una base o un'insieme di generatori**

Ogni volta che un sottospazio viene assegnato con un modo possiamo passare agli altri 2. Abbiamo già visto come passare dall'equazione cartesiana all'elemento generico alla base nel paragrafo "Trovare una base data l'equazione cartesiana" della sezione 6.7.2. Vediamo adesso come passare **dalla base all'equazione cartesiana**.

Da una base all'equazione cartesiana Dato uno spazio vettoriale V, fissato con una sua base: $B_1 = (1, -1, 0); (0, 2, 2)$, trovare l'equazione cartesiana dello spazio vettoriale. Per definizione di base questi vettori sono **linearmente indipendenti**. Procediamo con la risoluzione del quesito:

- Ciò che facciamo è prendere una **matrice** mettendo i vettori della base in riga e aggiungere una riga per il **vettore generico** (x, y, z); ciò che otteniamo è una matrice quadrata 3×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

- Per **definizione di base**, il vettore generico sarà **linearmente dipendente** da uno dei due vettori della base. Ma se abbiamo che i vettori linearmente dipendenti sono 2, significa che il **rango** di questa matrice 3×3 dovrà essere 2 e, di conseguenza, il **determinante** dovrà essere 0 per definizione di rango;

- Per cui calcoliamo il determinante di questa matrice e lo **imponiamo a 0**. In tal modo abbiamo trovato l'equazione cartesiana.

Nel caso in cui la matrice sia **rettangolare**, non possiamo calcolare il determinante, ma, dovremo **ridurre la matrice** in modo tale che l'**ultima riga** sia tutta **nulla**, ovvero uguale a 0. Ciò significa che, una volta ridotta la matrice, i **potenziali elementi speciali** dovranno essere posti uguali a 0: in tal modo troviamo l'equazione cartesiana.

Capitolo 7

SISTEMI LINEARI

7.1 Definizione di sistema lineare

Come al solito, possiamo ricavare la definizione già dal nome del concetto che vogliamo esporre:

- **Sistema**: significa l'**intersezione di più equazioni**, ovvero gli elementi in comune;
- **Lineari**: significa che abbiamo tutte **equazioni di primo grado**

7.1.1 Equazioni lineari e formazione di un sistema lineare

Prima di comprendere al meglio il concetto di sistema lineari, vediamo qual'è la notazione generica di un equazione lineare:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \tag{7.1}$$

Notiamo che abbiamo in quest'equazione vi sono **n incognite**, uno **scalare** a per ogni incognita, chiamato **coefficiente dell'incognita**, e un **termine noto** b. Lo scalare a, in particolare, nell'equazione possiede **due indici**:

- **Il primo indice di a** e l'**indice di b** indicano l'**equazione di appartenenza**;
- **Il secondo indice di a** indica l'**incognita accanto**;

Se volessimo quindi rappresentare la **seconda equazione** dobbiamo porre l'indice di appartenenza a 2:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \tag{7.2}$$

La generalizzazione di tale concetto, rappresentando l'ultima equazione con **m**, dunque è:

$$\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m} \tag{7.3}$$

Mettendo a sistema tutte queste equazioni otteniamo un **sistema lineare di m-equazioni ed n-incognite**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{7.4}$$

7.1.2 Soluzione di un sistema lineare

La **soluzione di un sistema lineare** con *n-incognite* è una **n-upla** di numeri $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_n)$ che sostituiti con le incognite rendono l'equazione un **identità**.

Esempio Abbiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{7.5}$$

Notiamo che questo sistema lineare ha **3 incognite**, ovvero $\mathbf{n = 3}$ e 2 equazioni, ovvero $\mathbf{m = 2}$, che possiamo rappresentare come $(m \times n) = (2 \times 3)$. Possiamo risolverlo tramite il metodo di sostituzione:

$$\begin{gathered} \begin{cases} x_3 = 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = 3x_1 + 2x_2 \\ x_2 = \frac{1-4x_1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = \frac{x_1+2}{3} \\ x_2 = \frac{1-4x_1}{3} \end{cases} \\ \mathbf{S = \{x_1, \frac{1-4x_1}{3}, \frac{x_1+2}{3}\}} \end{gathered} \tag{7.6}$$

La soluzione quindi è una **terna**, infatti sapevamo che $n = 3$ e di conseguenza la n-upla risulta una terna, e inoltre $\mathbf{x_1}$ è **incognita libera o indipendente**, cioè la soluzione vale $\forall x_1$.

7.2 Rappresentazione di sistemi lineari tramite matrici

Per capire come si rappresentano i **sistemi lineari tramite matrici** partiamo da un esempio:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \tag{7.7}$$

Rappresentiamo questo sistema lineare con una matrice nella quale ogni riga è data dai **coefficienti delle incognite** di un'equazione e,inoltre, abbiamo una **colonna** che riserviamo per i **termini noti**:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

7.2.1 Rango e equazioni linearmente indipendenti

Con la matrice vista appena sopra nell'esempio possiamo fare un importante considerazione:

- Il **rango** di questa matrice rappresenta il numero di **equazioni linearmente indipendenti**, poichè, sappiamo per la definizione di rango, che questo rappresenta il numero di vettori linearmente indipendenti;

- Se in un sistema trovassimo **equazioni linearmente dipendenti** le scartiamo poichè ovviamente non ci servono

7.2.2 Matrice completa

La rappresentazione dei sistemi lineari tramite matrice viene denominata **matrice completa** di *n-incognite su m-equazioni* e si indica:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

Inoltre A rappresenta la **matrice di incognite**, ovvero la parte a sinistra del tratteggiamento verticale; mentre B rappresenta la **colonna dei termini noti**, ovvero la parte a destra del tratteggiamento verticale.

7.2.3 Soluzione di un sistema lineare con il sistema ridotto

La rappresentazione tramite matrice, può servirci a trasformare il **sistema lineare esteso** in un **sistema ridotto**, che sarà **equivalente al sistema dato** e avrà le **stesse soluzioni**. Il sistema ridotto può essere creato tramite una **riduzione per riga della matrice completa**. Facciamo un esempio data il seguente sistema lineare, con $m = 3$ e $n = 4$, cioè con 3 equazioni e 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{cases} \tag{7.10}$$

- Costruiamo quindi la **matrice completa** e poi la riduciamo per riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

- Una volta ridotta, la matrice si presenterà in tale forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -5 & \vdots & -7 \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

- Il **sistema ridotto** avrà quindi rango $r(A, B) = 3$, cioè 3 equazioni linearmente indipendenti; e sarà:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 7x_3 - 5x_4 = -7 \end{cases} \tag{7.13}$$

Metodo di sostituzione per il sistema ridotto Una volta trovato il **sistema ridotto**, dovremo risolvere questo sistema seguendo questa logica:

- partiamo dall'**ultima equazione**, poichè sappiamo che è quella più "ridotta", cioè presenta meno termini rispetto alle altre.
- ci ricaviamo un **incognita in funzione dell'altra**. Ad esempio $x_3 = 2x_4 + 6$
- Una volta trovata l'incognita dell'ultima equazione la andiamo a **sostituire nell'equazione al di sopra dell'ultima**, in una sorta di *processo inverso*, sempre trovandoci un'incognita in funzione di quella scelta nell'ultima equazione. Ad esempio $x_2+x_3+x_4 = 0 \rightarrow x_2 = -(2x_4+6+x_4)$, secondo l'esempio fatto nel punto precedente;
- Si continua così fino a che non si trova la **n-upla** di soluzioni, quindi con n incognite dobbiamo trovare n soluzioni.
- Se troviamo tutte le incognite, il sistema avrà **una sola soluzione**; se troviamo un'incognita libera, allora il sistema avrà **infinite soluzioni**

7.3 Teorema di Rouchè-Capelli

7.3.1 Teorema di Rouché-Capelli n.1

Teorema 7 *Un sistema lineare $m \times n$ (m-equazioni in n-incognite) rappresentato in* ***forma compatta*** *è:*

$$AX = B \tag{7.14}$$

In questo sistema A è la ***matrice delle incognite****, X è la* ***colonna delle incognite*** *e B è la* ***colonna dei termini noti****. Tale sistema ammette soluzioni* ***se e solo se*** *il rango di A coincide con il rango di (A, B):*

$$\textbf{sistema ammette soluzioni} \leftrightarrow \mathbf{r(A) = r(A, B)} \tag{7.15}$$

Dimostrazione

Questo teorema afferma quindi che:

$$\textit{sistema ammette soluzioni} \leftrightarrow r(A) = r(A, B) \tag{7.16}$$

Quindi in tal caso bisogna dimostrare la **condizione necessaria** "$\rightarrow$" e la **condizione sufficiente** "$\leftarrow$":

- **Condizione necessaria** : *sistema ammette soluzioni* $\rightarrow r(A) = r(A, B)$. Abbiamo quindi:
  - **Ipotesi**: sistema ammette soluzioni;
  - **Tesi**; $r(A) = r(A, B)$;
  - **Notazione**: rivolgendomi ai **sottospazi**, indico con V le **colonne della matrice completa** (A, B), che comprende quindi anche la colonna di termini noti e con W le **colonne della matrice incompleta** (A), che non comprende la colonna di temini noti. Quindi abbiamo che:
    - $V = \mathcal{L}(C_1, C_2, ..., C_n, B)$;
    - $W = \mathcal{L}(C_1, C_2, ..., c_n)$;

    Se devo dimostrare che $r(A) = r(A, B)$, nel linguaggio dei sottospazi quindi se sappiamo che il rango è il numero di vettori linearmente indipendenti, cioè il numero di vettori di una base, cioè la **dimensione dei sottospazi**. Cioè dimostro che **dim V = dim W** sapendo per certo che :

    $$\begin{cases} dim\ W \leq dim\ VW \subseteq V \end{cases} \tag{7.17}$$

    In pratica so per certo che $r(A) \leq r(A, B)$.
  - **Utilizziamo l'ipotesi** per la dimostrazione:
    - Se il sistema **ammette soluzioni**, abbiamo almeno una soluzione che sostituita alle incognite diventa:

      $$S = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\} \tag{7.18}$$

    - Tradotta in un sistema lineare, abbiamo tale situazione:

      $$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ ...... \\ ..... \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + ... + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases} \tag{7.19}$$

  * Scriviamo il sistema in **forma semicompatta**: $C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + ... + C_n\alpha_n = B$, dove C comprende la colonna dei coefficienti e B la colonna dei termini noti;
  * Notiamo che B è **combinazione lineare di** $C_1, C_2, ..., C_n$, cioè **B non è linearmente indipendente** poichè dipende dalle colonne precedenti, cioè dipende dalla matrice incompleta A;
  * Essendo B linearmente dipendente può essere scartata dal sistema lineare; di conseguenza togliendo da V (matrice completa), la colonna B, essa avrà combinazione lineare: $\mathbf{V} = \mathcal{L}(\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, ..., \mathbf{C_n})$. Questa combinazione quindi coincide con quella di W, cioè **V e W hanno lo stesso numero di vettori**, cioè:

$$\mathbf{dim\ V} = \mathbf{dim\ W} \tag{7.20}$$

Come volevasi dimostrare

- **Condizione sufficiente**: $r(A, B) = r(A) \rightarrow$ *il sistema ammette almeno una soluzione*:
  - Per ipotesi, trasportandola ai sottospazi, abbiamo che se il rango della **matrice completa** è uguale al rango della **matrice incompleta**, abbiamo che, indicata con V la matrice completa e W quella incompleta, $dimV = dimW$, inoltre **per costruzione** $W \subseteq V$. Di conseguenza se abbiamo che V e W hanno la **stessa dimensione** e una è **contenuta o uguale** all'altra, allora coincideranno $\mathbf{V} \equiv \mathbf{W}$;
  - Quindi possiamo considerare V come **combinazione lineare delle colonne delle incognite e dei termini noti**: $V = \mathcal{L}(C_1, C_2, ..., C_n, B)$, mentre W come **combinazione lineare delle colonne delle incognite**: $W = \mathcal{L} = (C_1, C_2, ..., C_n)$;
  - Abbiamo dimostrato per ipotesi che $V \equiv W$, ovvero i due sottospazi coincidono, di conseguenza la loro combinazione lineare sarà uguale. La colonna dei termini noti B deve essere quindi "eliminata", cioè **deve essere combinazione lineare delle colonne** $C_1, ..., C_n$;
  - Di conseguenza, sapendo che B è combinazione lineare delle altre colonne, abbiamo trovato **almeno una soluzione**:

$$B = \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + ... + \beta_n C_n \tag{7.21}$$

  - La soluzione sarà quindi la **n-upla**:

$$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \tag{7.22}$$

7.3.2 Teorema di Rouché-Capelli n.2

Come conseguenza del teorema di Rouché-Capelli n.1, possiamo enunciare il **teorema di Rouché-Capelli n.2**

Teorema 8 *Dato un sistema lineare possibile, ovvero che ammette almeno una soluzione, allora possiamo sapere quante* ***incognite libere*** *avremo:*

- *Dati n* ***numero di incognite*** *e r* ***rango*** *$(r(A) = r(A, B))$, avremo* $\mathbf{n} - \mathbf{r}$ ***incognite libere;***
- *Dal numero di incognite libere ricaviamo inoltre anche il* ***numero di soluzioni con incognite libere*** *che ammette il sistema:*

$$\infty^{n-r} \textit{ soluzioni} \tag{7.23}$$

Quindi ad esempio se abbiamo:

- $n - r = 0 \rightarrow \infty^0 = 1$: per approssimazione ∞^0 lo rendiamo uguale a 1, di conseguenza avremo **1 soluzione e 0 incognite libere**, inoltre tale sistema si dirà **sistema determinato** poichè presenta una e una sola soluzione;
- $n - r = 1 \rightarrow \infty^1 = \infty$: qui avremo **infinite soluzioni e 1 incognita libera**, inoltre tale sistema si dirà **sistema indeterminato** poichè presenta infinite soluzioni;
- $n - r = 2 \rightarrow \infty^2 = \infty$: qui avremo **infinite soluzioni e 2 incognite libere**;
- Eccetera....

7.4 Sistemi lineari $n \times n$ e teorema di Cramer

Quando, in un sistema lineare, abbiamo una situazione per la quale $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, ovvero **il numero di equazioni è uguale al numero di incognite**, abbiamo un "*sistema quadrato*" nel quale la **matrice incompleta A** è **quadrata**. Un esempio potrebbe essere questo sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \tag{7.24}$$

Tale sistema lineare avrà come matrice incompleta:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.25}$$

Cioè A è una matrice quadrata 3×3.

7.4.1 Teorema di Cramer

Il **teorema di Cramer** si basa proprio sui "*sistemi quadrati*" fornendoci **una e una sola soluzione**:

Teorema 9 *Dato un sistema lineare $AX = B$ di* ***n equazioni in n incognite****, il sistema è determinato* ***se e solo se*** $\mathbf{detA \neq 0}$*, e la* ***soluzione*** *è la seguente:*

$$\begin{cases} x_1 = \frac{|B_1|}{|A|} \\ \vdots \\ x_n = \frac{|B_n|}{|A|} \end{cases} \tag{7.26}$$

Dove B_i è la matrice quadrata A nella quale ***sostituiamo la colonna i-esima con la colonna di termini noti***

$$B_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(7.27)

Applicazione del metodo di Cramer Prima della dimostrazione del teorema, vediamo come applicare questo teorema, prendendo la matrice di cui abbiamo parlato a inizio sezione:

- $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \tag{7.28}$$

- $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; B = (0, 2, 0) \tag{7.29}$$

- Calcoliamo il determinante di A:
  $$|A| = 1 + 3 + 4 = 8(\neq 0) \rightarrow r(A) = 3 \tag{7.30}$$

- Calcoliamo la prima soluzione $x_1 = \frac{detB_1}{detA}$:
  $$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.31}$$

  Sostituiamo la prima colonna con la colonna di termini noti e abbiamo come determinante: $|B_1| = 2 + 8 = 10$; quindi $x_1 = \frac{detB_1}{detA} = \frac{10}{8} = \mathbf{\frac{5}{4}}$

Adesso procediamo con le altra colonne della matrice sostituendo manmano le colonne di termini noti, e, infine otterremo la **terna di soluzioni** con **0 incognite libere**, infatti ricordiamo da Rouchè-Capelli n.2 che: $\infty^{3-3} = \infty^0 =$ 1 soluzione e 0 incognite libere.

Dimostrazione Quindi l'enunciato del teorema dice:

$$Sistema\ determinato \leftrightarrow detA \neq 0 \tag{7.32}$$

Dobbiamo quindi dimostrare sia la **condizione necessaria** ($\rightarrow$) che la **condizione sufficiente** ($\leftarrow$):

- **Condizione necessaria** ($\rightarrow$): in tal caso abbiamo:

  - **Ipotesi**: "il sistema è determinato";
  - **Tesi**: $detA \neq 0$.

  Partendo dall'ipotesi, che ci dice che il sistema è determinato, possiamo affermare quindi che **esiste una sola soluzione**. Per **Roché-Capelli n.2** allora avremo ∞^0 soluzioni, nel quale $n - r = 0 \rightarrow n = r$. Se abbiamo che il **numero di incognite** è **uguale** al **rango**, significa automaticamente che quest'ultimo è massimo e, di conseguenza, anche il **determinante della matrice incompleta** sarà **diverso da zero**, c.v.d.

- **Condizione sufficiente** ($\leftarrow$): in tal caso abbiamo:

  - **Ipotesi**: $detA \neq 0$;
  - **Tesi**: "il sistema è determinato", ovvero **esiste** la soluzione ed è **unica**.

  Di conseguenza, per la condizione sufficiente, dobbiamo dimostrare il teorema in due parti, dimostrando prima l'unicità (per facilità di comprensione) e poi l'esistenza della soluzione:

  - Dimostriamo che **la soluzione è unica**: supponiamo, per assurdo, che esistano 2 soluzioni S_1, S_2. Se $AX = B$, per definizione del sistema compatto, allora abbiamo che:

    $$\begin{cases} A \cdot S_1 = B A \cdot S_2 = B \end{cases} \rightarrow A \cdot S_1 = A \cdot S_2 \tag{7.33}$$

    Utilizzando l'ipotesi, possiamo dire che se $detA \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$, cioè **esiste la matrice inversa**. Adesso moltiplichiamo ambo i membri per la matrice inversa a sinistra, poichè ricordiamo che **il prodotto fra matrici non è commutativo**: $A^{-1}AS_1 = A^{-1}AS_2$. Ricordiamo che **il prodotto tra la matrice e la sua inversa**, da una **matrice identica**: $IS_1 = IS_2 \rightarrow S_1 = S_2$. Di conseguenza abbiamo dimostrato l'**unicità** della soluzione.

– Dimostriamo l'**esistenza della soluzione**: Partiamo dal sistema $AX = B$, dalla quale ricaviamo la X moltiplicando ambo i membri per la matrice inversa a sinistra: $A^{-1}AX = A^{-1}B$, di conseguenza $X = A^{-1}B \to X = \frac{1}{detA} \cdot (A^a)^t \cdot B$, trasformiamo questo prodotto con la matrice:

$$\frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{7.34}$$

Di conseguenza:

$$\frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{21}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n \end{pmatrix} \tag{7.35}$$

Entrando $\frac{1}{detA}$ nella matrice come prodotto esterno, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{detA} \\ \frac{A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{21}b_n}{detA} \\ \dots \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{detA} \end{pmatrix} \tag{7.36}$$

Notiamo che in ogni riga il numeratore di ogni rapporto è il **determinante di** B_1, cioè della colonna di termini noti sostituita come prima colonna della matrice. Infatti per **Laplace**:

$$|B_1| = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n \tag{7.37}$$

Vale allo stesso modo per tutte le colonne B_i. Abbiamo quindi dimostrato che **esiste la soluzione** e che è:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{detB_1}{DetA} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{detB_n}{detA} \end{pmatrix} \tag{7.38}$$

7.5 Sistemi lineari omogenei

Possiamo, come al solito, dedurre la definizione già dal nome. Infatti **sistemi lineari** significa che ci sono **incognite di primo grado**, e **omogenei** significa $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, cioè la colonna di termini noti è 0. Di conseguenza abbiamo che:

$$AX = 0 \to \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{pmatrix} \tag{7.39}$$

In tal caso il **teorema di Rouché-Capelli n.1** vale sempre, quindi il sistema **ammetterà sempre almeno una soluzione** e $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \mathbf{r}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Inoltre varrà sempre la soluzione n-upla $S_\omega = (0, 0, 0, 0, ...)$ e, tale soluzione viene denominata **soluzione banale**. Vale il caso particolare per cui: se abbiamo un numero di incognite m ed $m-1$ equazioni, e il rango di A è massimo, cioè tutte le equazioni sono indipendenti, allora le incognite saranno tutte multiple dell'incognita libera $(x_1, \lambda_2 x_1, \lambda_3 x_1, ..., \lambda_n x_1$, dove λ è una costante), poichè abbiamo ∞^1 soluzioni. Se non vale il caso particolare, cioè il numero delle incognite è maggiore del numero di equazioni linearmente indipendenti, basterà ridurre la matrice trovando quindi il sistema ridotto, e quindi risolvere il sistema col metodo di sostituzione come lo conosciamo. Inoltre se abbiamo il **parametro con la condizione**, dobbiamo esaminare entrambi i casi in cui vale la condizione (ES: $h \neq 0$) e nel caso in cui viene levata (ES: $h = 0$)

Capitolo 8

APPLICAZIONI LINEARI

Dati V, W k-spazi vettoriali, un'**applicazione** è un funzione "speciale", cioè che **vale solo per i vettori**, e il quale dominio e codominio sono k-spazi vettoriali:

$$f : V \to W \tag{8.1}$$

8.1 Definizione di applicazione lineare

Dopo aver compreso il significato di applicazione, vediamo quando essa è **lineare**. Per esistere un'applicazione lineare, devono valere **2 proprietà**:

1. **Linearità della somma**: "*L'immagine della somma è la somma delle immagini*":

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f_(v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in V \tag{8.2}$$

2. **Linearità del prodotto esterno**: "*L'immagine del prodotto esterno è lo scalare per l'immagine del vettore*:

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v) \qquad \forall a \in k, \forall v \in V \tag{8.3}$$

Un esempio di applicazione lineare potrebbe essere il seguente: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, con $f(x, y, z) = (x, y - x, z + x - y, y)$ che è chiamata **legge**.

8.1.1 Conseguenze

Abbiamo due **conseguenze** dalla definizione di applicazione lineare:

1. **Conseguenza n.1**: questa è una **conseguenza della linearità rispetto al prodotto esterno**: infatti nel caso particolare $\mathbf{a = 0} \to f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v)$, per cui:

$$f(0) = 0 \tag{8.4}$$

   In tal caso si dice che "*lo zero si sposta in zero*";

2. **Conseguenza n.2**: questa è una conseguenza della linearità rispetto alla somma e del prodotto esterno: infatti data una **combinazione lineare** $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$, applichiamo la f con la linearità della somma:

$$f(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = f(a_1v_1) + f(a_2v_2) + ... + f(a_nv_n) \quad (8.5)$$

Applichiamo la linearità del prodotto esterno:

$$a_1 \cdot f(v_1) + a_2 \cdot f(v_2) + ... + a_n \cdot f(v_n) \quad (8.6)$$

8.2 Immagine di f

Sappiamo che nelle funzioni, come anche nelle *applicazioni lineari*, un vettore del dominio può avere il suo **vettore immagine** nel codominio: se ad esempio abbiamo i due k-spazi vettoriali $V, W \mid W \subseteq V$, l'immagine del vettore $v_1 \in V$, sarebbe $f(v_1) = w_1 \in W$. L'insieme di tutti i vettori immagine forma l'**insieme immagine**, composto da tutti i vettori di W che provengono da almeno un vettore di V. Tale insieme viene denotato come **Imf**, e abbiamo inoltre che $Imf \subseteq W$. Se $Imf = W$, cioè l'**immagine coincide con il codominio**, e, di conseguenza tutti gli elementi di W provengono dal dominio la f si dice **suriettiva**.

8.2.1 Immagine di f è sottospazio

Si dimostra che Imf è **sottospazio di** W, ovvero del codominio.

Dimostrazione Come già abbiamo studiato, per sapere se un insieme è sottospazio, bisogna verificare se esso è **chiuso rispetto alla somma** e **chiuso rispetto al prodotto esterno**:

- Dimostriamo che Imf è **chiuso rispetto alla somma**, ovvero che $\forall w_1, w_2 \in Imf \rightarrow w_1 + w_2 \in Imf$. Per ipotesi, w_1, w_2 provengono da V facendo parte di Imf; di conseguenza $\exists v_1, v_2 \in V \mid f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$. Se sommiamo $w_1 + w_2$, abbiamo che $w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2)$. Applichiamo una delle due proprietà delle applicazioni lineari, ovvero la **linearità della somma**, per cui $f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$. Se $w_1 + w_2$ proviene da $v_1 + v_2$, allora $w_1 + w_2 \in Imf$

- Dimostriamo che Imf è **chiuso rispetto al prodotto esterno**, ovvero che $\forall a \in k, \forall w \in Imf \rightarrow a \cdot w \in Imf$. Per ipotesi, sappiamo che w proviene da V, infatti $\exists v \in V \mid f(v) = w$. Calcoliamo il prodotto esterno $a \cdot w = a \cdot f(v)$, per la **linearità del prodotto esterno** $a \cdot f(v) = f(a \cdot v)$. Se $a \cdot w$ proviene da $f(a \cdot v)$, allora $a \cdot w \in Imf$

8.2.2 Calcolare e studiare l'immagine di f

Dato che Imf è *sottospazio*, esso avrà una **base**, e quindi una **dimensione**, cioè il *numero di vettori che compongono una base.* Abbiamo che $\mathbf{dim\ Imf} = \mathbf{r}(\mathbf{A})$, dove r è il **rango** della **matrice** A **associata all'applicazione**, che è nota dal testo. Inoltre abbiamo che **BASE** $Imf = \{C_1, ..., C_i, ..., C_j\}$, ovvero la **base** è data dalle **colonne della matrice linearmente indipendenti**, poichè sappiamo per definizione che l'**immagine è combinazione lineare delle colonne** $Imf = \mathcal{L}(C_1, C_2, ..., C_n)$. Di conseguenza la **matrice ridotta per riga** non può fornire la base, e, quindi, qualora riducessimo per riga dobbiamo rifarci sempre alle colonne della matrice di partenza per trovare la base. In particolare, se cerchiamo il rango, e quindi gli *elementi speciali*, sceglieremo le colonne della matrice di partenza con gli elementi speciali. Ovviamente se la matrice associata è *quadrata*, ci conviene trovare prima il determinante *diverso da 0*, e, in caso il determinante fosse 0, il minore non nullo. Inoltre, se figura un **parametro** e mettiamo una condizione, dobbiamo **studiare il caso in cui la condizione è presente** e **studiare il caso in cui leviamo la condizione**

8.3 Nucleo di f

Il **nucleo** di f, denotato con $\ker f$, è costituito dall'**insieme dei vettori del dominio che hanno per immagine** 0. Di conseguenza abbiamo che $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0_w\}$, e, a differenza di Imf, $\ker \mathbf{f} \subseteq \mathbf{V}$, cioè il **nucleo è contenuto o uguale nel dominio**

8.3.1 Nucleo di f è sottospazio

Si dimostra che $\ker f$ è **sottospazio**:

Dimostrazione Come per Imf, bisogna verificare se esso è **chiuso rispetto alla somma** e **chiuso rispetto al prodotto esterno**:

- Dimostriamo che $\ker f$ è **chiuso rispetto alla somma**, ovvero che $\forall v_1, v_2 \in \ker f \to v_1 + v_2 \in \ker f$. Per ipotesi, se $v_1, v_2 \in \ker f$, essi *finiscono* nel *vettore nullo*, ovvero $f(v_1) = 0_w$ *e* $f(v_2) = 0_w$. Sommando membro a membro abbiamo che $f(v_1) + f(v_2) = 0_w + 0_w$ e per la **linearità della somma** $f(v_1 + v_2) = 0_w$. Cioè l'immagine della somma finisce nel vettore nullo, di conseguenza $v_1 + v_2$ finisce in 0, e $v_1 + v_2 \in \ker f$.

- Dimostriamo che $\ker f$ è **chiuso rispetto al prodotto esterno**, ovvero ceh $\forall v \in \ker f, \forall a \in k \to a \cdot v \in \ker f$. Per ipotesi, v *finisce* nel *vettore nullo*, ovvero $f(v) = 0$. Moltiplichiamo ambo i membri per a, di conseguenza avremo $a \cdot f(v) = a \cdot 0$. Per la **linearità del prodotto esterno**, abbiamo che $f(a \cdot v) = 0$, ovvero $a \cdot v$ finisce in 0, quindi $a \cdot v \in \ker f$.

8.3.2 Calcolare e studiare il nucleo di f

Come per Imf, essendo $\ker f$ sottospazio, esso avrà una **base** e, di conseguenza, una **dimensione**. Per un teorema, di cui ommettiamo la dimostrazione, sappiamo che:

$$dim\ \ker f + dim\ Imf = dim\ V \tag{8.7}$$

Per cui sapendo che $dim\ V$, ovvero del dominio, è nota dal testo (ES: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tale funzione avrà $dim\ V = n = 3$), e, sapendo che $dim\ Imf = r(A)$, abbiamo che:

$$dim\ \ker f = dim\ V - dim\ Imf = \mathbf{n} - \mathbf{r} \tag{8.8}$$

Per quanto riguarda la **base** di $\ker f$, costruiamo il **sistema lineare omogeneo** $A \cdot X = 0$, dove A è la matrice associata di partenza, X è la colonna delle incognite $\{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$. Da qui possiamo **ridurre il sistema**, trovare il **rango di** A, e poi **risolvere tale sistema** con il metodo di sostituzione (il metodo di Cramer non sarebbe molto adatto). Vale sempre il fattore del **parametro** per cui se imponiamo una condizione, dobbiamo studiare il caso in cui viene tolta.

8.3.3 Applicazioni iniettive e teorema sul nucleo

Vediamo in questa sezione un teorema sul nucleo che si basa sulle **applicazioni iniettive**. Si dice che f è **iniettiva** se **ad elementi distinti del dominio corripondono elementi distinti del codominio**. Cioè $\forall v_1, v_2 \in V\ e\ v_1 \neq v_2 \to f(v_1) \neq f(v_2)$. Possiamo dire anche in un altro modo che se $\mathbf{f(v_1) = f(v_2)}$, allora affinchè f sia **iniettiva** deve accadere che $\mathbf{v_1 = v_2}$.

Teorema sul nucleo

Teorema 10 *Abbiamo che f è **iniettiva*** $\leftrightarrow \ker f = \{0_v\}$

Dimostrazione:

- Dimostriamo che f *iniettiva* $\to \ker f = 0_v$. Considero $v \in \ker f$ e dimostro che $v = 0_v$. Se $v \in \ker f$, allora abbiamo che $f(v) = 0$; inoltre sappiamo che anche lo zero finisce in zero, quindi $f(0) = 0$. Per ipotesi, la **definizione di iniettività** ci dice che se questi due vettori hanno la stessa immagine, allora sono uguali. Cioè $f(v) = f(0) \to v = 0$, come volevasi dimostrare

- Dimostriamo che $\ker f = 0_v \to f$ *iniettiva*. Per dimostrare che f è iniettiva prendo $f(v_1) = f(v_2)$, dimostrando che $v_1 = v_2$. Spostiamo tutto al primo membro; abbiamo quindi $f(v_1) - f(v_2) = 0$. Utilizzando entrambe le proprietà della **linearità** abbiamo che $f(v_1 - v_2) = 0$, cioè $v_1 - v_2$ finisce in 0, e, di conseguenza, $v_1 - v_2 \in \ker f$. Per ipotesi $\ker f = \{0_v\}$, cioè è fatto **solo dallo zero**. Quindi $v_1 - v_2 = 0$, quindi se $v_1 = v_2$, f è iniettiva. Come volevasi dimostrare

8.4 Applicazione composta tra 2 applicazioni lineari

Date 2 applicazioni lineari $f: V \to W$ e $g: W \to Z$, con V, W, Z k-spazi vettoriali, possiamo dire che:

- L'**immagine** di un vettore $v \in V$ in W è $f(v) = w$;
- L'**immagine** del vettore $w = f(v) \in W$ in Z è $g(w) = g(f(v))$, che è l'**applicazione composta**

L'**applicazione composta**, che si legge $g \circ f$ e si scrive "*g composto f*", ovvero prima si applica f e poi g, è:

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: \mathbf{V} \to \mathbf{Z} \tag{8.9}$$

8.4.1 Calcolo dell'applicazione composta

Per calcolare l'applicazione composta, abbiamo principalmente 2 modi:

1. Dato che ogni applicazione lineare è dotata di una **matrice associata** rispetto alle basi canoniche, l'applicazione composta è data dal **prodotto riga per colonna delle 2 matrici**:

$$M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) \tag{8.10}$$

2. Possiamo trovare l'applicazione composta anche tramite le **leggi di** f **e** g, nel quale prima applichiamo f e poi g

Vediamo un **esempio** utilizzando le **leggi delle applicazioni**: abbiamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$; inoltre la **legge di** f è $f(x,y) = (2x-y, x+y, x)$, mentre la **legge di** g è $g(x,y,z) = (2x, x-z, y, z)$. Troviamo la **legge della composta**:

- Abbiamo che $g \circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$;
- Sappiamo quindi che $g \circ f(x,y) = g(f(x,y))$;
- **Applichiamo la legge di** f, cioè $f(x,y) = (2x-y, x+y, x)$, per cui:

$$g(f(x,y)) = g(2x-y, x+y, x) \tag{8.11}$$

- **Applichiamo la legge di** g, cioè $g(x,y,z) = (2x, x-z, y, z)$, per cui:

$$g(2x-y, x+y, x) = (2(2x-y), (2x-y)-(x), x+y, x) \tag{8.12}$$

- Infine abbiamo trovato **la legge della composta**:

$$g \circ f(x,y) = (4x-2y, x-y, x+y, x) \tag{8.13}$$

8.5 Applicazione identica e isomorfismo

8.5.1 Applicazione identica

Dato V k-spazio vettoriale, si dice **applicazione identica**, quell'applicazione che manda uno stesso elemento in V, ovvero:

$$i: \ V \to V \tag{8.14}$$

Di conseguenza abbiamo che il **codominio coincide con il dominio**, ovvero $W = V$, di conseguenza l'**immagine** di un vettore generico $v \in V$ è $i(v) = v$, quindi abbiamo, ad esempio, che l'applicazione identica di $i(x, y) = x, y; f \circ i = f \wedge i \circ f = f$.

8.5.2 Isomorfismo tra 2 spazi vettoriale

Dati V, W k-spazi vettoriali, e l'applicazione $f: \ V \to W$; si dice **isomorfismo** quando f è **iniettiva e suriettiva**, cioè $\ker f = \{0\}$ (iniettività) e $Im \ f = W \to dim \ Im \ f = dim \ W$. Se e solo se f è isomorfismo, allora f è *invertibile*, e nasce l'**applicazione lineare inversa**. La matrice associata all'applicazione lineare inversa è la **matrice inversa** di quella di partenza:

$$M(f^{-1}) = M(f)^{-1} \tag{8.15}$$

8.6 Calcolo della matrice associata all'applicazione lineare

Nel caso in cui la **matrice associata** non sia specificata nel testo, abbiamo principalmente 2 modi per calcolarla:

1. **E' assegnata la legge della** f: facciamo un esempio con $f: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e con legge: $f(x, y, z) = (2x, y - z, x - z)$. Per trovare la matrice associata sappiamo che **le colonne sono le immagini dei vettori della base canonica del dominio**, cioè $Im \ f = \mathcal{L}(C_1, C_2, ..., C_n)$. Prendiamo quindi la base canonica di $\mathbb{R}^3$, in questo caso, e ci calcoliamo l'**immagine** rispetto all'applicazione. Quindi abbiamo come **base canonica**:

$$\varepsilon = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\} \tag{8.16}$$

   Calcoliamoci le immagini dei vettori della base canonica, che poi corrisponderanno alle colonne della nostra matrice, ricordando che la legge di f è $(x, y, z) = (2x, y - z, x - z)$:

   - $C_1 = f(e_1) \to f(1, 0, 0) = (2, 0, 1)$;
   - $C_2 = f(e_2) \to f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$;
   - $C_3 = f(e_3) \to f(0, 0, 1) = (0, -1, -1)$;

Adesso, conoscendo le colonne della matrice associata, la possiamo costruire. Di conseguenza abbiamo che:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

2. Sono assegnate le **immagini di altri vettori che formano una base**, diversa dalla canonica. Facciamo un esempio in cui abbiamo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e abbiamo una base $B = \{v_1 = (2,0,0); v_2 = (1,0,-1); v_3 = (0,-1,0)\}$. Inoltre abbiamo come **immagini della base**:

$$\begin{cases} f(v_1) = f(2,0,0) = (4,0,0) \\ f(v_2) = f(1,0,-1) = (h,0,h) \\ f(v_3) = f(0,-1,0) = (0,-h,0) \end{cases} \tag{8.18}$$

Il nostro obiettivo è trovare le immagini della base canonica, che saranno le colonne della matrice associata:

- Possiamo dire che $f(2,0,0) = f(2e_1 + 0e_2 + 0e_3)$, ovvero $f(2,0,0) = f(2e_1) = 2f(e_1)$ per la linearità del prodotto esterno. Di conseguenza abbiamo trasformato $f(2,0,0)$, in modo tale che sia:

$$2f(e_1) = (4,0,0) \tag{8.19}$$

  Cioè abbiamo utlizzato la base canonica, modificando solo il primo membro dell'equazione, ma non l'immagine;

- Ripetiamo lo stesso procedimento visto in precedenza per $f(1,0,-1)$, infatti $f(1,0,-1) = f(1e_1 + 0e_2 - 1e_3) \to f(1,0,-1) = f(e_1) - f(e_3)$. Per cui abbiamo che:

$$f(e_1) - f(e_3) = (h,0,h) \tag{8.20}$$

- Adesso abbiamo che $f(0,-1,0) = f(-e_2) = -f(e_2)$, per cui:

$$-f(e_2) = (0,-h,0) \tag{8.21}$$

Adesso costruiamo un **sistema** contenente tutte le immagini trovate, per trovarci effettivamente le immagini della base canonica:

$$\begin{cases} 2f(e_1) = (4,0,0) \\ f(e_1) - f(e_3) = (h,0,h) \\ -f(e_2) = (0,-h,0) \end{cases} \quad \begin{cases} f(e_1) = (2,0,0) \\ f(e_3) = -(h,0,h) + (2,0,0) \\ f(e_2) = (0,h,0) \end{cases} \quad \begin{cases} f(e_1) = (2,0,0) \\ f(e_3) = (2-h,0,-h) \\ f(e_2) = (0,h,0) \end{cases} \tag{8.22}$$

Sostituiamo adesso le immagini dei vettori della base canonica con le **colonne della matrice associata**:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-h \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

(8.23)

8.6.1 Calcolare la legge dalla matrice associata

Se ho la matrice, è molto semplice trovare la legge: infatti dobbiamo semplicemente moltiplicare la matrice per la **colonna delle incognite**. Facciamo un esempio: data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & h \\ h+1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.24}$$

Troviamo la legge: in questo caso, essendo il dominio $\mathbb{R}^3$, dobbiamo trovare $f(x, y, z)$:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & h \\ h+1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + hy + 2z \\ y \\ 2x - y + hz \\ (h+1)x \end{pmatrix} \tag{8.25}$$

Di conseguenza abbiamo trovato la legge:

$$f(x, y, z) = (x + hy + 2z, y, 2x - y + hz, (h + 1)x) \tag{8.26}$$

8.7 Controimmagine di un vettore

Dato un vettore $w \in W$, cioè *appartenente al codominio*, la **controimmagine di** w, che si indica $f^{-1}(w)$, è quel **sottoinsieme del dominio** (uno o più vettori) tale che quando faccio la sua immagine ottengo w. Tradotto in linguaggio matematico, abbiamo che:

$$f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\} \tag{8.27}$$

Se prendiamo, ad esempio, l'insieme dei reali $\mathbb{R}^3$, abbiamo che $f^{-1}(w) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = w\}$.

8.7.1 Calcolo della controimmagine

Per calcolare la controimmagine di un vettore $w \in W$, appartenente al codominio, basta semplicemente moltiplicare la matrice associata per la colonne delle incognite, e porre tale prodotto uguale a w:

$$AX = w \tag{8.28}$$

Si verrà a creare un **sistema lineare** che dovremo risolvere per trovare poi la controimmagine. Facciamo un esempio: data la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ h & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{8.29}$$

Data$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Trovare $f^{-1}(1,0,3)$, cioè la controimmagine di w. Calcoliamo la controimmagine ricordando la **definizione di controimmagine**:

$$f^{-1}(1,0,-3) = \{v \in V \mid f(v) = 1,0,3\} \tag{8.30}$$

Abbiamo quindi che $AX = (1,0,3)$, cioè:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ h & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{8.31}$$

Il sistema lineare che si viene a creare dunque è il seguente:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ hx = 0 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases} \tag{8.32}$$

In questo caso conviene applicare la **regola di Cramer**, poichè sono n equazioni in n incognite, e risolvere il sistema trovando la controimmagine. Omettiamo la risoluzione del sistema

Capitolo 9

ENDOMORFISMI

Gli **endomorfismi** sono **applicazioni lineari** in cui **dominio e codominio coincidono**. Ovvero, dato V k-spazio vettoriale, abbiamo l'applicazione:

$$f: \ V \to V \tag{9.1}$$

Ogni endomorfismo $f: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha, di conseguenza, una *matrice associata* $M(f)$, rispetto alle basi canoniche, che sarà **quadrata**, ovvero una $n \times n$. Quindi se ad esempio avessimo l'endomorfismo $f: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la sua matrice associata sarà: $M(f) = 3 \times 3$.

9.1 Autovalori, autovettori e autospazi

Esclusivamente sulle matrici quadrate, ovvero negli endomorfismi, si formano **autovalori** e **autovettori**. Vediamo di darne una definizione.

9.1.1 Definizione di autovalore e autovettore

Dato uno *scalare* $\lambda \in k$, esso si dirà **autovalore**, assegnato un endomorfismo $f: \ V \to V$, se esiste un vettore $v \in V$ con $v \neq 0$ (vettore non nullo), tale che $\mathbf{f(v)} = \lambda \cdot \mathbf{v}$, ovverò l'**immagine di** v **è un multiplo di** v.Preso invece un vettore $v \in V, \ v \neq 0$, si definirà **autovettore**, per l'endomorfismo $f: \ V \to V$, se esiste un $\lambda \in k$ tale che $f(v) = \lambda \cdot v$.

9.1.2 Definizione di autospazio

Si dice **autospazio** $V_\lambda, \ V_\lambda \subset V$, l'insieme formato da tutti gli autovettori $v \neq 0| \ f(v) = \lambda \cdot v$ con il vettore nullo, che non fa parte degli autovettori. In linguaggio matematico possiamo dire che l'autospazio è tale che:

$$V_\lambda = \{v \in V \ e \ v \neq 0| \ f(v) = \lambda \cdot v\} \cup \{v = 0\} \tag{9.2}$$

Ovvero, risolvendo tale *unione*:

$$\mathbf{V}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} | \ \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}\} \tag{9.3}$$

Dalle definizioni appena esposte, capiamo che all'interno di un k-spazio vettoriale V, possono essere definiti diversi *autospazi*. Ad esempio, se supponiamo che l'endomorfismo in V sia tale che $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = 2v_2$ e $f(v_3) = 3v_3$, $f(v_4) = 3v_4$, esisteranno due autospazi, tali che $V_2 = \{v_1, v_2\}$ e $V_3 = \{v_3, v_4\}$. Ovviamente però dobbiamo ricordare che tutti gli autospazi, devono presentare il vettore nullo; di conseguenza la loro intersezione è il vettore nullo: $V_2 \cap V_3 = \{0_v\}$.

9.2 Endomorfismo associato a λ: f_λ

Esiste un *endomorfismo particolarissimo*, dato V k-spazio vettoriale, che indichiamo con:

$$f_\lambda : \ V \to V \tag{9.4}$$

che ha **legge** $\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \lambda \cdot \mathbf{v}$. Un esempio potrebbe essere:

$$f_3 : \ V \to V \Rightarrow f_3(v) = f(v) - 3v \tag{9.5}$$

9.2.1 Teorema sugli endomorfismi f_λ

Su tali endomorfismi, esiste un teorema che recita:

Teorema 11 *Dato un* ***endomorfismo*** $f : \ V \to V$*, con* V *k-spazio vettoriale, si ha che, fissato un valore per* f*,* $\lambda \in k$*, vale tale uguaglianza:*

$$\mathbf{V}_\lambda = \ker \mathbf{f}_\lambda \tag{9.6}$$

Dimostrazione Per dimostrare tale teorema, trattandosi di un **uguaglianza insiemistica**, dobbiamo dimostrare in due passi che $V_\lambda \subseteq \ker f_\lambda$ e $\ker f_\lambda \subseteq V_\lambda$; assumendo come ipotesi che esista l'endomorfismo $f : \ V \to V$ e, λ *autovalore*:

- Dimostriamo che $V_\lambda \subseteq \ker f_\lambda$ partendo da un elemento $v \in V_\lambda$ e dimostriamo quindi che $v \in \ker f_\lambda$. Assumendo che $v \in V_\lambda$, allora per definizione v è *autovettore*, cioè vale che $f(v) = \lambda \cdot v$. Portando tutti i termini al primo membro di tale equazione otteniamo che $f(v) - \lambda \cdot v = 0$. Ricordiamo che la *legge* di f_λ era $f_\lambda(v) = f(v) - \lambda \cdot v$, quindi abbiamo che nell'equazione vista in precedenza il primo membro si trasforma in tal modo: $f_\lambda(v) = 0$. Per definizione, se la legge è uguale a 0, allora $\mathbf{v} \in \ker \mathbf{f}_\lambda$, come volevasi dimostrare.

- Dimostriamo che $\ker f \subseteq V_\lambda$ partendo da un elemento $v \in \ker f_\lambda$ e dimostriamo che $v \in V_\lambda$. Se $v \in \ker f_\lambda$, per definizione avremo che $f_\lambda(v) = 0$. Sappiamo che $f_\lambda(v) = f(v) - \lambda \cdot v$, quindi l'equazione diventa $f(v) - \lambda \cdot v = 0 \to f(v) = \lambda \cdot v$. Di conseguenza, se vale tale equazione, v è un *autovettore*, e quindi $v \in \mathbf{V}_\lambda$, come volevasi dimostrare

Possiamo concludere, quindi, avendo dimostrato che $V_\lambda \subseteq \ker f_\lambda$ e $\ker f \subseteq V_\lambda$, che $\mathbf{V}_\lambda = \ker \mathbf{f}$.

9.3 Polinomio caratteristico di f

Data una *matrice quadrata* A $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

Si dice **polinomio caratteristico** di A, indicato con $P(T)$, il **determinante** della matrice tale che:

- Si sottrae T dalla diagonale principale;
- Si calcola il determinante della nuova matrice

Quindi abbiamo che:

$$P(T) = det(A - T \cdot I) \tag{9.8}$$

dove I rappresenta la *matrice identica*, infatti abbiamo che:

$$A - TI = \begin{pmatrix} a_{11} - T & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - T & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - T \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

Esiste inoltre un **teorema**, che non dimostreremo, che dice che gli *autovalori* di f sono le **soluzioni del polinomio caratteristico**, ovvero:

Teorema 12

$$\lambda \textbf{ autovalore } \textit{per } f \leftrightarrow \mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{0} \tag{9.10}$$

9.3.1 Molteplicità algebrica

Prima di vedere nel pratico come utilizzare le formule di cui abbiamo parlato in maniera "teorica", diamo la definizione di **molteplicità algebrica**, che sarà utile negli esercizi:

Definizione 10 *Dicesi m_λ **molteplicità algebrica**, quante volte λ è soluzione del polinomio caratteristico*

Per esempio:

- Se abbiamo $P(T) = 0 \to (T-5)^4$, abbiamo $T = 5$ autovalore, e $m_\lambda = m_5 = 4$;
- Se abbiamo $P(T) = 0 \to (T-3)(t+3)^2 = 0$, abbiamo $T = 3$, $T = -3$ autovalori; e $m_3 = 1$, $m_{-3} = 2$

9.3.2 Esercizio sui polinomi caratteristici

Per rendere meglio l'idea di come viene applica la formula del polinomio caratteristico per trovare gli autovalori facciamo un esempio di un esercizio: data $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, e legge di f: $f(x, y, z) = (x - z, hy, y + z)$, dobbiamo trovare gli autovalori e gli autospazi corrispondenti.

Risoluzione: calcolo autovalori

- Troviamo il polinomio caratteristico $P(T) = det(A - TI)$, ricordando che le immagini di f sono le colonne della matrice associata A :

$$A - TI = \begin{pmatrix} 1-T & 0 & -1 \\ 0 & h-T & 0 \\ 0 & 1 & 1-T \end{pmatrix} \tag{9.11}$$

- Sappiamo che $P(T) = det(A - TI) = (1 - T)(h - T)(1 - T)$.
- Imponiamo, per il teorema 12 visto in precedenza, $P(T) = 0$ così da trovare gli *autovalori* di f:

$$(1 - T)(h - T)(1 - T) = 0 \tag{9.12}$$

- Ponendo ogni fattore a 0 troviamo che:
  - $T = 1$;
  - $T = h$;
  - $T = 1$;
- In questo caso abbiamo che:
  - Per $h = 1$, $T_1 = T_2 = T_3 = 1$. Si dice in questo caso che la **molteplicità algebrica** di 1 è 3: $m_\lambda = 3$.
  - Per $h \neq 1$, $T_1 = T_3 = 1$, $T_2 = h$. Si dice in questo caso che la molteplicità algebrica di 1 è 2, mentre la molteplicità algebrica di h è 1: $m_\lambda = 1$
- In conclusione possiamo dire che gli **autovalori sono 3**:
  - Se $h = 1$ ho un solo autovalore $T = 1$ (3 volte);
  - Se $h \neq 1$ ho 2 autovalori $T = 1$ (2 volte), $T = h$ (1 volta)

Risuoluzione: calcolo autospazi In tal caso, per trovare gli autospazi, ragioniamo sulle condizioni imposte per il parametro:

- Per $h = 1$, abbiamo che $T = 1$ e $m_\lambda = 3$. Calcoliamo $V_\lambda = V_1$:
  - Ci ricordiamo per il teorema 11 che $V_\lambda = \ker f_\lambda$. Di conseguenza abbiamo che $V_1 = \ker f_1$, cioè $V_1 = \ker(f(v) - 1 \cdot v) = \ker(A - 1T)$.
  - Ci ricordiamo che la base di $\ker f_\lambda$ si calcola creando il sistema lineare omogeneo $(A - 1T)X = 0$, sostituendo ad $h \to 1$, abbiamo che:

$$A - 1T = 0 \to \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.13}$$

  - Si viene a creare, quindi, il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} -z = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \forall x \end{cases} \to V_1 = \{(x, 0, 0)\} \tag{9.14}$$

  - Avremo come **base dell'autospazio** V_1: BASE $V_1 = \{(1, 0, 0)\}$, e, tale base è anche **autovettore**

- Levando la condizione, abbiamo che $h \neq 1$. In tal caso $T = 1$ con $m_\lambda = 2$ (autospazio n.1), e $T = h$ con $m_\lambda = 1$ (autospazio n.2): Utilizzando sempre il teorema 11, quindi attraverso il sistema lineare omogeneo (omettiamo il procedimento) troveremo che:
  - Per l'autospazio n.1, $V_1 = \{(x, 0, 0)\}$ e BASE $V_1 = \{(1, 0, 0)\}$. In tal caso ovviamente non sostituiamo h, poichè la condizione ci impone che $h \neq 1$;
  - Per l'autospazio n.2, $V_h = \{\frac{z}{1-h}, -(1-h)z, z\}$ e BASE $V_h = \{\frac{1}{1-h}, -(1-h), 1\}$

;

9.3.3 Molteplicità geometrica

Abbiamo introdotto nella sezione 9.3.1 la *molteplicità algebrica*, che indica quante volte l'autovalore è soluzione del polinomio caratteristico. Introduciamo adesso la **molteplicità geometrica**, che indica la **dimensione dell'autospazio corrispondente** ($dim\ V_\lambda$), e si indica con g_λ:

$$g_\lambda = dim\ V_\lambda \tag{9.15}$$

Inoltre possiamo dire che la dimensione dell'autospazio, ovvero del numero di vettori che formano una base, è anche il **numero di incognite libere**. Quindi, nei nostri esercizi, una volta trovati gli autovalori come soluzione del polinomio caratteristico (teorema 12), e sapendo che ogni autovalore λ ha un autospazio corrispondente, per il teorema 11 sugli endomorfismi, che è $V_\lambda = \ker f_\lambda$: quindi troveremo un autospazio tale che:

$$V_\lambda = \ker \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \tag{9.16}$$

Una volta che abbiamo sottratto l'autovalore dalla diagonale principale, troveremo il ker attraverso il *sistema lineare omogeneo*, nel quale il numero di incognite libere ci indicherà la **molteplicità geometrica**.

9.4 Endomorfismi semplici

9.4.1 Teorema sulla molteplicità algebrica e geometrica

Prima di introdurre gli *endomorfismi semplici*, vediamo un teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, che evidenzia la **relazione fra molteplicità algebrica e geometrica**:

Teorema 13 *Dato un endomorfismo $f: V \to V$ e trovato un autovalore $\lambda \in k$, si ha che:*

$$\mathbf{0} < \mathbf{g}_\lambda \leq \mathbf{m}_\lambda \tag{9.17}$$

9.4.2 Caso particolare del teorema: endomorfismo semplice

Nel caso particolare in cui $\mathbf{g}_\lambda = \mathbf{m}_\lambda$ per **tutti gli autovalori di** f, ovvero *tutte le soluzioni del polinomio caratteristico*, allora l'**endomorfismo** si dice **semplice**.

Definizione formale di endomorfismo semplice

Volendo dare una *definizione formale* di endomorfismo semplice, abbiamo che:

Definizione 11 *Dato un endomorfismo $f: V \to V$, esso si dice **semplice** se esiste **una base formata da autovettori***

Quindi se l' ***unione*** *delle basi dei singoli autospazi* copre la dimensione del dominio, ovvero $dim\ V_{\lambda 1} + dim\ V_{\lambda 2} + ... + dim\ V_{\lambda n} = dim\ V$, allora l'endomorfismo f è semplice

Osservazione Se accade che $\mathbf{m}_\lambda = \mathbf{1}$, posso sapere già quanto vale g_λ. Per il teorema 13 infatti sapevamo che $0 < g_\lambda \leq m_\lambda \Rightarrow 0 < g_\lambda \leq 1$, di conseguenza abbiamo che:

$$m_\lambda = g_\lambda = 1 \tag{9.18}$$

Esempio Vediamo adesso, con un esempio pratico, come applicare ciò che finora abbiamo spiegato sugli endomorfismi semplici:

- Abbiamo ad esempio che le *soluzioni del polinomio caratteristico* sono:

  $$P(T) : (T+1)(T-2)(T+3) = 0 \tag{9.19}$$

  di conseguenza avremo che per:

  - $T = -1$, la molteplicità algebrica sarà $m_{-1} = 1$;
  - $T = 2$, la molteplicità algebrica sarà $m_2 = 1$;
  - $T = -3$, la molteplicità algebrica sarà $m_{-3} = 1$;

  quindi poichè tutte le soluzioni del polinomio caratteristico sono uguali a 1, e sapendo che $m_\lambda = g_\lambda = 1$, sappiamo che f è **semplice**

- Vediamo un altro esempio in cui le *soluzioni del polinomio caratteristico* sono:

  $$P(T) : (T-3)^2(T+2) = 0 \tag{9.20}$$

  di conseguenza avremo che per:

  - $T = 3$, la molteplicità algebrica sarà $m_3 = 2$;
  - $T = -2$, la molteplicità algebrica sarà $m_{-2} = 1$;

  In tal caso, a differenza del primo esempio, per $T = -2$, sapendo che la molteplicità algebrica è 1, e sapendo che la molteplicità geometrica è 1, sappiamo che saranno uguali. Per $T = 3$, dobbiamo controllare la molteplicità geometrica calcolando $V_3 = \ker f_3$

9.5 Matrice diagonalizzabile

Una matrice A $n \times n$ si dice **diagonalizzabile** se esiste una matrice, anch'essa $n \times n$, *invertibile*, chiamata P, tale che:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D \tag{9.21}$$

dove D è una **matrice diagonale**, ovvero formata da elementi *diversi da 0* nella *diagonale principale*, e il resto degli elementi uguali a 0:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9.22}$$

9.5.1 Matrici diagonalizzabili ed endomorfismi semplici

Esiste un **teorema sulle matrici diagonalizzabili** che dice:

Teorema 14 *Le matrici A degli **endomorfismi semplici** $f : V \to V$ sono **tutte diagonalizzabili***

In tal caso la *matrice diagonale* D sarà formata da **autovalori sulla diagonale principale** ognuno con la sua *molteplicità algebrica*:

$$D = \begin{pmatrix} a_{\lambda 1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{\lambda 2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{\lambda n} \end{pmatrix} \tag{9.23}$$

La matrice P, invece, si chiama **matrice diagonalizzante**, ed è formata in modo tale che **le sue colonne sono gli autovettori** [1] $u_1, u_2, ..., u_n$, che troviamo con la formula $V_\lambda = \ker f_\lambda$.

Esempio Facciamo un esempio attraverso un esercizio per capire se una matrice è *diagonalizzabile*. Abbiamo la matrice A, associata a una funzione f, tale che:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{9.24}$$

Per verificare che A sia diagonalizzabile dobbiamo svolgere i seguenti passaggi:

- Trovare gli ***autovalori*** come soluzione del *polinomio caratteristico* e per ogni soluzione scrivere le rispettive ***molteplicità algebriche***;
- Trovare le ***molteplicità geometriche*** e confrontarle con quelle algebriche;
- Se tutti gli autovalori hanno $m_\lambda = g_\lambda$, allora f è **semplice**, e di conseguenza, **diagonalizzabile** per il teorema 14.

Quindi seguiamo i passi che abbiamo riportato qui sopra con i calcoli:

- Troviamo che il polinomio caratteristico è:

$$P(T) = det \begin{pmatrix} 0-T & 1 & -1 \\ 0 & 0-T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -T & 1 & -1 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix} = T^2(-1-T) \tag{9.25}$$

[1]**NB**: E' importante, quando scriviamo gli autovettori nelle colonne della matrice P, che si rispetti l'ordine con cui vengono scritti gli autovalori in D

- Imponiamo la soluzione del polinomio caratteristico a 0, per il teorema 12, quindi:
$$T^2(-1-T)=0 \tag{9.26}$$
quindi le soluzioni sono:
$$\begin{aligned} T=0 &\Rightarrow m_0=2 \\ T=-1 &\Rightarrow m_{-1}=1 \end{aligned} \tag{9.27}$$
di conseguenza per $T=-1$, abbiamo che se la molteplicità algebrica è 1, allora anche la molteplicità geometrica sarà 1. Dobbiamo controllare solamente se $V_0 = \ker f_0$.

- Calcoliamo $V_0 = \ker f_0$:
$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.28}$$

- Il sistema lineare che si andrà a creare sarà:
$$\begin{cases} y-z=0 \\ 0=0 \\ y-z=0 \end{cases} \tag{9.29}$$

- Abbiamo quindi che $V_0=(x,z,z)$, e, quindi, essendo 2 le incognite libere, avremo che $dim\ V_0=2$, che coincide con g_0. Per cui $g_0=m_0=2$.

- Avendo dimostrato per tutti gli autovalori che $m_\lambda = g_\lambda$, sappiamo che la matriche è **diagonalizzabile**.

Parte II

Geometria lineare

Capitolo 10

RETTA NEL PIANO

Passiamo alla parte di corso che tratta la **geometria lineare**, che, già dal nome, come abbiamo constatato anche per l'algebra, tratterà solo di equazioni e variabili di **primo grado** essendo appunto *lineare*. Andando un po più nello specifico, la geometria lineare include:

- **Equazioni lineari a 2 incognite** nel ***piano cartesiano*** $\mathbb{R}^2$ (2 dimensioni) nel quale troviamo la **retta** r con equazione:

$$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 = b} \tag{10.1}$$

  che è equivalente all'equazione più "conosciuta" $ax + by + c = 0$

- Passando poi ad **equazioni lineari a 3 incognite** nello ***spazio*** $\mathbb{R}^3$ (3 dimensioni) nel quale troviamo il **piano** π con equazione:

$$\mathbf{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b} \tag{10.2}$$

In questo primo capitolo ci concentreremo sulla **retta nel piano**, per poi affrontare nel prossimo la **retta nello spazio**

10.1 Retta nel piano

La **retta** può essere individuata *geometricamente* in ***3 modi***. Adesso cerchiamo di capire come *costruire* l'equazione della retta in base a come viene individuata geometricamente.

10.1.1 Retta passante per 2 punti

Sappiamo che per *2 punti* passa ***una e una sola retta*** r:

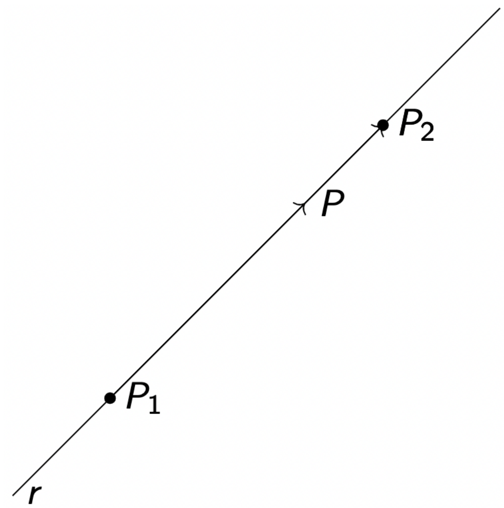


Figure 10.1: Retta passante per 2 punti

Andiamo a costruire l'**equazione della retta** r **passante per 2 punti** i quali denotiamo con $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$:

- Consideriamo il vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ e consideriamo un altro vettore $\overrightarrow{PP_1}$ con P *punto generico della retta* con componenti (x, y);
- Confrontando $\overrightarrow{PP_1}$ e $\overrightarrow{P_1P_2}$, notiamo che devono essere per forza **paralleli**.
- Per definizione due vettori sono *paralleli* se differiscono per un ***fattore di proporzionalità***. Ciò significa che, presi due vettori generici v e w, essi sono paralleli, ovvero $v \| w$ se:

$$\exists \lambda \in k \mid v = \lambda w \tag{10.3}$$

- Troviamo quindi le **componenti** dei nostri vettori, che ci serviranno per ricavare l'equazione della retta. Abbiamo che:
  - $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, ovvero *la differenza delle ascisse* $(x_2 - x_1)$ e *la differenza delle ordinate* $(y_2 - y_1)$.
  - Lo stesso ragionamento vale per il vettore $\overrightarrow{PP_1}$ che ha *componenti* $\overrightarrow{PP_1} = (x - x_1, y - y_1)$.
- Adesso sostituiamo le componenti di entrambi i vettori nell'equazione che soddisfa la *condizione di parallelismo*:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P} &= \lambda \overrightarrow{P_1P_2} \\ (x - x_1, y - y_1) &= \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\ (x - x_1, y - y_1) &= (\lambda(x_2 - x_1), \lambda(y_2 - y_1)) \end{aligned} \tag{10.4}$$

- Costruiamo adesso un **sistema lineare** dal quale ricaviamo da entrambe le equazioni la costante λ. Inizialmente uguagliamo le rispettive componenti dei due vettori:

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) \end{cases} \tag{10.5}$$

  ricaviamo adesso λ:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\ \lambda = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \end{cases} \tag{10.6}$$

  Abbiamo trovato, quindi, l'**equazione della retta passante per 2 punti**. Infatti uguagliando membro a membro le equazioni del sistema troviamo che:

$$\frac{\mathbf{x - x_1}}{\mathbf{x_2 - x_1}} = \frac{\mathbf{y - y_1}}{\mathbf{y_2 - y_1}} \tag{10.7}$$

Vediamo degli esempi di esercizi nel quale viene richiesto di trovare l'equazione della retta passante per 2 punti.

Esempio 1 Dati i punti $A = (-1, 4)$ $B = (0, 3)$, determinare l'equazione della retta passante per 2 punti:

- Applichiamo la formula:

$$\begin{aligned} \frac{x - (-1)}{0 - (-1)} &= \frac{y - 4}{3 - 4} \\ x + 1 &= -(y - 4) \\ x + y - 4 + 1 &= 0 \\ \mathbf{x + y - 3} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{10.8}$$

- La retta r passante per A e B ha quindi equazione $x + y - 3 = 0$

Esempio 2 Dati i punti $A = (-1, 4)$ $B = (2, 4)$, determinare l'equazione della retta passante per 2 punti:

- In tal caso non c'è bisogno di applicare la formula poichè possiamo notare che entrambi i punti hanno la stessa ordinata[1], per cui l'***unica retta passante per 2 punti*** è $\mathbf{y = 4}$, che è *parallela all'asse* x.

Esempio 3 Dati i punti $A = (0, -1)$ $B = (0, 4)$, determinare l'equazione della retta passante per 2 punti:

- Quindi in questo caso abbiamo che, come per l'esempio 2, l'unica retta passante per 2 punti è l'equazione $\mathbf{x = 0}$, ovvero l'**equazione dell'asse** y

[1]**NB**: la stessa regola vale se avessero le stesse ascisse

10.1.2 Retta passante per un punto e parallela a un vettore $\vec{v}$

Sappiamo che dato un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, esiste **una e una sola retta passante per** P_0 e che sia **parallela a un vettore v**: $r \| v$:

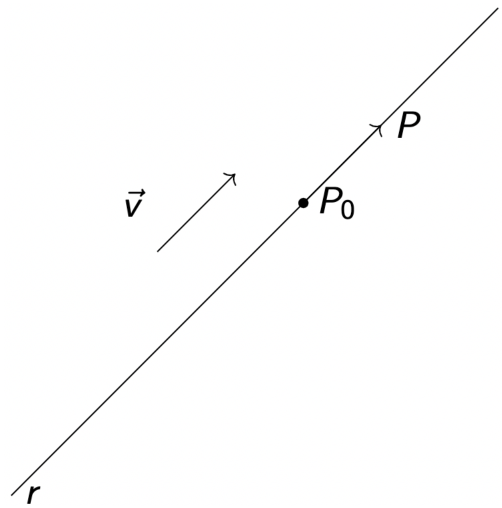


Figure 10.2: Retta passante per un punto e parallela a $\vec{v}$

Vediamo di *costruire* l'equazione di r:

- Preso un *punto generico nella retta* $P = (x, y)$ e, considerato il vettore $\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$, abbiamo quindi per costruzione che tale vettore è parallelo a v:
$$\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0) \| \vec{v} = (l, m) \tag{10.9}$$
- Per la ***condizione di parallelismo*** possiamo scrivere i vettori come:
$$\begin{aligned} \vec{P_0P} &= \lambda \vec{v} \\ (x - x_0, y - y_0) &= \lambda(l, m) \\ (x - x_0, y - y_0) &= (\lambda l, \lambda m) \end{aligned} \tag{10.10}$$
- Creiamo quindi il *sistema* dove uguagliamo le componenti:
$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda l \\ y - y_0 = \lambda m \end{cases} \tag{10.11}$$
ricaviamo λ:
$$\begin{cases} \lambda = \frac{x - x_0}{l} \\ \lambda = \frac{y - y_0}{m} \end{cases} \tag{10.12}$$

- Abbiamo ricavato quindi l'**equazione della retta** r parallela a v e passante per P_0:

$$\frac{\mathbf{x - x_0}}{\mathbf{l}} = \frac{\mathbf{y - y_0}}{\mathbf{m}} \tag{10.13}$$

Abbiamo compreso, quindi, che la ***direzione*** della retta r è data dal vettore v *parallelo* alla retta. Per questo v viene chiamato **vettore direttivo** e le sue componenti (l, m) vengono chiamati **parametri direttori**.

Esempio Dato il punto $A = (-2, 3)$ e il vettore $v = (1, -3)$ determinare l'equazione della retta passante per A e parallela a $\vec{v}$:

- Applichiamo la formula:

$$\begin{aligned} \frac{x-(-2)}{1} &= \frac{y-3}{-3} \\ x+2 &= \frac{-y+3}{3} \\ 3x+6 &= -y+3 \\ \mathbf{3x+y+3} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{10.14}$$

- Quindi l'equazione della retta r passante per A e parallela a v è $3x+y+3 = 0$.

10.1.3 Retta passante per un punto e ortogonale a un vettore $\vec{u}$

Fissato un punto $P_0(x_0, y_0)$ e un vettore $\vec{u} = (a, b)$, costruiamo l'**equazione della retta passante per** P_0 **e ortogonale a** $\vec{u}$; sapendo che nel piano esiste **una e una sola retta passante per** P_0 **e ortogonale ad** $\vec{u}$:

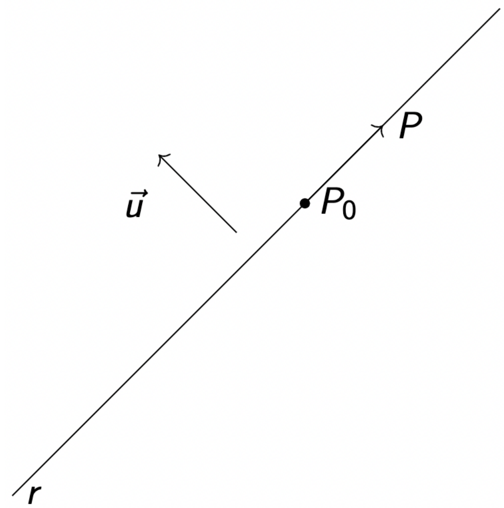


Figure 10.3: Retta passante per un punto e ortogonale a un vettore $\vec{u}$

. Costruiamo l'equazione di r:

- Dato un *punto generico* $P = (x, y)$ sulla retta r, abbiamo che il vettore $\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$ è ***perpendicolare*** ad u:

$$\vec{P_0P} \perp \vec{u} \tag{10.15}$$

- La *condizione di perpendicolarità* ci dice che **due vettori sono perpendicolari quando il loro prodotto scalare è 0**. Questo si traduce in linguaggio matematico nella seguente equazione:

$$\begin{aligned} \vec{P_0P} \cdot \vec{u} = 0 \\ (x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ ax + by - ax_0 - by_0 = 0 \end{aligned} \tag{10.16}$$

  abbiamo quindi che ax e by sono termini che presentano l'*incognita libera*, mentre $-ax_0 - by_0$ sono costanti che rappresentano il *termine noto* che possiamo compattare in $c = -ax_0 - by_0$. Per cui abbiamo trovato l'equazione di r:

$$\mathbf{ax + by + c = 0} \tag{10.17}$$

  che è l'equazione più conosciuta riguardo alla retta, anche in ambiente scolastico.

10.2 Coordinate omogenee e punti impropri

Abbiamo parlato fino ad adesso di punti generici nello ***spazio cartesiano*** Oxy, come ad esempio il punto generico $P(x, y)$. Introduciamo adesso un concetto che si basa sull'**astrazione delle coordinate cartesiane**, ovvero le **coordinate omogenee**, che sono del tipo:

$$P(x', y', t') \tag{10.18}$$

Abbiamo che $\mathbf{t'}$, che non rappresenta la z delle coordinate cartesiane, ma piuttosto rappresenta un ***indicatore***, può essere:

- $\mathbf{t' \neq 0}$: allora il punto è ***rappresentabile*** nel sistema cartesiano;
- $\mathbf{t' = 0}$: allora il punto ***non è rappresentabile*** nel sistema cartesiano e viene chiamato **punto all'infinito**.

Di conseguenza, le ***coordinate omogenee*** comprendono i punti classici e i ***punti all'infinito***, che si denotano come $\mathbf{P}_\infty$, e possono essere chiamati **punti impropri**.

10.2.1 Passare da coordinate cartesiane a coordinate omogenee

Molto semplicemente, per passare da un sistema all'altro abbiamo delle **formule di passaggio**, che sono le seguenti:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x'}}{\mathbf{t'}} \\ \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y'}}{\mathbf{t'}} \end{cases} \tag{10.19}$$

Esempio Dato un punto $P(3, 4)$, trovare il corrispondente punto in *coordinate omogenee*.

Risoluzione: Utilizziamo le *formule di passaggio*:

$$\begin{gathered} \begin{cases} 3 = \frac{x'}{t'} \\ 4 = \frac{y'}{t'} \end{cases} \\ \begin{cases} x' = 3t' \\ y' = 4t' \end{cases} \end{gathered} \tag{10.20}$$

Abbiamo quindi che il punto P in coordinate omogenee sarà:

$$P = (3t', 4t', t') \tag{10.21}$$

con t' incognita libera. Un altra importante *differenza* che vi è tra i punti in coordinate omogenee e quelli in coordinate cartesiane è che i punti omogenei sono **semplificabili**. Se infatti imponessimo $t' = 1$, avremmo che P sarebbe:

$$\mathbf{P = (3, 4, 1)} \tag{10.22}$$

Ovviamente tutto ciò ***non vale nelle coordinate cartesiane***, infatti $P(3, 6) \neq P(1, 2)$.

Regola generale In generale, quando vogliamo passare *da coordinate cartesiane ad omogenee* basta ***aggiungere 1 come valore dell'indicatore*** t':

$$\mathbf{P(x, y) \Rightarrow P(x, y, 1)} \tag{10.23}$$

10.2.2 Passare da coordinate omogenee a coordinate cartesiane

Partiamo subito con degli esempi, per il passaggio da coordinate omogenee a cartesiane, nei quali analizzeremo rispettivamente il caso in cui $t' \neq 0$ e il caso in cui $t' = 0$.

Esempio 1 Partiamo dalle coordinate omogenee $P = (3, 4, 2)$. Troviamo le coordinate cartesiane:

- Come abbiamo detto nel paragrafo precedente, le coordinate omogenee sono ***semplificabili***, per cui dividiamo tutto per 2, ottenendo:

$$P = (\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{2}{2}) = (\frac{3}{2}, 2, 1) \tag{10.24}$$

- Quindi, con $t' = 1$, per la regola generale abbiamo trovato le coordinate cartesiane:

$$\mathbf{P = (\frac{3}{2}, 2)} \tag{10.25}$$

Esempio 2 Partiamo dalle coordinate omogenee $P = (2, 5, 0)$. Vediamo il perchè ***non è possibile ricavare le coordinate cartesiane***:

- Innanzitutto, il ragionamento scontato sarebbe di dividere tutto per 0, ma la divisione per 0 sappiamo essere ***impossibile***;

- Inoltre, abbiamo detto che quando $t' = 0$ il punto **non è rappresentabile nello spazio cartesiano**, cioè

10.2.3 Punti impropri e vettore direttivo

Un altra importante caratteristica del punto all'infinito è che, geometricamente, esso rappresenta il punto dove si "incontrano" le ***rette parallele all'infinito***. Quindi il fatto che le rette parallele abbiano lo ***stesso punto all'infinito***, o punto improprio, "sostituisce" il fatto che abbiano la ***stessa direzione***. Si dice, infatti, che il **punto all'infinito** $P_\infty = (x', y', 0)$ **da la direzione alla retta** e, inoltre, le rette parallele avranno lo stesso punto all'infinito $P_\infty = (x', y', 0)$. Ciò porta a un risultato importantissimo, per il quale abbiamo che:

$$\mathbf{P_\infty = (x', y', 0) = (l, m, 0)} \tag{10.26}$$

ovvero il **vettore direttivo** v di una generica retta r, che è *parallelo* alla retta stessa e ne da la ***direzione*** sarà:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{l}, \mathbf{m}) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \tag{10.27}$$

Ciò significa, quindi, che i **parametri direttori** della retta sono **le prime due coordinate del punto all'infinito**.

Esempio Data la retta $3x - y + 4 = 0$, trovare il suo *punto improprio*[2].
Risoluzione:

- Ciò che dobbiamo fare è trasformare l'equazione della retta in coordinate omogenee e dopo cercare $P_\infty = (x', y', 0)$;
- Utilizziamo le formule di passaggio per trovare le coordinate omogenee da sostituire nell'equazione della retta:

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{t'} \\ y = \frac{y'}{t'} \end{cases} \tag{10.28}$$

  Quindi abbiamo che:

$$\begin{gathered} 3(\frac{x'}{t'}) - (\frac{y'}{t'}) + 4 = 0 \\ \mathbf{3x' - y' + 4t' = 0} \end{gathered} \tag{10.29}$$

  Un altro modo più veloce per trovare l'***equazione in coordinate omogenee*** sarebbe quello di ***omogenizzarla***, ovvero ***rendere tutti i termini dello stesso grado***, ad esempio:

  - $2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x' - 5t' = 0$;
  - $x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x'^2 - 3x't' + 4t'^2 = 0$

- Una volta che abbiamo trovato l'equazione in coordinate omogenee $3x' - y' + 4t' = 0$, cerchiamo P_∞ mettendo a sistema l'equazione e $t' = 0$:

$$\begin{gathered} \begin{cases} 3x' - y' + 4t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y' = 3x' \\ t' = 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{10.30}$$

- Abbiamo quindi che $P_\infty = (x', 3x', 0)$, che semplificato diventa:

$$\mathbf{P}_\infty = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{0}) \tag{10.31}$$

- Quindi se il punto improprio ha coordinate $P_\infty = (1, 3, 0)$, abbiamo che il ***vettore direttivo*** sarà:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \tag{10.32}$$

  dove $l = 1, m = 3$ sono i ***parametri direttori***.

[2]Quando negli esercizi viene chiesto di trovare il punto improprio equivale a chiedere di trovare il vettore direttivo o i parametri direttori.

10.3 Condizione di parallelismo ed ortogonalità fra 2 rette

Vediamo, in questa sezione, di analizzare le ***condizioni di parallelismo ed ortogonalità*** che esistono fra 2 rette.

10.3.1 Condizione di parallelismo fra 2 rette

Analizziamo la seguente immagine:

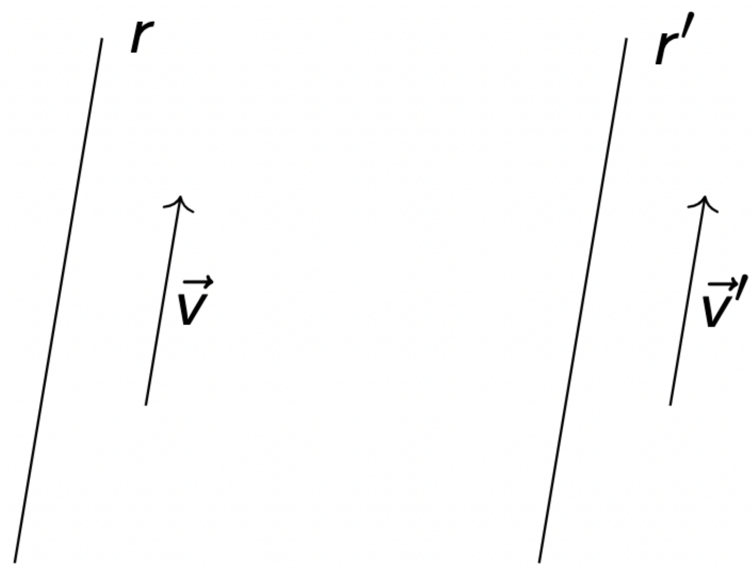


Figure 10.4: Condizione di parallelismo fra 2 rette

Possiamo subito notare che 2 rette sono parallele quando i rispettivi vettori direttivi, che hanno coordinate $v = (l, m), v' = (l', m')$, sono *paralleli*, ovvero:

$$\mathbf{r} \| \mathbf{r'} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{v}} \| \tilde{\mathbf{v'}} \tag{10.33}$$

Ora ci chiediamo: *quando 2 vettori si dicono paralleli?* Come avevamo accennato nella sezione 10.1.2, due vettori sono ***paralleli*** quando **differiscono di un fattore di proporzionalità**, ovvero:

$$(l, m) = \lambda(l', m') \tag{10.34}$$

Risolviamo tale prodotto e poi mettiamo a sistema le corrispettive componenti uguagliandole :

$$(l, m) = (\lambda l', \lambda m')$$
$$\begin{cases} l = \lambda l' \\ m = \lambda m' \end{cases} \tag{10.35}$$
$$\begin{cases} \lambda = \frac{l}{l'} \\ \lambda = \frac{m}{m'} \end{cases}$$

Abbiamo trovato quindi che la **condizione di parallelismo tra 2 rette** è:

$$\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{l'}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m'}} \tag{10.36}$$

10.3.2 Condizione di ortogonalità fra 2 rette

Analizziamo la seguente immagine:

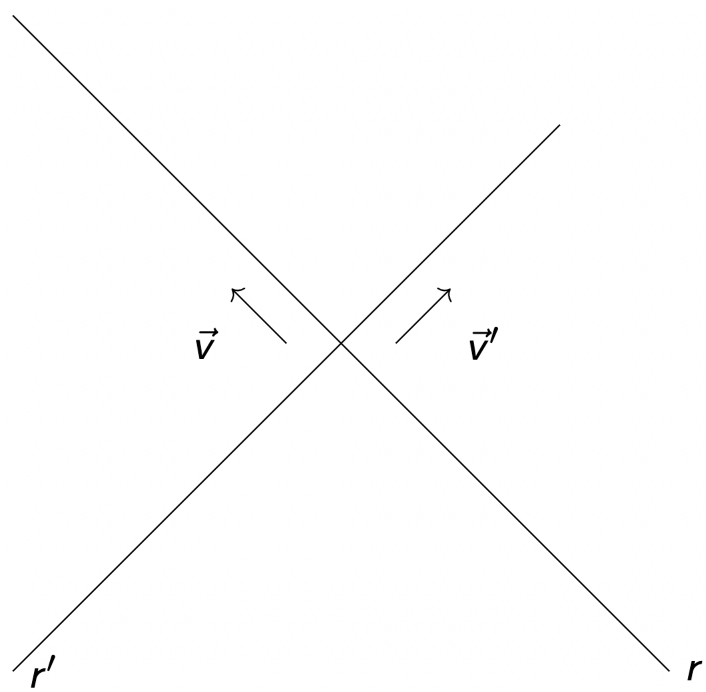


Figure 10.5: Condizione di ortogonalità fra 2 rette

Come per la condizione di parallelismo abbiamo che le due rette sono ***perpendicolari*** se e solo se i rispettori vettori direttivi, che hanno coordinate $v = (l, m), v' = (l', m')$ sono perpendicolari:

$$\mathbf{r} \perp \mathbf{r'} \leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{v'} \tag{10.37}$$

Come accennato nella sezione 10.1.3, abbiamo che due vettori sono perpendicolari se e solo se il loro ***prodotto scalare è 0***, ovvero:

$$v \perp v' \leftrightarrow v \cdot v' = 0 \tag{10.38}$$

Sostituendo le componenti dei vettori nel prodotto scalare abbiamo che:

$$\begin{gathered}(l, m) \cdot (l', m') = 0 \\ \mathbf{l \cdot l' + m \cdot m' = 0}\end{gathered} \tag{10.39}$$

Abbiamo quindi che $l \cdot l' + m \cdot m' = 0$ è la **condizione di ortogonalità fra 2 rette**.

10.4 Angolo tra due rette

Quando parliamo di **angolo tra due rette** r ed s, intanto dobbiamo partire dalla premessa che essi formano ***angoli a 2 a 2 uguali e supplementari***, ovvero, presi gli angoli α, β dati dall'incontro fra due rette r,s abbiamo che:

$$\alpha + \beta = 180° \tag{10.40}$$

di conseguenza conoscendo un angolo, possiamo ricavarci l'altro.

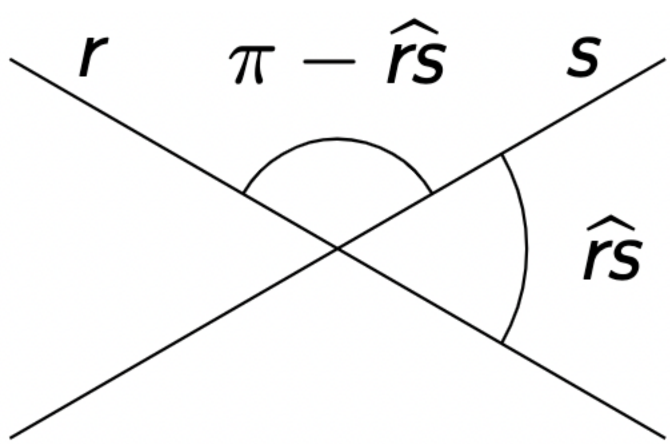


Figure 10.6: Angolo fra 2 rette r ed s

Fatta questa breve introduzione, possiamo fare delle considerazioni: ricordando che la retta r avrà un vettore direttivo $\vec{v_r}$, e la retta s avrà un vettore direttivo $\vec{v_s}$; ricordiamo anche che il **prodotto scalare tra 2 vettori** $\vec{v}, \vec{w}$, che si legge "*v scalare w*", era dato dalla formula (sezione 4):

$$|v| \cdot |w| \cdot \cos \alpha \tag{10.41}$$

La considerazione importante che si fa è la seguente: ***l'angolo formato dalle due rette*** $\widehat{rs}$ è ***lo stesso di quello formato dai due vettori direttivi*** $\widehat{v_r v_s}$. Per cui utilizzando il prodotto scalare tra 2 vettori possiamo trovare il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori, e quindi tra le due rette, trovandoci di conseguenza anche l'angolo stesso. Si procede dunque in questo modo, considerando $v_r = (l, m), v_s = (l', m')$, e considerando che i *moduli* sono $|v_r| = \sqrt{l^2 + m^2}$, $|v_s| = \sqrt{l'^2 + m'^2}$:

$$\begin{aligned} v_r \cdot v_s = |v_r| \cdot |v_s| \cdot \cos\alpha \\ \cos\alpha = \frac{v_r \cdot v_s}{|v_r| \cdot |v_s|} \\ \cos\alpha = \frac{(l, m) \cdot (l', m')}{\sqrt{l^2 + m^2} \cdot \sqrt{l'^2 + m'^2}} \\ \cos\alpha = \frac{\mathbf{ll' + mm'}}{\sqrt{\mathbf{l^2 + m^2}} \cdot \sqrt{\mathbf{l'^2 + m'^2}}} \end{aligned} \tag{10.42}$$

Sapendo quindi come trovare il *coseno* di α, possiamo trovare α come:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2} \cdot \sqrt{l'^2 + m'^2}}\right) \tag{10.43}$$

10.4.1 Esempio

Facciamo un esempio di un esercizio che ci chiede di trovare l'angolo tra 2 rette: Date due rette $r: \; 2x - y + 3 = 0$ ed $s: \; x - y + 5 = 0$, trovare l'angolo α che esse formano. **Risoluzione**:

- Per quanto detto in precedenza dobbiamo **trovare i vettori direttivi** v_r, v_s. Di conseguenza dobbiamo ***omogenizzare le rette***, che diventeranno quindi $r: 2x' - y' + 3t' = 0, \; s: x' - y' + 5t' = 0$, creando un sistema con l'indicatore uguale a 0 ($t' = 0$).
  - *Retta* r:

$$\begin{cases} 2x' - y' + 3t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 2x' \\ t' = 0 \end{cases} \tag{10.44}$$

    Abbiamo dunque trovato che per la retta r, il suo *punto all'infinito* è $P_\infty = (x', 2x', 0) = (1, 2, 0)$. Di conseguenza il **vettore direttivo** v_r sarà $\mathbf{v_r} = (1, 2)$.
  - *Retta* s:

$$\begin{cases} x' - y' + 5t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = y' \\ t' = 0 \end{cases} \tag{10.45}$$

Abbiamo dunque trovato che per la retta s, il suo *punto all'infinito* è $P_\infty = (x', x', 0) = (1, 1, 0)$. Di conseguenza il **vettore direttivo** v_s sarà $\mathbf{v_s = (1, 1)}$

- Una volta che abbiamo trovato i vettori direttivi v_r, v_s, possiamo calcolarci $\cos\alpha$ con la formula vista in precedenza:

$$\cos\alpha = \frac{ll' + mm'}{\sqrt{l^2 + m^2} \cdot \sqrt{l'^2 + m'^2}} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \tag{10.46}$$

- Razionalizzando il valore trovato, abbiamo che:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{3\sqrt{10}}}{\mathbf{10}} \tag{10.47}$$

di conseguenza abbiamo che:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \tag{10.48}$$

10.5 Formule notevoli

Vediamo alcune **formule notevoli** che sono molto utili negli esercizi e nei problemi:

- **Distanza tra 2 punti**: Dati due punti generici $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$, abbiamo che la *distanza tra* P_1 *e* P_2 è:

$$\overline{\mathbf{P_1P_2}} = \sqrt{\mathbf{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{10.49}$$

- **Punto medio di un segmento**: Dati due punti generici $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)$, abbiamo che il *punto medio* M del segmento $\overline{P_1P_2}$ è dato dalla formula:

$$\mathbf{M} = \left(\frac{\mathbf{x_1 + x_2}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{y_1 + y_2}}{\mathbf{2}}\right) \tag{10.50}$$

- **Distanza punto-retta**: Data la retta r di equazione $ax + by + c = 0$ e dato il punto $P_0 = (x_0, y_0) \notin r$, abbiamo che d, che rappresenta la *distanza del punto* P_0 *dalla retta* r è dato dalla formula:

$$\mathbf{d} = \overline{\mathbf{PH}} = \frac{\mathbf{|ax_0 + by_0 + c|}}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}} \tag{10.51}$$

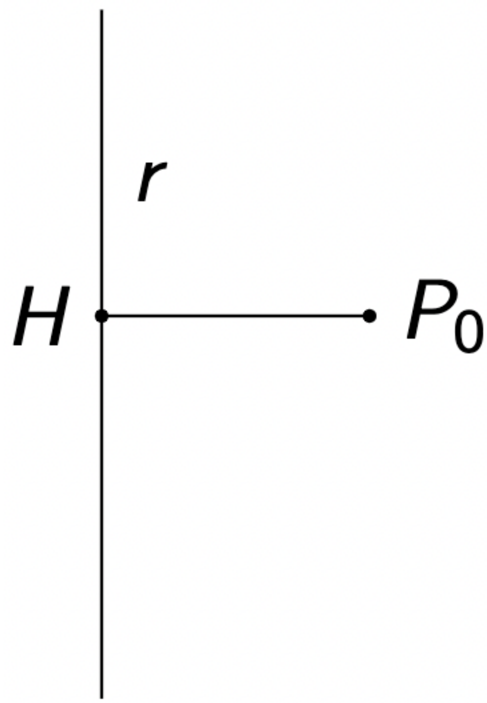


Figure 10.7: Distanza punto-retta

10.6 Fascio di rette

Definizione 12 *Date due rette r ed s, si dice* ***fascio generato da*** r ***ed*** s*, con* r, s*, quindi,* ***rette generatrici del fascio****, la* ***combinazione lineare tra le due rette****, cioè:*

$$\mathcal{F}: \ \lambda \cdot r + \mu \cdot s = 0 \tag{10.52}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *e* $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$*, ovvero non possono essere mai contemporaneamente 0.*

Abbiamo, però, che nel fascio ci sono *due parametri* λ *e* μ; avere 2 parametri però risulta molto "complicato" algebricamente, quindi **passiamo ad un parametro** in questo modo:

- Divido tutta l'equazione per λ:

$$\frac{\lambda \cdot r}{\lambda} + \frac{\mu \cdot s}{\lambda} = 0 \tag{10.53}$$

- Imponiamo il termine $\frac{\mu}{\lambda} = k$ e troviamo l'*equazione del fascio con 1 solo parametro*:

$$\mathcal{F}': \ r + ks = 0 \tag{10.54}$$

con $k \in \mathbb{R}$

Nasce il problema che con *il fascio con un solo parametro* ***non contiene*** *la retta generatrice* s, che si ottiene solamente per $\lambda = 0$. Di conseguenza abbiamo che:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' : \ \mathbf{r + ks = 0} \ + \ \mathbf{s = 0} \tag{10.55}$$

Vediamo adesso di prendere le rette $r: \ x - y + 4 = 0$ ed $s: \ x + y = 0$. Abbiamo che il fascio generato dalle rette con un solo parametro sarà:

$$(x - y + 4) + k(x + y) = 0 \tag{10.56}$$

con la **condizione** $\lambda \neq 0$, abbiamo quindi **la prima** retta **generatrice** $r: \ x - y + 4 = 0$. Per trovare però la ***seconda generatrice*** **leviamo la condizione**, diventando quindi $\lambda = 0$:

$$\mathcal{F} : \ 0(x - y + 4) + \mu(x + y) = 0 \tag{10.57}$$

che diventa dividendo per μ, visto che sicuramente $\mu \neq 0$:

$$\mathbf{x + y = 0} \tag{10.58}$$

che è la **seconda generatrice del fascio**.

10.6.1 Esempio

Vediamo un esempio di un esercizio in cui capiamo come applicare la teoria sul fascio. Date le rette $r: \ x - y + 4 = 0$ ed $s: \ x + y = 0$, trovare la **retta del fascio** che passa per il punto $A = (1, 3)$.

- Innanzitutto possiamo ricavarci il fascio con un solo parametro come:

$$x - y + 4 + k(x + y) = 0 \tag{10.59}$$

- Sostituiamo adesso le componenti del punto A nell'equazione del fascio così da ricavare k [3]:

$$\begin{aligned} 1 - 3 + 4 + k(1 + 3) &= 0 \\ 4k &= -2 \\ \mathbf{k} &= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{aligned} \tag{10.60}$$

- Sostituiamo adesso il valore di k nell'equazione del fascio così da trovare l'**equazione della retta del fascio passante per** A:

$$\begin{aligned} x - y + 4 - \frac{1}{2}(x + y) &= 0 \\ x - y + 4 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y &= 0 \\ 2x - 2x + 8 - x - y &= 0 \\ \mathbf{x - 3y + 8} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{10.61}$$

[3] **NB**: Se non si dovesse trovare k (Esempio: $0k = 3$), allora proprio perchè il fascio con un parametro non contiene la seconda generatrice, si prova a imporre $s = 0$ per vedere se k esiste

- Abbiamo trovato che l'equazione della retta del fascio passante per A è $x - 3y + 8 = 0$

Capitolo 11

RETTA NELLO SPAZIO

11.1 Retta nello spazio

Per quanto riguarda la **retta nello spazio** $\mathbb{R}^3$ possiamo *generalizzare* quanto detto nel piano, per cui la retta si può trovare tramite:

- **Retta passante per 2 punti**
- **Vettore direttivo**

In $\mathbb{R}^3$, come vediamo, *sparisce il vettore ortogonale* poichè non ci da alcuna informazione.

11.1.1 Retta passante per 2 punti

Abbiamo che in $\mathbb{R}^3$, in maniera analoga al piano, dati i punti $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, l'**equazione della retta nello spazio passante per 2 punti** è data dalla formula:

$$\mathbf{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \tag{11.1}$$

Per la ***dimostrazione***, che è tale e quale a quella fatta nel piano, rivedi la sezione 10.1.1.

11.1.2 Vettore direttivo

Abbiamo che in $\mathbb{R}^3$, in maniera analoga al piano, dato il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e il **vettore direttivo** $v_r = (l, m, n)$, dove (l, m, n) sono ***parametri direttori***; l'**equazione della retta nello spazio passante per un punto e parallela alla retta** è data dalla formula:

$$\mathbf{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}} \tag{11.2}$$

Anche in questo caso la ***dimostrazione*** è analoga a quella fatta nel piano alla sezione 10.1.2.

11.1.3 Esempio

Vediamo un esempio che ci permette di applicare le formule enunciate. Dato un punto $A = (1, 0, -2)$, scrivere la *retta passante per A* e avente ***parametri direttori*** $v = (2, 0, 3)$.

- In questo caso applichiamo la formula del *vettore direttivo*, che ci viene fornito dal testo:

$$\begin{gathered}\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{0} = \frac{z+2}{3}\end{gathered} \tag{11.3}$$

- Creiamo adesso un sistema che ci permetta di risolvere le equazioni trovando le equazioni:

$$\begin{gathered}\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z+2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ 3(x-1) = 2(z+2) \end{cases}\end{gathered} \tag{11.4}$$

Abbiamo potuto svolgere la prima equazione del sistema facendo il **prodotto in croce** $0(x - 1) = 2y \Rightarrow y = 0$. Inoltre abbiamo trovato quindi che l'equazione di r è:

$$\begin{cases} \mathbf{y = 0} \\ \mathbf{3x - 2z + 7 = 0} \end{cases} \tag{11.5}$$

Notiamo in questo caso che la retta r ha ***2 equazioni*** in $\mathbb{R}^3$ e non più una sola come in $\mathbb{R}^2$. Spiegheremo nella prossima sezione il perchè.

11.2 Equazione di un piano

Iniziamo da una breve considerazione: come abbiamo notato nell'esempio precedente (sezione 11.1.3), nello *spazio* $\mathbb{R}^3$ la retta ha **2 equazioni**. In realtà anche nel *piano* $\mathbb{R}^2$ la retta ha sempre avuto *2 equazioni*, poichè se ci pensiamo in $\mathbb{R}^2$ abbiamo che l'equazione della retta è data dal sistema:

$$r : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ z = 0 \end{cases} \tag{11.6}$$

Nello spazio $\mathbb{R}^3$ l'equazione della retta è data dal sistema:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{11.7}$$

Per cui ciò che possiamo denotare fondamentalmente è che, nello spazio $\mathbb{R}^3$ l'**equazione della retta è data dall'intersezione fra 2 piani**. Infatti l'***equazione del piano*** è del tipo:

$$\mathbf{ax + by + cz + d = 0} \tag{11.8}$$

Quindi se abbiamo per esempio l'equazione $x - y + z - 3 = 0$, essa ***rappresenta un piano e non una retta***. Quindi nell'equazione 11.7 abbiamo che $ax+by+cz+d=0$ è il piano π_1 [1], e $a'x+b'y+c'z+d'=0$ è il piano π_2; e la retta nello spazio è data dall'***intersezione*** dei piani π_1 e π_2.

11.2.1 Vettore "parametri direttori" del piano

Parlando di **parametri direttori nel piano**, essi sono dati dalla formula $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, dove a, b, c rappresentano i ***coefficienti delle incognite*** e il vettore u, chiamato **vettore "parametri direttori"** è **ortogonale** al piano. Esempi:

- Dato il piano $\pi : \ x - y + z - 3 = 0$, abbiamo che i suoi *parametri direttori* saranno $\vec{u} = (1, -1, 1)$;

- Dato il piano $\pi' : \ x - 2y + 3z = 0$, abbiamo che i suoi *parametri direttori* saranno $\vec{u} = (1, -2, 3)$.

In conclusione possiamo dire che dato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e un vettore $u = (a, b, c)$ **esiste uno e un solo piano passante per P_0 ed ortogonale ad u**.

11.2.2 Dimostrazione dell'equazione del piano

Andiamo a dimostrare il perchè il piano ha equazione $ax + by + cz + d = 0$, considerando il fatto, come abbiamo già anticipato nel precedente paragrafo, che esiste *uno e un solo piano* passante per un punto P_0 e ortogonale al vettore $\vec{u}$.

[1] La notazione vuole che i piani si indichino con la lettera π

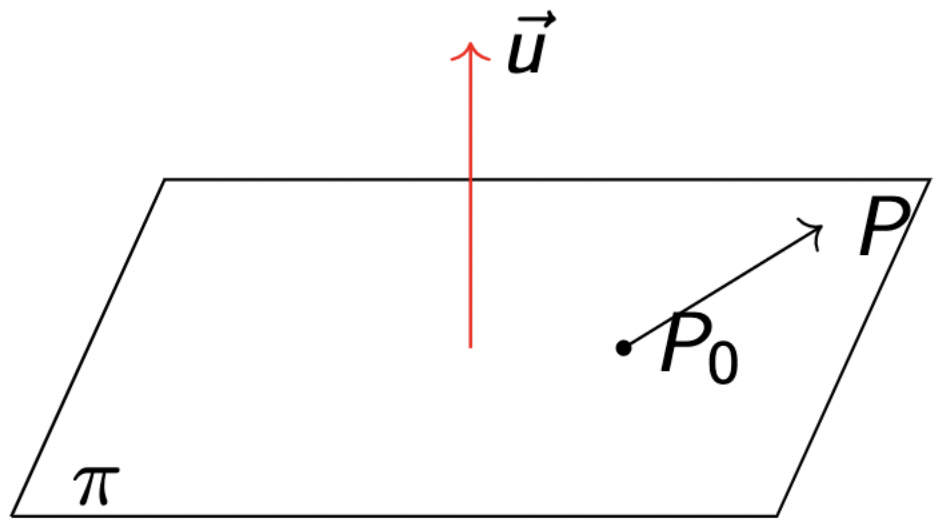


Figure 11.1: Piano passante per un punto P_0 e ortogonale al vettore u

Dimostrazione Fissiamo quindi un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e il vettore $\vec{u} = (a, b, c)$. Consideriamo inoltre un punto $P = (x, y, z) \in \pi$ generico all'interno del piano (come possiamo vedere in figura). Notiamo che se consideriamo il vettore $\vec{P_0P}$, esso dovrà essere per forza **ortogonale** ad u. La *condizione di ortogonalità* vuole che due vettori sono ortogonali quando il loro **prodotto scalare** è uguale a **0**:

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{u} = 0 \tag{11.9}$$

Andiamo, quindi, a sostituire le componenti sapendo che:

- $\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$
- $\vec{u} = (a, b, c)$

Quindi avremo che l'equazione sarà:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{11.10}$$

Andando a svolgere i vari passaggi, arriviamo a questa situazione:

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0 \tag{11.11}$$

Notiamo che il termine noto di tale equazione è composto da $-ax_0 - by_0 - cz_0$, che possiamo sostituire con una costante d. Per cui abbiamo trovato l'equazione del piano:

$$\mathbf{ax + by + cz + d = 0} \tag{11.12}$$

11.2.3 Piano passante per 3 punti

Sappiamo che *per 3 punti non allineati passa* ***uno e un solo*** *piano.* Quindi dati 3 punti non allineati:

- $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
- $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$
- $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

Imponiamo il passaggio di tali punti per il piano creando un *sistema lineare* che sarà di ***3 equazioni*** *in* ***4 incognite***:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0 \end{cases} \tag{11.13}$$

Una volta che risolveremo il sistema, per il teorema di Rouché-Capelli n.2, avremo $\infty^{n-r} = \infty 4 - 3 = \infty^1$ soluzioni con **un incognita libera**. Per esempio:

$$\begin{cases} a = 3d \\ b = 2d \\ c = d \end{cases} \tag{11.14}$$

Per cui possiamo sostituire nell'equazione del piano tali coefficienti e, visto che **differiscono per un fattore di proporzionalità**, potremo dividere o imporre a 1, il coefficiente "comune":

$$\begin{aligned} 3dx + 2dy + dz + d = 0 \\ 3x + 2y + z + 1 = 0 \end{aligned} \tag{11.15}$$

11.3 Condizioni di parallelismo e ortogonalità di rette nello spazio e di piani

Introduciamo adesso una serie di *esercizi teorici*, che sono molto utili soprattutto da applicare in esercizi di geometria lineare.

11.3.1 Condizione di parallelismo tra 2 rette nello spazio

Date due rette r, r' nello spazio, quando sono **parallele**? Prima di rispondere bisogna fare una piccola distinzione fra rette **parallele** e rette **sghembe**:

- Le **rette parallele** sono quelle rette che non si incontrano mai ed *esiste sempre un piano che le contiene entrambe*;
- Le **rette sghembe** sono quelle rette che non si incontrano mai e *non esiste mai un piano che le contiene entrambe.*

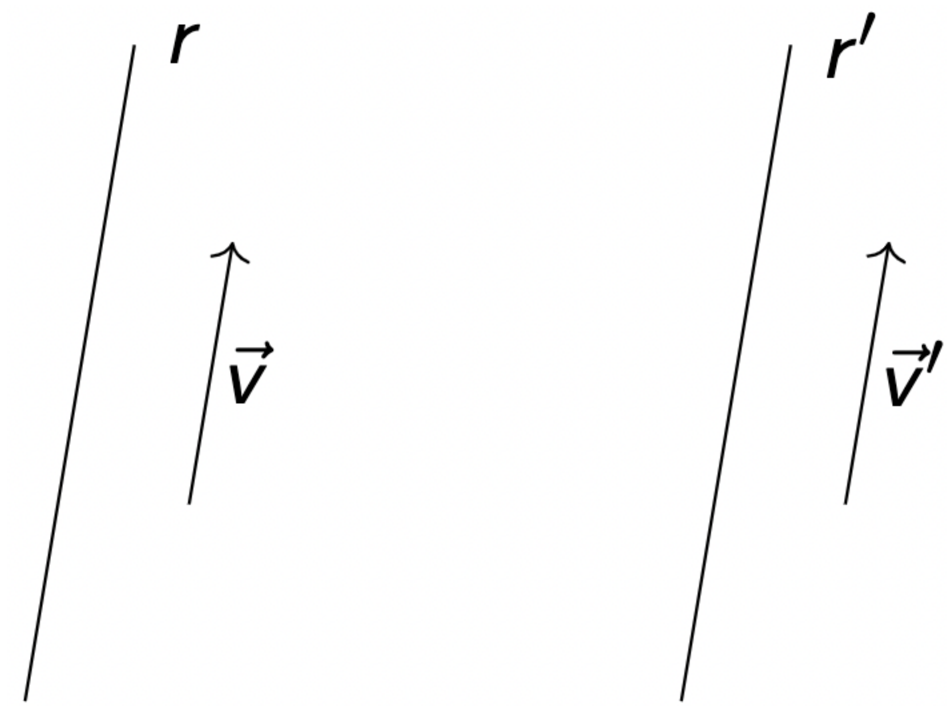


Figure 11.2: Rette nello spazio parallele

Come quasi in tutte le applicazioni di geometria lineare riduciamo il tutto ai **vettori direttivi**, ricordandoci la *condizione di parallelismo* che dice che due vettori sono paralleli quando **differiscono di un fattore di proporzionalità**. In questo caso considerando i vettori direttivi di r ed r', deve essere $\vec{v_r} = (l, m, n) || \vec{v_{r'}} = (l', m', n')$. Per cui avremo, per la condizione di parallelismo, tale equazione:

$$(l, m, n) = \lambda(l', m', n') \tag{11.16}$$

Come per la retta nel piano, tale equazione si trasforma in un sistema dal quale troviamo λ, ed uguagliamo tutti i secondi termini fra loro:

$$\begin{gathered}\begin{cases} l = \lambda l' \\ m = \lambda m' \\ n = \lambda n' \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = \frac{l}{l'} \\ \lambda = \frac{m}{m'} \\ \lambda = \frac{n}{n'} \end{cases}\end{gathered} \tag{11.17}$$

Abbiamo quindi trovato la condizione di parallelismo con l'equazione:

$$\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{l'}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m'}} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n'}} \tag{11.18}$$

11.3.2 Condizione di ortogonalità fra 2 rette nello spazio

Date 2 rette r, r' nello spazio, quando sono **ortogonali**?

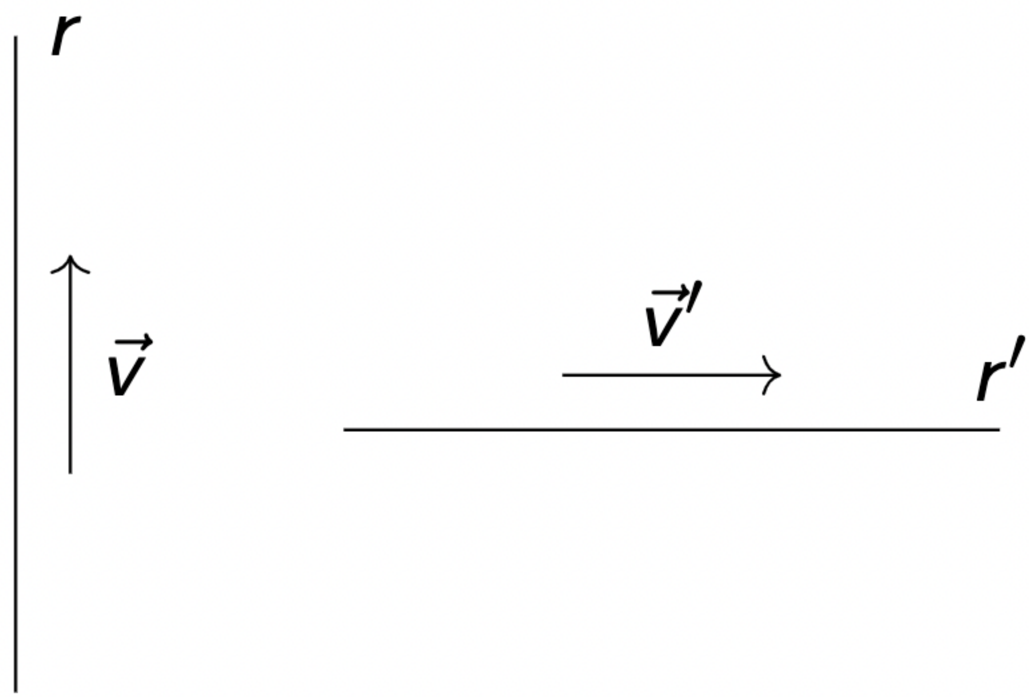


Figure 11.3: Rette nello spazio ortogonali

Come al solito consideriamo quindi i **vettori direttivi** delle rette r, r', ovvero $\vec{v_r} = (l, m, n)$ e $\vec{v_{r'}} = (l', m', n')$, sapendo che questi saranno ortogonali ($v_r \perp v_{r'}$). Sappiamo già che la *condizione di ortogonalità* vuole che due vettori siano ortogonali quando il loro **prodotto scalare** è **0**, per cui:

$$\begin{aligned} (l, m, n) \cdot (l', m', n') = 0 \\ \mathbf{ll' + mm' + nn' = 0} \end{aligned} \tag{11.19}$$

Abbiamo quindi trovato la condizione di ortogonalità fra due rette nello spazio.

11.3.3 Condizione di parallelismo fra 2 piani

Dati 2 piani π, π', quando sono **paralleli**?

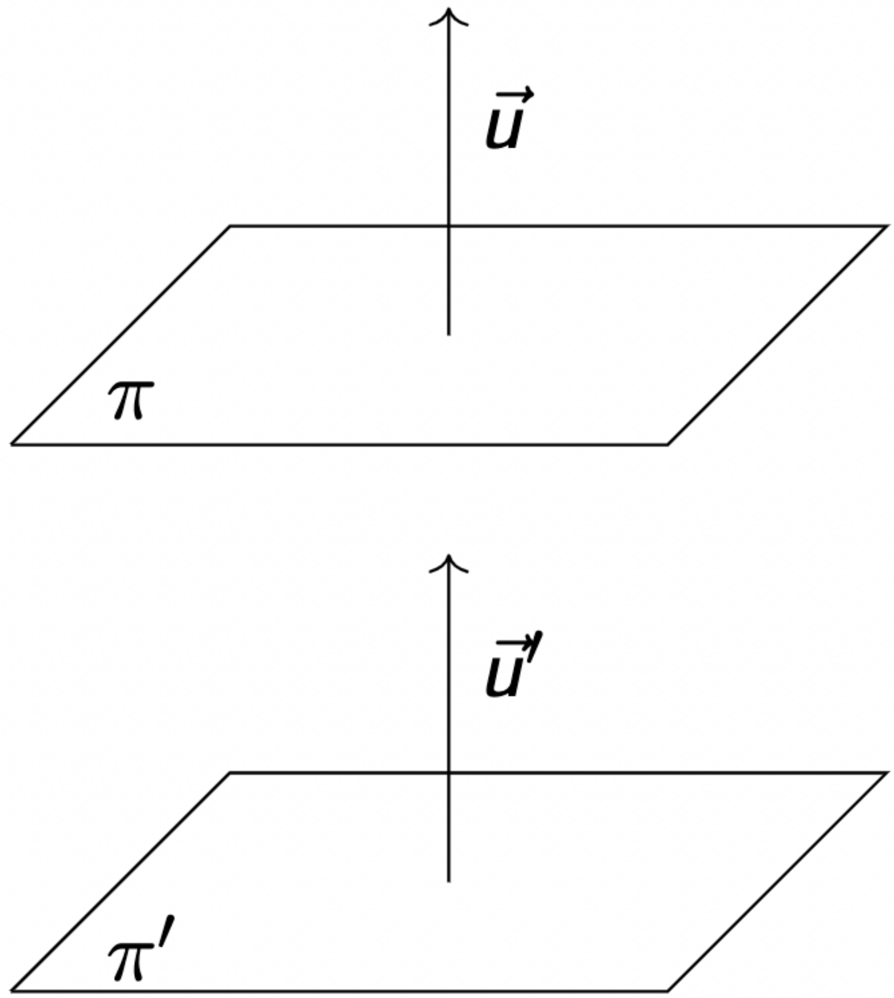


Figure 11.4: Piani paralleli

Al solito consideriamo i vettori direttivi dei due piani $u_\pi = (a, b, c)$ e $u_{\pi'} = (a', b', c')$. Come per le rette, abbiamo che i vettori direttivi dei due piani sono paralleli quando **differiscono di un fattore di proporzionalità**:

$$(a, b, c) = \lambda(a', b', c') \tag{11.20}$$

Ometto, per semplicità di stesura, i vari passaggi per trovare poichè completamente identici a quelli visti nelle sezioni precedenti. Arriviamo quindi ad avere, analogamente al parallelismo fra 2 rette, che la *condizione di parallelismo fra 2 piani* è:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a'}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b'}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c'}} \tag{11.21}$$

11.3.4 Condizione di ortogonalità fra 2 piani

Dati 2 piani π, π', quando sono **ortogonali**?

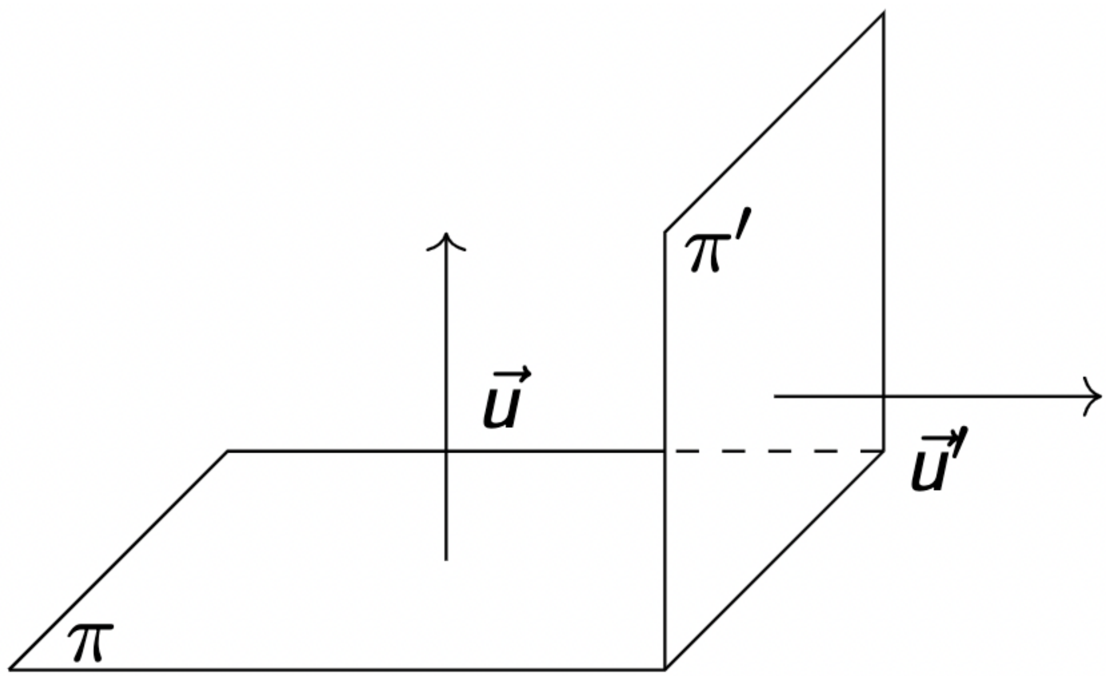


Figure 11.5: Piani ortogonali

Come per tutte le applicazioni viste in precedenza consideriamo quindi l'*ortogonalità dei vettori direttivi* $\vec{u_\pi} = (a, b, c)$; $\vec{u_{\pi'}} = (a', b', c')$, ovvero $(\vec{u_\pi} \perp \vec{u_{\pi'}})$, per cui, attraverso la *condizione di ortogonalità*, che dice che 2 vettori sono ortogonali quando il loro **prodotto scalare** è **0**, abbiamo che:

$$(a, b, c) \cdot (a', b', c') = 0 \Rightarrow \mathbf{aa' + bb' + cc' = 0} \tag{11.22}$$

11.4 Condizioni di parallelismo e ortogonalità fra piani e rette nello spazio

Abbiamo analizzato fino ad adesso condizioni di parallelismo e ortogonalità solo fra rette o fra piani. Analizziamo in questa sezione, invece, tali condizioni tra un piano e una retta.

11.4.1 Condizione di parallelismo fra una retta e un piano

Dati una retta r nello spazio e un piano π, quando sono **paralleli**?

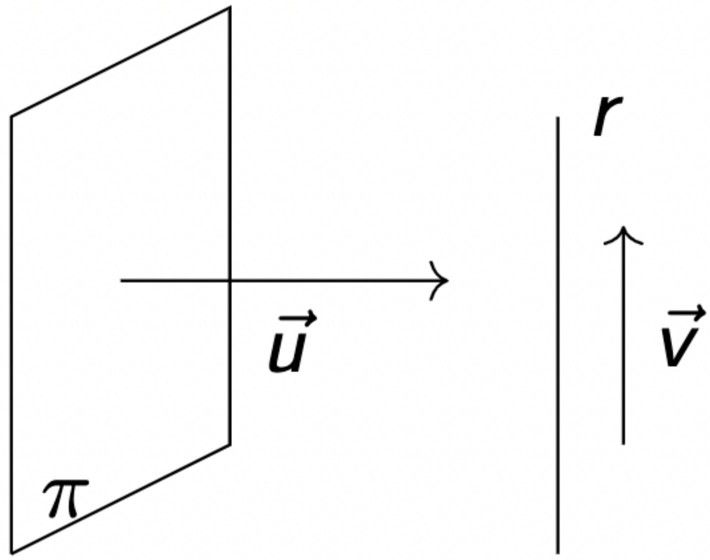


Figure 11.6: Piano parallelo a una retta

Consideriamo, come al solito ì, i vettori direttivi della retta e del piano; rispettivamente $\vec{v_r} = (l, m, n)$ e $\vec{u} = (a, b, c)$. Possiamo notare dalla figura 11.6 che nonostante la retta e il piano siano paralleli, i loro **vettori direttivi sono perpendicolari**, per cui dovremo applicare la condizione di ortogonalità:

$$\begin{aligned} v_r \cdot u_\pi &= 0 \\ (l, m, n) \cdot (a, b, c) &= 0 \end{aligned} \tag{11.23}$$

Troviamo quindi che la **condizione di parallelismo fra una retta e un piano** è:

$$(\mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}) = \mathbf{0} \tag{11.24}$$

11.4.2 Condizione di ortogonalità fra una retta e un piano

Dati una retta r nello spazio e un piano π, quando sono **ortogonali**?

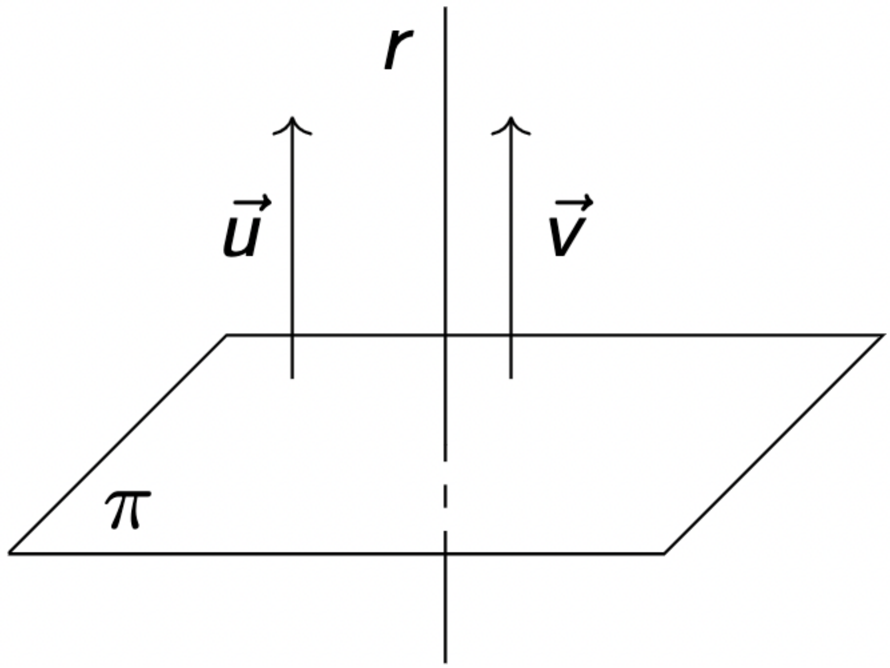


Figure 11.7: Piano e retta ortogonali

In tal caso, se analizziamo la figura 11.7 notiamo che nonostante il piano e la retta siano perpendicolari, i loro **vettori direttivi sono paralleli**. Applichiamo quindi la condizione di parallelismo:

$$\begin{gathered} v_r || u_\pi \\ (l, m, n) = \lambda(a, b, c) \end{gathered} \tag{11.25}$$

Troviamo infine, svolgendo i vari passaggi, che qui omettiamo poichè molto simili a quelli visti nella sezione 11.3.1, che la **condizione di ortogonalità fra un piano e una retta** è:

$$\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{c}} \tag{11.26}$$

11.5 Rette sghembe

Abbiamo già visto la definizione di **rette sghembe** nella sezione 11.3.1. Vediamo adesso date due rette r, r', come capire se esse sono sghembe. Abbiamo:

$$\begin{gathered} r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \\ r' : \begin{cases} a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{11.27}$$

Adesso imponiamo tutti i coefficienti come elementi di una matrice che sarà una 4×4, poichè abbiamo i 2 piani della prima retta e i 2 piani della seconda retta tutti con 4 coefficienti. La matrice sarà:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix} \tag{11.28}$$

Notiamo quindi che le prime due righe sono i coefficienti della prima retta r messi in riga, mentre le ultime due righe sono i coefficienti della seconda retta r'. Per capire se sono sghembe dovremo calcolare il ***determinante*** di tale matrice e se sarà **diverso da 0**, quindi non esistono righe "dipendenti", allora le due rette saranno sghembe. Di conseguenza la condizione è la seguente:

$$\mathbf{detA} \neq \mathbf{0} \tag{11.29}$$

11.6 Fascio di piani

Parlando del **fascio di piani**, esso è molto simile al *fascio di rette*. Dati 2 piani π_1 e π_2 si definisce **fascio**:

$$\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \quad \forall(\lambda, \mu) \neq (0, 0) \tag{11.30}$$

Poichè lavorare con 2 parametri potrebbe risultare troppo complesso, supponiamo che $\lambda \neq 0$ e dividiamo tutti i termini del fascio per λ, ottenendo:

$$\pi_1 + \frac{\mu}{\lambda}\pi_2 = 0 \tag{11.31}$$

Poniamo $\frac{\mu}{\lambda} = k$ e otteniamo il fascio di piani con **un solo parametro**, ovvero:

$$\boldsymbol{\pi_1 + k\pi_2 = 0} \quad (k = \frac{\mu}{\lambda} \wedge \lambda \neq 0) \tag{11.32}$$

Per il fascio di piani, inoltre, non abbiamo il *centro del fascio* come per il fascio di rette. Infatti, possiamo dire che *un fascio di piani sono **infiniti piani** che hanno in comune una **retta** r detta **asse del fascio***. **Esempio**: scrivere il fascio di piani avente come asse la retta r:

$$r : \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \tag{11.33}$$

Abbiamo che il fascio che ha come asse la retta r sarà:

$$\mathcal{F} : (3x - y + z) + k(x - z) = 0 \tag{11.34}$$

Svolgendo i calcoli diventa:

$$(3 - k)x - y + (1 - k)z \tag{11.35}$$

E' inoltre importante sapere che:

- Esistono **infiniti piani** contenente **una retta** r
- Esiste **uno e un solo piano** contenente **due rette**

11.6.1 Piano contenente due rette

Vediamo come, date due rette nello spazio r_1, r_2, è possibile trovare il piano che le contiene entrambe. Consideriamo:

$$r_1 : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z - -5 = 0 \end{cases}$$

(11.36)

Risoluzione:

- Scriviamo il fascio che ha per asse la retta r_1:

$$2x - y + z + k(x) = 0 \tag{11.37}$$

- Prendiamo un punto $P_0 \in r_2$, che non sia il punto di intersezione fra le due rette ($P_0 \neq r_1 \cap r_2$):

$$\begin{cases} x = y - 5 \\ z = 5 \end{cases} \tag{11.38}$$

  Abbiamo quindi che $P_0 = (y - 5, y, 5)$ e impongo un valore qualsiasi all'incognita libera, in questo impongo $y = 0$, quindi abbiamo che $P_0 = (-5, 0, 5)$

- Impongo che il fascio di piani passi per P_0:

$$\begin{aligned} 2(-5) - 0 + 5 + k(-5) &= 0 \\ -10 + 5 - 5k &= 0 \\ 5k &= -5 \\ \mathbf{k} &= \mathbf{-1} \end{aligned} \tag{11.39}$$

- Una volta trovato il parametro k, andiamo a sostituirlo nel fascio, trovando così il **piano contenente** r_1 **ed** r_2:

$$\begin{aligned} 2x - y + z - (x) &= 0 \\ \mathbf{x - y + z} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{11.40}$$

- Abbiamo trovato quindi che il piano contenente r_1 ed r_2 è $x - y + z = 0$

11.7 Esercizi

Vediamo adesso un paio di esercizi che si basano su quanto detto nelle precedenti sezioni.

11.7.1 Distanza punto-piano

Dato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ vogliamo trovare la sua **distanza col piano**, ovvero il segmento $\overline{P_0H}$

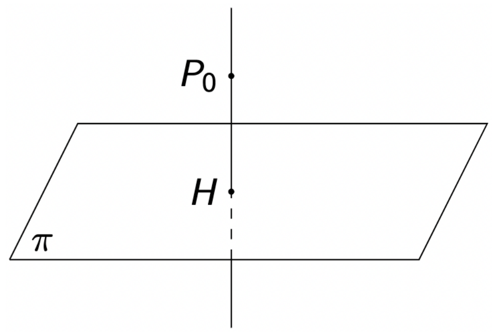


Figure 11.8: Distanza punto-piano

In tal caso ci viene in aiuto la seguente formula che ci permette di calcolare la distanza:

$$\overline{P_0H} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{11.41}$$

11.7.2 Proiezione ortogonale di un punto su un piano

Prendiamo un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e troviamo la sua proiezione ortogonale al piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.

Ciò che dobbiamo fare è trovare il punto H, che rappresenta la **proiezione ortogonale** del punto sul piano. Vediamo come si risolve:

- Troviamo la *retta* ***passante per*** P_0 *e ortogonale al piano* π. Sappiamo che i vettori direttivi della retta e quelli del piano saranno paralleli, e quindi uguali, poichè la retta e il piano sono perpendicolari. Quindi troviamo la retta come:
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{11.42}$$
- Per trovare il punto H, ovvero la proiezione ortogonale del punto P_0, sappiamo che è l'**intersezione del piano con la retta**:
$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \\ \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \tag{11.43}$$
- Una volta risolto il sistema a 3 equazioni in 3 incognite abbiamo trovato le componenti del punto H proiezione ortogonale al piano.

11.7.3 Simmetrico di un punto rispetto al piano

Vediamo adesso dato un piano π e un punto P_0, come trovare il **simmetrico** P_0' rispetto a π.

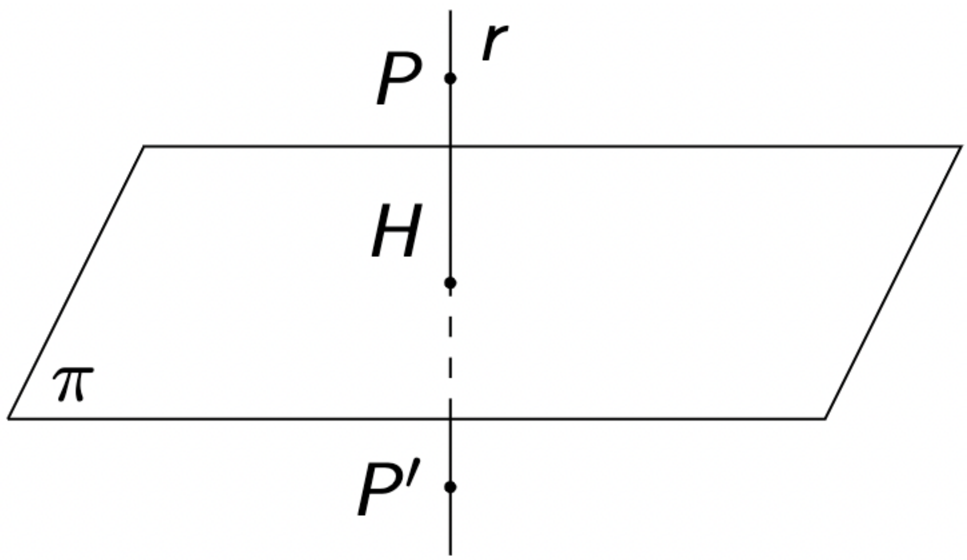


Figure 11.9: Simmetrico di un punto rispetto al piano

La risoluzione in questo caso è:

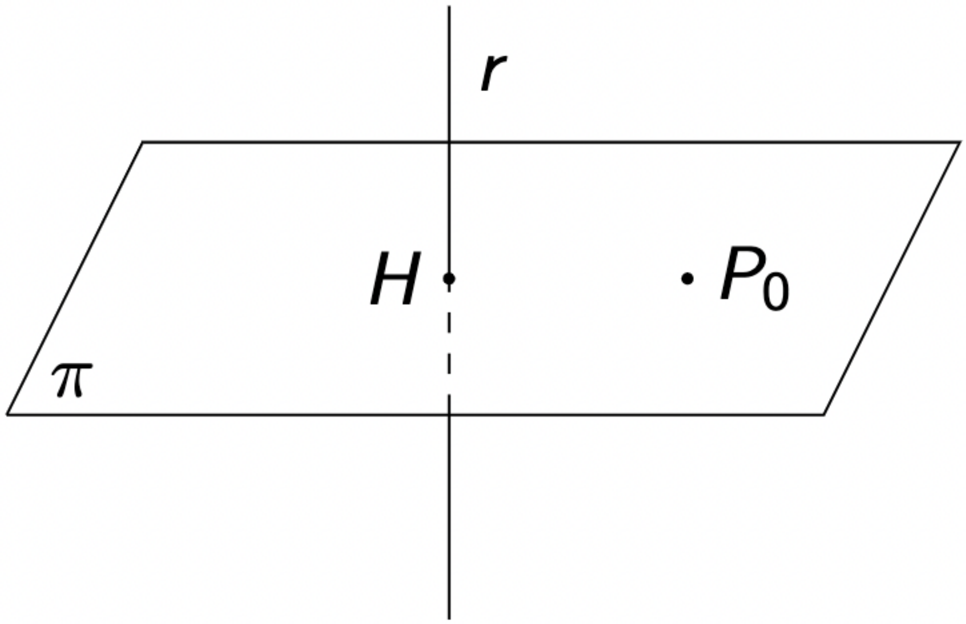
- Trovare il punto H, ovvero la **proiezione ortogonale** di P_0 (vedi sezione 11.7.2);
- Una volta trovato H, esso diventerà **punto medio** tra P_0 e P_0'. Quindi in pratica si viene a creare il sistema nel quale inseriamo la formula del punto medio per trovare le componenti di P_0':

$$\begin{cases} \frac{x_{P_0}+x_{P_0'}}{2} = x_H \\ \frac{y_{P_0}+y_{P_0'}}{2} = y_H \\ \frac{z_{P_0}+z_{P_0'}}{2} = z_H \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{P_0'} = 2x_H - x_{P_0} \\ y_{P_0'} = 2y_H - y_{P_0} \\ z_{P_0'} = 2z_H - z_{P_0} \end{cases} \tag{11.44}$$

11.7.4 Distanza punto-retta nello spazio

Data una retta nello spezio r e un punto $P_0 \notin r$, calcolare la **distanza** d. Vediamo la risoluzione:

- In tal caso non abbiamo una formula ben precisa, come nella *distanza punto-piano*, ma dobbiamo ricavarci la soluzione in un altro modo: dobbiamo trovare il ***piano ortogonale alla retta e passante per*** P_0, come possiamo vedere nella seguente figura:



- Troviamo quindi il **vettore direttivo del piano**, che è *uguale a quello della retta* poichè essendo perpendicolari tra loro, i loro vettori direttivi saranno paralleli.
- Una volta trovato il vettore direttivo del piano, *imponiamo il* ***passaggio per*** P_0 così da trovare il "termine noto" dell'equazione del piano d;
- Una volta trovato il piano π, trovo l'**intersezione del piano con la retta**, ovvero un punto $H = \pi \cap r$;
- Infine trovo il segmento $\overline{P_0H}$, che non è altro che la **distanza punto-retta**:
$$\sqrt{(x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2 + (z_H - z_0)^2} \tag{11.45}$$

Capitolo 12

Coniche

Parleremo in questo capitolo di **coniche** tornando sul *piano cartesiano* Oxy, con $z = 0$.

12.1 Definizione di conica

Definizione 13 *Una* ***conica*** *è il luogo dei punti del piano che con le loro coordinate* $(x, y, 0)$ *soddisfano l'equazione di secondo grado omogenea:*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0 \tag{12.1}$$

Notiamo che l'equazione presenta 5 termini che hanno *coefficienti particolari*, che usualmente non vedevamo in precedenza nelle equazioni della retta o del piano. Infatti sappiamo che ogni equazione della conica si *traduce* in una **matrice** 3×3. Tale matrice possiede le seguenti caratteristiche:

- La ***diagonale principale*** contiene i **termini puri**, ovvero i coefficienti di x^2, y^2 e *termine noto*, che sono rispettivamente gli elementi a_{11}, a_{22}, a_{33}.
- La matrice sarà **simmetrica**, vale a dire quindi che l'elemento a_{ij} sarà ***uguale*** all'elemento a_{ji}. Inoltre sappiamo che i restanti termini dalla diagonale principale andranno **divisi per 2**. Si verrà quindi a creare una matrice di questo tipo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{2a_{12}}{2} & \frac{2a_{13}}{2} \\ \frac{2a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{2a_{23}}{2} \\ \frac{2a_{13}}{2} & \frac{2a_{23}}{2} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

- Si viene a creare una ***sottomatrice*** 2×2 che è ottenuta *tagliando la terza riga e la terza colonna* e che ci servirà poi a trovare le grandezze chiamate **invarianze ortogonali**. Inoltre abbiamo che la matrice 3×3 viene chiamata B, mentre la sottomatrice viene chiamata A.

12.1.1 Esempio di conica

Abbiamo la conica $4x^2 - y^2 + 5 + 6xy + 2x - y = 0$ che ha ***equazione completa***, infatti non manca nessun termine. Scriviamo innanzitutto la matrice B:

$$\begin{pmatrix} 4 & \frac{6}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{6}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix} \tag{12.3}$$

Troviamo adesso la sottomatrice A tagliando la terza riga e la terza colonna:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \tag{12.4}$$

Invarianti ortogonali

Adesso dopo aver trovato le 2 matrici, ci serviranno per trovare le **invarianti ortogonali**, che hanno tale nome poichè al variare del *sistema di riferimento* tali grandezze rimangono uguali. Tali grandezze sono:

- $detB$
- $\rho(b)$
- $detA$
- $TrA = a_11 + a_22$, tale grandezza viene chiamata **traccia di** A ed è la somma dei primi due elementi della diagonale principale

Tornando all'esempio andiamo in ordine trovando tutte e 4 le grandezze:

- $detB = -20 - 3 + 1 - 1 - 45 = -68$;
- $\rho(B) = 3$: il rango è massimo poichè $detB \neq 0$;
- $detA = -4 - 9 = -13$
- $TrA = 4 - 1 = 3$

12.1.2 Coniche irriducibili e riducibili

Coniche irriducibili

Definizione 14 *Una conica si dice* ***irriducibile*** *se non è riducibile*

Tale affermazione può sembrare criptica ma verrà spiegata e sarà più chiara in seguito. Sappiamo inoltre che le coniche irriducibili sono le seguenti:

- **Ellisse**
- **Iperbole**
- **Parabola**

Coniche riducibili

Definizione 15 *Le coniche **riducibili** sono le coniche che possono essere **spezzate in 2 rette** e sono le seguenti:*

- ***2 rette distinte***
- ***2 rette coincidenti***
- ***2 rette immaginarie e coniugate***

Vediamo degli esempi di coniche riducibili:

- $x^2 - 9y^2 = 0$: possiamo scomporre tale equazione con la *differenza tra 2 quadrati*:
$$(x-3y)(x+3y) = 0 \tag{12.5}$$
di conseguenza questa sarà l'equazione di **2 rette distinte**
- $x^2 + 9y^2 - 6xy = 0$: possiamo vedere che tale equazione è un *quadrato di binomio*:
$$(x-3y)^2 = 0 \tag{12.6}$$
quindi in tal caso abbiamo l'equazione di **due rette coincidenti**
- $x^2 + 9y^2 = 0$: possiamo scomporre tale equazione attravero l'uso dei *numeri complessi*:
$$(x+9iy)(x-9iy) = 0 \tag{12.7}$$
quindi abbiamo due rette *complesse*, quindi abbiamo due **rette immaginarie e coniugate**.

12.1.3 Classificazione di coniche

Per classificare una conica abbiamo capito che utilizziamo le 4 **invarianti ortogonali**, e in particolare abbiamo questi casi:

- Se risulta $\mathbf{detB = 0}$, allora **la conica si spezza in 2 rette**. A questo punto si calcola il rango $\rho(B)$ e troviamo che:
  - Se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in 2 **rette distinte**
  - Se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in 2 **rette coincidenti**
- Se risulta $\mathbf{detB \neq 0}$, allora la conica è **irriducibile**. In tal caso calcoliamo il $detA$:
  - Se $detA > 0$ allora la conica è:
    - **Ellisse reale** se $TrA \cdot detB < 0$
    - **Ellisse immaginaria** se $TrA \cdot detB > 0$

    Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$ e $a_{12} = 0$ allora abbiamo una **circonferenza**
- Se $detA = 0$ allora la conica è una **parabola**
- Se $detA < 0$ allora la conica è un **iperbole**. Se inoltre $TrA = 0$ si tratta di un **iperbole equilatera**.

12.2 Fascio di coniche

Possiamo definire un **fascio di coniche** in maniera analoga a come facevamo con il fascio di rette (vedi sezione 10.6). Date 2 coniche C_1, C_2 si definisce *fascio* la seguente equazione:

$$\lambda C_1 + \mu C_2 = 0 \quad \forall (\lambda, \mu) \neq (0,0) \tag{12.8}$$

Come facevamo per le rette suppongo che $\lambda \neq 0$ e divido tutto per λ, per evitare di lavorare con 2 parametri, ottenendo la seguente equazione:

$$C_1 + \frac{\mu}{\lambda} C_2 = 0 \tag{12.9}$$

Sostituisco il termine $\frac{\mu}{\lambda} = k$ e ottengo il **fascio di coniche con un parametro**:

$$C_1 + kC_2 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \tag{12.10}$$

Come per le rette *perdiamo una conica*, ovvero quella nel caso in cui $\lambda = 0$. Di conseguenza troviamo che la conica persa, che ci potrebbe essere utile per molti esercizi, sarà del tipo:

$$C_2 = 0 \tag{12.11}$$

12.3 Geometria analitica (coniche)

Vediamo in questa sezione di fare un piccolo "ripasso" riguardante l'**ellisse**, la **circonferenza**, l'**iperbole** e la **parabola** e delle formule imparate, si immagina, a scuola riguardanti tali coniche.

12.3.1 Ellisse

Diamo inizialmente una breve definizione teorica dell'**ellisse**:

Definizione 16 *E' il luogo dei punti del piano per cui è* ***costante*** *la somma delle distanze da due punti fissi detti* ***v****. In particolare preso qualsiasi punto P appartenente all'ellisse vale che:*

$$PF_1 + PF_2 = costante \tag{12.12}$$

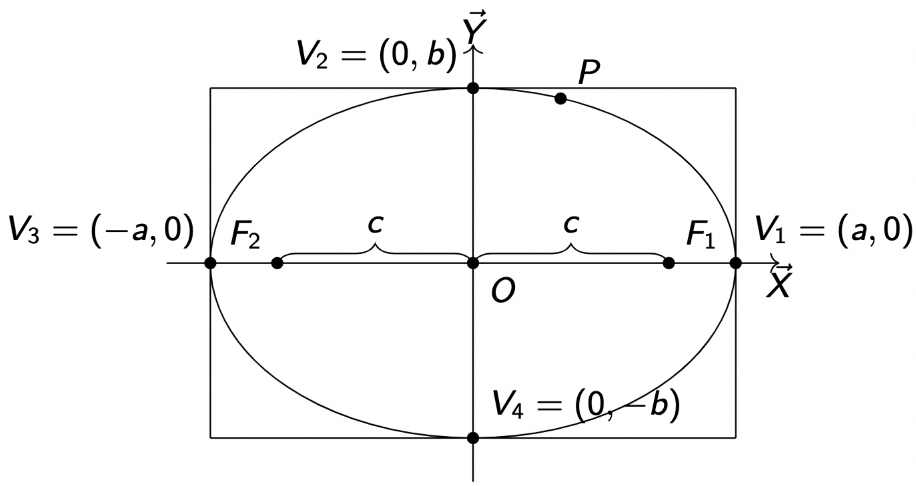


Figure 12.1: Ellisse

Come possiamo notare l'ellisse, analizzando il caso in cui *il centro di simmetria coincide con l'origine*, è caratterizzata da:

- **2 assi di simmetria**. In particolare notiamo che il **semiasse maggiore** $\overline{OV_1}$ ha lunghezza **a**, quindi l'**asse maggiore** $\overline{V_3V_1}$ ha lunghezza **2a**. Mentre il **semiasse minore** $\overline{OV_2}$ ha lunghezza **b**, mentre l'**asse minore**, ovvero $\overline{V_2V_4}$, ha lunghezza **2b**.
- **4 vertici**: V_1, V_2, V_3, V_4. Tali vertici rappresentano l'*intersezione* tra gli assi di simmetria e l'ellisse e hanno componenti:
  - $V_1 = (a, 0)$
  - $V_2 = (0, b)$
  - $V_3 = (-a, 0)$
  - $V_4 = (0, -b)$
- **2 fuochi**: F_1, F_2. La **distanza dall'origine ai fuochi**, ovvero $\overline{OF_1}$, ha lunghezza **c**, mentre la **distanza tra i 2 fuochi**, ovvero $\overline{F_1F_2}$, ha lunghezza **2c**. I fuochi, quindi, avranno componenti:
  - $F_1 = (c, 0)$
  - $F_2 = (-c, 0)$
- Esiste inoltre una relazione tra a, b, c che ci dice che:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{12.13}$$

- L'**eccentricità** dell'ellisse inoltre è:

$$e = \frac{c}{a} \quad (\frac{c}{a} < 1) \tag{12.14}$$

Riprendendo un attimo la definizione teorica dell'ellisse possiamo dire in particolare che, preso qualsiasi punto P appartenente all'ellisse, abbiamo che:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \tag{12.15}$$

Quindi se ad esempio prendiamo un punto P, e troviamo che $PF_1 + PF_2 = 10$, allora se prendiamo un altro punto Q, sempre appartenente all'ellisse, abbiamo che $QF_1 + QF_2 = 10$

Equazione canonica dell'ellisse

Per quanto riguarda l'**equazione in forma canonica dell'ellisse**, ovvero l'equazione dell'ellisse nel quale il centro coincide con l'origine e gli assi di simmetria sono gli assi cartesiani, l'equazione è la seguente:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \tag{12.16}$$

Caso particolare

Abbiamo un caso particolare nell'ellisse quando **invertiamo l'asse maggiore con l'asse minore** come nella seguente figura:

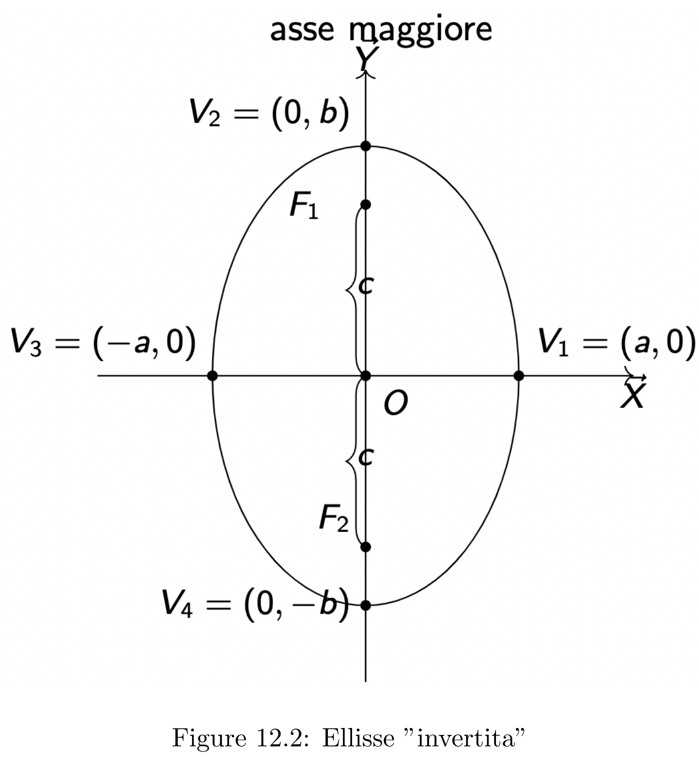


Figure 12.2: Ellisse "invertita"

In questo caso avremo che le 2 condizioni che cambiano per ottenere un ellisse di questo tipo sono:

$$\begin{cases} \mathbf{a < b} \\ c = \sqrt{b^2 - a^2} \end{cases} \tag{12.17}$$

12.3.2 Circonferenza

La **circonferenza** è una **particolare ellisse**. Come abbiamo fatto per l'ellisse, diamo inizialmente una breve definizione teorica:

Definizione 17 *La circonferenza è il luogo dei punti P del piano equidistanti da un punto fisso detto **centro**.*

Equazioni della circonferenza

L'**equazione della circonferenza** si può presentare in 2 forme.

Prima forma dell'equazione della circonferenza La prima forma in cui può presentarsi una circonferenza è la seguente:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{12.18}$$

Notiamo in questo caso che, confrontando tale equazione con quella della conica generale (vedi sezione 12.1), il *termine misto xy* manca, ovvero $a_{12} = 0$ e inoltre segue che $a_{11} = a_{22} \neq 0$. Quindi posso sapere se una conica è una circonferenza tramite le **condizioni**:

- $a_{12} = 0$
- $a_{11} = a_{22} \neq 0$

Inoltre tramite questa forma posso ricavarmi **centro e raggio della circonferenza**, infatti sappiamo che:

- **Centro**:
$$C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \tag{12.19}$$
- **Raggio**:
$$r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c} \tag{12.20}$$

Seconda forma dell'equazione della circonferenza In tal caso conosco il *centro* $C = (x_0, y_0)$ e il *raggio* r e voglio trovare l'equazione della circonferenza. La formula è la seguente:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{12.21}$$

Ad esempio suppongo di sapere che $C = (2, -3)$ e $r = 4$ e voglio trovare l'equazione della circonferenza:

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y-3)^2 &= 16 \\ x^2 + 4 - 4x + y^2 + 9 + 6y - 16 &= 0 \\ \mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3} &= \mathbf{0}\end{aligned} \tag{12.22}$$

12.3.3 Iperbole (2 rami)

Diamo inizialmente una definizione teorica di iperbole:

Definizione 18 *E' il luogo dei punti del piano per cui è costante la* ***differenza*** *delle distanze da due punti fissi detti fuochi. Significa che per tutti i punti P della figura avremo che:*

$$PF_1 - PF_2 = costante \tag{12.23}$$

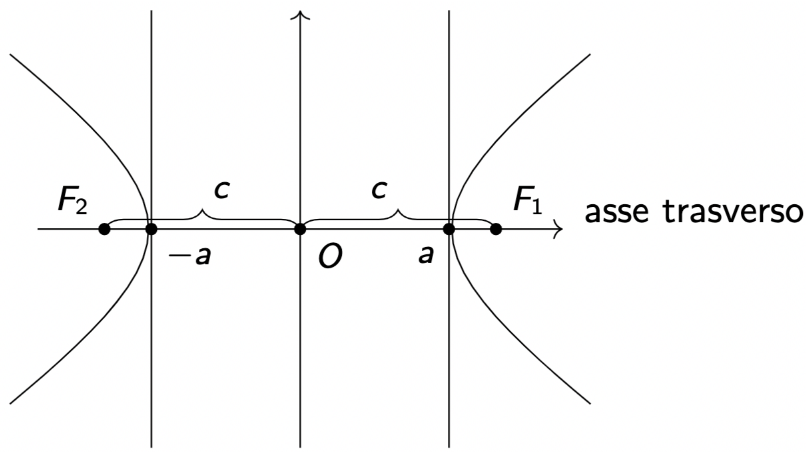


Figure 12.3: Iperbole

Come possiamo notare dalla figura di sopra, assumendo che sia *centrata*, l'iperbole è caratterizzata da:

- **2 vertici**: V_1, V_2. Tali vertici hanno componenti:
  - $V_1 = (a, 0)$
  - $V_2 = (-a, 0)$
- **2 fuochi**: F_1, F_2. Tali fuochi hanno componenti:
  - $F_1 = (c, 0)$
  - $F_2 = (-c, 0)$

- Inoltre sappiamo che per $c < a$, abbiamo che:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{12.24}$$

- L'**eccentricità** dell'iperbole è data da:

$$e = \frac{c}{a} \quad (\frac{c}{a} > 1) \tag{12.25}$$

Equazione dell'iperbole

L'equazione *canonica* dell'iperbole è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{12.26}$$

Asintoti dell'iperbole

L'iperbole, a differenza delle altre coniche che abbiamo visto, possiede due **asintoti** che sono delle rette a cui la curva si *avvicina all'infinito* senza mai toccarli. Tali asintoti nell'iperbole hanno equazione:

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{12.27}$$

Inoltre possiamo aggiungere che il **punto di tangenza all'infinito** degli asintoti con l'iperbole sarà dato dai **punti impropri degli asintoti** (vedi sezione 10.2). L'iperbole, in particolare, possiede *2 punti impropri* che sono *reali e distinti* e sono appunto quelli degli asintoti. Se parliamo invece dell'**ellisse**, e di conseguenza anche della **circonferenza**, essendo queste 2 *curve chiuse* avranno dei **punti impropri complessi**, a differenza di quelli dell'iperbole che sono reali.

Iperbole equilatera

L'iperbole **equilatera** è un iperbole avente gli **asintoti ortogonali**, quindi $P^1_\infty \perp P^2_\infty$.

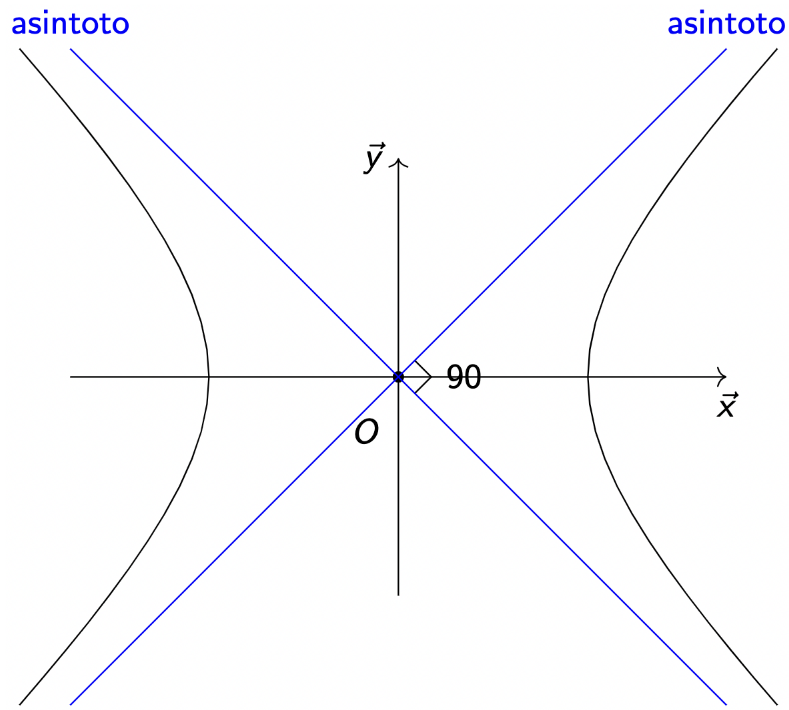


Figure 12.4: Iperbole equilatera

Possiamo dire che la *condizione* che deve valere affinchè l'iperbole sia equilatera è:

$$TrA = 0 \tag{12.28}$$

12.3.4 Parabola

Diamo una breve definizione di **parabola**:

Definizione 19 *E' il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta detta direttrice. Significa che per tutti i punti P della figura avremo che:*

$$PF = PH \tag{12.29}$$

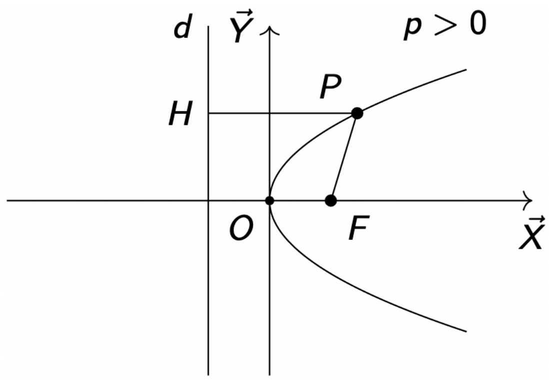


Figure 12.5: Parabola

La parabola, considerando che l' asse di simmetria è parallelo all' asse y, è caratterizzata da:

- $a > 0$
- **Equazione canonica**:
$$y = ax^2 + bx + c \tag{12.30}$$
- **1 vertice**: $V = -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}$ dove a, b sono i coefficienti dell'equazione canonica
- **1 fuoco**: $F = (c, 0)$
- **Asse di simmetria** che sarà:
$$x = x_v \tag{12.31}$$
dove x_v rappresenta la coordinata dell'ascissa del vertice

Nel caso in cui l' asse di simmetria è parallelo all' asse x, allora avremo che:

- $a < 0$;
- **Equazione canonica**:
$$x = ay^2 + by + c \tag{12.32}$$
- **Un vertice** $V = -\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}$
- **Asse di simmetria** tale che:
$$y = y_v \tag{12.33}$$
dove y_v rappresenta la coordinata dell'ordinata del vertice

12.4 Punti base

Dato un *fascio di coniche*, ovvero infinite coniche, esisteranno 4 **punti base**. Per questi 4 punti passano tutte le coniche del fascio e sono di *4 tipologie* distinte:

- **Distinti**
- **Coincidenti a 2 a 2**
- **2 coincidenti e 2 distinti**
- **3 coincidenti e uno no**

Inoltre per il fascio di coniche vale il seguente teorema:

Teorema 15 *In un fascio di coniche ci sono sempre* ***3 coniche spezzate***

Tali coniche spezzate dovranno *coprire* i 4 punti base del fascio contemporaneamente.

12.4.1 Trovare i punti base e le coniche spezzate di un fascio di coniche

Vediamo un esempio di come trovare i punti base e le coniche spezzate dato un fascio di coniche. Supponiamo di avere il fascio:

$$2x^2 - y^2 + kx^2 + k - 2kx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \tag{12.34}$$

Tale fascio diventa:

$$(k+1)x^2 - y^2 - 2kx + k = 0 \tag{12.35}$$

Risoluzione:

- Troviamo prima le coniche spezzate. Di conseguenza ricaviamo la matrice B della conica, per poi trovare il $detB$ e porlo *uguale a 0* così da trovare le coniche spezzate (vedi sezione 12.1.3). Abbiamo dunque che B è:

$$B = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 0 \\ -k & 0 & k \end{pmatrix} \tag{12.36}$$

Inoltre il $detB$ sarà:

$$detB = -k(k+1) + k^2 = -k \tag{12.37}$$

Abbiamo quindi che ponendo $detB = 0$, troviamo che $k = 0$. Andiamo a sostituire nella matrice, trovando quindi che:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.38}$$

Quindi abbiamo che il rango di tale matrice risulta $\rho(B) = 2$, quindi riguardando sempre la sezione 12.1.3, la conica si spezza in **2 rette distinte**

- Troviamo la **prima conica spezzata del fascio** sostituendo $k = 0$ nel fascio, quindi troviamo che:

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 0 \tag{12.39}$$

- Per trovare la **seconda conica spezzata del fascio** ricordiamo quanto detto nella sezione 12.2, ovvero dobbiamo cercare nella conica "buttata" via quando siamo passati con un solo parametro nel fascio, ovvero $C_2 = 0$. Raccogliamo quindi i termini del fascio con k così da trovare C_2:

$$x^2 - y^2 + k(x^2 + 1 - 2x) = 0 \tag{12.40}$$

  Quindi abbiamo che:

$$C_2 : \ x^2 + 1 - 2x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \tag{12.41}$$

  Abbiamo quindi trovato la **seconda conica spezzata**.

- Troviamo i **punti base** mettendo a sistema entrambe le coniche spezzate, quindi:

$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \tag{12.42}$$

  Svolgendo i vari calcoli, che omettiamo per ragioni di velocità, troviamo due punti distinti che sono:

$$A = (1,1) \quad B = (1,-1) \tag{12.43}$$

Ovviamente quando studiamo il fascio di coniche può capitare che le coniche siano spezzate oppure irriducibili. Si procede comunque in maniera uguale a come visto in questo esercizio.

12.5 Forme ridotte (o canoniche)

Data una conica Γ **irriducibile** (ellisse[1], iperbole e parabola) possiamo trovare dall'equazione generica di una conica, la sua **forma ridotta**. In tal caso stiamo effettuando una *rototraslazione nel piano*, tale che Γ si trovi in un ***nuovo sistema di riferimento*** OXY. In particolare abbiamo *due forme ridotte*:

- **Forma ridotta n.1**:

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma \tag{12.44}$$

  Tale forma ridotta riguarda ***ellisse e iperbole***.

[1] L'ellisse include per definizione anche la **circonferenza**

- **Forma ridotta n.2**:
$$\beta Y^2 = 2\gamma X \tag{12.45}$$
Tale forma ridotta riguarda la ***parabola***.

Adesso vedremo come trovare tali forme ridotte.

12.5.1 Determinare la forma ridotta n.1

Nel caso della forma ridotta n.1 dobbiamo determinare α, β, γ:

- Per quanto riguarda γ sappiamo che è uguale a:
$$\gamma = -\frac{detB}{detA} \tag{12.46}$$
dove B rappresenta la matrice della conica e A la sottomatrice di B (sezione 12.1)

- Per quanto riguarda α, β sappiamo che sono gli **autovalori** del *polinomio caratteristico* della sottomatrice A. Quindi, dobbiamo imporre il determinante del polinomio caratteristico a 0, trovando così gli autovalori.

12.5.2 Determinare forma ridotta n.2

Per quanto riguarda la forma ridotta n.2 dobbiamo trovare solo β, γ:

- Per quanto riguarda β dobbiamo, molto semplicemente, trovare la ***traccia*** della sottomatrice A, infatti:
$$\beta = TrA \tag{12.47}$$

- Per quanto riguarda γ, vale la seguente formula:
$$\gamma = +\sqrt{-\frac{detB}{TrA}} \tag{12.48}$$

12.6 Centro di simmetria

Vediamo come determinare il **centro di simmetria** nell'***ellisse*** e nell'***iperbole***. Ricordiamo infatti che la parabola non ha centro di simmetria. Per trovare quindi $C = (x_C, y_C)$, dobbiamo semplicemente risolvere tale sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_C + a_{12}y_C + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_C + a_{22}y_C + a_{23} = 0 \end{cases} \tag{12.49}$$

Essendo un sistema con 2 equazioni in 2 incognite troveremo :

$$\begin{cases} x_C = \dots \\ y_C = \dots \end{cases} \tag{12.50}$$

12.7 Assi di simmetria

Per quanto riguarda gli **assi di simmetria**, sappiamo che l'ellisse e l'iperbole ne hanno 2. In particolare si possono presentare 2 casi:

- Se $a_{12} \neq 0$, ovvero c'è il ***termine misto***, abbiamo che:
  - Dati α, β autovalori della sottomatrice A, sappiamo che la formula del **coefficiente angolare** è:

$$m_\alpha = -\frac{(a_{11} - \alpha)}{a_{12}} \tag{12.51}$$

  - Conoscendo il coefficiente angolare m_α posso trovarmi l'**equazione del primo asse** con tale formula:

$$y - y_C = m_\alpha(x - x_C) \tag{12.52}$$

    Con (x_C, y_C) *coordinate del centro di simmetria.*
  - Per quanto riguarda l'**equazione del secondo asse**, sappiamo che il suo coefficiente angolare, essendo la retta perpendicolare al primo asse, sarà $m_\perp = \frac{1}{m_\alpha}$. Utilizzando quindi sempre la stessa formula troviamo l'equazione del secondo asse:

$$y - y_C = \frac{1}{m_\alpha}(x - x_C) \tag{12.53}$$

- Se invece abbiamo che $a_{12} = 0$, ovvero manca il termine misto, allora gli **assi di simmetria** a_1, a_2 sono **paralleli agli assi cartesiani**, abbiamo quindi che:
  - a_1:

$$x = x_C \tag{12.54}$$

  - a_2:

$$y = y_C \tag{12.55}$$

12.8 Vertici

Per quanto riguarda ellisse e parabola, per trovare i rispettivi **vertici**, che ricordiamo essere 4, bisogna semplicemente fare i sistemi:

$$V_1, V_3 : \begin{cases} ellisse \\ asse\ n.1 \end{cases} \tag{12.56}$$

E poi:

$$V_2, V_4 : \begin{cases} ellisse \\ asse\ n.2 \end{cases} \tag{12.57}$$

Per quanto riguarda la **parabola** omettiamo questi procedimenti. Ad ogni modo per quanto scritto nella sezione 12.3.4 potete comunque trovare **centro e assi di simmetria** nel caso in cui l'**asse di simmetria è parallelo a uno dei due assi cartesiani**.