Matrice trasposta Classe 4L Informatica

Prof. Salvatore D'Asta

25 febbraio 2021

1 Matrice Trasposta

La matrice trasposta della seguente matrice si ottiene scambiando le posizioni dei numeri in rosso con quelli in blu in modo tale che **a**[**i**][**j**] si scambi con **a**[**j**][**i**], dove $a[i][j]$ è l'elemento posto nella i-esima riga e nella j-esima colonna.

i/j	0	1	2	3		i/j	0	1	2	3
0	**0**	1	2	3		0	**0**	4	8	12
1	4	**5**	6	7	$\Longrightarrow$	1	1	**5**	9	13
2	8	9	**10**	11		2	2	6	**10**	14
3	12	13	14	**15**		3	3	7	11	**15**

Si può osservare che per ottenere il risultato basta effettuare 6 scambi cioè 3+2+1 scambi ed in generale per una matrice quadrata di dimensione $n \times n$ basta effettuare $\underbrace{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}_{(n-1)\text{ addendi}}$ scambi

```
public void traspostaMatrice()
	{
		int Supporto;
		for(int i=0;i<righe;i++)
		{
		for (int j=i;j<colonne;j++)
		{
			Supporto=Matrice[i][j];
			Matrice[i][j]=Matrice[j][i];
			Matrice[j][i]=Supporto;
		}
	}
}
```

2 Metodo di eliminazione di Gauss

Consiste nel riuscire a trasformare la matrice data in una matrice a gradini (*tutti zeri al di sotto della diagonale principale*) Si supponga di averre la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

regole per trasformarla sono le seguenti:

- si possono scambiare le righe
- si può sostituire una riga con il risultato della somma della stessa con un'altra riga eventualmente moltiplicata per un numero[1].

Il risultato dovrà essere una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Algoritmo:
Supponiamo di avere la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1. Se la prima riga ha il primo elemento $a_{00} = 0$ la si scambia con una che ha il primo elemento non nullo
2. si sottrae alla seconda riga la prima moltiplicata per $\frac{a_{10}}{a_{00}}$ e la sostituisce alla seconda riga.
3. si procede allo stesso modo con le restanti righe sottraendo alla i-esima riga la prima moltiplicata per $\frac{a_{i0}}{a_{00}}$ fino ad ottenere una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

4. Si sottrae alla terza riga la seconda moltiplicata per $\frac{b_{21}}{b_{11}}$ ed allo stesso modo si procede per restanti righe sottraendo alla i-esima riga la seconda moltiplicata per $\frac{b_{i1}}{b_{11}}$ in tal modo otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

5. ed infine sottraendo all'ultima la penultima moltiplicata per $\frac{c_{32}}{c_{22}}$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

2.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

[1] Moltiplicare una riga per un numero equivale a moltiplicare ogni elemento della riga per il numero ad esempio se la riga della matrice è 2 4 8 6 moltiplicarla per 3 equivale ad eseguire la seguente operazione: (3×2) (3×4) (3×8) (3×6)

Applichiamo l'agoritmo di Gauss:
Sottraiamo alla seconda riga, la prima moltiplicata per $\frac{1}{4}$ quindi:

$$\frac{1}{4} \times (4\ 5\ 9\ 6) = (1\ \frac{5}{4}\ \frac{9}{4}\ \frac{3}{2})$$

$$(1\ 5\ 11\ 7) - (1\ \frac{5}{4}\ \frac{9}{4}\ \frac{3}{2}) = (0\ -\frac{15}{4}\ -\frac{35}{4}\ -\frac{11}{2})$$

La matrice quindi diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & -\frac{15}{4} & -\frac{35}{4} & -\frac{11}{2} \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

E se allo stesso modo operiamo per la 3 riga (sottraendo la prima riga moltiplicata per $\frac{7}{4}$) e la 4 riga (sottraendo la prima riga moltiplicata per $\frac{4}{2} = \frac{1}{2}$):

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{35}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{-23}{4} & \frac{-55}{4} & \frac{-19}{2} \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-9}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

e così via

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{35}{4} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-16}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{52}{5} \end{pmatrix}$$

https://matrixcalc.org/it/det.html#determinant-Gauss