2 Доказательства

2.1 Что происходит с произведением матриц при транспонировании?

Утверждение. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Доказательство. A – матрица типа $m \times n$, B – матрица типа $n \times k$

$$[(A \cdot B)^T]_{ij} = [A \cdot B]_{ji} = \sum_{r=1}^{n} [A]_{jr} \cdot [B]_{ri} = \sum_{r=1}^{n} [A^T]_{rj} \cdot [B^T]_{ir} = [B^T \cdot A^T]_{ij}, \quad \begin{matrix} \forall i = \overline{1, m} \\ \forall j = \overline{1, k} \end{matrix}$$

□

2.2 Сформулировать и доказать утверждение о том, что кососимметричность для линейной функции эквивалентна обнулению на паре совпадающих элементов.

Утверждение. Для любой линейной функции кососимметричность (1) эквивалентна обнулению на паре совпадающих элементов (2).

Доказательство. Рассмотрим f – линейная функция (от столбцов).

1) (2) $\Rightarrow$ (1)

   Дано: $f(u, u) = 0$ – обнуление на паре совпадающих элементов

   Доказать: $f(u, v) = -f(v, u)$ – кососимметричность

   $\underbrace{f(u + v, u + v)}_{=0} \overset{\text{линейность}}{=} \underbrace{f(u, u)}_{=0} + f(u, v) + f(v, u) + \underbrace{f(v, v)}_{=0} \Rightarrow f(u, v) = -f(v, u)$

2) (1) $\Rightarrow$ (2)

   Дано: $f(u, v) = -f(v, u)$ – кососимметричность

   Доказать: $f(u, u) = 0$ – обнуление на паре совпадающих элементов

   $f(u, v) = -f(v, u)$ по (1)

   $f(a, a) = -f(a, a) \Rightarrow f(a, a) = 0$

□

2.3 Какие три условия достаточно наложить на функцию от столбцов матрицы, чтобы она обязательно была детерминантом?

Утверждение. На функцию от столбцов матрицы достаточно наложить следующие три условия, чтобы она обязательно была детерминантом:

1) Функция должна быть полилинейна (линейна по столбцам)
2) Кососимметрична ($\det A = -\det A$, т.е. равна 0, если есть 2 одинаковых столбца)
3) Равна 1 на E_n

Доказательство. Докажем при $n = 2$. Разложим столбцы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Определим, чему равна функция от матрицы:

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) \overset{\text{линейность}}{=} a_{11} f\left(\begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}\right) + a_{21} f\left(\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= a_{11}a_{22} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + a_{21}a_{12} f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + a_{11}a_{12} \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=0,\ \text{кососимметр.}} + a_{21}a_{22} \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=0,\ \text{кососимметр.}} =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{f(E_n)=1} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$$

□

2.4 Чему равен определитель произведения двух квадратных матриц?

Утверждение. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})\ \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(B) = \det(A \cdot B)$. Докажем $f(B) = \det B \cdot f(E_n)$

1) Кососимметричность выполнена, т.к. при совпадении двух столбцов матрицы B столбцы матрицы $A \cdot B$ тоже будут совпадать.
2) Если столбец матрицы B имеет вид $\lambda a + \mu b$, то в матрице $A \cdot B$ этот столбец имеет вид $\lambda Aa + \mu Ab$, и определитель тоже линеен $\Rightarrow f(B)$ линейна.
3) Выполнены кососимметричность и линейность, следовательно:

$$f(B) = \det B \cdot f(E_n), \text{ но } f(E_n) = \det(A \cdot E_n) = \det A \Rightarrow \det(A \cdot B) = f(B) = \det B \cdot \det A$$

□

2.5 Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка и доказать их.

Теорема. Пусть $Ax = b$ совместная СЛАУ, тогда:

$$x_i \cdot \det A = \Delta_i$$

$$\Delta_i = \det(A_1, ..., A_{i-1}, b, A_{i+1}, ..., A_n)$$

Если $\det A \neq 0$, то $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\det A}$, $i = \overline{1, n}$

Доказательство. Пусть A_i – столбец матрицы. Запишем СЛАУ в векторном виде:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_n A_n = b \Leftrightarrow Ax = b$$

$$\Delta_i = \det(A_1, ..., A_{i-1}, b, A_{i+1}, ..., A_n) = \det(A_1, ..., A_{i-1}, x_1 A_1 + ... + x_n A_n, A_{i+1}, ..., A_n) =$$
$$= \det(A_1, ..., A_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j A_j, A_{i+1}, ..., A_n) \overset{\text{линейность}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n)$$

При $j \neq i$ слагаемые $x_j \cdot \underbrace{\det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n)}_{\text{=0, два одинаковых столбца}} = 0$

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \det(A_1, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n) = x_i \det(A_1, ..., A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, ..., A_n)$$

□

2.6 Сформулировать и доказать критерий существования обратной матрицы.

Теорема. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Доказательство.

Необходимость. Дано: $\exists A^{-1}$

Доказать: $\det A \neq 0$

По определению обратной матрицы: $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

Достаточность. Дано: $\det A \neq 0$

Доказать: $\exists A^{-1}$

Предъявим матрицу $B = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$, где $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$ – союзная матрица.

Докажем, что B является обратной, т.е. $A \cdot B = E$.

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{r=1}^{n} [A]_{ir} \cdot [B]_{rj} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot [\widetilde{A}]_{rj} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot A_{jr} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\det A} \cdot \det A, \ i = j \text{ (разложение по i-й строке)} \\ 0, \ i \neq j \text{ (фальшивое разложение)} \end{cases} = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} = [E]_{ij}$$

Аналогично проверяется $B \cdot A = E \Rightarrow$ по определению B – обратная. □

2.7 Сформулировать и доказать критерий линейной зависимости.

Утверждение. $a_1, \dots, a_s$ – линейно зависимы $\Leftrightarrow$ хотя бы один из $a_1, \dots, a_s$ линейно выражается через другие.

Доказательство.

Необходимость. Дано: $a_1, .., a_s$ – л.з.

Доказать: найдутся выражаемые через другие.

По определению:

$$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_s \text{ (не все 0)}: \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s = 0$$

Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда:

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 + \dots + \left(-\frac{\alpha_s}{\alpha_1}\right) a_s$$

Достаточность. Дано: один линейно выражается через другие.

Доказать: они линейно зависимы.

Пусть $a_1 = \beta_2 a_2 + \dots + \beta_s a_s$. Тогда $\underbrace{1 \cdot a_1 - \beta_2 a_2 - \dots - \beta_s a_s}_{\text{нетривиальная лин.комб.}} = 0 \Rightarrow$ по определению они л.з. □

2.8 Как связан ранг транспонированной матрицы с рангом исходной матрицы?

Утверждение. $\operatorname{Rg} A^T = \operatorname{Rg} A$.

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Rg} A^T \geq \operatorname{Rg} A$. Пусть $\operatorname{Rg} A = r \overset{\text{опр}}{\Rightarrow} \exists$ минор $M_{i1\ldots ir}^{j1\ldots jr} \neq 0$. В матрице A есть минор $N_{j1\ldots jr}^{i1\ldots ir} \neq 0$, получается из M операцией транспонирования.

Минор $N \neq 0$ по свойствам определителя ($\det N = \det M^T = \det M \neq 0$). Тогда по определению $\operatorname{Rg} A^T \geq r = \operatorname{Rg} A$.

Таким образом:

$$\operatorname{Rg} A \leq \operatorname{Rg} A^T \leq \operatorname{Rg}(A^T)^T = \operatorname{Rg} A \Rightarrow \operatorname{Rg} A^T = \operatorname{Rg} A$$

□

2.9 Сформулировать и доказать следствие теоремы о базисном миноре для квадратных матриц (критерий невырожденности).

Следствие. Рассмотрим квадратную матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$. Следующие три условия эквивалентны:

(1) $\det A \neq 0$

(2) $\operatorname{Rg} A = n$

(3) все строки A линейно независимы

Доказательство.

1) (1) $\Rightarrow$ (2)

   Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow$ в A есть минор порядка n, он $\neq 0 \Rightarrow$ по определению $\operatorname{Rg} A = n$.

2) (2) $\Rightarrow$ (3)

   Пусть $\operatorname{Rg} A = n \Rightarrow$ все строки базисные $\Rightarrow$ по первому пункту теоремы о базисном миноре (строки базисного минора л.н.з) они все л.н.з.

3) (3) $\Rightarrow$ (1)

   Пусть строки A л.н.з. Предположим противное: $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{Rg} A < n \Rightarrow$ по второму пункту теоремы о базисном миноре (строки, не входящие в базисный минор являются лин. комб. базисных) по крайней мере одна из строк является линейной комбинацией остальных $\Rightarrow$ по критерию л.з все строки л.з – $\perp$.

□

2.10 Сформулируйте и докажите теорему о базисном миноре.

Теорема.

1) Базисные строки (столбцы), соответствующие любому базисному минору M матрицы A л.н.з.
2) Строки (столбцы) матрицы A, не входящие в M являются линейной комбинацией базисных строк.

Доказательство.

1) Предположим, что они л.з. Тогда по критерию линейной зависимости одна из них является линейной комбинацией остальных $\Rightarrow M = 0$ – $\perp$ с определением базисного минора.
2) Без ограничения общности, будем считать, что базисный минор M матрицы A расположен в левом верхнем углу. Пусть $\operatorname{Rg} A = r$.

$$A = \begin{array}{c} r\left\{ \vphantom{\begin{matrix} a \\ \vdots \\ a \end{matrix}} \right. \\ \vphantom{\begin{matrix} a \\ \vdots \\ a \end{matrix}} \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline \quad M \quad \\ \hline \end{array}}^{r} & \begin{matrix} a_{1\,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r\,r+1} & \dots & a_{rn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1\,1} & \dots \\ \vdots & \dots \\ a_{m1} & \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & \dots & a_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & a_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Возьмём строку $a_k, k > r$ и покажем, что $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r : a_k = a_1\lambda_1 + \dots + a_r\lambda_r$

Составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix}$ и покажем, что $\Delta = 0 \ \forall j = \overline{1, n}$

Если $j \leq r$, то в Δ есть 2 одинаковых столбца и $\Delta = 0$.

Если $j > r$, то Δ является минором исходной матрицы A. Тогда $\Delta = 0$, т.к. является минором порядка $r + 1$ в матрице ранга r.

Разложим Δ по последнему столбцу:

$$a_{1j}A_1 + \dots + a_{rj}A_j + a_{kj}A_k = \underbrace{0}_{\Delta=0}$$

где $A_1, \dots, A_k$ – алгебраические дополнения в Δ (A_k – базисный минор $\Rightarrow A_k \neq 0$).

$$a_{kj} = -\frac{A_1}{A_k}a_{1j} - \dots - \frac{A_r}{A_k}a_{rj}, \ j = \overline{1, n}, \ k > r$$

Отсюда следует, что справедлива формула для строк (a_j – это j-я строка):

$$(a_{k1}, \dots, a_{kn}) = \lambda_1(a_{11}, \dots, a_{1n}) + \dots + \lambda_r(a_{r1}, \dots, a_{rn}) \Leftrightarrow a_k = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r$$

$\square$

2.11 Сформулируйте и докажите теорему о ранге матрицы.

Следствие (теорема о ранге матрицы)**.** Ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых строк и равен максимальному числу линейно независимых столбцов.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Rg} A = r$, а максимальное количество л.н.з. строк k. Покажем, что $r = k$.

1) Т.к. в A есть r л.н.з. строк (т.к. $\operatorname{Rg} A = r$, то это базисные строки по первому пункту теоремы о базисном миноре) $\Rightarrow k \geq r$ (по определению k).
2) Вычеркнем из A все сроки, кроме k л.н.з. Получим матрицу A_1, в которой k строк. При этом $\operatorname{Rg} A_1 = k$ (т.к. если бы $\operatorname{Rg} A_1 < k$, то по второму пункту теоремы о базисном миноре одна из строк будет являться линейной комбинацией остальных $\Rightarrow$ по критерию линейной зависимости они будут л.з. – $\perp$).

   Базисный минор в A_1 имеет порядок k и является не равным нулю минором порядка k в исходной матрице $\Rightarrow k \leq r = \operatorname{Rg} A \Rightarrow k = r$.

□

2.12 Сформулируйте теорему Кронекера–Капелли и докажите её.

Теорема (Кронекера-Капелли)**.** СЛАУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \left(A \mid b\right)$.

Доказательство.

Необходимость. Дано: СЛАУ совместна.

Доказать: $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \left(A \mid b\right)$

По определению СЛАУ совместна $\Leftrightarrow \exists$ столбец $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} : Ax^0 = b$.

И выполнено $Ax^0 = b \Leftrightarrow x_1^0 a_1 + \ldots + x_n^0 a_n = b$, где a_j – j-й столбец матрицы A.

Предположим, что базисный минор матрицы A расположен в левом верхнем углу матрицы $\Rightarrow$ столбцы $a_1, \ldots, a_r$ являются базисными, а столбцы $a_{r+1}, \ldots, a_n$ являются их линейными комбинациями (по второму пункту теоремы о базисном миноре).

$$\begin{cases} a_{r+1} = \lambda_{1\,r+1} a_1 + \ldots + \lambda_{r\,r+1} a_r \\ \vdots \\ a_n = \lambda_{1n} a_1 + \ldots + \lambda_{rn} a_r \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} b &= x_1^0 a_1 + \ldots + x_r^0 a_r + x_{r+1}^0(\lambda_{1\,r+1} a_1 + ... + \lambda_{rn} a_r) + \ldots + x_n^0(\lambda_{1n} a_1 + \ldots + \lambda_{rn} a_r) = \\ &= (x_1^0 + x_{r+1}^0 \lambda_{1\,r+1} + \ldots + x_n^0 \lambda_{1n}) a_1 + \ldots + (x_r^0 + x_{r+1}^0 \lambda_{1\,r+1} + \ldots + x_n^0 \lambda_{1n}) a_r \end{aligned}$$

Т.е. столбец b является линейной комбинацией базисных столбцов матрицы A. Тогда $a_1, \dots, a_r$ – базисные $\Rightarrow$ M – базисный минор и для $\Big(A \mid b\Big)$. Он $\neq 0$, и все окаймляющие миноры равны 0, т.к. у них один из столбцов – линейная комбинация столбцов $a_1, \dots, a_r$ (столбцы $a_{r+1}, \dots, a_n$ – линейная комбинация по определению базисного минора в матрице A, b – по доказанному). Значит, выполняется:

$$\operatorname{Rg}\Big(A \mid b\Big) = r = \operatorname{Rg} A$$

Достаточность. Дано: $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}\Big(A \mid b\Big)$

Доказать: СЛАУ совместна.

Пусть $\operatorname{Rg} A = r$. Пусть M – базисный минор A. Предположим, что он расположен в левом верхнем углу матрицы A. Очевидно, что M - является базисным минором и для $\Big(A \mid b\Big)$ $\Rightarrow$ по теореме о базисном миноре столбец b – линейная комбинация столбцов $a_1, \dots, a_r$:

$$b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – решение СЛАУ } Ax = b$$

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r + 0 \cdot a_{r+1} + \ldots + 0 \cdot a_n = b$$

□