ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Chương 4 – KHÔNG GIAN VECTOR

ThS. LÊ HOÀNG TUẤN

ĐẠI SỐ TT

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

- Xét tập hợp

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{\text{n lần}}$$

$$= \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$$

định nghĩa

- Cụ thể,

$$R^1 = R$$

$$R^2 = R \times R = \{X = (a, b) \mid a, b \in R\}$$

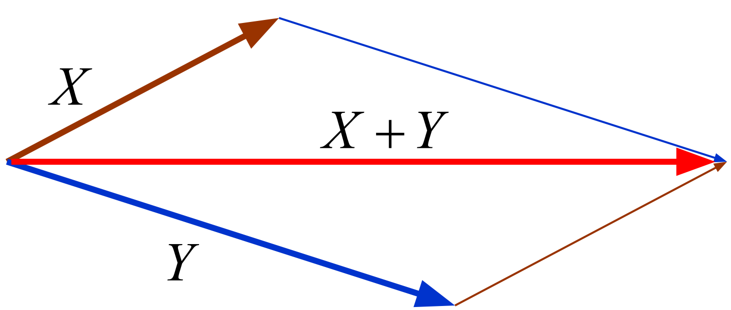
$$R^3 = R \times R \times R = \{X = (a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$$

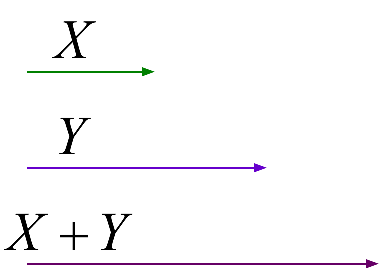
KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

- ☐ Ta định nghĩa thêm 2 phép toán cho $\boxed{R^n}$
- ☐ Lưu ý: mỗi $\boxed{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n}$ gọi là "vector X"

a/ phép cộng vector

$$\begin{cases} \forall X = (x_1, \ldots, x_n) \\ \forall Y = (y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \Rightarrow X + Y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$





KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

b/ phép nhân số thực với vector

$$\begin{cases} \forall c \in R \\ \forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \end{cases} \Rightarrow cX = (cx_1, \dots, cx_n) \in R^n$$

- Lưu ý cX cùng phương với X, nhưng có thể đổi chiều và độ dài

- Cấu trúc đại số $\boxed{(R^n, +, \bullet)}$ gọi là không gian vector (KGVT) trên R

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

☐ Ví dụ

$$F_n[x] = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in F$$

n nguyên >=0 }

= tập các đa thức trên *F*

☞ thì lúc này

$(F_n[x], +, \bullet)$ là KGVT trên F

cộng đa thức

nhân $c \in F$ với đa thức

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

KHÔNG GIAN VECTOR CON

- Cho KGVT $\boxed{(V,+,\bullet)}$ trên *F* & xét $\boxed{\phi \neq W \subset V}$
- W thừa hưởng phép + và nhân từ *F* có sẵn trên V
- Ta nói $\boxed{(W,+,\bullet)}$ là 1 KGVT con của $\boxed{(V,+,\bullet)}$

nếu nó thỏa 2 điều kiện

$$\begin{cases} \forall \alpha, \beta \in W : (\alpha + \beta) \in W \\ \forall c \in F, \forall \alpha \in W : (c\alpha) \in W \end{cases}$$

, hay

$$\boxed{\forall c \in F, \forall \alpha, \beta \in W : (c\alpha + \beta) \in W}$$

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

KHÔNG GIAN VECTOR CON

- Ký hiệu $\boxed{(W,+,\bullet) \le (V,+,\bullet)}$ hay $\boxed{W \le V}$

- Ví dụ

$V = \{f : R \to R \mid f$ khả vi mọi cấp$\}$

$$W = \{f \in V \mid 2f'' - 3f' + 5f = O\}$$

☞ kiểm chứng $\boxed{W \le V}$

- Trước hết, ta có $\phi \ne W \subset V$ (do có hàm $O \in W$)

- Tiếp theo, xét $g, h \in W$, và $c \in R$. Ta CM $\boxed{(cg + h) \in W}$

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

KHÔNG GIAN VECTOR CON

- Thật vậy, do $g, h \in W$, nên $\begin{cases} 2g''-3g'+5g = O \\ 2h''-3h'+5h = O \end{cases}$

$$\Rightarrow c(2g''-3g'+5g) = O$$

$$\Rightarrow c(2g''-3g'+5g) + (2h''-3h'+5h) = O$$

$$\Rightarrow 2(cg''+h'') - 3(cg'+h') + 5(cg+h) = O$$

$$\Rightarrow 2(cg+h)''-3(cg+h)'+5(cg+h) = O$$

$$\Rightarrow 2k''-3k'+5k = O \quad \Rightarrow \boxed{k = (cg+h) \in W}$$

- KL: $\boxed{W \le V}$

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

KHẲNG ĐỊNH KHÔNG PHẢI KHÔNG GIAN CON

- Cho KGVT $\boxed{(V,+,\bullet)}$ trên *F* & xét $\boxed{\phi \neq W \subset V}$
- Ta nói W <u>không phải là không gian con</u> của V & ký hiệu $\boxed{W \nleq V}$

nếu như $\boxed{\exists \alpha, \beta \in W : (\alpha + \beta) \notin W}$, hay

$$\boxed{\exists c \in F, \exists \alpha \in W : (c\alpha) \notin W}$$

- Ví dụ cho $V = R^3$, và

$$W = \{X = (a,b,c) \in R^3 \mid 2a^2 - 3b + c = 0\}$$

☞ CMR: $W \nleq V$

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

KHẲNG ĐỊNH KHÔNG PHẢI KHÔNG GIAN CON

☞ Cách 1: (dùng phép +)

$\exists \alpha = (1,1,1) \in W$ do $2.1^2 - 3.1 + 1 = 0$

$\beta = (-1,1,1) \in W$ do $2.(-1)^2 - 3.1 + 1 = 0$

mà $\alpha + \beta = (0,2,2) \notin W$ vì $2.0^2 - 3.2 + 2 \neq 0$

☞ KL: $W \not\leq R^3$

☞ Cách 2: (dùng phép *)

$\boxed{W \not\leq R^3}$

$\exists \alpha = (1,1,1) \in W$

$\exists c = 2 \in R$

mà $c\alpha = (2,2,2) \notin W$

vì $2.2^2 - 3.2 + 2 \neq 0$

KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT TẬP HỢP

TỔ HỢP TUYẾN TÍNH

a/ Cho $\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V}$, với V là KGVT trên trường *F*

□ Chọn tùy ý $\boxed{c_1, c_2, \ldots, c_m \in F}$, rồi lập vector

$$\boxed{\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m}$$

và gọi đây là tổ hợp tuyến tính của $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

☞ Ta có thể thành lập vô số tổ hợp tuyến tính từ các vector $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ cho trước

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

TỔ HỢP TUYẾN TÍNH

b/ Nếu $\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in S}$ (với $S \subset V$), thì ta nói

$$\boxed{\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m}$$ là 1 THTT có từ S

☐ Ví dụ trong $V = R_2[x]$, cho $\begin{cases} \alpha_1 = 3x^2 - 2x + 1 \\ \alpha_2 = 1 - 5x^2 \\ \alpha_3 = 7x + 2 \end{cases}$

☞ giả sử ta chọn $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = -5$

thì lập được $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

TỔ HỢP TUYẾN TÍNH

- Ví dụ (tt) $\Rightarrow \alpha = 2(3x^2 - 2x + 1) - (1 - 5x^2) - 5(7x + 2)$

$$= (11x^2 - 39x - 9) \in V$$

☞ Còn nếu chọn $c'_1 = -3, c'_2 = 4, c'_3 = 1$, thì ta lập

$$\alpha' = c'_1 \alpha_1 + c'_2 \alpha_2 + c'_3 \alpha_3$$

$$= -3(3x^2 - 2x + 1) + 4(1 - 5x^2) + (7x + 2)$$

$$= (-29x^2 + 13x + 3) \in V$$

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT TẬP HỢP

- Cho $\boxed{\phi \neq S \subset V}$, với V là KGVT trên trường *F*

- Ký hiệu $\boxed{< S >}$ = tập hợp tất cả các THTT có từ S

định nghĩa

, lúc này có thể viết lại

$$< S > = \left\{ \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_m\alpha_m \middle| \begin{array}{l} m \geq 1 \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in S \\ c_1, c_2, \ldots, c_m \in F \end{array} \right\}$$

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT TẬP HỢP

- Khi đó $\boxed{< S > \leq V}$, và ta nói

  $\boxed{< S >}$ là không gian con (của V) sinh bởi tập hợp S

- Ta có $\boxed{S \subset < S >}$

- Lưu ý

  👍 Có thể có nhiều không gian con của V chứa tập S

  ✌ Nhưng trong số đó, <S> là không gian con nhỏ nhất chứa S

KHÔNG GIAN VECTOR VÀ KHÔNG GIAN VECTOR CON

KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT TẬP HỢP

☐ Lưu ý nếu $\boxed{S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\}}$ (có đúng m vector) thì

$\boxed{<S>}$ = tập hợp tất cả các THTT có từ S

$$=\{\alpha=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\dots+c_m\alpha_m \mid c_1,c_2,\dots,c_m\in F\}$$

TÍNH ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH & PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

☐ Cho $\boxed{S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m\}\subset V}$, tiếp theo ta xét hệ PTTT

$\boxed{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\dots+c_m\alpha_m=O}$ (ẩn số $c_1,c_2,\dots,c_m\in F$)

TÍNH ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH & PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

- Hệ này có (ít nhất) 1 nghiệm là $\boxed{c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0}$

a/ Nếu hệ có nghiệm <u>duy nhất</u> (chính là nghiệm tầm thường này) thì

ta nói S độc lập tuyến tính (đltt)

, nghĩa là <u>không có</u> vector nào trong S được tính theo các vector

còn lại trong S

b/ Nếu hệ có nhiều nghiệm không tầm thường (có vô số nghiệm) thì

ta nói S phụ thuộc tuyến tính (pttt)

, nghĩa là <u>có</u> vector nào đó của S được tính theo các vector

còn lại trong S

TÍNH ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH & PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

- Ví dụ trong $V = R^4$, ta xét

$$S = \{\alpha_1 = (-3,1,4,2), \alpha_2 = (0,-2,7,5), \alpha_3 = (6,-1,9,7)\}$$

- Tiếp theo, ta lập hệ pttt

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = O$$

$$\Leftrightarrow c_1(-3,1,4,2) + c_2(0,-2,7,5) + c_3(6,-1,9,7) = O$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3c_1 + 6c_3 = 0 \\ c_1 - 2c_2 - c_3 = 0 \\ 4c_1 + 7c_2 + 9c_3 = 0 \\ 2c_1 + 5c_2 + 7c_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{giải}} \boxed{c_1 = c_2 = c_3 = 0}$$

S độc lập tuyến tính

NHẬN DIỆN NHANH MỘT TẬP ĐLTT (HOẶC PHỤ THUỘC TT)

- Cho $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\} \subset R^n$

- Tiếp theo, ta lập ma trận
$$A_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{☞ dòng 1} \\ \text{☞ dòng 2} \\ \\ \text{☞ dòng m} \end{array}$$

$$\boxed{A_S} \xrightarrow[\text{các cột}]{\text{bán chuẩn hóa tối đa}} \boxed{H}$$

NHẬN DIỆN NHANH MỘT TẬP ĐLTT (HOẶC PHỤ THUỘC TT)

☐ Gọi $r(A_S) =$ số dòng khác zero của H

👍 TH1: $\boxed{r(A_S) = m}$ ☞ S độc lập tuyến tính (đltt)

👍 TH2: $\boxed{r(A_S) < m}$ ☞ S phụ thuộc tuyến tính (pttt)

(và lúc này trong S chỉ có thể trích ra tối đa là $\boxed{r(A_S)}$ vector đltt)

☐ Ví dụ xét
$$S = \{f_1(x) = 2 - x + 3x^2 + 4x^3,$$
$$f_2(x) = -4 + 3x - x^2 + 2x^3,$$
$$f_3(x) = 10 + 2x - 5x^2 + x^3\} \subset F_3[x]$$

NHẬN DIỆN NHANH MỘT TẬP ĐLTT (HOẶC PHỤ THUỘC TT)

☐ Ta có $F_3[x] \equiv R^4 \quad \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) \approx (2,-1,3,4) \\ f_2(x) \approx (-4,3,-1,2) \\ f_3(x) \approx (10,2,-5,1) \end{cases}$

☐ Lập $A_S = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \\ & & & \end{pmatrix}$$

NHẬN DIỆN NHANH MỘT TẬP ĐLTT (HOẶC PHỤ THUỘC TT)

- Ta có $\boxed{r(A_S) = 3}$ (do H có 3 dòng khác zero)

  ☞ S độc lập tuyến tính (vì $r(A_S) = |S| = 3$)

- Ví dụ 2 xét

$$T = \{\alpha_1 = (-3,1,0,7), \alpha_2 = (9,-2,4,-6), \alpha_3 = (3,0,4,8)\} \subset R^4$$

- Lập $A_T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 7 \\ 9 & -2 & 4 & -6 \\ 3 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)\to(3)+(1)]{(2)\to(2)+3(1)}$

NHẬN DIỆN NHANH MỘT TẬP ĐLTT (HOẶC PHỤ THUỘC TT)

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 4 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 15 \\ & & & \end{pmatrix}$$

☐ Như vậy, $r(A_T) = 2 =$ số dòng khác zero của H

☞ T phụ thuộc tuyến tính (vì $r(A_T) = 2 < 3 = |S|$)

☞ Và lúc này chỉ có thể rút ra tối đa là 2 vector đltt từ T

CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTOR

- Vấn đề cho KGVT V sinh bởi tập S $(V = < S >)$
- Ta muốn tìm $\boxed{S' \subsetneq S}$ mà $< S' > = V$

  ☞ Nếu tìm được S' thì S là tập sinh chưa tối tiểu

  ☞ Nếu không tìm được S' thì S là tập sinh tối tiểu

- Lưu ý xét KGVT $\boxed{V = < S >}$

  ☞ Nếu S đltt thì S là tập sinh tối tiểu

  ☞ Nếu S pttt thì S là tập sinh chưa tối tiểu

CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTOR

- Cơ sở của KGVT là 1 tập sinh đltt của KGVT đó (tập sinh tối tiểu)

- Lưu ý xét KGVT $\boxed{V \neq \{O\}}$, khi đó

a/ V có ít nhất 1 cơ sở (nếu $|F| = +\infty$, nghĩa là số phần tử của F là vô hạn thì V có vô số cơ sở)

b/ giả sử V có 1 cơ sở là $\boxed{a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}}$ (có m vector)

☞ khi đó tất cả các cơ sở khác của V đều có đúng m vector

☞ đặt $m =$ số chiều của không gian V

= số lượng vector trong mỗi cơ sở của V

CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTOR

☐ Ký hiệu $\boxed{m = \dim_F V = \dim V}$ (dimension of V)

c/ giả sử V có 1 cơ sở a (gồm vô số vector) , khi đó các cơ sở khác của V có vô số vector

☞ Ta ghi $\boxed{\dim_F V = +\infty}$ (V là không gian vô hạn chiều)

☐ Ví dụ F^n có 1 cơ sở thông dụng là

$$\beta_0 = \{\varepsilon_1 = (1,0,0,\ldots,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \varepsilon_n = (0,\ldots,0,1)\}$$

vì β_0 đltt và

$$<\beta_0> = \{\alpha = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in F\}$$

CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTOR

- Hay $<\beta_0> = \{\alpha = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in F\}$
  $= F^n$

- Ta nói β_0 là <u>cơ sở chính tắc</u> của F^n

  ☞ vậy $\boxed{\dim_F F^n = n = |\beta_0|}$

- Ví dụ 2 tương tự $\boxed{F_n[x]}$ có cơ sở chính tắc là

$$\beta_0 = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$$ và $$\dim_F F_n[x] = n + 1$$

NHẬN DIỆN NHANH 1 CƠ SỞ TRONG F^n

a/ nếu $\boxed{n=1}$, nghĩa là $F^1 = F$ thì

$\forall \alpha \in F \setminus \{0\}$, ta có $\boxed{a = \{\alpha\}}$ là 1 cơ sở cho F^1

b/ nếu $\boxed{n=2}$, ứng với $F^2 = \{(a,b) \mid a,b \in F\}$

, và $\alpha_1, \alpha_2 \in F^2$ sao cho α_1 và α_2 có tọa độ không tỷ lệ

thì $\boxed{a = \{\alpha_1, \alpha_2\}}$ là 1 cơ sở của F^2

c/ nếu $\boxed{n \geq 2}$, và ta xét $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ (có n vector) trong F^n

NHẬN DIỆN NHANH 1 CƠ SỞ TRONG F^n

☐ Lập ma trận vuông, mỗi vector là 1 dòng

$$A_a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

☞ dòng 1

☞ dòng 2

☞ dòng n

☐ Nếu $\boxed{\det(A_a) \neq 0}$ thì a là 1 cơ sở của F^n

☐ Nếu $\boxed{\det(A_a) = 0}$ thì a không là 1 cơ sở của F^n

NHẬN DIỆN NHANH 1 CƠ SỞ TRONG F^n

- Ví dụ trong R^3 cho

$$a = \{\alpha_1 = (-3,1,0), \alpha_2 = (5,4,3), \alpha_3 = (9,1,5)\}$$

$$\beta = \{\alpha_1 = (-3,1,0), \alpha_2 = (5,4,3), \alpha_4 = (7,9,6)\}$$

☞ Lập $A_a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

NHẬN DIỆN NHANH 1 CƠ SỞ TRONG F^n

☐ Ví dụ (tt)

$$\Rightarrow |A_a| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 9 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 17 & 4 & 3 \\ 12 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & 3 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = -49 \neq 0$$

$$\& |A_\beta| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

☞ KL: $\boxed{a}$ là 1 cơ sở của R^3

$\boxed{\beta}$ không là cơ sở của R^3

NHẬN DIỆN CƠ SỞ KHI ĐÃ BIẾT SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN

- Xét KGVT V có $\boxed{\dim_F V = n}$, và tập hợp

$$\boxed{a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset V}$$ (a có đúng n vector)

- Khi đó

a là 1 cơ sở của V $\Leftrightarrow$ $< a >= V$

a là 1 cơ sở của V $\Leftrightarrow$ a độc lập tuyến tính

(thường dùng)

TÌM TẬP SINH CỦA KHÔNG GIAN PHỤ THUỘC THAM SỐ

- Ví dụ cho

$$W=\{X=(a+2b+c+2d,\ a-b-c+d,\ 2a-5b-4c+d,\ 4a+2b+6d)\in R^4 \mid a,b,c,d\in R\}$$

☞ CM $W \le R^4$ và chỉ ra 1 tập sinh S cho W

- Ta có

$$W=\{X=(a,a,2a,4a)+(2b,-b,-5b,2b)+(c,-c,-4c,0)+(2d,d,d,6d)\mid a,b,c,d\in R\}$$

$$=\{X=a(1,1,2,4)+b(2,-1,-5,2)+c(1,-1,-4,0)+d(2,1,1,6)\mid a,b,c,d\in R\}$$

TÌM TẬP SINH CỦA KHÔNG GIAN PHỤ THUỘC THAM SỐ

$$\Rightarrow W = \{X = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_2 \mid a,b,c,d \in R\}$$

, với
$$\begin{cases} \alpha_1 = (1,1,2,4) \\ \alpha_2 = (2,-1,-5,2) \\ \alpha_3 = (1,-1,-4,0) \\ \alpha_4 = (2,1,1,6) \end{cases}$$

$\Rightarrow W =< S >$, trong đó $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$

$$\Rightarrow W \le R^4$$

TÌM CƠ SỞ TỪ TẬP SINH

☐ Cho $\boxed{W = \langle S \rangle}$, với $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$

☞ tìm 1 cơ sở a cho W

☐ Lập ma trận

$$\boxed{A_a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}}$$

☞ dòng 1

☞ dòng 2

☞ dòng m

TÌM CƠ SỞ TỪ TẬP SINH

$$\boxed{A_S} \xrightarrow[\text{các cột}]{\text{bán chuẩn hóa tối đa}} \boxed{H} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \\ O \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{k dòng khác zero} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{các dòng zero (nếu có)} \end{matrix}$$

- Ta có $\boxed{a = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\}}$ là 1 cơ sở của W

, và $\boxed{\dim_F W = k}$ $(= |a|)$

TÌM CƠ SỞ TỪ TẬP SINH

☐ Ví dụ $W = \langle S \rangle$, với

$$S = \{\alpha_1 = (1,1,2,4), \alpha_2 = (2,-1,-5,2), \alpha_3 = (1,-1,-4,0), \alpha_4 = (2,1,1,6)\}$$

☞ tìm 1 cơ sở a cho W

☐ Ta lập

$$A_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(4)\to(4)-(2) \\ (2)\to(2)-2(1) \\ (3)\to(3)-(1)}}$$

TÌM CƠ SỞ TỪ TẬP SINH

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -6 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{(4)\to(4)+(3) \\ (3)\to(3)-\frac{2}{3}(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ O \\ O \end{pmatrix}$$

☞ W có cơ sở là

$$a = \{\gamma_1 = (1,1,2,4), \gamma_2 = (0,-3,-9,-6)\}$$

, và $\boxed{\dim_R W = |a| = 2}$

TÌM CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $\boxed{W = \{X \in R^n \mid AX = O\}}$

☐ Ta đã biết $\boxed{W \le R^n}$ (xem lại ở phần trước)

☞ Bước 1: giải hệ pttt $AX = O$

(tìm tất cả các nghiệm và các ẩn tự do)

☞ Bước 2: viết W thành không gian phụ thuộc tham số

(với tham số là các ẩn tự do của hệ trên)

☞ Bước 3: tìm 1 tập sinh S cho W

(giống như phần tìm tập sinh từ KG phụ thuộc tham số)

TÌM CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $W = \{X \in R^n \mid AX = O\}$

☞ Bước 4: giải thích S đltt để kết luận S chính là cơ sở a cần tìm

☐ Ví dụ tìm cơ sở a cho

$$W = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in R^5 \left| \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -8 & 12 \\ 3 & -1 & -4 & 7 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \right\}$$

TÌM CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $\boxed{W = \{X \in R^n \mid AX = O\}}$

☞ Trước hết, ta giải hệ $\boxed{AX = O}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & -8 & 12 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 7 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(4)\to(4)+(3) \\ (3)\to(3)+3(1) \\ (2)\to(2)-2(1)}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & -11 & 33 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(1)\to(1)-3(4) \\ (3)\to(3)-11(4) \\ (2)\to-\frac{1}{5}(2) \\ (4)\to(4)-(2)}]{}$$

TÌM CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $W = \{X \in R^n \mid AX = O\}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

☐ Nghiệm

$$\begin{cases} x_3 = a, x_4 = b, x_5 = c \\ x_1 = a - 2b + 2c \\ x_2 = b - a - 3c \end{cases}$$

☐ Vậy $W = \{X = (a - 2b + 2c, b - a - 3c, a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$

(không gian phụ thuộc tham số)

$$\Rightarrow W = \{X = a(1,-1,1,0,0) + b(-2,1,0,1,0) + c(2,-3,0,0,1) \mid a, b, c \in R\}$$

TÌM CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $\boxed{W = \{X \in R^n \mid AX = O\}}$

- Vậy $W = \{X = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 \mid a, b, c \in R\}$

$\Rightarrow W = \langle S \rangle$, với

$$S = \{\alpha_1 = (1,-1,1,0,0), \alpha_2 = (-2,1,0,1,0), \alpha_3 = (2,-3,0,0,1)\}$$

- Ta có S độc lập tuyến tính

(nghĩa là hệ $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = O \xrightarrow{\text{giải}} c_1 = c_2 = c_3 = 0$

☞ Vậy W có cơ sở là $a \equiv S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

, và $\dim_F W = |a| = 3$

TÌM CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $\boxed{W = \{Y = AX \mid X \in R^n\} \le R^m}$

$$\boxed{T = \{Z = XA \mid X \in R^m\} \le R^n}$$

☐ Với quy ước $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

☐ Đặt $Y_1 = A\varepsilon_1, Y_2 = A\varepsilon_2, \ldots, Y_n = A\varepsilon_n$

$$(\beta_0 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\})$$

☞ Ta có $W =< S >$, với $S = \{A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \ldots, A\varepsilon_n\}$

TÌM CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $\boxed{W = \{Y = AX \mid X \in R^n\} \leq R^m}$

$$\boxed{T = \{Z = XA \mid X \in R^m\} \leq R^n}$$

☞ Giải thích do $W = \{Y = AX \mid X = (a_1, \dots, a_n) \in R^n\}$

$$= \{Y = A(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in R\}$$

$$= \{Y = a_1(A\varepsilon_1) + a_2(A\varepsilon_2) + \dots + a_n(A\varepsilon_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in R\}$$

$$= \{Y = a_1Y_1 + a_2Y_2 + \dots + a_nY_n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in R\}$$

$\Rightarrow W = \langle S \rangle$, với $S = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$

☞ rồi từ tập sinh S, ta tìm được cơ sở a cho W

TÌM CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $W=\{Y=AX \mid X\in R^n\}\le R^m$

$$T=\{Z=XA \mid X\in R^m\}\le R^n$$

- Tương tự, ta đặt $Z_1=\varepsilon_1 A, Z_2=\varepsilon_2 A, \ldots, Z_m=\varepsilon_m A$

☞ Ta có $T=<S>$, với $S=\{\varepsilon_1 A, \varepsilon_2 A, \ldots, \varepsilon_n A\}$

$$=\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$$

- Ví dụ

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

$W=\{Y=AX \mid X\in R^5\}$

$T=\{Z=XA \mid X\in R^4\}$

TỌA ĐỘ VECTOR THEO CƠ SỞ

☐ Giả sử KGVT hữu hạn chiều V có cơ sở là $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$

☐ Với mỗi $\alpha \in V$, ta đã biết tồn tại duy nhất các số

$c_1, c_2, \ldots, c_m \in F$ thỏa

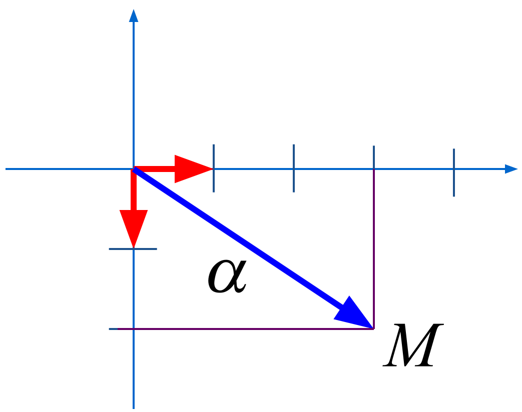
$$\boxed{\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_m\alpha_m}$$

☞ Ký hiệu $\boxed{[\alpha]_a = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}$ & gọi là tọa độ của $\boxed{\alpha}$ theo cơ sở a

(muốn tìm $c_1, c_2, \ldots, c_m$ thì ta phải giải hệ pttt)

TỌA ĐỘ VECTOR THEO CƠ SỞ

□ Ví dụ a/ $V = R^2$ có cơ sở $a = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$



, với $\begin{cases} \overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2} \\ \|\overrightarrow{e_1}\| = 1, \|\overrightarrow{e_2}\| = 1 \end{cases}$

☞ xét $\alpha = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$= 3\overrightarrow{e_1} + (-2)\overrightarrow{e_2}$

$$\Rightarrow [\alpha]_a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

& ngoài ra, V còn có cơ sở

$$\beta = \{\pi\overrightarrow{e_1}, -\sqrt{3}\overrightarrow{e_2}\} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3}{\pi}\overrightarrow{u_1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u_2} \qquad \Rightarrow [\alpha]_\beta = \begin{pmatrix} 3/\pi \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

TỌA ĐỘ VECTOR THEO CƠ SỞ

□ Ngoài ra, V còn có cơ sở khác là $\zeta = \{(\ln 3)\overrightarrow{e_2}, -\sqrt{7}\,\overrightarrow{e_1}\} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{2}{\ln 3}\overrightarrow{v_1} - \frac{3}{\sqrt{7}}\overrightarrow{v_2} \qquad \Rightarrow [\alpha]_\zeta = \begin{pmatrix} -2/\ln 3 \\ -3/\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

b/ $V = R^3$ có cơ sở

$$a = \{\alpha_1 = (-3,2,1), \alpha_2 = (1,5,0), \alpha_3 = (-2,-4,1)\}$$

☞ xét $\gamma \in R^3$ thỏa $[\gamma]_a = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ ☞ hỏi $\gamma = ???$

TỌA ĐỘ VECTOR THEO CƠ SỞ

- Ta có $$\begin{aligned}\gamma &= 2\alpha_1 - 7\alpha_2 + 5\alpha_3 \\ &= 2(-3,2,1) - 7(1,5,0) + 5(-2,-4,1) \\ &= (-23,-51,7)\end{aligned}$$

- Cho $\boxed{\alpha = (1,4,-2) \in R^3}$ ☞ hỏi $[\alpha]_a = ???$

☞ Đặt $[\alpha]_a = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$

$$\Rightarrow (1,4,-2) = c_1(-3,2,1) + c_2(1,5,0) + c_3(-2,-4,1)$$

TỌA ĐỘ VECTOR THEO CƠ SỞ

$$\Rightarrow \begin{cases} -3c_1 + c_2 - 4c_3 = 1 \\ 2c_1 + 5c_2 - 4c_3 = 4 \\ c_1 + c_3 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{giải}} \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \\ c_3 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\alpha]_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

- Giả sử V có 2 cơ sở $\boxed{a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}}$ $\boxed{\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}}$
- Lấy các tọa độ $[\beta_1]_a$, $[\beta_2]_a$ $\ldots$ $[\beta_m]_a$

  (giải m hệ pt, mỗi hệ có m ẩn và m phương trình)
- Lập ma trận $\boxed{P = ([\beta_1]_a \quad [\beta_2]_a \quad [\beta_3]_a \quad [\beta_4]_a)}$ $(m \times m)$
- Ký hiệu $\boxed{P = P(a \to \beta)}$ & gọi là ma trận chuyển cơ sở từ a qua β, và ta luôn có P khả nghịch

MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

☐ Ví dụ biết rằng V có 2 cơ sở là $\boxed{a = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}}$

, và $\boxed{\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}}$

, đồng thời

$$\begin{cases} \beta_1 = 7\alpha_1 - \alpha_2 + 9\alpha_3 \\ \beta_2 = \sqrt{5}\alpha_2 - \pi\alpha_3 \\ \beta_3 = -4\alpha_1 + (\ln 6)\alpha_2 + (2/7)\alpha_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\beta_1]_a = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}, [\beta_2]_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ -\pi \end{pmatrix}, [\beta_3]_a = \begin{pmatrix} -4 \\ \ln 6 \\ 2/7 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

$$\Rightarrow P(a \to \beta) = ([\beta_1]_a \quad [\beta_2]_a \quad [\beta_3]_a)$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 & -4 \\ -1 & \sqrt{5} & \ln 6 \\ 9 & -\pi & 2/7 \end{pmatrix}$$

TÍNH CHẤT

dễ tìm

a/ $P(a \to a) = I_m$

b/ $P(\beta \to a) = [P(a \to \beta)]^{-1}$

khó tìm trực tiếp

c/ $P(a \to \beta) = \boxed{P(a \to \zeta)} . \boxed{P(\zeta \to \beta)}$

CÔNG THỨC ĐỔI TỌA ĐỘ

- Giả sử V có 2 cơ sở $\boxed{a}$ và $\boxed{\beta}$ $(\dim_F V = m)$
- Xét $\alpha \in V$ tùy ý, thì

$$\boxed{[\alpha]_a = P(a \to \beta).[\alpha]_\beta}$$

- Ví dụ xét trong $V = R^3$

a/ giải thích

$$a = \{\alpha_1 = (1,2,-3), \alpha_2 = (3,2,-4), \alpha_3 = (2,-1,0)\}$$
$$\beta = \{\beta_1 = (3,1,0), \beta_2 = (-1,-1,2), \beta_3 = (1,1,1)\}$$

là 2 cơ sở của R^3

CÔNG THỨC ĐỔI TỌA ĐỘ

☞ Ta lập $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, và $B_\beta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

☞ tính $\det(A_a) \neq 0$ và $\det(B_\beta) \neq 0$

☞ suy ra $\boxed{a}$ và $\boxed{\beta}$ là 2 cơ sở của R^3

b/ ta có $P(\beta_0 \to a) = ([\alpha_1]_{\beta_0} \quad [\alpha_2]_{\beta_0} \quad [\alpha_3]_{\beta_0})$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

CÔNG THỨC ĐỔI TỌA ĐỘ

☐ Tương tự $P(\beta_0 \to \beta) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = Q$

$$\Rightarrow P(a \to \beta) = P(a \to \beta_0).P(\beta_0 \to \beta)$$
$$= P^{-1}.Q$$

☐ Tiếp theo xét $\alpha \in R^3$ và có $[\alpha]_\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☞ tính α

☞ Ta có $\alpha = 5\beta_1 - 2\beta_2 - 1\beta_3$

$$= 5(3,1,0) - 2(-1,-1,2) - (1,1,1) = (16,6,-5)$$

CÔNG THỨC ĐỔI TỌA ĐỘ

☐ Giả sử lúc này cho thêm $\boxed{\gamma = (4,9,-6) \in R^3}$ ☞ hỏi $[\gamma]_a = ???$

☞ Ta có $$[\gamma]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\gamma]_a = P(a \to \beta_0)[\gamma]_{\beta_0}$$

$$= P^{-1}[\gamma]_{\beta_0} = P^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

CÔNG THỨC ĐỔI TỌA ĐỘ

☐ Xét $\delta \in R^3$, có $[\delta]_a = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ ☞ tìm $[\delta]_\beta = ???$

☞ Ta có $[\delta]_\beta = P(\beta \to a)[\delta]_a$

$$= P(\beta \to \beta_0).P(\beta_0 \to a)\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= Q^{-1}P\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$