Метод множителей Лагранжа для максимизации полезности при бюджетном ограничении

Метод множителей Лагранжа - метод нахождения условного экстремума функции $f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, относительно m ограничений $\varphi_i(x) = 0$ где i меняется от единицы до m.

Проще говоря, метод множителей Лагранжа используется для нахождения максимума или минимума функции при наличии ограничений. В нашем контексте максимизации полезности потребитель выбирает такие x, y чтобы максимизировать функцию полезности $U(x, y)$ при бюджетном ограничении

$$p_x x + p_y y = M$$

Мы пытаемся найти такие x, y которые максимизируют $U(x, y)$ учитывая наш бюджет.

Функция полезности

Функция полезности - функция, с помощью которой можно представить предпочтения потребителя на множестве допустимых альтернатив. Это функция вида

$$U(x, y)$$

которая каждому набору товаров (x, y) сопоставляет число, отражающее уровень полезности потребителя.

Виды функций полезности

1. Кобба–Дугласа

$$U(x, y) = x^a y^b$$

$a, b > 0$

2. Совершенные заменители (линейные)

$$U(x, y) = ax + by$$

3. Совершенные комплементы

$$U(x, y) = min[x, y]$$

Бюджетная линия

Бюджетная линия - это все наборы товаров, которые потребитель может себе позволить при данном доходе и ценах.

Например, у нас есть доход M, цена для товара $x : p_x$ и аналогично для $y : p_y$, тогда бюджетное ограничение выглядит как:

$$p_x x + p_y y = M$$

Пересечение с осью x:

$$x = \frac{M}{p_x}, \quad y = 0$$

Пересечение с осью y:

$$y = \frac{M}{p_y}, \quad x = 0$$

Смысл: максимальное количество товара которое можно позволить, потратив весь бюджет на него.

Метод множителей Лагранжа для максимизации полезности при бюджетном ограничении.

Теперь, вернемся к Методу множителей Лагранжа.

Наша задача, найти $\max_{x,y} U(x, y)$ при $p_x x + p_y y = M$

Лагранжиан:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda\left(M - p_x x - p_y y\right)$$

где λ - множитель Лагранжа (предельная полезность дохода)

Условия первого порядка

Для внутреннего максимума выполняются условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda p_x = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda p_y = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = I - p_x x - p_y y = 0$$

Из первых двух уравнений, мы получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda p_x$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lambda p_y$$

Делим одно на другие:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{p_x}{p_y}$$

Это эквивалентно

$$MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}$$

Таким образом, оптимум определяется системой:

$$\begin{cases} MRS_{xy} = \frac{p_x}{p_y}, \\ p_x x + p_y y = M \end{cases}$$

Пример

$U(x,y) = \sqrt{xy}, \quad 3x + 2y = 12$

Лангранжиан:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \sqrt{xy} + \lambda\,(12 - 3x - 2y)$$

Условия первого порядка:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2} - 3\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2} - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 12 - 3x - 2y = 0$$

В первом и во втором уравнении перенесем -3λ и -2λ на право

$$\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2} = 3\lambda$$

$$\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2} = 2\lambda$$

Далее, мы должны поделить левую часть с левой, правую с правой

$$\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}}{\frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}} = \frac{3\lambda}{2\lambda} \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3x}{2}$$

Подставляем в бюджет

$$3x + 2(\frac{3x}{2}) = 12 \Rightarrow x = 2$$

Тогда, мы можем легко найти y, который будет равен 3 ($y = 3$). Таким образом, оптимальный набор товаров в данной задаче будет $(2, 3)$.

Упражнения:

1. Максимизировать полезность $U(x,y) = ln(x) + ln(y)$ при бюджетном ограничении $4x + y = 8$
2. Предположим, что кошки стоят £2 за штуку, а собаки стоят £1 за штуку. Пусть функция полезности потребителя задана как $U(c,d) = c^2d^2$, где c - количество кошек, d - количество собаки. Если потребитель покупает c кошек и d собак, сколько кошек и собак он должен купить, чтобы максимизировать полезность, если у него есть M денег?
3. Другой потребитель имеет бюджет £4 для покупки кошек и собак по ценам, указанным в Примере 2, и его функция полезности равна

$$U(c,d) = 3c + d$$

Сколько кошек и собак должен купить потребитель, чтобы максимизировать полезность при данном бюджете?

4. Используйте метод множителей Лагранжа для оптимизации функции $f(x, y) = x^{3/8}y^{2/3}$, при ограничении $x^2 + y^2 = 25 \quad x, y > 0$

Ответы:

1. (1, 4)
2. $(\frac{M}{4}, \frac{M}{2})$
3. (2, 0)
4. (3, 4)

@salyamq2