ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ĐẠI SỐ TT

Chương 6 –

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH & DẠNG TOÀN PHƯƠNG

ThS. LÊ HOÀNG TUẤN

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

- Xét V và W là các KGVT trên F
- Lúc này, ánh xạ

$$f : V \times W \to F$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto f(\alpha, \beta)$$

đgl dạng song tuyến tính nếu f tuyến tính theo từng biến, nghĩa là

$$\begin{cases} f(c\alpha + \alpha', \beta) = cf(\alpha, \beta) + f(\alpha', \beta) \\ f(\alpha, c\beta + \beta') = cf(\alpha, \beta) + f(\alpha, \beta') \end{cases}$$

$$\forall \alpha, \alpha' \in V; \forall \beta, \beta' \in W; \forall c \in F$$

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

- Ví dụ xét V là KGVT các hàm liên tục trên R

  W là KGVT các hàm có đạo hàm mọi cấp trên R

, và f là ánh xạ $f : V \times W \to R$

$$(g,h) \mapsto \int_0^1 g(x)h(x)e^x dx$$

☞ f tuyến tính theo từng biến (kiểm chứng dễ dàng)

☞ f là 1 dạng song tuyến tính trên VxW

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

☐ Ví dụ 2 xét $f : Q^2 \times Q^3 \to Q$

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{\alpha}, \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\beta} \right) \mapsto f(\alpha, \beta) = 2u_1v_1 + 5u_1v_3 - 7u_2v_2 + 8u_2v_3$$

☞ f tuyến tính theo từng biến (kiểm chứng dễ dàng)

☞ f là 1 dạng song tuyến tính trên $Q^2 x Q^3$

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH ĐỐI XỨNG

- Xét dạng song tuyến tính $\boxed{f : V \times V \to F}$

- Lúc này, ta nói

f đối xứng, nếu $\boxed{f(\beta,\alpha) = f(\alpha,\beta)}$ $;\forall \alpha,\beta \in V$

f không đối xứng, nếu $\exists \alpha,\beta : \boxed{f(\alpha,\beta) \neq f(\beta,\alpha)}$

MA TRẬN BIỂU DIỄN DẠNG STT TRÊN CÁC KG HỮU HẠN CHIỀU

☐ Xét dạng song tuyến tính $f : V_m \times W_n \to F$

, và V_m có cơ sở $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$

W_n có cơ sở $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$

☐ Tính $a_{ij} = f(\alpha_i, \beta j) \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$

☐ Lập ma trận $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$

☞ Ký hiệu $A = [f]_{a,\beta}$

& gọi là ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở a, β

MA TRẬN BIỂU DIỄN DẠNG STT TRÊN CÁC KG HỮU HẠN CHIỀU

- Ngoài ra, $\forall X \in V_m, \forall Y \in W_n$ thỏa

$$[X]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad [Y]_\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

☞ thì

$$\boxed{f(X,Y) = \left([X]_a\right)^t A[Y]_\beta}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

, nghĩa là ta tính giá trị f(X,Y) (với X, Y bất kỳ) dựa theo

$$\boxed{A = [f]_{a,\beta}}$$

MA TRẬN BIỂU DIỄN DẠNG STT TRÊN CÁC KG HỮU HẠN CHIỀU

☐ Ví dụ

$$f : R^3 \times R^2 \to R$$
$$(X,Y) \mapsto f(X,Y)$$, với $\begin{cases} X = (x_1, x_2, x_3) \\ Y = (y_1, y_2) \end{cases}$

, và $$f(X,Y) = 3x_1y_1 + 6x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 - 5x_3y_1$$

☞ Và do
- R^3 có cơ sở $a = \beta_0 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$
- R^2 có cơ sở $\beta = \beta_0' = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = f(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) = 3 \quad ; a_{12} = f(\varepsilon_1, \varepsilon'_2) = 6 \\ a_{21} = f(\varepsilon_2, \varepsilon'_1) = -2 \quad ; a_{22} = f(\varepsilon_2, \varepsilon'_2) = 4 \\ a_{31} = f(\varepsilon_3, \varepsilon'_1) = -5 \quad ; a_{32} = f(\varepsilon_3, \varepsilon'_2) = 0 \end{cases}$$

MA TRẬN BIỂU DIỄN DẠNG STT TRÊN CÁC KG HỮU HẠN CHIỀU

$$\Rightarrow A = [f]_{a,\beta} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 2}}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

- Xét $\boxed{f : V_m \times W_n \to F}$ là dạng song tuyến tính

V_m có 2 cơ sở là a và a′ $(P = P(a \to a'))$

W_n có 2 cơ sở là β và β′ $(Q = P(\beta \to \beta'))$

CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

☐ Ta có $\boxed{[f]_{a',\beta'} = P^t[f]_{a,\beta}Q}$

☐ Đặc biệt, nếu $\begin{cases} V_m \equiv W_n \\ a = \beta \quad ; P \equiv Q \\ a' = \beta' \end{cases}$ thì ta ghi $\begin{cases} [f]_{a,\beta} \equiv [f]_a \\ [f]_{a',\beta'} \equiv [f]_{a'} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{[f]_{a'} = P^t[f]_a Q = P^t[f]_a P}$$

☐ Đặt $\boxed{rank(f) = r([f]_{a,\beta})}$ (độc lập với cặp cơ sở a và β)

hạng của f

hạng của ma trận

CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

- Ví dụ $f: R^2 \times R^3 \to R$

$$(X,Y) \mapsto f(X,Y) = 3x_1y_2 - 7x_1y_3 + 4x_2y_1 - 8x_2y_2$$

R^2 có cơ sở $a = \beta_0$ và $a' = \{\alpha_1 = (-2,3), \alpha_2 = (5,-4)\}$

R^3 có cơ sở $\beta = \beta'_0$ và $\beta' = \{\beta_1 = (1,-2,3), \beta_2 = (0,4,-5)$
$, \beta_3 = (0,0,7)\}$

$$\Rightarrow P = P(a \to a') = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = P(\beta \to \beta') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

$$\Rightarrow [f]_{a,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{a',\beta'} = P^t [f]_{a,\beta} Q$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 114 & -190 & 98 \\ -215 & 363 & -245 \end{pmatrix}$$

& ta có $rank\begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{rank(f) = 2}$

DẠNG TOÀN PHƯƠNG

- Xét V là KGVT trên F
- Lúc này, ánh xạ $f: V \to F$ đgl dạng toàn phương, nếu có dạng song tuyến tính $\varphi: V \times V \to F$ sao cho

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha, \alpha) \quad ; \forall \alpha \in V$$

(φ không duy nhất)

- Tiếp theo, giả sử cho dạng toàn phương $f: V \to F$, nghĩa là tồn tại dạng song tuyến tính φ thỏa

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha, \alpha)$$

DẠNG TOÀN PHƯƠNG

- Khi đó, $\exists!$ dạng song tuyến tính đối xứng $\boxed{\psi}$ thỏa

$$\psi(\alpha,\alpha) = f(\alpha); \forall \alpha \in V$$

- Như vậy, dạng toàn phương f ⇔ dạng song tuyến tính đối xứng $\boxed{\psi}$

$$\begin{cases} f(\alpha) = \psi(\alpha,\alpha); \forall \alpha \in V \\ \psi(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{2}(f(\alpha+\beta) - f(a) - f(\beta))\ \forall(\alpha,\beta) \end{cases}$$

MA TRẬN BIỂU DIỄN DẠNG TP TRÊN KG HỮU HẠN CHIỀU

- Giả sử V_n có cơ sở $\boxed{a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}}$

  $f : V_n \to F$ là dạng toàn phương

  ψ là dạng song tuyến tính đối xứng (duy nhất) xác định f

- Đặt $\boxed{[f]_a = [\psi]_a = (a_{ij} = \psi(\alpha_i, \alpha_j))_{1 \le i, j \le n}}$

  & gọi là ma trận biểu diễn f theo cơ sở a

- Lúc này, $\boxed{rank(f) = rank(\psi) = r([\psi]_a)}$

  ☞ f không suy biến ⇔ $[f]_a$ khả nghịch ⇔ rank(f) = n (không kỳ dị)

  ☞ f suy biến (kỳ dị) ⇔ $[f]_a$ không khả nghịch ⇔ rank(f) < n

CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

- Giả sử V_n có 2 cơ sở a và a'

$$P = P(a \to a')$$

$$f : V_n \to F$$ là dạng toàn phương

- Ta có $\boxed{[f]_{a'} = P^t [f]_a P}$, với $\begin{cases} [f]_{a'} = [\psi]_{a'} \\ [f]_a = [\psi]_a \end{cases}$

LƯU Ý

$f : V_n \to F$ là dạng toàn phương (V_n có cơ sở a)

$$[f]_a = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$$

LƯU Ý

$$\forall X \in V_n \quad \text{mà} \quad [X]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(X) = [X]_a^t [f]_a [X]_a}$$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)(a_{ij})_{1\le i,j\le n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i\neq j}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

CHÍNH TẮC HÓA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

- Cho dạng toàn phương $\boxed{f : V_n \to F}$ (V_n có cơ sở a)

$$\forall X \in V_n \quad \text{mà} \quad [X]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{, và}$$

$$f(X) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

- Ta muốn tìm cơ sở β của V_n sao cho

CHÍNH TẮC HÓA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

$\forall X \in V_n$ mà $[X]_\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ thì

$$\boxed{f(X) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}$$

(quá trình này đgl chính tắc hóa dạng toàn phương)

THUẬT TOÁN LAGRANGE

- Xét dạng toàn phương $f \neq 0$ (V_n có cơ sở a)

$$\forall X \in V_n \quad \text{mà} \quad [X]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ và}$$

$$f(X) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

☞ TH1: nếu $\boxed{a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0}$

$$\Rightarrow f(X) = \sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j \neq 0$$

THUẬT TOÁN LAGRANGE

, nghĩa là $\exists k < l : a_{kl} \neq 0$

☐ Đổi biến $\begin{cases} z_k = \frac{1}{2}(x_k + x_l) \\ z_l = \frac{1}{2}(x_k - x_l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = z_k + z_l \\ x_l = z_k - z_l \end{cases}$

$\boxed{z_j = x_j}$ với các j còn lại

$$\Rightarrow f(X) = a_{kl}x_k x_l + \dots = a_{kl}(z_k + z_l)(z_k - z_l) + \dots$$

$$= a_{kl}z_k^2 - a_{kl}z_l^2 + \dots$$

☞ Ta chuyển qua trường hợp 2

THUẬT TOÁN LAGRANGE

☞ TH2: nếu $\boxed{\exists j \in \{1,2,\ldots,n\} : a_{jj} \neq 0}$

- Chẳng hạn như giả sử $a_{11} \neq 0$
- Ta viết lại

$$f(X) = \underbrace{\left(a_{11}x_1^2 + \sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_1x_t\right)}_{\text{có } x_1} + \underbrace{g(x_2,\ldots,x_n)}_{\text{không có } x_1}$$

$$= a_{11}\left(x_1^2 + \frac{1}{a_{11}}\sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_1x_t\right) + g(x_2,\ldots,x_n)$$

$$= a_{11}\left[\underbrace{\boxed{\left(x_1 + \frac{1}{2a_{11}}\sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_t\right)^2}}_{y_1^2}\right] \underbrace{- a_{11}\left(\frac{1}{2a_{11}}\sum_{t=2}^{n} a_{1t}x_t\right)^2 + g(x_2,\ldots,x_n)}$$

THUẬT TOÁN LAGRANGE

$$\Rightarrow f(X) = a_{11}y_1^2 + \underbrace{h(x_2,\dots,x_n)}$$

dạng toàn phương theo (n-1) biến là $x_2,\dots,x_n$

☞ Tiếp tục làm (theo tinh thần quy nạp)

$$\Rightarrow \boxed{f(X) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2}$$

$P = P(\beta \to a)$

☐ Đặt

$$[X]_\beta \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad [X]_a$$

đang tìm

đã cho

THUẬT TOÁN LAGRANGE

- Ta biết $P = P(\beta \to a)$

$$\Rightarrow Q = P(a \to \beta) = P^{-1}$$

mà ta đã biết cơ sở a

☞ cơ sở β (theo định nghĩa)

CHÍNH TẮC HÓA BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

☐ Xét dạng toàn phương $\boxed{f : V_n \to R}$ có

$$\boxed{f(X) = b_{11}x_1^2 + \cdots + b_{nn}x_n^2 + \sum_{1 \le i, j \le n} b_{ij}x_i x_j} \quad (\forall X \in V_n)$$

mà $[X]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,với a là 1 cơ sở cố định của V_n

☐ Đặt $a_{ij} = a_{ji} = \begin{cases} b_{ii} & khi \quad i = j \\ b_{ij}/2 & khi \quad i < j \end{cases}$

CHÍNH TẮC HÓA BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

- Thì lúc này, $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ là ma trận đối xứng , và

$$f(X)=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+\sum_{1\le i\ne j\le n}\underbrace{(a_{ij}+a_{ji})}_{b_{ij}}x_ix_j$$

$$=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+\sum_{1\le i\ne j\le n}b_{ij}x_ix_j$$

$$\Rightarrow f(X)=(x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n)(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

CHÍNH TẮC HÓA BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

$$\Rightarrow f(X) = [X]_a^t A [X]_a$$

- Lúc này, $\exists P \in M_n(R)$ thỏa $P^{-1} = P^t$ và

$$P^{-1}AP = P^t AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

☞ Chọn cơ sở β của V_n sao cho $P(a \to \beta) = P$

CHÍNH TẮC HÓA BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

☐ Đặt $[X]_\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ thì $\begin{cases} [X]_a = P[X]_\beta \\ [X]_a^t = (P[X]_\beta)^t = [X]_\beta^t P^t \end{cases}$

☐ Thay vào f(X) ta có

$$f(X) = [X]_a^t A[X]_a$$
$$= ([X]_\beta^t P^t)A(P[X]_\beta)$$
$$= [X]_\beta^t P^t AP[X]_\beta$$

CHÍNH TẮC HÓA BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

$$\Rightarrow f(X) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

đây là dạng chính tắc hóa dạng toàn phương thực

bằng phép biến đổi trực giao

LUẬT QUÁN TÍNH

☐ Cho dạng toàn phương $\boxed{f : V_n \to R}$

☐ Xét 1 dạng chính tắc của f (theo 1 cơ sở a nào đó)

$$f(X) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

$$\forall X \in V_n \quad \text{mà} \quad [X]_a = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

☐ Đặt

$$\begin{cases} p = \text{ số hệ số } > 0 \text{ của dạng chính tắc trên} \\ q = \text{ .... } < 0 \\ r = \text{ .... } = 0 \end{cases}$$

....

$$\boxed{p + q + r = n}$$

LUẬT QUÁN TÍNH

- Khi đó,
  - p, q, r là 3 hằng số, chỉ phụ thuộc f, và độc lập với cơ sở a

    (tương ứng mỗi dạng chính tắc)
  - gọi (p, q) là cặp chỉ số quán tính của dạng toàn phương f
  - f không suy biến $\Leftrightarrow p+q=n$ (nghĩa là r = 0)
  - f suy biến $\Leftrightarrow p+q<n$ (nghĩa là r >= 1)

ĐỊNH NGHĨA

- Cho dạng toàn phương $\boxed{f : V_n \to R}$

  - Ta nói f xác định dương, nếu

$$\boxed{f(X) > 0} \quad (\forall X \in V_n \setminus \{0\})$$

  - Ta nói f xác định dương, nếu

$$\boxed{f(X) < 0} \quad (\forall X \in V_n \setminus \{0\})$$

MỆNH ĐỀ

- Cho dạng toàn phương $\boxed{f : V_n \to R}$

có cặp chỉ số quán tính p và q. Khi đó

- f xác định dương $\Leftrightarrow p = n \Leftrightarrow q = r = 0$

(tất cả hệ số trong mọi dạng chính tắc của f đều > 0)

- f xác định âm $\Leftrightarrow q = n \Leftrightarrow p = r = 0$

(tất cả hệ số trong mọi dạng chính tắc của f đều < 0)

- Suy ra, nếu f xác định dương (hoặc âm) thì f không suy biến

ĐỊNH NGHĨA

- Cho ma trận $\boxed{A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{M}_n(R)}$

- Đặt

$$A_1 = (a_{11}) \in \mathrm{M}_1(R) \quad và \quad \Delta_1 = |A_1|$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(R) \quad và \quad \Delta_2 = |A_2|$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(R) \quad và \quad \Delta_3 = |A_3|$$

ĐỊNH NGHĨA

- Tương tự, ta có

$$A_n = A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{M}_n(R) \quad và \quad \Delta_n = |A_n|$$

, với

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các ma trận (vuông) con ở góc trên, bên trái của A

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ là các định thức con (chính) của A

TIÊU CHUẨN SYLVESTER VỀ TÍNH XÁC ĐỊNH > 0 VÀ < 0

- Cho dạng toàn phương $f : V_n \to R$
- Tìm ma trận đối xứng A sao cho $f(X) = [X]_a^t A [X]_a$

$\forall X \in V_n$ và a là 1 cơ sở của V_n

- Gọi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ là các định thức con (chính) của A
- Khi đó,
  - f xác định dương $\Leftrightarrow (\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0)$
  - f xác định âm $\Leftrightarrow (-f)$ xác định dương (*)

mà $-f(X) = [X]_a^t (-A) [X]_a$, nên

$$(*) \Leftrightarrow ((-1)^1 \Delta_1 > 0, (-1)^2 \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0)$$