2-й модуль

1 Определения

1.1 Дать определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ

Рассмотрим СЛАУ $Ax = 0$, $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$.

Определение. Любые $n - r$ линейно независимых столбцов, являющиеся решениями однородной СЛАУ $Ax = 0$, где n – число неизвестных, $r = \operatorname{Rg} A$, называют фундаментальной системой решений (ФСР).

1.2 Сформулируйте теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Теорема. Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР однородной СЛАУ $Ax = 0$. Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде: $x = c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k$, где $c_1, \ldots, c_k$ – некоторые постоянные.

1.3 Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема. Пусть известно частное решение $\widetilde{x}$ СЛАУ $Ax = b$. Тогда любое решение этой СЛАУ может быть представлено в виде: $x = \widetilde{x} + c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k$, где $c_1, \ldots, c_k$ –некоторые постоянные, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР соответствующей однородной системы $Ax = 0$.

1.4 Дайте определения модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента комплексного числа?

Пусть z – комплексное число. Его запись в алгебраической и тригонометрической формах соответственно:

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ – модуль комплексного числа.

$\varphi = \operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ – аргумент комплексного числа (угол между r и положительным направлением Re).

Главное значение аргумента комплексного числа: $\arg z$, $\arg z \in [0; 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi; \pi]$.

1.5 Что происходит с аргументами и модулями комплексных чисел при умножении и при делении?

Пусть z_1, z_2 – комплексные числа.

При умножении комплексных чисел их модули умножаются, аргументы складываются:

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

При делении комплексных чисел их модули делятся, аргументы вычитаются:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

1.6 Выпишите формулу Муавра.

Утверждение. Формула Муавра: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$

1.7 Как найти комплексные корни n-ой степени из комплексного числа? Сделайте эскиз, на котором отметьте исходное число и все корни из него.

Извлечение комплексных корней

Пусть дано комплексное число $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ и число $n \in \mathbb{N}$. Нужно найти $\sqrt[n]{w}$.

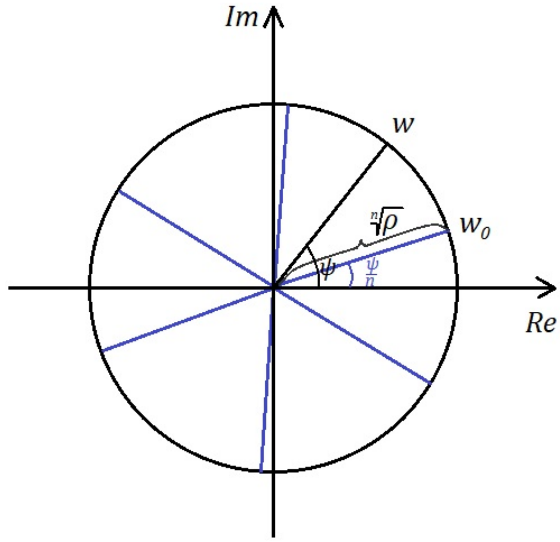
По формуле Муавра: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \rho(\cos \psi + \sin \psi)$

$$\begin{cases} \rho = r^n \\ \psi + 2\pi k = n\varphi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \leftarrow \text{ арифметический корень из } \rho > 0 \\ \varphi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Достаточно рассмотреть только $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Их ровно n штук. Тогда:

$$\sqrt[n]{w} = \{ \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right)\right) \mid k = \overline{0, n-1} \}$$

Корни $\sqrt[n]{w}$ лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$.



1.8 Сформулируйте основную теорему алгебры. Сформулируйте теорему Безу.

Теорема. Для любого многочлена $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0$, где $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, существует корень $z_0 \in \mathbb{C}$, т.е. решение уравнения $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0$

Теорема (Безу)**.** Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - c$ равен $f(c)$.

1.9 Какие многочлены называются неприводимыми?

Определение. Многочлен называется приводимым, если существует его нетривиальное разложение $f = g \cdot h$ и неприводимым в противном случае.

1.10 Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над полем комплексных чисел.

Для любого непостоянного многочлена из $\mathbb{C}[x]$ существует разложение на неприводимые множители первой степени.

Неприводимым над $\mathbb{C}$ являются только многочлены 1-ой степени: $z - z_1$.

Любой многочлен степени $n > 0$ разлагается в произведение неприводимых многочленов. Комплексный многочлен степени n разлагается в произведение:

$$P_n(z) = a_n \cdot (z - z_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{\alpha_k}, \;\; n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$$

1.11 Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над действительными числами.

Утверждение. Все многочлены 1-ой и все многочлены 2-ой степени с $D < 0$ являются неприводимыми над $\mathbb{R}$, а все остальные приводимы.

1.12 Дайте определение векторного произведения векторов в трёхмерном пространстве

Определение. Вектор $\vec{c}$ называют векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
3) тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая

Обозначение. $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

1.13 Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.

Утверждение. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – правый ОНБ, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тогда:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

1.14 Что такое уравнение поверхности и его геометрический образ?

Определение. Рассмотрим ПДСК O_{xyz} и некоторую поверхность S. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называют уравнением поверхности S, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на поверхности. При этом поверхность S называют геометрическим образом уравнения $F(x, y, z) = 0$.

1.15 Сформулируйте теорему о том, что задает любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве.

Теорема.

1) Любая плоскость в пространстве определяется уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, в котором A, B, C, D — некоторые числа.

2) Любое уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, определяет в пространстве плоскость.

1.16 Что такое нормаль плоскости?

Определение. Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ перпендикулярен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и называется ее нормальным вектором.