Matrice trasposta Classe 4L Informatica

Prof. Salvatore D'Asta

5 marzo 2021

1 Matrice Trasposta

La matrice trasposta della seguente matrice si ottiene scambiando le posizioni dei numeri in rosso con quelli in blu in modo tale che **a**[**i**][**j**] si scambi con **a**[**j**][**i**], dove $a[i][j]$ è l'elemento posto nella i-esima riga e nella j-esima colonna.

i/j	0	1	2	3
0	**0**	1	2	3
1	4	**5**	6	7
2	8	9	**10**	11
3	12	13	14	**15**

$\Longrightarrow$

i/j	0	1	2	3
0	**0**	4	8	12
1	1	**5**	9	13
2	2	6	**10**	14
3	3	7	11	**15**

Si può osservare che per ottenere il risultato basta effettuare 6 scambi cioè 3+2+1 scambi ed in generale per una matrice quadrata di dimensione $n \times n$ basta effettuare $\underbrace{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}_{(n-1)\text{ addendi}}$ scambi

```
public void traspostaMatrice()
        {
                int Supporto;
                for(int i=0;i<righe;i++)
                {
                for (int j=i;j<colonne;j++)
                {
                        Supporto=Matrice[i][j];
                        Matrice[i][j]=Matrice[j][i];
                        Matrice[j][i]=Supporto;
                }
        }
}
```

2 Metodo di eliminazione di Gauss

Consiste nel riuscire a trasformare la matrice data in una matrice a gradini (*tutti zeri al di sotto della diagonale principale*) Si supponga di averre la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

regole per trasformarla sono le seguenti:

- si possono scambiare le righe
- si può sostituire una riga con il risultato della somma della stessa con un'altra riga eventualmente moltiplicata per un numero[1].

Il risultato dovrà essere una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Algoritmo:
Supponiamo di avere la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1. Se la prima riga ha il primo elemento $a_{00} = 0$ la si scambia con una che ha il primo elemento non nullo
2. si sottrae alla seconda riga la prima moltiplicata per $\frac{a_{10}}{a_{00}}$ e la sostituisce alla seconda riga.
3. si procede allo stesso modo con le restanti righe sottraendo alla i-esima riga la prima moltiplicata per $\frac{a_{i0}}{a_{00}}$ fino ad ottenere una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

4. Si sottrae alla terza riga la seconda moltiplicata per $\frac{b_{21}}{b_{11}}$ ed allo stesso modo si procede per restanti righe sottraendo alla i-esima riga la seconda moltiplicata per $\frac{b_{i1}}{b_{11}}$ in tal modo otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

5. ed infine sottraendo all'ultima la penultima moltiplicata per $\frac{c_{32}}{c_{22}}$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

2.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

[1] Moltiplicare una riga per un numero equivale a moltiplicare ogni elemento della riga per il numero ad esempio se la riga della matrice è 2 4 8 6 moltiplicarla per 3 equivale ad eseguire la seguente operazione: (3×2) (3×4) (3×8) (3×6)

Applichiamo l'agoritmo di Gauss:
Sottraiamo alla seconda riga, la prima moltiplicata per $\frac{1}{4}$ quindi:

$$\frac{1}{4} \times (4\ 5\ 9\ 6) = (1\ \frac{5}{4}\ \frac{9}{4}\ \frac{3}{2})$$

$$(1\ 5\ 11\ 7) - (1\ \frac{5}{4}\ \frac{9}{4}\ \frac{3}{2}) = (0\ -\frac{15}{4}\ -\frac{35}{4}\ -\frac{11}{2})$$

La matrice quindi diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & -\frac{15}{4} & -\frac{35}{4} & -\frac{11}{2} \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

E se allo stesso modo operiamo per la 3 riga (sottraendo la prima riga moltiplicata per $\frac{7}{4}$) e la 4 riga (sottraendo la prima riga moltiplicata per $\frac{4}{2} = \frac{1}{2}$):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{35}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{-23}{4} & \frac{-55}{4} & \frac{-19}{2} \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-9}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

e così via

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{35}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-16}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{52}{5} \end{pmatrix}$$

https://matrixcalc.org/it/det.html#determinant-Gauss

```
    public void GaussJordan()
{
        float A=0;
        for (int k=0;k<righe-1;k++) //fissa la riga "perno"
        {
            for (int i=k+1;i<righe;i++)//scorre le righe
            {
                A=Matrice[i][k]/Matrice[k][k];//calcola il coefficiente che moltiplicato al perno bisognera'
                                              //sottrarre alla i-esima riga
                for (int j=k;j<colonne;j++)//scorre le colonne
                {

                    Matrice[i][j] =Matrice[i][j]-(A)*Matrice[k][j];
                }

            }
        }
```

2.2 Sistemi di equazioni

$$\begin{cases} a_{00} \cdot x_0 + a_{01} \cdot x_1 + a_{02} \cdot x_2 + a_{03} \cdot x_3 = b_0 \\ \\ a_{10} \cdot x_0 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ \\ a_{20} \cdot x_0 + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ \\ a_{30} \cdot x_0 + a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

Ricordando il prodotto tra matrici riga per colonna allora possiamo riscrivere il sistema sotto questa forma:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Se il determinante della matrice (a_{ij}) è diverso da zero, per il teorema di Rouche-Capelli possiamo affermare che $\exists!$ la soluzione.
Se alla matrice A sostituiamo la matrice a scalini ottenuta con il metodo di Gauss otteniamo:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Allora il sistema possiamo scriverlo come:

$$\begin{cases} a_{00} \cdot x_0 + a_{01} \cdot x_1 + a_{02} \cdot x_2 + a_{03} \cdot x_3 = b_0 \\ \\ 0 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ \\ 0 + 0 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ \\ 0 + 0 + 0 + a_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{cases}$$

E sostituendo dall'ultima equazione otteniamo:

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} \ ; \ x_2 = \frac{b_2 - a_{23} \cdot x_3}{a_{22}} \ ; \ x_1 = \frac{b1 - a_{13} \cdot x_3 - a_{12} \cdot x_2}{a_{11}} \ ; \ x_0 = \frac{b_0 - a_{03} \cdot x_3 - a_{02} \cdot x_2 - a_{01} \cdot x_1}{a_{00}}$$

Se consideriamo la seguente *matrice associata*:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & |a_{04} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & |a_{14} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & |a_{24} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & |a_{34} \end{pmatrix}$$

dove per comodità abbiamo sostituito b_j con a_{j4} dove $j = 0 \cdots n-1$ avremo allora il sistema:

$$\begin{cases} a_{00} \cdot x_0 + a_{01} \cdot x_1 + a_{02} \cdot x_2 + a_{03} \cdot x_3 = a_{04} \\ \\ 0 + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = a_{14} \\ \\ 0 + 0 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = a_{24} \\ \\ 0 + 0 + 0 + a_{33} \cdot x_3 = a_{34} \end{cases}$$

e quindi le soluzioni diventano:

$$x_3 = \frac{a_{34}}{a_{33}} \ ; \ x_2 = \frac{a_{24} - a_{23} \cdot x_3}{a_{22}} \ ; \ x_1 = \frac{a_{14} - a_{13} \cdot x_3 - a_{12} \cdot x_2}{a_{11}} \ ; \ x_0 = \frac{a_{04} - a_{03} \cdot x_3 - a_{02} \cdot x_2 - a_{01} \cdot x_1}{a_{00}}$$

```java
public void risolvi_sistema()
{
	float p;//accumulera' le soluzioni xi con i=n,n-1,..,1
	int n=righe-1;
	for(int r=n;r>=0;r--)
	{
		p=A[r][n+1];
		if(r!=n) // per r=n non entra nell' if (quindi al primo passaggio)
		{
			for(int s=r+1;s<n+1;s++)
			{
				p=p-A[r][s]*x[s] ;
			}
		}
		x[r]=p/A[r][r];
	}

}
```

$\sqrt{(x-y)^2}$