1-й модуль

1 Определения

1.1 Дать определение умножения матриц. Коммутативна ли эта операция?

Определение. Рассмотрим A типа $n \times p$ и B типа $p \times k$. Привидением матриц A и B называют матрицу C типа $n \times k$ с элементами $c_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{p} a_{il} \cdot b_{lj}$, $\forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}$

Замечание. Операция умножения матриц *не является коммутативной.*

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

1.2 Дать определения ступенчатого вида матрицы и канонического (улучшенного ступенчатого) вида матрицы.

Определение. Матрица M имеет ступенчатый вид, если номера столбцов первых ненулевых элементов всех строк (такие элементы будем называть ведущими) возрастают, а нулевые строки расположены в нижней части матрицы.

Определение. Матрица M имеет улучшенный ступенчатый (канонический) вид, если:

1) она имеет ступенчатый вид
2) все ведущие элементы равны 1
3) в столбце с ведущим элементом все остальные элементы равны 0

1.3 Перечислить элементарные преобразования строк матрицы.

Определение. Элементарными преобразованиями строк матрицы называют:

1) умножение i-ой строки матрицы на $\alpha \neq 0$:
   $\alpha \cdot (i) \to (i)$

2) перестановка двух строк в матрице:
   $(i) \leftrightarrow (k)$
3) добавление к i-ой строке k-ой строки с коэффициентом α:
   $(i) + \alpha \cdot (k) \to (i)$

1.4 Сформулировать теорему о методе Гаусса.

Теорема. Любую конечную матрицу можно элементарными преобразованиями привести к ступенчатому (каноническому) виду.

1.5 Дать определения перестановки и подстановки.

Определение. Всякое расположение чисел $1, \ldots, n$ в определённом порядке называют перестановкой $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_2)$.

Определение. Подстановкой называется взаимно-однозначное отображение $1, \ldots, n$ в себя:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Здесь $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ – перестановка.

1.6 Выписать общую формулу для вычисления определителя произвольного порядка.

Определение. Определителем (детерминантом) порядка n, соответствующим квадратной матрице A называется число, являющееся суммой $n!$ слагаемых:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

1.7 Выписать формулы для разложения определителя по строке и по столбцу.

Разложение по строке (столбцу):

Для любого фиксированного j справедливо: $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ – разложение по столбцу.

Для любого фиксированного i справедливо: $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ – разложение по строке.

1.8 Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Когда с их помощью можно найти решение СЛАУ?

Теорема. Пусть $Ax = b$ совместная СЛАУ, тогда:

$$x_i \cdot \det A = \Delta_i$$

$$\Delta_i = \det(A_1, ..., A_{i-1}, b, A_{i+1}, ..., A_n)$$

Если $\det A \neq 0$, то $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\det A}$, $i = \overline{1, n}$.

1.9 Дать определение обратной матрицы. Сформулировать критерий её существования.

Определение. Обратной к квадратной матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$ называется матрица

$$A^{-1} : A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$$

Теорема. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

1.10 Выписать формулу для нахождения обратной матрицы.

Формула: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$.

1.11 Выписать формулу для матрицы обратной к произведению двух матриц.

Формула: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

1.12 Дать определение минора.

Определение. Минором k-го порядка матрицы A называют определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечении произвольных k строк и k столбцов из матрицы A.

1.13 Дать определение базисного минора. Какие строки называются базисными?

Определение. Любой отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу, называется базисным минором матрицы. Строки, которые попали в базисный минор, называются базисными.

1.14 Дать определение ранга матрицы.

Определение. Рангом матрицы называют наивысший порядок отличного от 0 минора.

Определение означает, что:

1) $\exists M_{i1\ldots ir}^{j1\ldots jr} \neq 0$ (минор r-го порядка $r = \operatorname{Rg} A$)
2) все миноры порядков $r+1, r+2, \ldots$ равны 0 (или не существуют).

1.15 Дать определение линейной комбинации строк. Что такое нетривиальная линейная комбинация?

Определение. Линейной комбинацией строк (или столбцов) $a_1, \ldots, a_s$ одинаковой длины называют выражение вида:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k a_k, \text{ где } \alpha_1, \ldots, \alpha_s \text{ – некоторые числа}$$

Определение. Линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s$ называется нетривиальной, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ не все равны 0.

1.16 Дать определение линейной зависимости строк матрицы.

Определение. Строки $a_1, \ldots, a_s$ называют линейно зависимыми, если существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ не все равные 0, такие что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = 0$

1.17 Дать определение линейно независимых столбцов матрицы.

Определение. Если равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = 0$ возможно только в случае, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$, то столбцы матрицы $a_1, \ldots, a_s$ называют линейно независимыми.

1.18 Сформулировать критерий линейной зависимости.

Утверждение. $a_1, \ldots, a_s$ – линейно зависимы $\Leftrightarrow$ хотя бы один из $a_1, \ldots, a_s$ линейно выражается через другие.

1.19 Сформулировать теорему о базисном миноре.

Теорема (о базисном миноре)**.**

1) Базисные строки (столбцы), соответствующие любому базисному минору M матрицы A л.н.з.
2) Строки (столбцы) матрицы A, не входящие в M являются линейной комбинацией базисных строк.

1.20 Сформулировать теорему о ранге матрицы.

Следствие (теорема о ранге матрицы)**.** Ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых строк и равен максимальному числу линейно независимых столбцов.

1.21 Сформулировать критерий невырожденности квадратной матрицы.

Следствие. Рассмотрим квадратную матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$. Следующие три условия эквивалентны:
(1) $\det A \neq 0$
(2) $\operatorname{Rg} A = n$
(3) все строки A линейно независимы

1.22 Сформулировать теорему Кронекера–Капелли.

Теорема. СЛАУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \left(A \mid b\right)$.