2 Доказательства

2.1 Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и докажите её.

Теорема. Пусть известно частное решение $\widetilde{x}$ СЛАУ $Ax = b$. Тогда любое решение этой СЛАУ может быть представлено в виде:

$$x = \widetilde{x} + c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k$$

где $c_1, \ldots, c_k$ –некоторые постоянные, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР соответствующей однородной системы $Ax = 0$.

Доказательство.

$$X_{\text{общ.неодн.}} = X_{\text{част.неодн.}} + X_{\text{общ.однород.}}$$

Пусть x^0 – произвольное решение СЛАУ $Ax = b \Rightarrow x^0 - \widetilde{x}$ – решение СЛАУ $Ax = 0$ (по свойствам решений СЛАУ).

К $x^0 - \widetilde{x}$ применим теорему о структуре общего решения ОСЛАУ:

$$x^0 - \widetilde{x} = c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k \Rightarrow x^0 = \widetilde{x} + c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k$$

□

2.2 Выпишите формулу Муавра и докажите её.

Утверждение. Формула Муавра: $z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$, $n \in \mathbb{N}$

Доказательство. Применим принцип математической индукции.

1) $n = 2$:

$$z^2 = z \cdot z = r \cdot r \cdot (\cos(\varphi + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi)) = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

2) Предположим, что формула верна для всех $n \leq k$. Покажем, что из этого следует, что оно верно для всех $n = k + 1$:

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi) \cdot r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r^{k+1} (\cos(k\varphi + \varphi) + i \sin(k\varphi + \varphi)) = \\ = r^{k+1}(\cos((k + 1)\varphi) + i \sin((k + 1)\varphi))$$

Таким образом, формула верна $\forall n \in \mathbb{N}$.

□

2.3 Докажите, что если у многочлена с вещественными коэффициентами есть корень с ненулевой мнимой частью, то число, комплексно сопряжённое к этому корню, также будет корнем этого многочлена

Утверждение. Если $c \in \mathbb{C}$ – корень кратности k многочлена $P_n(x)$ с действительными коэффициентами, то $\bar{c}$ тоже является корнем $P_n(x)$ кратности k.

Доказательство. Пусть $P_n(c) = a_n \cdot c^n + \ldots + a_1 \cdot c + a_0 = 0$. Сопряжём обе части:

$$\bar{0} = \bar{a_n} \cdot \bar{c^n} + \ldots + \bar{a_1} \cdot \bar{c} + \bar{a_0}$$

Откуда $\bar{c}$ – тоже будет корнем:

$$0 = a_n \cdot \bar{c^n} + \ldots + a_1 \cdot \bar{c} + a_0 = a_n \cdot c^n + \ldots + a_1 \cdot c + a_0$$

Если c – корень кратности 1, то всё доказано. Если кратность > 1, то делим на $x - \bar{c}$, по теореме Безу остаток будет нулевым и к многочлену применяем ту же процедуру. □

2.4 Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе трехмерного пространства и приведите её вывод.

Утверждение. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – правый ОНБ, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тогда:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_yb_z - a_zb_y) + \vec{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \vec{k}(a_xb_y - a_yb_x)$$

Доказательство. Т.к. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – ОНБ, то

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= a_xb_y\,\vec{i} \times \vec{j} + a_xb_z\,\vec{i} \times \vec{k} + a_yb_x\,\vec{j} \times \vec{i} + a_yb_z\,\vec{j} \times \vec{k} + a_zb_x\,\vec{k} \times \vec{i} + a_zb_y\,\vec{k} \times \vec{j} = \\ &= \vec{i}(a_yb_z - b_ya_z) + \vec{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \vec{k}(a_xb_y - a_yb_x) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

2.5 Докажите теорему о том, что любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве задает плоскость и что любая плоскость определяется линейным уравнением.

Теорема.

1) Любая плоскость в пространстве определяется уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, в котором A, B, C, D — некоторые числа.
2) Любое уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, определяет в пространстве плоскость.

Доказательство.

1) Рассмотрим плоскость π. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ей принадлежит. Рассмотрим $\vec{n} \perp \pi$. Пусть $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \Leftrightarrow A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) = 0$$

Т.е. $Ax + By + Cz + D = 0$, где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Таким образом, координаты точки M удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$.

2) Рассмотрим уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Оно имеет хотя бы одно решение (например, если $A \neq 0$, то $x_0 = -\frac{D}{A}, y_0 = z_0 = 0$). Обозначим за M_0 точку (x_0, y_0, z_0). Пусть точка $M(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$. Вычтем из него равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$:

$$A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z) = 0 \Leftrightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0, \text{ где } \vec{n} = (A, B, C)$$

$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$ точка M лежит в плоскости, проходящей через M_0 и перпендикулярной вектору $\vec{n} \Rightarrow$ уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет плоскость.

$\square$

2.6 Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Докажите теорему о существовании ФСР.

Определение. Любые $n - r$ линейно независимых столбцов, являющиеся решениями однородной СЛАУ $Ax = 0$, где n – число неизвестных, $r = \operatorname{Rg} A$, называют фундаментальной системой решений (ФСР).

Теорема (о существовании ФСР)**.** Рассмотрим однородную СЛАУ $Ax = 0$. У неё существует $k = n - r$ линейно независимых решений, где n – число неизвестных, а $r = \operatorname{Rg} A$.

Доказательство. Будем предполагать, что базисный минор расположен в левом верхнем углу:

$$A = \begin{array}{c} r\left\{\vphantom{\begin{matrix} a \\ \vdots \\ a \end{matrix}}\right. \\ \vphantom{\begin{matrix} a \\ \vdots \\ a \end{matrix}} \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} & & \\ & \text{M} & \\ & & \end{matrix}}^{r} & \begin{matrix} a_{1\,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r\,r+1} & \dots & a_{rn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1\,1} & \dots \\ \vdots & \dots \\ a_{m1} & \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & \dots & a_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & a_{mn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Тогда строки $a_1, \dots, a_r$ являются базисными. А строки $a_{r+1}, \dots, a_m$ являются линейными комбинациями:

$$\begin{cases} a_{r+1} = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r \\ \vdots \\ a_m = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_r a_r \end{cases}$$

Сделаем элементарные преобразования:

$$\left.\begin{array}{l} a_{r+1} - \lambda_1 a_1 - \dots - \lambda_r a_r \to a_{r+1} \\ \vdots \\ a_m - \mu_1 a_1 - \dots - \mu_r a_r \to a_m \end{array}\right\} \Rightarrow \text{получим матрицу, где последние } m - r \text{ строк нулевые}$$

$$A = \begin{array}{c} r\left\{\vphantom{\begin{matrix} a \\ \vdots \\ a \end{matrix}}\right. \\ \vphantom{\begin{matrix} a \\ \vdots \\ a \end{matrix}} \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} & & \\ & \text{M} & \\ & & \end{matrix}}^{r} & \begin{matrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \dots \\ \vdots & \dots \\ 0 & \dots \end{matrix} & \begin{matrix} \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Заметим, что элементарные преобразования соответствуют эквивалентным преобразованиям исходной СЛАУ $\Rightarrow$ СЛАУ $Ax = 0$ эквивалентна:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{r\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Мы называем переменные $(x_1, \dots, x_r)$, отвечающие базисным столбцам, базисными (главными), а остальные переменные – свободными $(x_{r+1}, \dots, x_n)$

В $(*)$ слева – базисные, а справа – свободные.

Придадим свободным переменным следующий набор значений:

1-й набор	2-й набор	...	$(n-r)$-й набор
$x_{r+1}=1$	$x_{r+1}=0$	...	$x_{r+1}=0$
$x_{r+2}=0$	$x_{r+2}=1$	...	$x_{r+2}=0$
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
$x_n=0$	$x_n=0$	...	$x_n=1$

Для каждого набора свободных переменных решим СЛАУ относительно $x_1,\ldots,x_r$. Эта СЛАУ всегда имеет единственное решение, т.к. её определитель $(r\times r)$ – это базисный минор M и он не равен 0 (например, есть решение по формуле Крамера).

Получаем следующее решение:

Для 1-го набора:	Для 2-го набора:	...	Для $(n-r)$-го набора:
$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_{11}\\ \vdots\\ \phi_{1r}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_{21}\\ \vdots\\ \phi_{2r}\end{pmatrix}$	...	$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi_{k1}\\ \vdots\\ \phi_{kr}\end{pmatrix}$

Столбцы: $\Phi_1=\begin{pmatrix}\phi_{11}\\ \vdots\\ \phi_{1r}\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ldots,\Phi_k=\begin{pmatrix}\phi_{k1}\\ \vdots\\ \phi_{kr}\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ – решения СЛАУ $(*)\Rightarrow$ решения исходной СЛАУ.

Покажем, что они л.н.з. Рассмотрим равенство из определения $\alpha_1\Phi_1+\ldots+\alpha_k\Phi_k=0$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}\phi_{11}\\ \vdots\\ \phi_{1r}\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+...+\alpha_k\begin{pmatrix}\phi_{k1}\\ \vdots\\ \phi_{kr}\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ \vdots\\ *\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}*\\ \vdots\\ *\end{matrix}}\right\}r\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}*\\ \vdots\\ *\end{matrix}}\right\}n-r\end{matrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

Это может быть выполнено только при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0\overset{\text{опр.}}{\Rightarrow}\Phi_1,\ldots,\Phi_k$ являются л.н.з. Значит, $\Phi_1,\ldots,\Phi_k$ – л.н.з., их $n-r$ и они являются решениями $\Rightarrow$ это ФСР. $\square$

2.7 Сформулируйте критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей и докажите его.

Следствие. Однородная СЛАУ $Ax = 0$ имеет ненулевые решения $\Leftrightarrow \det A = 0$, т.е. A – вырожденная матрица.

Доказательство.

Необходимость. Дано: $Ax = 0$ имеет решение $x\ (\neq 0)$

Доказать: $\det A = 0$

Предположим, что $\det A \neq 0 \Rightarrow$ СЛАУ имеет единственное решение (по правилу Крамера) и это решение $x = 0$ – $\perp \Rightarrow \det A = 0$

Достаточность. Дано: $\det A = 0$

Доказать: $\exists x \neq 0 : Ax = 0$

Определитель $\det A = 0 \Rightarrow \operatorname{Rg} A < n$. Пусть $\operatorname{Rg} A = r$. По теореме о существовании ФСР, существуют $n-r > 0$ л.н.з. (ненулевых) решений СЛАУ $Ax = 0$. Это и есть ненулевые решения. $\square$

2.8 Докажите теорему о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема (о структуре общего решения однородной СЛАУ)**.** Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – ФСР однородной СЛАУ $Ax = 0$. Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде: $x = c_1\Phi_1 + \ldots + c_k\Phi_k$, где $c_1, \ldots, c_k$ – некоторые постоянные.

Доказательство.

Пусть $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ – произвольное решение однородной СЛАУ $Ax = 0$.

Будем предполагать, что базисный минор расположен в левом верхнем углу:

$$A = \begin{array}{c} r\left\{\vphantom{\begin{matrix} a \\ \vdots \\ a \end{matrix}}\right. \\ \vphantom{\begin{matrix} a \\ \vdots \\ a \end{matrix}} \end{array} \left(\begin{array}{c|ccc} \overbrace{\qquad \mathrm{M} \qquad}^{r} & a_{1\,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ & \vdots & \ldots & \vdots \\ & a_{r\,r+1} & \ldots & a_{rn} \\ \hline a_{r+1\,1} \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & & a_{r+1\,n} \\ \vdots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & & \vdots \\ a_{m1} \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & & a_{mn} \end{array}\right)$$

Тогда строки $a_1, \dots, a_r$ являются базисными. А строки $a_{r+1}, \dots, a_m$ являются линейными комбинациями:

$$\begin{cases} a_{r+1} = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r \\ \vdots \\ a_m = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_r a_r \end{cases}$$

Сделаем элементарные преобразования:

$$\left.\begin{array}{l} a_{r+1} - \lambda_1 a_1 - \ldots - \lambda_r a_r \to a_{r+1} \\ \vdots \\ a_m - \mu_1 a_1 - \ldots - \mu_r a_r \to a_m \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ получим матрицу, где последние } m-r \text{ строк нулевые}$$

$$A = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{0 \quad \dots}}^{r} \hphantom{\quad \dots \quad \dots \quad \dots} \end{array} \\ \begin{array}{r} r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cc|ccc} & & \dots & \dots & \dots \\ \multicolumn{2}{c|}{M} & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots \\ \cline{1-2} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Заметим, что элементарные преобразования соответствуют эквивалентным преобразованиям исходной СЛАУ $\Rightarrow$ СЛАУ $Ax = 0$ эквивалентна:

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Решим СЛАУ (1) относительно неизвестных $x_1, \dots, x_r$ (выразим главные через свободные):

$$(2)\begin{cases} x_1 = \alpha_{1\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_r = \alpha_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn}x_n \end{cases} \qquad \text{где } \alpha_{ij} \text{ – числа}$$

Составим новую матрицу D (ϕ_{ij} – координаты столбцов, образующих ФСР):

$$D = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_1^0 & \phi_{11} & \dots & \phi_{k1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_r^0 & \phi_{1r} & \dots & \phi_{kr} \\ x_{r+1}^0 & \phi_{1\,r+1} & \dots & \phi_{k\,r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n^0 & \phi_{1n} & \dots & \phi_{kn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \underbrace{\hphantom{x_n^0}}_{x^0} & \underbrace{\hphantom{\phi_{1n}}}_{\Phi_1} & \hphantom{\dots} & \underbrace{\hphantom{\phi_{kn}}}_{\Phi_k} \end{array} \end{array}$$

Покажем, что $\operatorname{Rg} D = k$:

1) $\operatorname{Rg} D \geq k$, т.к. $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – л.н.з. (по определению ФСР), а по теореме о ранге матрицы $\operatorname{Rg} D$ равен максимальному числу л.н.з. столбцов.

2) Покажем, что $\operatorname{Rg} D \leq k$. Столбцы $x^0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k$ – решения СЛАУ $Ax = 0$. Тогда для них верна система (2). На место x в системе (2) последовательно подставим столбцы $x^0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k$. Тогда x_i переменная ($i = \overline{1, r}$) из системы (2) после подстановки в неё столбцов $x^0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k$ будет выглядеть:

$$\begin{cases} x_i^0 = \alpha_{i\,r+1} x_{r+1}^0 + \ldots + \alpha_{in} x_n^0 \\ \phi_{1i} = \alpha_{i\,r+1} \phi_{1\,r+1} + \ldots + \alpha_{ir} \phi_{1n} \\ \vdots \\ \phi_{ki} = \alpha_{i\,r+1} \phi_{k\,r+1} + \ldots + \alpha_{in} \phi_{kn} \end{cases}$$

Таким образом, первая строка d_i матрицы является линейной комбинацией строк $d_{r+1}, \ldots, d_n$.

$$\begin{cases} d_1 = \alpha_{1\,r+1} d_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n} d_n \\ \vdots \\ d_r = \alpha_{r\,r+1} d_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn} d_n \end{cases}$$

Сделаем элементарные преобразования:

$$\begin{cases} d_1 - \alpha_{1\,r+1} d_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n} d_n \to d_1 \\ \vdots \\ d_r - \alpha_{r\,r+1} d_{r+1} - \ldots - \alpha_{rn} d_n \to d_r \end{cases}$$

Получаем матрицу D_1, у которой первые r строк нулевые:

$$D \sim D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ x_{r+1}^0 & \phi_{1\,r+1} & \ldots & \phi_{k\,r+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_n^0 & \phi_{1n} & \ldots & \phi_{kn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} x \\ \vdots \\ x \end{matrix}}\right\} n - r = k \end{array}$$

$\operatorname{Rg} D_1 \leq n - r = k$. При элементарных преобразованиях ранг не меняется $\Rightarrow \operatorname{Rg} D \leq k$.

Таким образом, $\operatorname{Rg} D = k$ (т.к. $\operatorname{Rg} D \geq k$ и $\operatorname{Rg} D \leq k$).

Заметим, что $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ являются базисными (они л.н.з. и их $k = \operatorname{Rg} D$) $\Rightarrow$ по теореме о базисном миноре столбец x^0 – их линейная комбинация, т.е. $\exists c_1, \ldots, c_k : x^0 = c_1 \Phi_1 + \ldots + c_k \Phi_k$. □