

Computational Physics Übungsblatt 10

Salvatore La Cagnina
salvatore.lacagnina@udo.edu

Abdulkärim Frempong
abdulkaerim.frempong@udo.edu

Stella Oppermann
stella.oppermann@udo.edu

Abgabe: 07.07.17

Aufgabe 1

a) + b)

Wie zu erkennen ist, sind die Zufallszahlen für den linear kongruenten Zufallszahlengenerators (LKZG) mit den ersten Parametersatz nicht gut nutzbar. Dies ist insbesondere an der "glatten" Verteilung in Abb. 1 zu erkennen. Diese sollte im Idealfall leichte Fluktuationen haben, jedoch ist die Periodenlänge des LKZG so klein, dass die Zahlenfolge sich häufig wiederholt. Außerdem ist eine Häufung der Zufallszahlen in dem ersten und letzten Bin zu erkennen welche ebenfalls unerwünscht sind.

Abb. 2 zeigt die Zufallszahlen des LKZG mit dem zweiten Parametersatz. Diese Verteilung zeigt ein besseres Verhalten der Zufallszahlen. Die Verteilung ist nicht mehr "glatt" sondern fluktuiert leicht zwischen den Zufallszahlen hin und her. Bei genauerem Betrachten fallen jedoch Unstimmigkeiten auf. Mit der Annahme von Poisson Verteilungen in den Bins kann die statistische Unsicherheit betrachtet werden (der untere Teil der Plots). Auffällig ist hierbei, dass fast alle Werte in einer Standardabweichung zum gemeinsamen Mittelwert liegen.

Die Zufallszahlen des Mersenne Twisters hingegen, welche in Abb. 3 zu sehen ist, verteilen sich leicht stärker gestreut um diesen. Bei der Verteilung selbst ergeben sich keine deutlichen Unterschiede, außer die etwas stärkere Fluktuation der Werte.

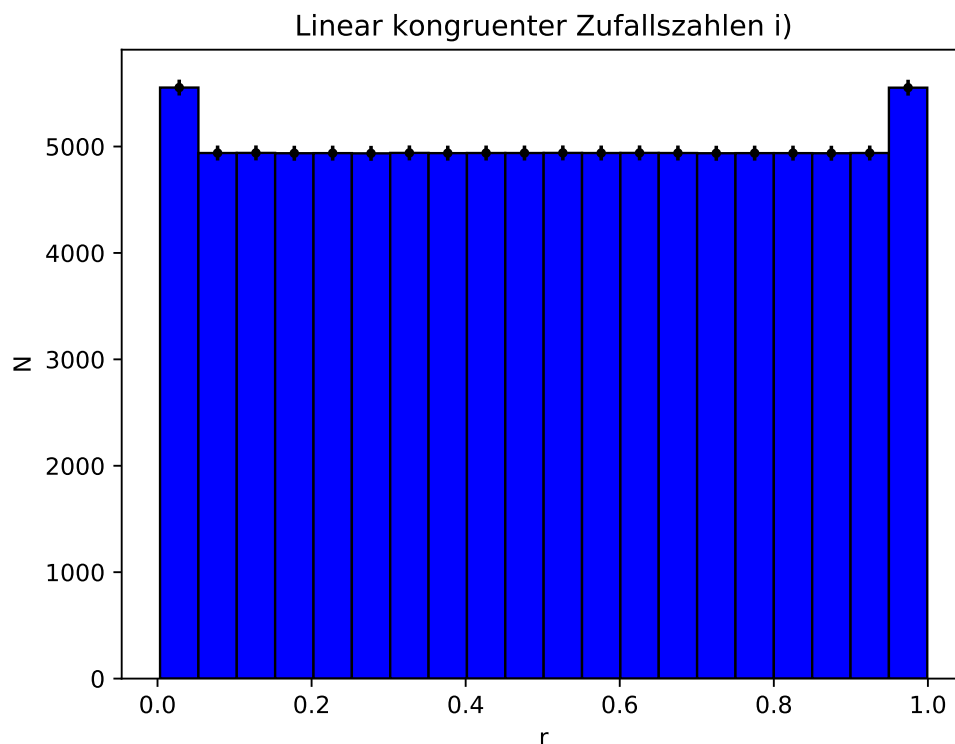


Abbildung 1: Zufallszahlen generiert mit dem ersten linear kongruenten Generators unter der Verwendung des ersten Parametersatzes.

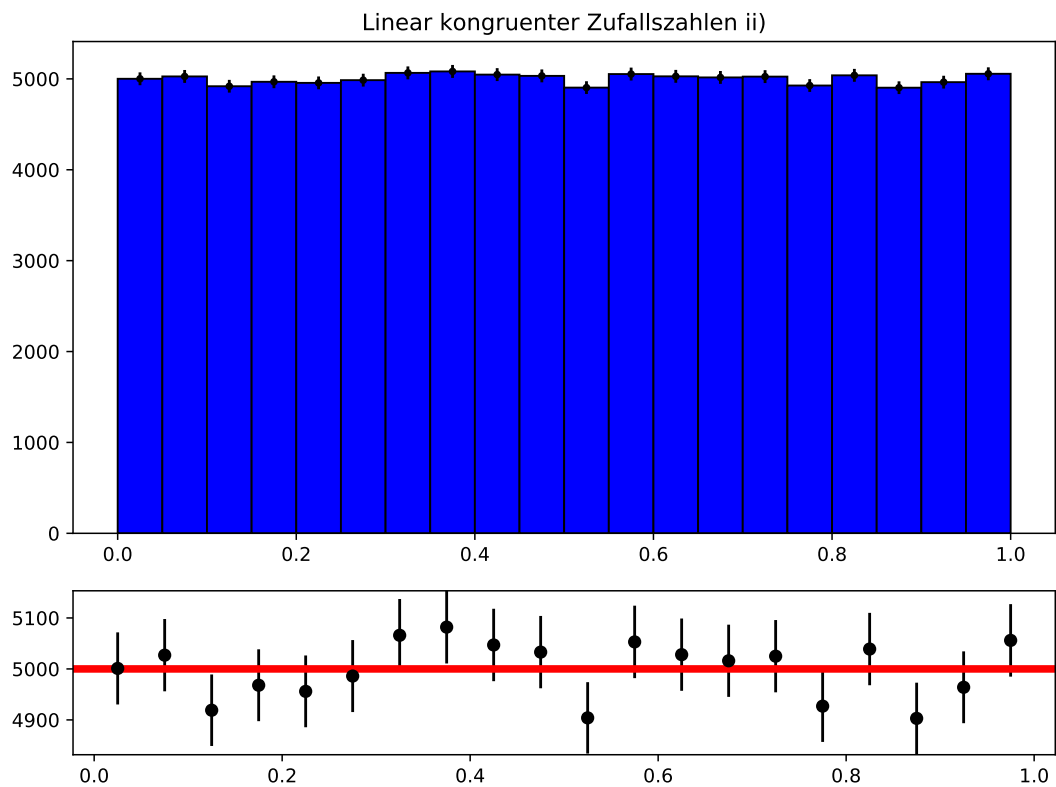


Abbildung 2: Zufallszahlen generiert mit dem ersten linear kongruenten Generators unter der Verwendung des zweiten Parametersatzes.

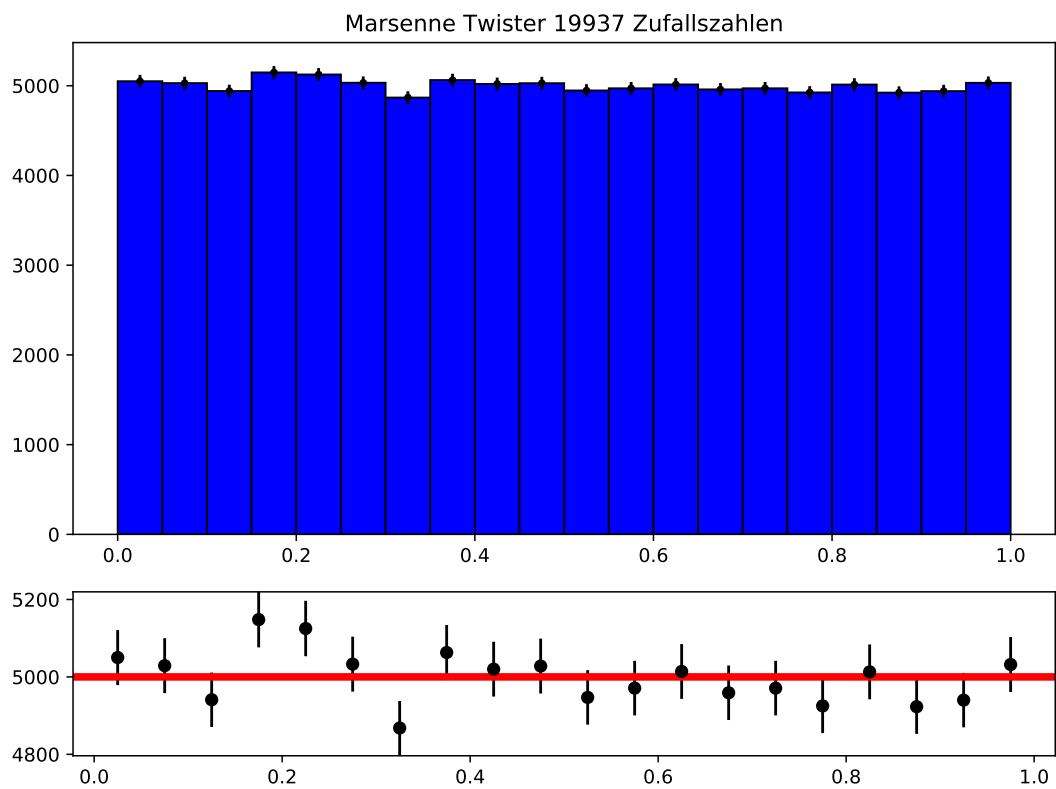


Abbildung 3: Zufallszahlen generiert mit dem Mersenne Twister 19937.

c)

Die Abbildungen 4-6 zeigen die Funktion

$$p(x) = n \sin^4(\pi x)$$

sowohl analytisch (in rot) als auch mit Hilfe der Zufallszahlengeneratoren aus a) und dem Neumannschen Rückweisungsverfahren generiert (als Histogramm). Wird der LKZG mit dem ersten Parametersatz genutzt, so ergibt sich mit Neumann keine sinnvolle Verteilung für die gesuchte Funktion. Dies liegt insbesondere an der Periodenlänge, da so dieselben wenigen diskreten Zufallszahlen wieder und wieder gezogen werden, was nicht ausreicht, um durch die Funktion "durchzusampeln".

Wird der zweite Parametersatz oder der Mersenne Twister genutzt, so ergibt sich eine recht ansehnliche Form der Verteilung, die gut mit der analytischen übereinstimmt. Eine Aussage welche dieser beiden besser oder schlechter ist lässt sich ohne weiteres nicht zeigen. (Mit 10^6 Zufallszahlen und extrem großen Binning ergeben sich leichte Tendenzen zum Mersenne Twister als besseren Zufallszahlengenerator s.h. Screenshot bei Zusatzplots)

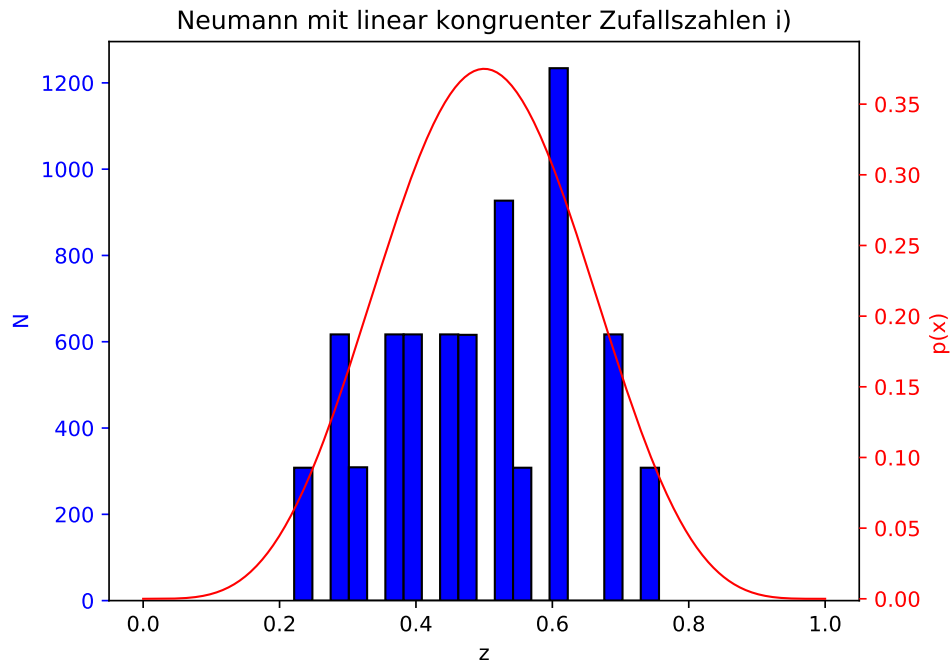


Abbildung 4: Neumann Verfahren für die gesuchte Funktion mit Zufallszahlen generiert mit dem ersten linear kongruenten Generators unter der Verwendung des ersten Parametersatzes.

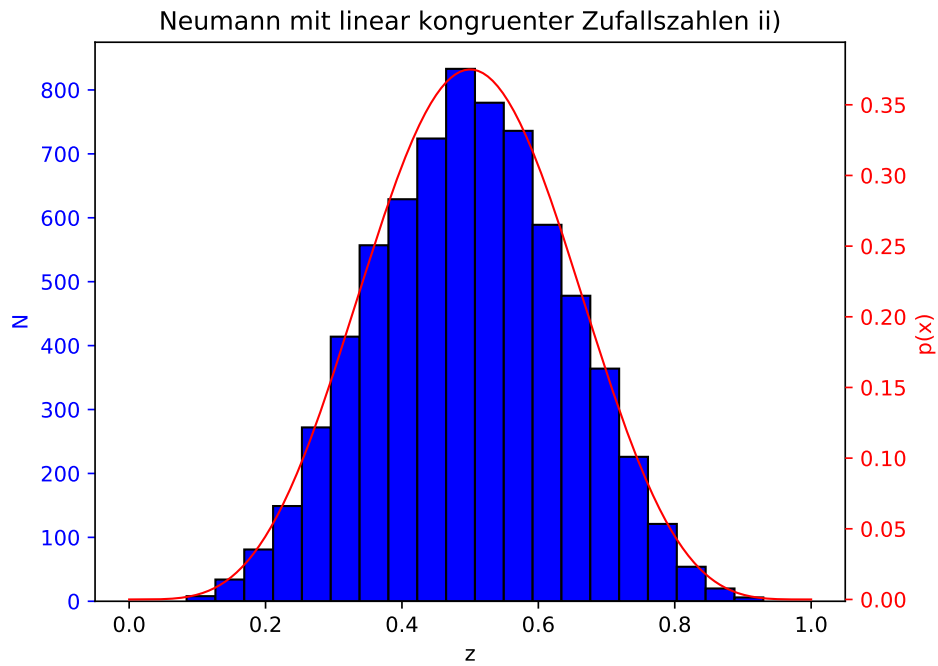


Abbildung 5: Neumann Verfahren für die gesuchte Funktion mit Zufallszahlen generiert mit dem ersten linear kongruenten Generators unter der Verwendung des zweiten Parametersatzes.

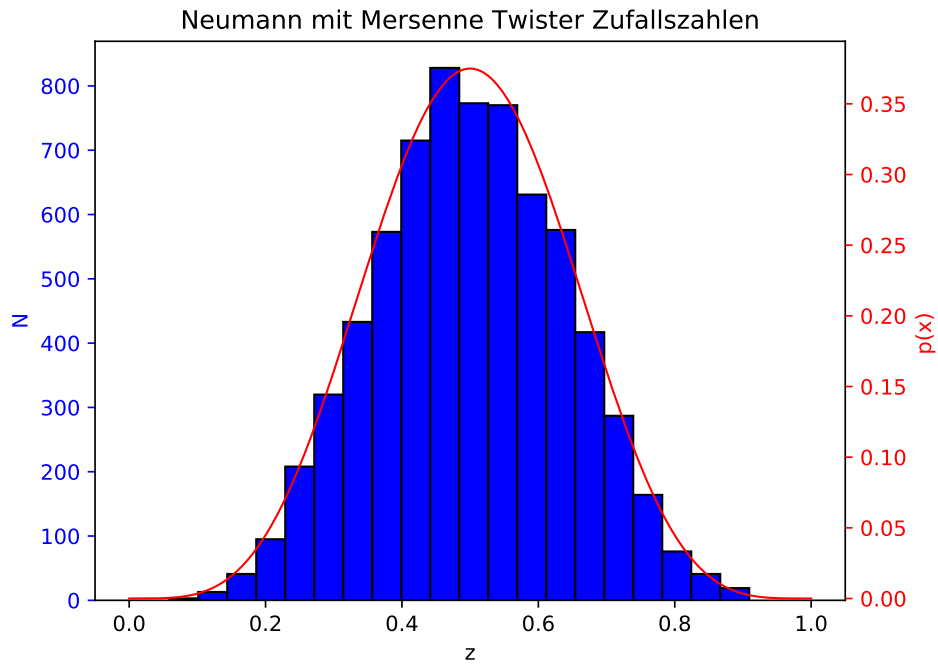


Abbildung 6: Neumann Verfahren für die gesuchte Funktion mit Zufallszahlen generiert mit dem Mersenne Twister 19937.

d)

Der 2D Spektraltest wird durchgeführt indem nacheinanderfolgende Glieder der Zufallszahlen gegeneinander aufgetragen werden. Der Spektraltest ist dabei ein Test für die Zufälligkeit nacheinanderfolgender Zahlen. Ein guter Pseudo Zufallszahlengenerator sollte keine Struktur haben. Die kann für den zweiten LKZG und den Mersenne Twister in Abb. 8 und Abb. 9 gesehen werden. Für einen schlechten Zufallszahlengenerator können Strukturen (im 2D Fall Geraden) gefunden werden. Dies ist bei dem ersten LKZG der Fall, wir in Abb. 7 zu sehen ist.

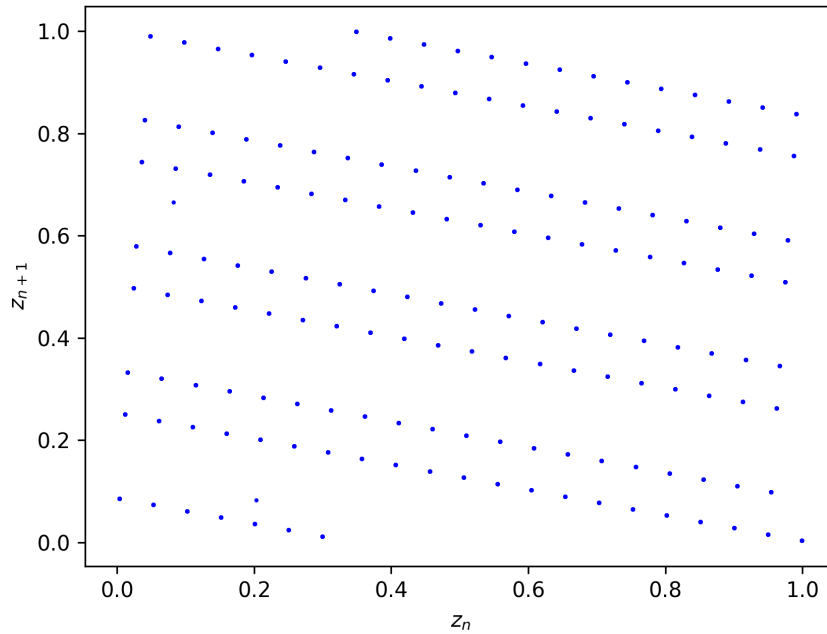


Abbildung 7: 2D Spektraltest für den ersten linear kongruenten Generators unter der Verwendung des ersten Parametersatzes. Geplottet werden jeweils nacheinander folgende Zahlen als Paare.

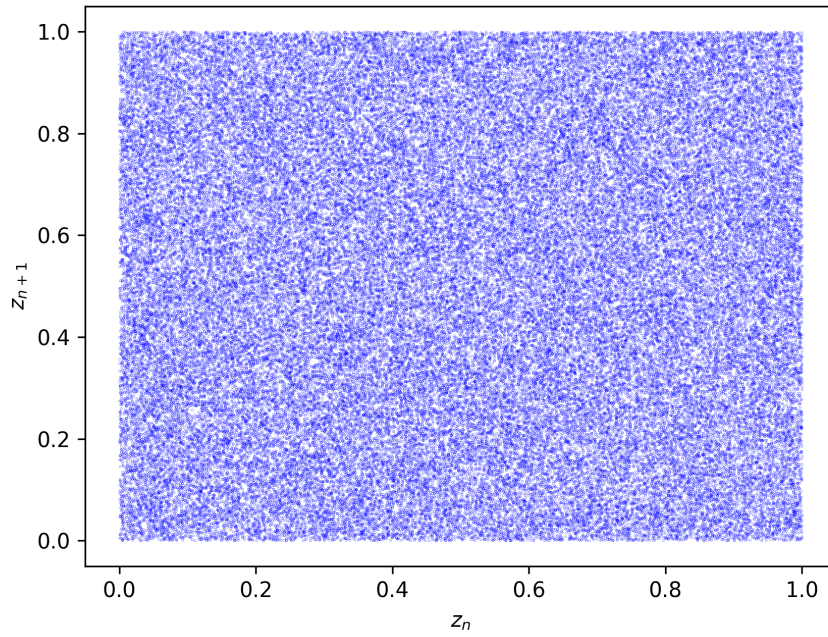


Abbildung 8: 2D Spektraltest für den ersten linear kongruenten Generators unter der Verwendung des zweiten Parametersatzes. Geplottet werden jeweils nacheinander folgende Zahlen als Paare.

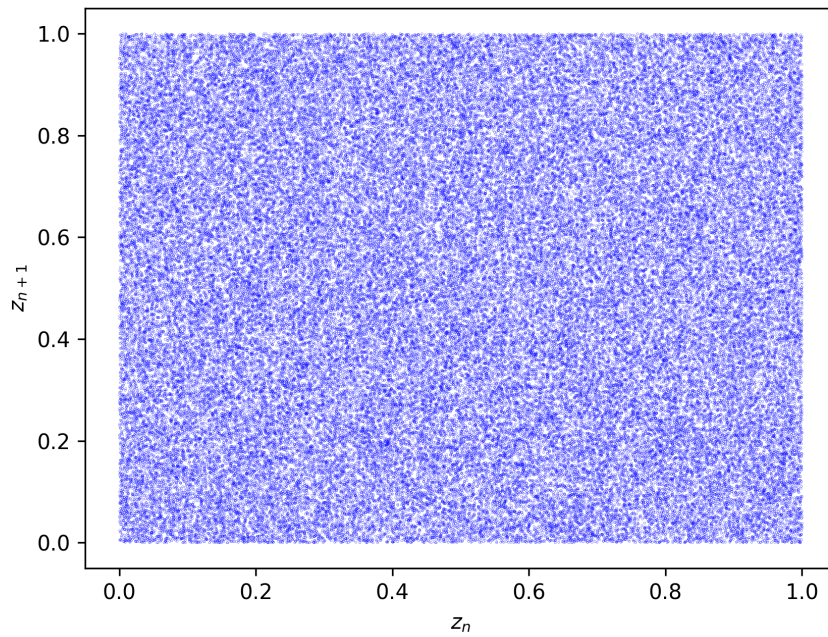


Abbildung 9: 2D Spektraltest für den Mersenne Twister 19937. Geplottet werden jeweils nacheinander folgende Zahlen als Paare.

d)

Der 30 Spektraltest wird durchgeführt indem drei nacheinanderfolgende Glieder der Zufallszahlen gegeneinander aufgetragen werden. Dieser Test ist analog zum 2D Test. Für den Mersenne Twister kann der Spektraltest in Abb. 12 gesehen werden. Bei diesen zeichnet sich keine Struktur ab. Bei dem Spektraltest für ersten LKZG in Abb. 10 und dem zweiten LKZG in Abb. 11 zeichnen sich jedoch klar Ebenen ab, welches für einen schlechteren Pseudo Zufallszahlengenerator spricht. Bei diesem Test zeichnet sich zum ersten Mal der Mersenne Twister deutlich von dem LKZG mit "gut" gewählten Parametern ab. Würde die Dimension des Test erhöht, so würden sich ebenfalls für den Mersenne Twister Hyperbenen abzeichnen, für diesen Test hier zeichnet sich dieser als "bester" Zufallszahlengenerator aus.

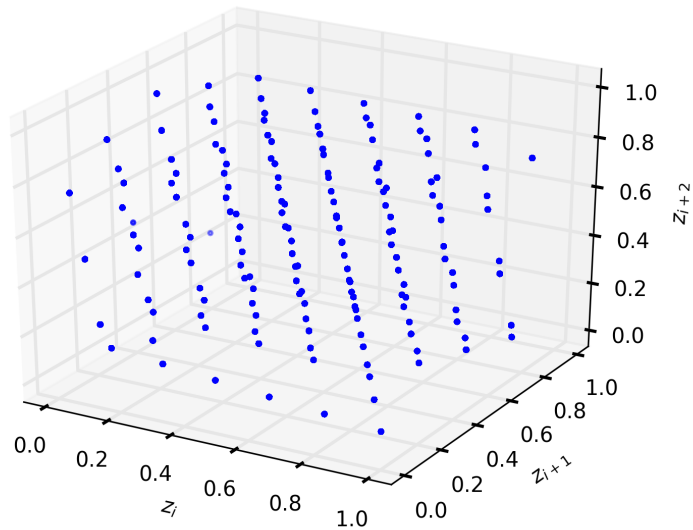


Abbildung 10: 3D Spektraltest für den ersten linear kongruenten Generators unter der Verwendung des ersten Parametersatzes. Geplottet werden jeweils nacheinander folgende Zahlen als Tripel.

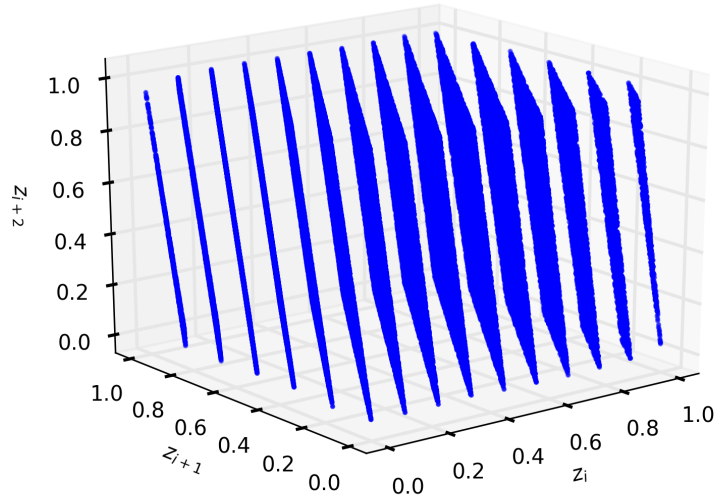


Abbildung 11: 3D Spektraltest für den ersten linear kongruenten Generators unter der Verwendung des zweiten Parametersatzes. Geplottet werden jeweils nacheinander folgende Zahlen als Tripel.

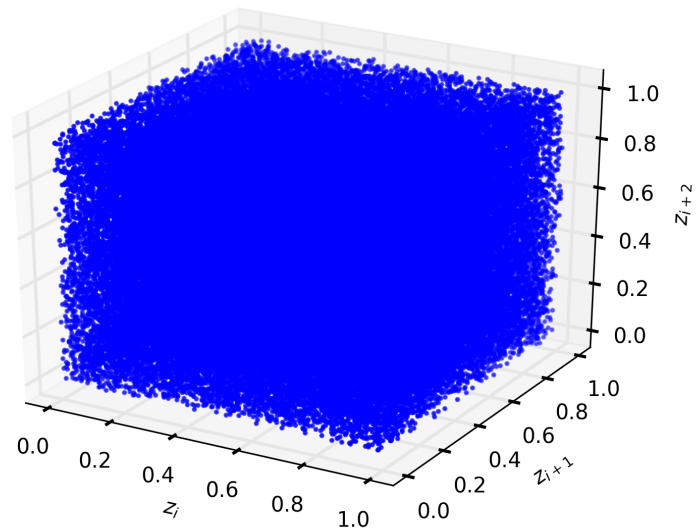


Abbildung 12: 3D Spektraltest für den Mersenne Twister 19937. Geplottet werden jeweils nacheinander folgende Zahlen als Tripel.

Aufgabe 2

a)

Die Abbildung 13 zeigt Zufallszahlen welche mit dem Box-Muller-Algorithmus gezogen worden sind. Diese sind in guter Übereinstimmung mit der analytischen Gaußverteilung.

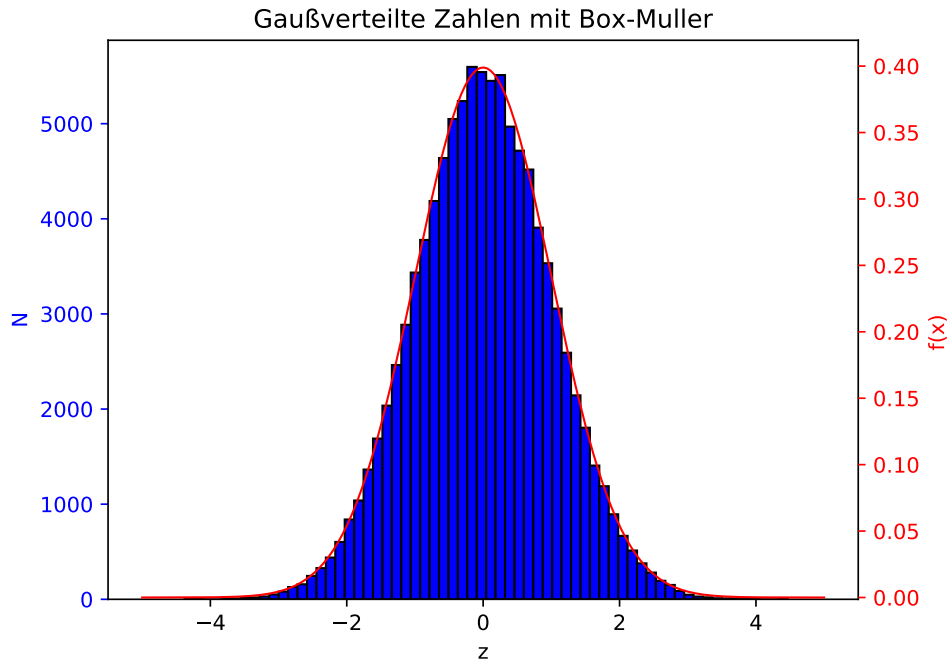


Abbildung 13: Zufallszahlen mit dem Box-Muller-Algorithmus und die analytische Form der Gaußverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ (in rot).

b)

Abbildung 14 zeigt die Verteilung von aufaddierten Zufallszahlen. Die Anzahl an aufaddierten Zahlen folgt dabei

$$N = \sigma^2 \cdot 12,$$

dabei ist $\mu = 0$. Mit $\sigma = 1$ ergibt sich somit die Summe von 12 aufaddierten Zufallszahlen. Diese Methode wird je nach verlangter Standardabweichung immer aufwendiger und ist somit ineffizienter als andere Methoden. Außerdem ist bei einem direkten Vergleich mit dem Box-Muller-Algorithmus in Abb. 13 zu sehen, dass diese Methode nicht so präzise ist wie seine Konkurrenz, da diese sich mit hoher Summandenzahl erst einer Gaußverteilung annähert. Allerdings kann so zunächst die grundlegende Aussage des zentralen Grenzwertsatzes bestätigt werden.

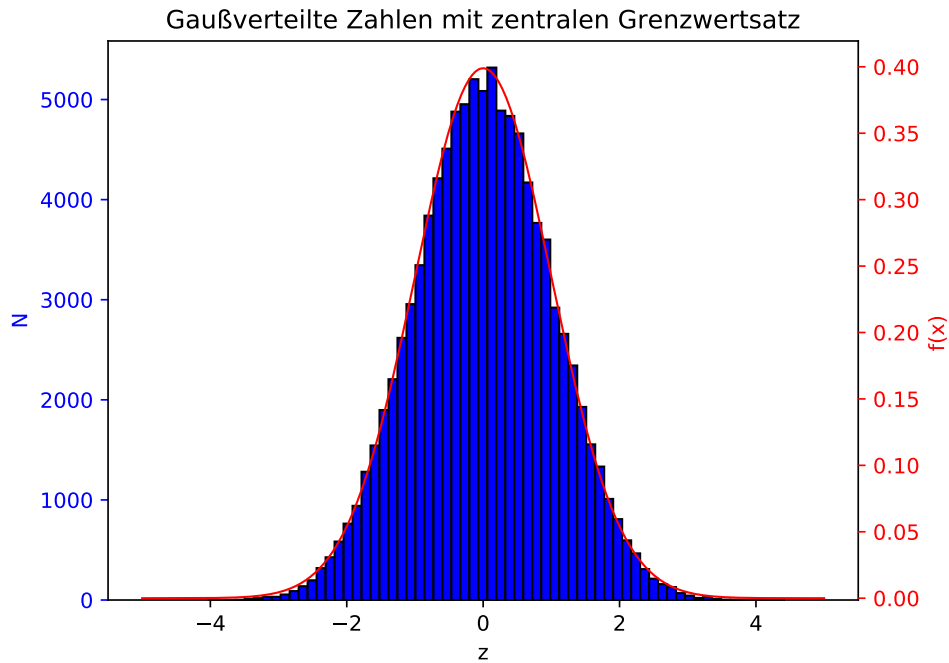


Abbildung 14: 12 Aufaddierte Zufallszahlen und die analytische Form der Gaußverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ (in rot). Die Zufallszahlen ergeben aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes annähernd eine Gaußverteilung.

c)

Die Abbildung 15 zeigt die Verteilung der Zufallszahlen erzeugt mit dem Neumannschen Rückweisungsverfahren. Dabei wurden die Zufallszahlen gleichverteilt aus einer Fläche gezogen mit $A = (x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < y < \alpha \exp(-|x|)$. Die verschiedenen Plots zeigen dies für verschiedene Werte von α . Zu sehen ist hierbei, dass für kleine α die Fläche zu klein wird und der Gauß nicht vollständig abgesampled werden kann. Somit ist klar die Struktur der Exponentialfunktion erkennbar. Für α größer 1 funktioniert das Verfahren zufriedenstellend. Insgesamt sollte das α nicht zu hoch gewählt werden. Zwar wird so die Fläche größer jedoch sorgt eben jede auch für eine schlechtere Effizienz des Neumannschen Rückweisungsverfahrens.

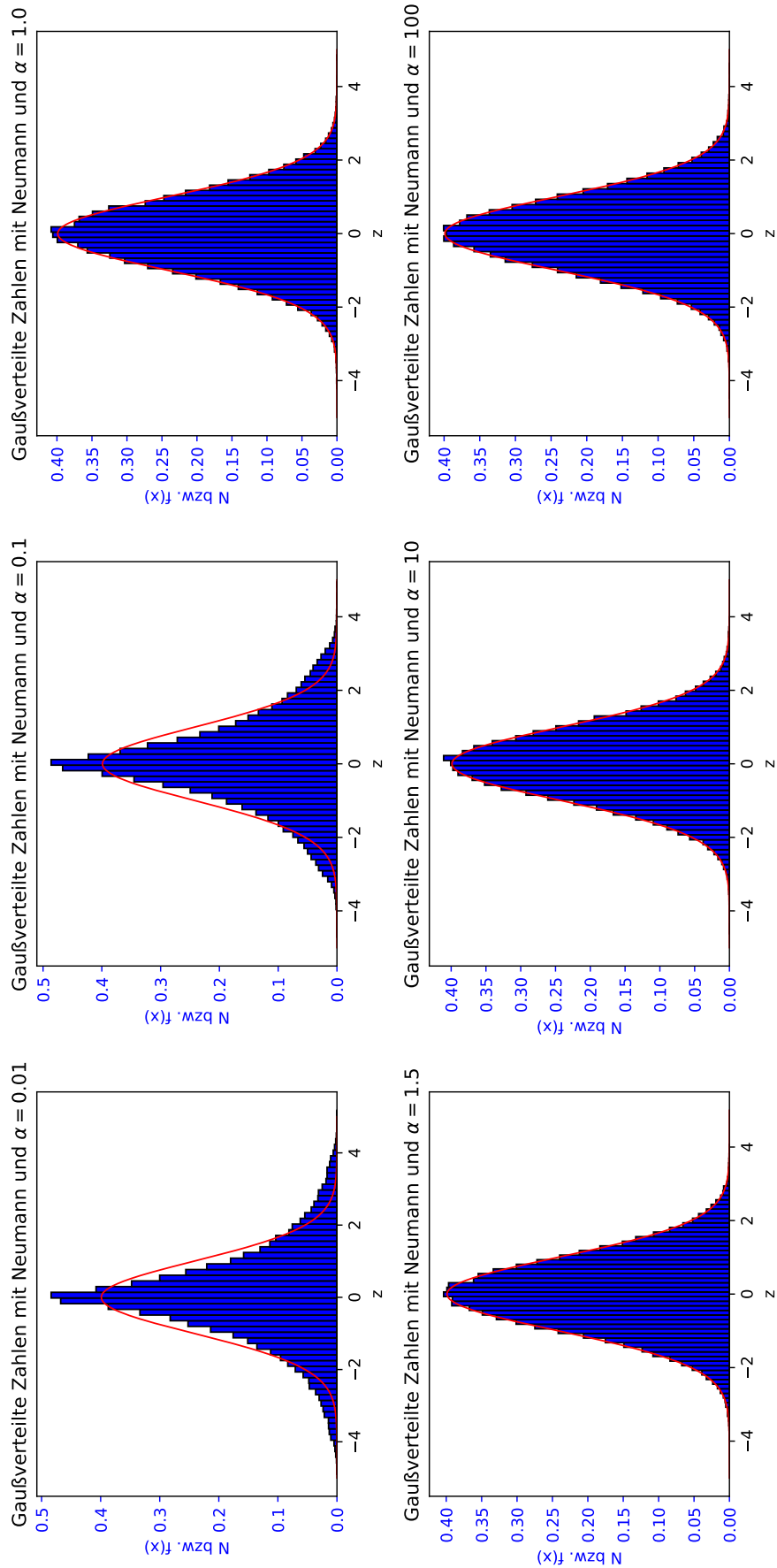


Abbildung 15: Neumannsches Rückweisungsverfahren mit angepasster Fläche, für die Zufallszahlen. Die Skala für N ist normiert und ist ebenso die Achse für die Theoriekurve.

d)

Schritt 0 (Normieren):

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \quad (1)$$

ist bereits normiert, da

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Methode 1 (nach Skript):

Schritt 1 (Invertieren):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \\ y\pi &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{\pi y} &= 1+x^2 \\ x(y) &= \pm \sqrt{\frac{1}{\pi y} - 1} = p^{-1}(y) \end{aligned}$$

Schritt 2 (Ableiten):

$$\begin{aligned} p^{-1}(y)' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{1}{\pi y} - 1}} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\pi y^2} \\ p^{-1}(y)' &= \mp \frac{1}{\sqrt{(4\pi y^3 - 4\pi y^4)}} \end{aligned}$$

Schritt 3 (Einsetzen/Ausrechnen): Da die vorausgehende Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = 1$ ist ergibt sich für die gesuchte Verteilung:

$$\tilde{f}(y) = |p^{-1}(y)'| \quad \text{mit} \quad y \in p([x_1, x_2]),$$

da x in $[0, 1[$ liegt gilt für $y \in]0, \frac{1}{\pi}[$. Dabei ergibt sich die Verteilung 16, welche allerdings fehlende Werte in der Mitte hat. Es ist zu erkennen, dass die funktionelle Form korrekt erscheint für die Seitenbänder. Da diese Lücke sehr merkwürdig und nicht wegzubekommen war, hier nun eine Methode (aus SMD), die uns geläufiger ist und auch funktioniert.

Methode 2 (nach SMD Vorlesung):

Hierbei sei z die gleichverteilte Zahl aus $[0, 1[$. Außerdem ist (1) bereits normiert.

Schritt 1 (Integrieren und Gleichsetzen):

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+x'^2} dx' \\ z &= \frac{1}{\pi} \arctan(x') \Big|_{-\infty}^x \\ z &= \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Schritt 2 (Umformen):

$$z = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$\left(z - \frac{1}{2}\right) \pi = \arctan(x)$$

$$x(z) = \tan\left(\left(z - \frac{1}{2}\right) \pi\right) .$$

Damit ergibt sich die Verteilung aus Abb. 17, welche deutlich besser aussieht und zu der gesuchten Verteilung passt.

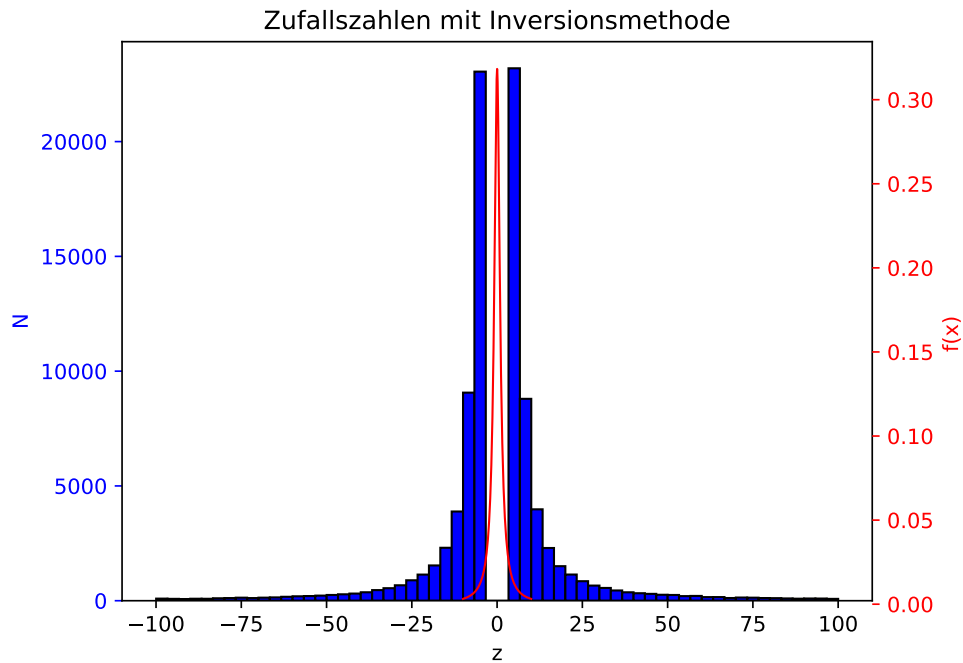


Abbildung 16: Mit der Transformationsmethode aus dem Kierfeld Skript erzeugte Verteilung.

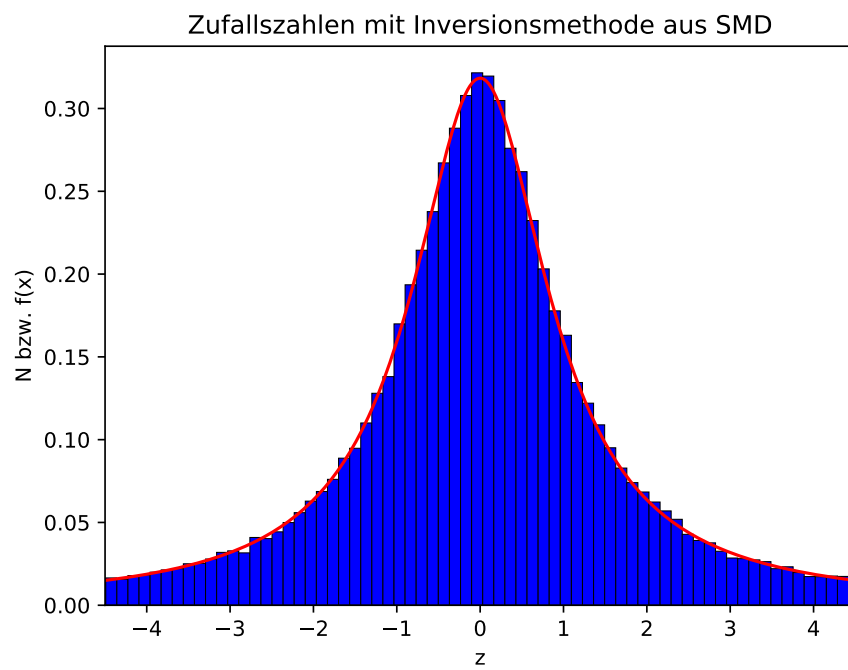


Abbildung 17: Mit der Transformationsmethode aus SMD erzeugte Verteilung.