ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Chương 5 – ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

ThS. LÊ HOÀNG TUẤN

ĐẠI SỐ TT

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Xét $V, W, \ldots$ là các KGVT trên *F*

  $V_n, W_m, \ldots$ là các KGVT trên *F* có số chiều là n, m

- Lúc này, ánh xạ $f : V \to W$

  đgl ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa đồng thời 2 điều kiện

$$\begin{cases} f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) \\ f(c\alpha) = cf(\alpha) \end{cases}, \forall \alpha, \beta \in V; \forall c \in F$$

$$\Leftrightarrow f(c\alpha+\beta) = cf(\alpha) + f(\beta), \forall \alpha, \beta \in V; \forall c \in F$$

- Ký hiệu $\boxed{L(V,W) = \{f : V \to W \mid f \quad là \quad axtt\}}$

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

☐ Lưu ý

$\boxed{f}$ không là axtt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists \alpha, \beta \in V : f(\alpha+\beta) \neq f(\alpha)+f(\beta) \\ \exists c \in F, \exists \alpha \in V : f(c\alpha) \neq cf(\alpha) \end{array}\right.$

NHẬN DIỆN NHANH $f \in L(R^n, R^m)$

☐ Cho $f : R^n \to R^m$, lúc này, nếu có $\boxed{A \in M_{n\times m}(R)}$

sao cho $\boxed{f(X) = XA}$ $\forall X \in R^n$

☞ thì f là axtt

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

☐ Ví dụ $f : R^3 \to R^2$

$$(x, y, z) \mapsto (2x - 7y + 3z, 5x + y - 9z)$$

☞ xét $(x, y, z) = X \in R^3$

☞ ta có $$f(X) = \underbrace{(x \quad y \quad z)}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 1 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}}_{A}$$

☞ KL: $\boxed{f}$ là axtt

TÍNH CHẤT CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Xét $\boxed{f \in L(V,W)}$, khi đó

a/ $f(\mathrm{O}_V) = \mathrm{O}_W$

b/ $f(-\alpha) = -f(\alpha), \forall \alpha \in V$ (chọn $c = -1$)

c/ ảnh của 1 tổ hợp tuyến tính (thtt) qua ánh xạ f sẽ bằng thtt của các ảnh tương ứng

$$\forall c_1, c_2, \dots, c_k \in F; \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in V$$

$$\underbrace{f}_{\text{ảnh}}(\underbrace{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_k\alpha_k}_{\text{tổ hợp tuyến tính}}) = \underbrace{c_1 f(\alpha_1) + c_2 f(\alpha_2) + \dots + c_k f(\alpha_k)}_{\text{tổ hợp các ảnh}}$$

TÍNH CHẤT CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

☐ Ví dụ $f \in L(R^2, R^3)$ có

$$\begin{cases} f(\alpha_1) = (-1,2,5) \\ f(\alpha_2) = (0,3,-4) \\ f(\alpha_3) = (2,-3,1) \end{cases}$$

☞ tính $f(5\alpha_1 - 2\alpha_2 + 8\alpha_3)$

☐ Ta có

$$f(5\alpha_1 - 2\alpha_2 + 8\alpha_3) = 5f(\alpha_1) - 2f(\alpha_2) + 8f(\alpha_3)$$

$$= (-5,10,25) + (0,-6,8) + (16,-24,8)$$

$$= (11,-20,41)$$

XÂY DỰNG ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH KHI BIẾT ẢNH CỦA 1 CƠ SỞ

- Xét KGVT $\boxed{V_n}$ có 1 cơ sở $\boxed{a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}}$, và KGVT W trên F

- Chọn trước $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ tùy ý $\in W$, khi đó

☞ Tồn tại duy nhất $f : V \to W$ thỏa axtt

$$\begin{cases} f(\alpha_1) = \beta_1 \\ f(\alpha_2) = \beta_2 \\ \vdots \\ f(\alpha_n) = \beta_n \end{cases}$$

XÂY DỰNG ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH KHI BIẾT ẢNH CỦA 1 CƠ SỞ

- Ánh xạ f được xác định như sau

$\forall \alpha \in V_n$ tìm tọa độ $\boxed{[\alpha]_a = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}$

$$(\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = f(c_1\alpha_1) + f(c_2\alpha_2) + \cdots + f(c_n\alpha_n)$$

$$= c_1 f(\alpha_1) + c_2 f(\alpha_2) + \cdots + c_n f(\alpha_n)$$

$$= c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n$$

XÂY DỰNG ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH KHI BIẾT ẢNH CỦA 1 CƠ SỞ

□ Ví dụ R^3 có cơ sở $a = \{\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (0,1,1), \alpha_3 = (0,0,1)\}$

, và trong R^4 chọn trước $\begin{cases} \beta_1 = (-3,1,0,2) \\ \beta_2 = (2,-1,5,0) \\ \beta_3 = (1,0,9,-7) \end{cases}$

$\Rightarrow \exists! f \in L(R^3, R^4)$ thỏa

$$f(\alpha_1) = \beta_1; f(\alpha_2) = \beta_2; f(\alpha_3) = \beta_3$$

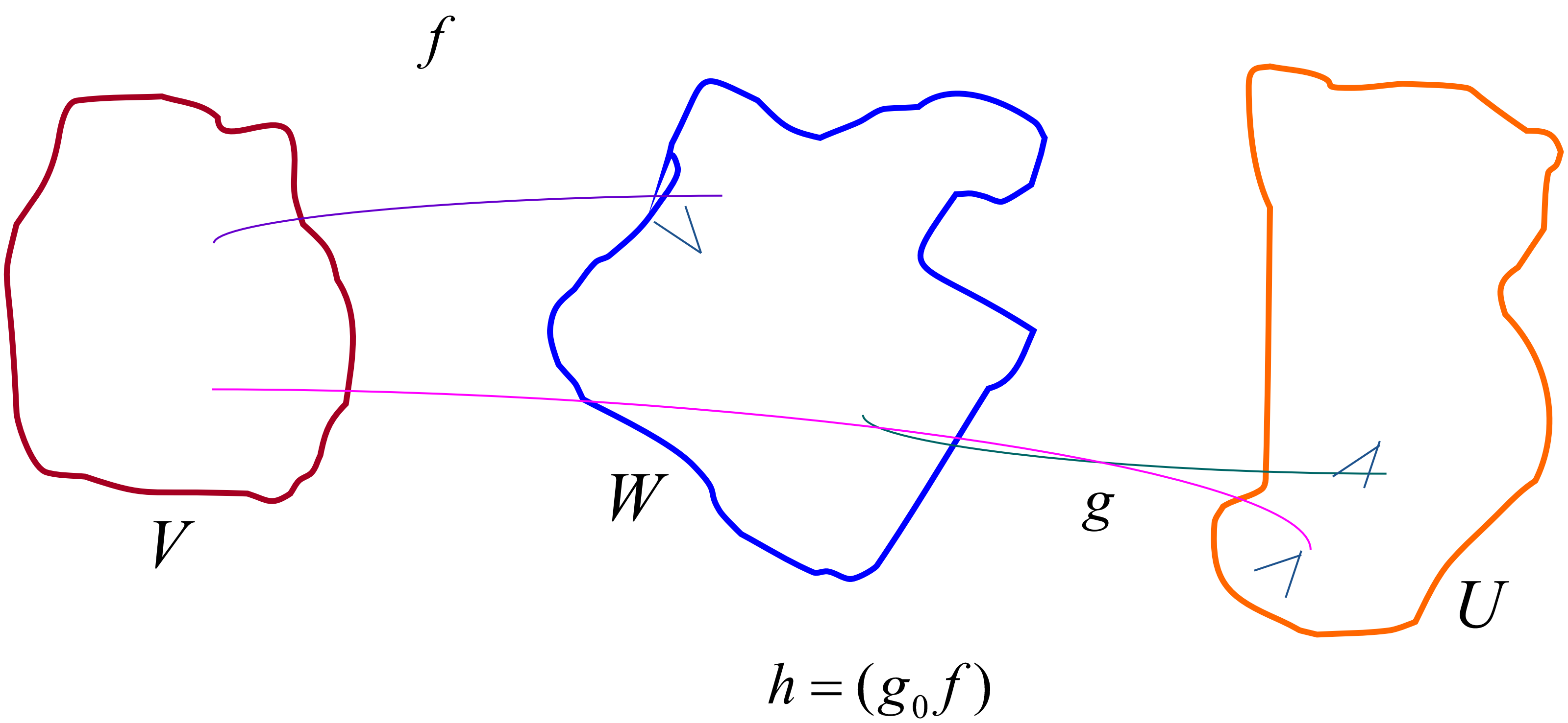
☞ xác định $\boxed{f}$, nghĩa là $\forall \alpha = (u, v, w) \in R^3$

$$\Rightarrow f(\alpha) = f(u, v, w) = ???$$

TÍCH CỦA 2 ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Cho $\boxed{f \in L(V,W)}$, và $\boxed{g \in L(W,U)}$, khi đó

$$\boxed{h = (g_0 f) \in L(V,U)}$$

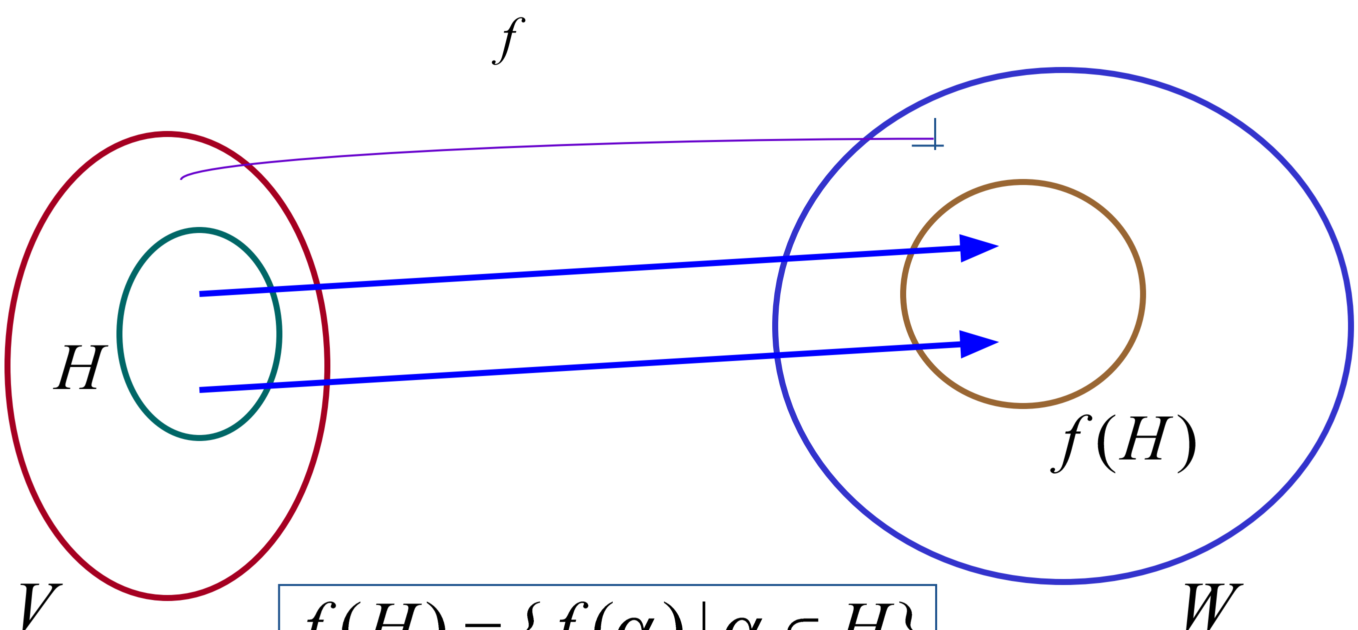


ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Cho $\boxed{f \in L(V,W)}$, và $\begin{cases} H \le V \\ K \le W \end{cases}$ (KGVT con)

- Khi đó

a/

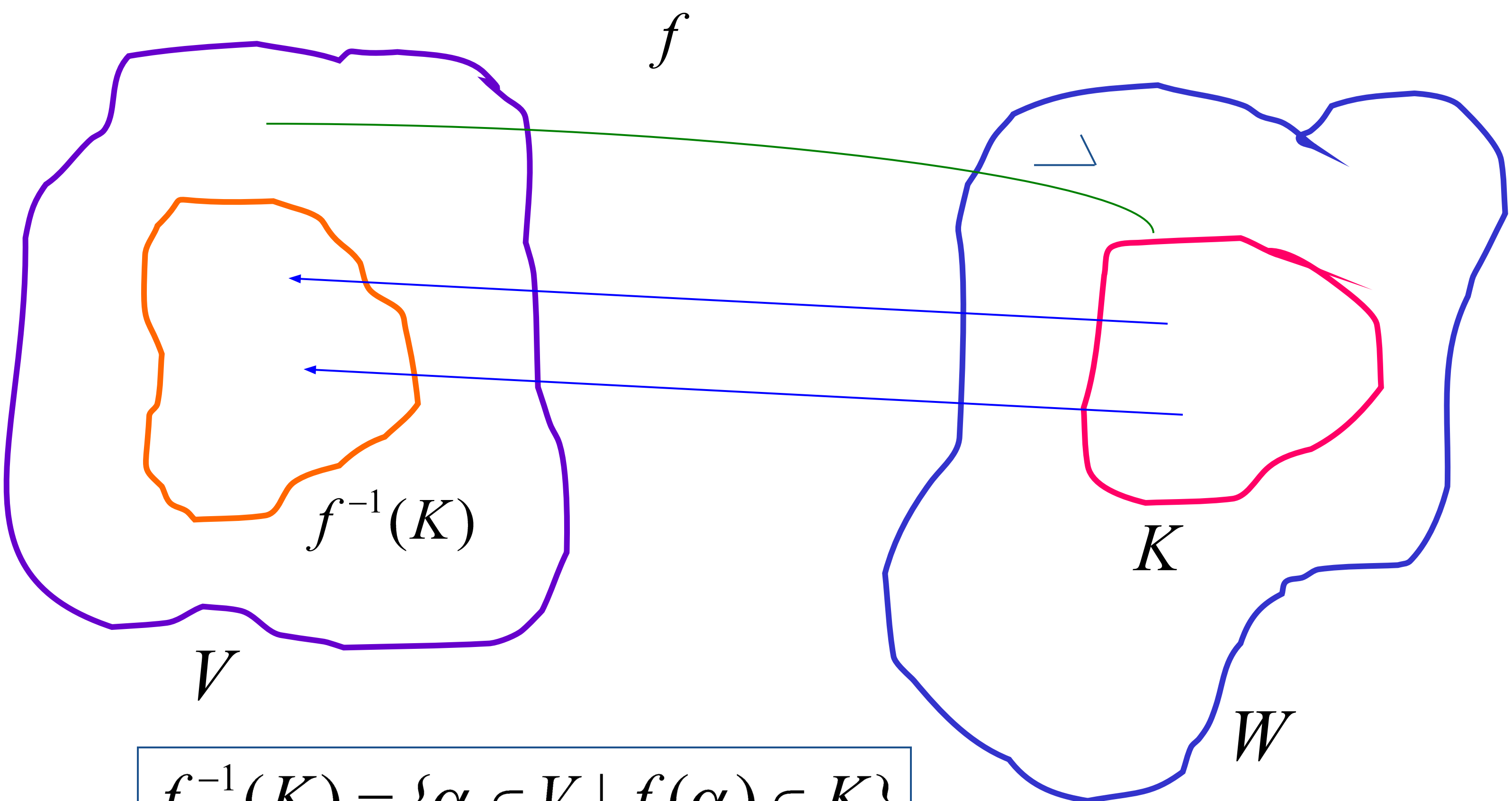


$$\boxed{f(H) = \{f(\alpha) \mid \alpha \in H\}}$$

☞ ta luôn có $\boxed{f(H) \le W}$

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

b/



$$\boxed{f^{-1}(K)=\{\alpha\in V \mid f(\alpha)\in K\}}$$

☞ ta luôn có $\boxed{f^{-1}(K)\le V}$

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

c/ kết luận ảnh và ảnh ngược các KGVT con (qua axtt)

cũng là KG con

ÁP DỤNG CỤ THỂ CHO TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT H = V

□ Xét $\boxed{f \in L(V,W)}$

a/ chọn $\boxed{H = V(\leq V)}$ thì $\boxed{f(V) \leq W}$

☞ Ký hiệu $\boxed{f(V) = \mathrm{Im}(f)}$

= không gian (toàn bộ) ảnh của axtt f

(Image of f)

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

b/ chọn $\boxed{a}$ là 1 cơ sở của V thì $\boxed{f(a)}$ là 1 tập sinh của f(V)

chưa chắc đltt

c/ khi $\boxed{V = V_n}$ (hữu hạn chiều) có cơ sở $\boxed{a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}}$

thì $\boxed{f(V) = \mathrm{Im}(f) = < f(a) >}$

$$= < \{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)\} >$$

☞ Tiếp theo, ta mô tả các vector $\beta \in \mathrm{Im}(f)$

☞ Sau đó tìm được 1 cơ sở của Im(f) từ tập sinh $\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)\}$ của nó

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Ví dụ $f : R^2 \to R^3$

$$(x, y) \mapsto (5x + y, 3y - 2x, 4x - 7y)$$

☞ Kiểm chứng $f \in L(R^2, R^3)$ (dễ dàng)

☞ Tìm Im(f) và 1 cơ sở cho Im(f)

Trước tiên, ta chọn cơ sở $a = \beta_0 = \{\varepsilon_1 = (1,0), \varepsilon_2 = (0,1)\}$ của R^2

$$\Rightarrow f(a) = \{f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2)\}$$

mà

$$\Rightarrow f(a) = \{\beta_1 = (5,-2,4), \beta_2 = (1,3,-7)\}$$

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Ta có $\operatorname{Im}(f) = < f(a) > = < (5,-2,4), (1,3,-7) >$
- Chọn $\beta \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 \in R : \beta = c_1\beta_1 + c_2\beta_2$

  $\Leftrightarrow$ hệ $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 = \beta$ có nghiệm
- Đặt $\beta = (u, v, w) \in \operatorname{Im}(f)$

  $\Rightarrow c_1(5,-2,4) + c_2(1,3,-7) = (u, v, w)$ có nghiệm

  (ẩn là c_1, c_2)

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & u \\ -2 & 3 & v \\ 4 & -7 & w \end{array}\right)$$ có nghiệm

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

☐ Ta có

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & u \\ -2 & 3 & v \\ 4 & -7 & w \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(1)\to(1)-(3)\\(3)\to(3)+2(2)\\(2)\to(2)+2(1)}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 8 & u-w \\ 0 & 19 & v+2u-2w \\ 0 & -1 & w+2v \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{(1)\to(1)+8(3)\\(2)\to(2)+19(3)\\(3)\to-(3)}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & u+7w+16v \\ 0 & 0 & 2u+39v+17w \\ 0 & 1 & -w-2v \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & u+7w+16v \\ 0 & 1 & -w-2v \\ 0 & 0 & 2u+39v+17w \end{array}\right)$$

☞ Hệ này có nghiệm

$$\Leftrightarrow 2u+39v+17w=0$$

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Vậy $\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{\beta = (u,v,w) \in R^3 \mid 2u + 39v + 17w = 0\}$

- Tiếp theo, ta tìm 1 cơ sở cho không gian Im(f)

$$\mathrm{Im}(f) = <\{\beta_1 = (5,-2,4), \beta_2 = (1,3,-7)\}>$$

tọa độ không tỷ lệ

$\Rightarrow \{\beta_1, \beta_2\}$ là tập sinh đltt của Im(f)

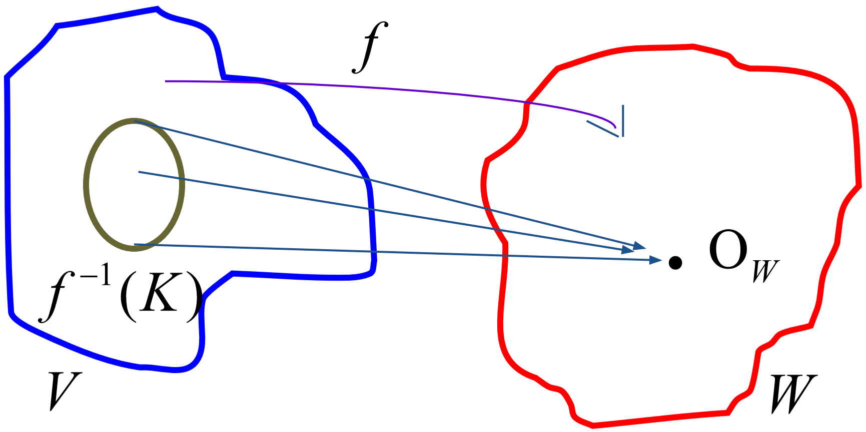
$\Rightarrow \{\beta_1, \beta_2\}$ là một cơ sở của Im(f)

, và ta có $\boxed{\dim_R \mathrm{Im}(f) = 2}$

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

ÁP DỤNG CHO TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT K = {O}

- Xét $f \in L(V, W)$
- Chọn $K = \{O_W\} \ (\leq W)$
- Khi đó $f^{-1}(K) \leq V$



- Đặt $\boxed{Ker(f) = f^{-1}(K) = f^{-1}(\{O_W\})}$

$$= \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = O_W\}$$

kernel

& đgl không gian hạt nhân của f

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

☐ Vậy $Ker(f) = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = O_W\}$

= không gian nghiệm của pt $\boxed{f(\alpha) = O_W}$

☐ Ta tìm 1 cơ sở cho Ker(f)

$\Leftrightarrow$ tìm cơ sở cho không gian nghiệm của pt $f(\alpha) = O_W$

☐ Ví dụ $f : R^4 \to R^4$

$$(x,y,z,t) \mapsto (x+2y+4z-7t, -3x-2y+5t, 2x+y-z-2t, 3x+y-3z-t)$$

☞ Kiểm chứng $f \in L(R^4, R^4)$ (dễ dàng)

☞ Tìm Ker(f) và 1 cơ sở cho Ker(f)

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Ta có $Ker(f) = f^{-1}(\{O\}) = \{\alpha \in R^4 \mid f(\alpha) = O\}$

$$= \{\alpha = (x,y,z,t) \in R^4 \mid f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)\}$$

$$= \left\{ \alpha = (x,y,z,t) \in R^4 \middle| \begin{array}{r} x+2y+4z-7t=0 \\ -3x-2y+5t=0 \\ 2x+y-z-2t=0 \\ 3x+y-3z-t=0 \end{array} \right\}$$

(không gian nghiệm của 1 hệ pttt thuần nhất)

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Ta chuyển sang giải hệ

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)\to(4)-3(1)]{\substack{(2)\to(2)+3(1) \\ (3)\to(3)-2(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & -16 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 0 \\ 0 & -5 & -15 & 20 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

☐ Nghiệm $\begin{cases} x_3 = a \\ x_4 = b \\ x_1 = 2a - b \\ x_2 = 4b - 3a \end{cases} ; a, b \in R$

$$\Rightarrow Ker(f) = \{\alpha = (2a - b, 4b - 3a, a, b) \mid a, b \in R\}$$

$$= \{\alpha = a\underbrace{(2,-3,1,0)}_{\alpha_1} + b\underbrace{(-1,4,0,1)}_{\alpha_2} \mid a, b \in R\}$$

tọa độ không tỷ lệ

$\Rightarrow Ker(f) = < a >$, với

$$a = \{\alpha_1 = (2,-3,1,0), \alpha_2 = (-1,4,0,1)\}$$

$\Rightarrow a$ là cơ sở của Ker(f) , và $\boxed{\dim_R Ker(f) = 2}$

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

☞ Tìm 1 cơ sở cho không gian Im(f)

- Trước hết, ta chọn cơ sở chính tắc $\boxed{\beta_0 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}}$

  thì $\mathrm{Im}(f) = <\{f(\beta_0)\}>$

- Ta có $\{f(\beta_0)\} = \{f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3), f(\varepsilon_4)\}$, với

$$\begin{cases} \beta_1 = f(\varepsilon_1) = f(1,0,0,0) = (1,-3,2,3) \\ \beta_2 = f(\varepsilon_2) = f(0,1,0,0) = (2,-2,1,1) \\ \beta_3 = f(\varepsilon_3) = f(0,0,1,0) = (4,0,-1,-3) \\ \beta_4 = f(\varepsilon_4) = f(0,0,0,1) = (-7,5,-2,-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Im}(f) = <\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}>}$$

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

□ Lập ma trận

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 1 & 1\\ 4 & 0 & -1 & -3\\ -7 & 5 & -2 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[(4)\to(4)+7(1)]{\substack{(3)\to(3)-2(2)\\(2)\to(2)-2(1)}}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -3 & -5\\ 0 & 4 & -3 & -5\\ 0 & -16 & 12 & 20\end{pmatrix}\xrightarrow[(4)\to(4)+4(2)]{(3)\to(3)-(2)}\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 3\\ 0 & 4 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

□ Vậy Im(f) có 1 cơ sở là $\beta=\{\gamma_1=(1,-3,2,3),\gamma_2=(0,4,-3,-5)\}$

ẢNH VÀ ẢNH NGƯỢC CÁC KGVT CON QUA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

- Và lúc này $\boxed{\dim_R \operatorname{Im}(f) = 2}$

- Từ đó, ta có thể mô tả không gian Im(f)

$$\delta = (x, y, z, t) \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \delta \in < \{\gamma_1, \gamma_2\} >$$

$\Leftrightarrow$ hệ $\delta = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2$ có nghiệm thực

$\Leftrightarrow c_1(1,-3,2,3) + c_2(0,4,-3,-5) = (x, y, z, t)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -3 & 4 & y \\ 2 & -3 & z \\ 3 & -5 & t \end{array}\right)$$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đk của x,y,z,t ???

(các đk của x,y,z,t)

- Vậy

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \{\delta = (x, y, z, t) \in R^4 \mid \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}}$$

LƯU Ý

- Xét $\boxed{f \in L(V,W)}$, với $\boxed{\dim_F V = n}$

thì khi đó $\boxed{\dim_F Ker(f) + \dim_F \operatorname{Im}(f) = n}$

ĐẶC TRƯNG CỦA AXTT ĐƠN ÁNH

- Xét $f \in L(V,W)$
- Khi đó, các phát biểu sau đây là tương đương

a/ f đơn ánh

b/ $Ker(f) = \{O\}$ (nghĩa là pt $f(X) = O$ có nghiệm duy nhất $X = O$)

ĐẶC TRƯNG CỦA AXTT ĐƠN ÁNH

c/ $\forall g \quad đltt \quad \in V$, thì $f(g) \quad đltt \quad \in W$

(nghĩa là f bảo toàn tính đltt)

d/ $\exists$ cơ sở $\boxed{a \subset V}$, thì $\boxed{f(a) \quad đltt \quad \subset W}$

(nghĩa là f bảo toàn tính đltt của 1 cơ sở nào đó)

□ Ví dụ

$$f : R_1[x] \to R^4$$

$$(a + bx) \mapsto (2a - b, 7b - 5a, 3a + 8b, -4a - 9b)$$

☞ Kiểm tra f đơn ánh

□ Ta sử dụng tính chất d/ ⇨ a/

ĐẶC TRƯNG CỦA AXTT ĐƠN ÁNH

- Xét cơ sở $\boxed{a = \{1, x\}}$ của $R_1[x]$

$$\Rightarrow f(a) = \{f(1), f(x)\} = \{\alpha_1 = (2,-5,3,-4), \alpha_2 = (-1,7,8,-9)\}$$

không tỷ lệ

$$\Rightarrow f(a) \quad đltt$$

- KL: f đơn ánh

ĐẶC TRƯNG CỦA AXTT TOÀN ÁNH

- Xét $f \in L(V,W)$
- Khi đó, các phát biểu sau đây là tương đương

a/ f toàn ánh

b/ $\forall \varphi \subset V : V = <\varphi> \Rightarrow W = <f(\varphi)>$

(f bảo toàn tính sinh)

c/ $\exists$ cơ sở $\boxed{a \subset V}$, thì $\boxed{<f(a)> = W}$

(ảnh của 1 cơ sở nào đó sinh ra không gian sau)

- Ví dụ

$$f : Q_3[x] \to Q_2[x]$$
$$\varphi(x) \mapsto -3\varphi'(x)$$

☞ Hỏi f có là axtt toàn ánh ???

ĐẶC TRƯNG CỦA AXTT TOÀN ÁNH

- Xét cơ sở $\boxed{a = \{1, x, x^2, x^3\}}$ của $Q_3[x]$

$$\Rightarrow f(a) = \{f(1), f(x), f(x^2), f(x^3)\}$$
$$= \{O, -3, -6x, -9x^2\}$$

$$\Rightarrow f(a) = Q_2[x]$$
$$(do \quad c_1(O) + c_2(-3) + c_3(-6x) + c_4(-9x^2) = Q_2[x])$$

- KL: f là toàn ánh

ĐẶC TRƯNG CỦA AXTT SONG ÁNH

☐ Xét $f \in L(V,W)$

☐ Khi đó, các phát biểu sau đây là tương đương

a/ f song ánh

b/ $\forall$ cơ sở $\boxed{a \subset V}$, thì $\boxed{f(a)}$ là cơ sở của W

(f bảo toàn cơ sở)

c/ $\exists$ cơ sở $\boxed{a \subset V}$ thì $\boxed{f(a)}$ là cơ sở của W

(ảnh của 1 cơ sở nào đó là cơ sở của KG sau)

☐ Lưu ý nếu $f \in L(V,W)$ là song ánh thì ánh xạ ngược

$$\boxed{f^{-1} \in L(W,V)}$$

(f^{-1} cũng là axtt)

ĐẶC TRƯNG CỦA AXTT SONG ÁNH

□ Ví dụ
$$f : R^2 \to R_1[x]$$
$$(u,v) \mapsto (2u-3v)+(2v-u)x$$

☞ CM: f song ánh

□ Xét $a = \{\varepsilon_1 = (1,0), \varepsilon_2 = (0,1)\}$ là 1 cơ sở của R^2

$$\Rightarrow f(a) = \{f(\varepsilon_1) = 2 - x, f(\varepsilon_2) = 2x - 3\}$$
$$\Rightarrow f(a) \subset R_1[x]$$

2 chiều

có 2 vector

□ Tiếp theo, ta giải thích f(a) đltt

□ Xét hệ thức $c_1 f(\varepsilon_1) + c_2 f(\varepsilon_2) = 0$

ĐẶC TRƯNG CỦA AXTT SONG ÁNH

$$\Rightarrow c_1(2-x)+c_2(2x-3)=0$$

$$\Rightarrow (2c_1-3c_2)+(2c_2-c_1)x=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_1-3c_2=0 \\ 2c_2-c_1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow c_1=c_2=0$$

$\Rightarrow f(a)$ *đltt* $\Rightarrow f(a)$ là 1 cơ sở của $R_1[x]$

- KL: f là song ánh
- Viết ánh xạ ngược $\boxed{f^{-1}}$
  - ☞ Xét $(a+bx)\in R_1[x]$
  - ☞ Giải pt $f(u,v)=a+bx$ (u, v là ẩn số)

ĐẶC TRƯNG CỦA AXTT SONG ÁNH

$$\Rightarrow (2u-3v)+(2v-u)x = a+bx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2u-3v=a \\ 2v-u=b \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} u=2a+3b \\ v=a+2b \end{cases}$$

☐ KL: $f^{-1} : R_1[x] \to R^2$

$$(a+bx) \mapsto (u,v)=(2a+3b, a+2b)$$

MỆNH ĐỀ

☐ Xét $f \in L(V_n, W_m)$ $\boxed{(\dim_F V_n = n; \dim_F W_m = m)}$

☞ Nếu f là đơn ánh thì $\boxed{n \le m}$

ĐẶC TRƯNG CỦA AXTT SONG ÁNH

☞ Suy ra, nếu $\boxed{n > m}$ thì f không là đơn ánh

☞ Nếu f là toàn ánh thì $\boxed{n \geq m}$

(suy ra, nếu n < m thì f không toàn ánh)

☞ Nếu f song ánh thì n=m

(suy ra, nếu n ≠ m thì f không song ánh)

☞ Giả sử n = m; khi đó

f đơn ánh ⇔ f toàn ánh ⇔ f song ánh

MA TRẬN BIỂU DẪN AXTT

- Xét $\boxed{f \in L(V_n, W_m)}$, trong đó

V_n có cơ sở $\boxed{a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}}$

W_m có cơ sở $\boxed{\beta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}}$

- Xác định ảnh $f(a) = \{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)\}$
- Lấy tọa độ của $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)$ theo cơ sở $\boxed{\beta}$
- Đặt

$$\boxed{[f]_{a,\beta} = \left([f(\alpha_1)]_\beta \quad [f(\alpha_2)]_\beta \quad \ldots \quad [f(\alpha_n)]_\beta\right)}$$

và gọi là ma trận biểu diễn axtt theo cặp cơ sở a và β

MA TRẬN BIỂU DỄN AXTT

☐ Lưu ý nếu $V_n \equiv W_m$, và $a \equiv \beta$ thì $\boxed{[f]_{a,\beta} \equiv [f]_a}$

☐ Ví dụ

$$f : R^3 \to R^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (2x - y + z, 4y - 5x + 7z)$$

R^3 có cơ sở $a = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$

R^2 có cơ sở $\beta = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\}$

☞ Hỏi $[f]_{a,\beta} = ???$

☐ Ta có

$$f(a) = \{f(\varepsilon_1) = (2,-5), f(\varepsilon_2) = (-1,4), f(\varepsilon_3) = (1,7)\}$$

$$\Rightarrow [f(\varepsilon_1)]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}; [f(\varepsilon_2)]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}; [f(\varepsilon_3)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN BIỂU DỄN AXTT

$$\Rightarrow [f]_{a,\beta} = \left([f(\varepsilon_1)]_\beta \quad [f(\varepsilon_2)]_\beta \quad [f(\varepsilon_3)]_\beta \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 3}(Q)$$

TỌA ĐỘ CỦA ẢNH THEO CƠ SỞ

$\forall \alpha \in V_n$ thì $\boxed{[f(\alpha)]_\beta = [f]_{a,\beta}[\alpha]_a}$

gọi là tọa độ của ảnh $\boxed{f(\alpha)}$ (theo cơ sở β)

(tính theo tọa độ của biến α theo cơ sở a)

TỌA ĐỘ CỦA ẢNH THEO CƠ SỞ

- Ví dụ R^2 có cơ sở $a = \{\alpha_1 = (-3,2), \alpha_2 = (-2,1)\}$

  R^3 có cơ sở

$$\beta = \{\beta_1 = (1,-1,2), \beta_2 = (-3,0,1), \beta_3 = (2,5,-3)\}$$

- Cho $f \in L(R^2, R^3)$ có

$$[f]_{a,\beta} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

☞ Tìm biểu thức của f

- Gợi ý xét $\alpha = (u,v) \in R^2$ ⇨ Tìm $f(\alpha) = f(u,v) = ??$
- Trước hết, tìm $[\alpha]_a = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow [f(\alpha)]_\beta = [f]_{a,\beta}[\alpha]_a$

MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TỔNG & ÁNH XẠ TÍCH

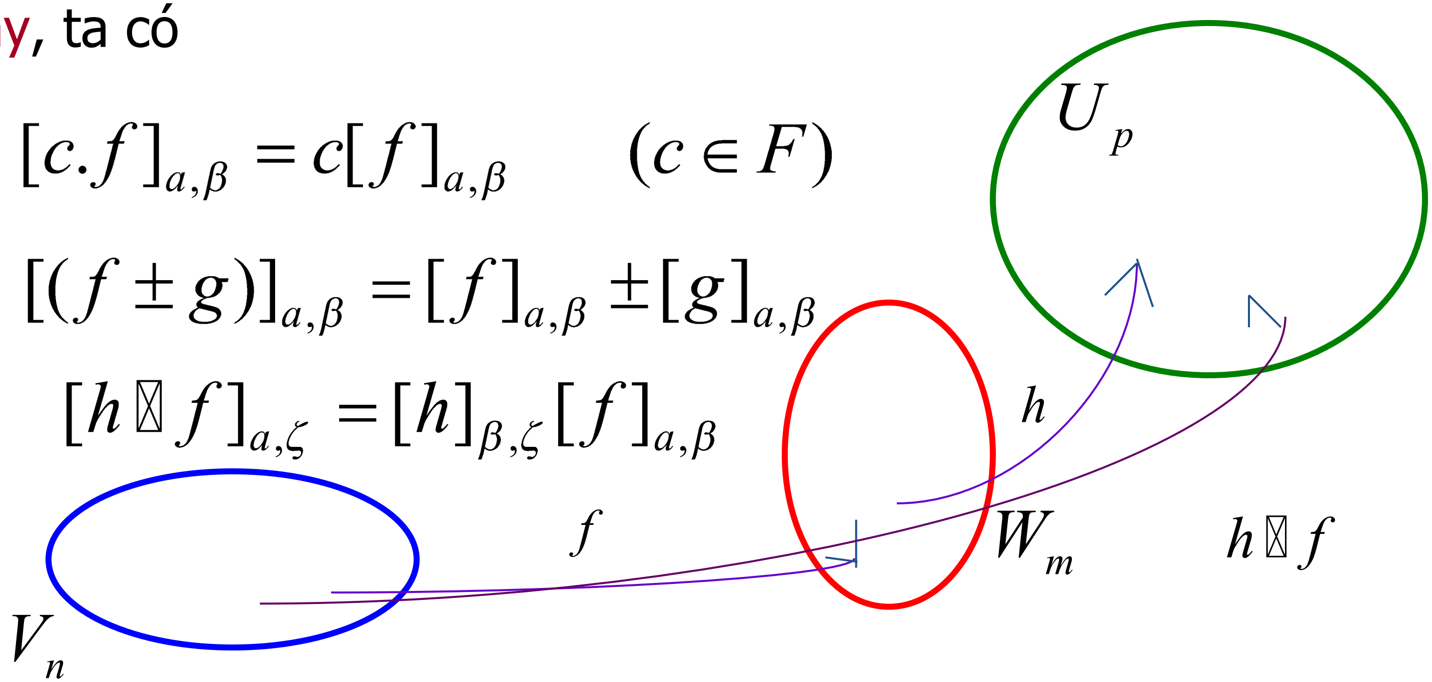
- Cho $\begin{cases} f, g \in L(V_n, W_m) \\ h \in L(W_m, U_p) \end{cases}$, trong đó $\begin{cases} V_n & \text{có cơ sở} & a \\ W_m & \text{...........} & \beta \\ U_p & \text{...........} & \zeta \end{cases}$

- Lúc này, ta có

a/ $[c.f]_{a,\beta} = c[f]_{a,\beta} \qquad (c \in F)$

b/ $[(f \pm g)]_{a,\beta} = [f]_{a,\beta} \pm [g]_{a,\beta}$

c/ $[h \circ f]_{a,\zeta} = [h]_{\beta,\zeta}[f]_{a,\beta}$



MỆNH ĐỀ

- Xét $\boxed{f \in L(V_n, W_m)}$, và a và β lần lượt là cơ sở của V_n và W_m
- Khi đó

a/ f song ánh $\Leftrightarrow [f]_{a,\beta}$ khả nghịch $\Leftrightarrow \det([f]_{a,\beta}) \neq 0$

b/ nếu f song ánh thì $\boxed{f^{-1} \in L(W_m, V_n)}$, và

$$\boxed{[f^{-1}]_{\beta,a} = ([f]_{a,\beta})^{-1}}$$

(tìm ra biểu thức của f^{-1})

SỰ THAY ĐỔI CỦA MA TRẬN AXTT THEO CƠ SỞ

- Xét $\boxed{f \in L(V_n, W_m)}$, trong đó

V_n có 2 cơ sở a và a'

W_m có 2 cơ sở β và β'

$S = P(a \to a')$ là ma trận chuyển cơ sở từ $a \to a'$

$T = P(\beta \to \beta')$ $\beta \to \beta'$

- Khi đó

$$\boxed{[f]_{a',\beta'} = T^{-1}[f]_{a,\beta} S}$$

- Ví dụ $f : R^3 \to R^2$

$$(u, v, w) \mapsto (3u + 5v - 8w, 2v - u + 9w)$$

SỰ THAY ĐỔI CỦA MA TRẬN AXTT THEO CƠ SỞ

R^3 có cơ sở $a = \beta_0$, và

$$a' = \{\alpha_1 = (3,-1,0), \alpha_2 = (-2,5,7), \alpha_3 = (-1,2,2)\}$$

R^2 có cơ sở $\beta = \beta'_0$, và $\beta' = \{\beta_1 = (2,-7), \beta_2 = (-3,5)\}$

☞ hỏi $[f]_{a',\beta'} = ???$

☐ Ta có $$S = P(a \to a') = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T = P(\beta \to \beta') = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

SỰ THAY ĐỔI CỦA MA TRẬN AXTT THEO CƠ SỞ

$$\Rightarrow [f]_{a,\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$ (có dễ dàng)

$$\Rightarrow [f]_{a',\beta'} = T^{-1}[f]_{a,\beta}S$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \square$$

TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

- Nếu $f \in L(V,V)$ thì f gọi là 1 toán tử tuyến tính (tttt) trên V
- Ký hiệu $L(V) \equiv L(V,V) = \{f : V \to V \mid f \quad là \quad axtt\}$

$$\begin{aligned} O : V &\to V \\ \alpha &\mapsto O \end{aligned}$$

toán tử zero

$$\begin{aligned} Id_V : V &\to V \\ \alpha &\mapsto \alpha \end{aligned}$$

toán tử đồng nhất

- Xét $\forall f \in L(V)$ ta có

$$\begin{cases} f_0 O = O_0 f = O \\ f_0 Id_V = Id_V \circ f = f \end{cases}$$

TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

- Xét $\boxed{f \in L(V)}$

- Đặt
$$\begin{cases} f^0 = Id_V \\ f^1 = f \\ f^2 = f \circ f \\ \vdots \\ f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (\text{ k lần }) \end{cases}$$

☞ Ta có $\boxed{f^k \in L(V)}$

- Nếu f song ánh thì ta định nghĩa thêm các lũy thừa nguyên âm

$f^{-1} =$ ánh xạ ngược của f

$$f^{-k} = (f^{-1})^k; \quad \forall k \geq 1$$

TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

- Ví dụ $f : R^2 \to R^2$

$$(x, y) \mapsto (x + y, y)$$

☞ Chứng tỏ $f \in L(R^2)$ (dễ dàng)

☞ Ta có $f^k(x, y) = (x + ky, y); \quad \forall k \geq 0$

☞ Mặt khác, f song ánh vì

$$[f]_{\beta_0,\beta_0} = [f]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ khả nghịch

☞ Ánh xạ ngược $f^{-1}(x, y) = (x - y, y); \quad \forall (x, y) \in R^2$

TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH ☐ Các mệnh đề sau đây là tương đương

a/ f song ánh

b/ f đơn ánh

c/ f toàn ánh

d/ $Ker(f) = \{O\}$

e/ $\dim_F \mathrm{Im}(f) = n$

f/ $\forall$ cơ sở $a \subset V_n : f(a)$ cũng là 1 cơ sở của V_n

g/ $\exists$ cơ sở $a \subset V_n : f(a)$ cũng là 1 cơ sở của V_n

h/ $\forall$ cơ sở $a \subset V_n : [f]_{a,a} \equiv [f]_a$ khả nghịch

i/ $\exists$ cơ sở $a \subset V_n : [f]_{a,a} \equiv [f]_a$ khả nghịch

j/ $\forall$ cơ sở $a, \beta \subset V_n : [f]_{a,\beta}$ khả nghịch

k/ $\exists$ cơ sở $a, \beta \subset V_n : [f]_{a,\beta}$ khả nghịch

TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

- Xét $\boxed{f \in L(V_n)}$, và V_n có 2 cơ sở là a $và$ a'
- Thì lúc này,

a/ $[f(\alpha)]_a = [f]_a[\alpha]_a \quad (\forall \alpha \in V_n)$

b/ $[f \pm g]_a = [f]_a \pm [g]_a \quad và \quad [cf]_a = c[f]_a; (\forall c \in F)$

c/ $[g_0 f]_a = [g]_a[f]_a$

d/ $[f^k]_a = ([f]_a)^k; \quad \forall k \geq 0 \quad (*)$

e/ nếu f song ánh thì (*) đúng $\forall k \in Z$

f/ nếu đặt $\boxed{S = P(a \to a')}$ thì

$$\boxed{[f]_{a'} = S^{-1}[f]_a S}$$

TRỊ RIÊNG, VECTOR RIÊNG, KHÔNG GIAN RIÊNG

- Xét $\boxed{f \in L(V)}$, và $\boxed{c \in F}$
- Đặt

$$E_c = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = c\alpha\}$$
$$= \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = cId_V(\alpha)\}$$
$$= \{\alpha \in V \mid (f - cId_V)(\alpha) = O\}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_c = Ker(f - cId_V)}$$, lúc này $\boxed{E_c \leq V}$

TH1: nếu $\boxed{E_c = \{O\}}$ ☞ tầm thường

TH2: nếu $\boxed{E_c \neq \{O\}}$ ☞ gọi c là 1 trị riêng của f , và

$\boxed{E_c}$ gọi là không gian riêng (ứng với c) của f

TRỊ RIÊNG, VECTOR RIÊNG, KHÔNG GIAN RIÊNG

- Lúc này, mỗi $\boxed{\alpha \in E_c \setminus \{O\}}$ gọi là vector riêng (ứng với trị riêng c) của f

- Lưu ý $$f(E_c) = \begin{cases} E_c & khi \quad c \neq 0 \\ \{O\} & khi \quad c = 0 \end{cases}$$

, nghĩa là $\boxed{f(E_c) \subset E_c}$

XÉT CHO MA TRẬN VUÔNG

- Xét ma trận $\boxed{A \in M_n(F)}$, và $\boxed{c \in F}$

- Đặt $E_c = \{X \in F^n \mid AX = cX\}$, mà $cX = (cI_n)X$

TRỊ RIÊNG, VECTOR RIÊNG, KHÔNG GIAN RIÊNG

$$\Rightarrow E_c = \{X \in F^n \mid (A - cI_n)X = O\}$$

$\Rightarrow E_c =$ không gian nghiệm của hệ pttt thuần nhất $\boxed{(A - cI_n)X = O}$

□ Lúc này, $\boxed{E_c \le F^n}$

👍 TH1: nếu $\boxed{E_c = \{O\}}$ ☞ tầm thường

✌ TH2: nếu $\boxed{E_c \ne \{O\}}$ ☞ gọi c là 1 trị riêng của A , và

$\boxed{E_c}$ gọi là không gian riêng (ứng với c) của A

☞ Lúc này, mỗi $\boxed{\alpha \in E_c \setminus \{O\}}$ gọi là vector riêng (ứng với trị riêng c) của A

TRỊ RIÊNG, VECTOR RIÊNG, KHÔNG GIAN RIÊNG

☐ Ví dụ $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(Q)$

☐ Xét $\boxed{c = -3 \in Q}$, ta có $\boxed{E_{-3} = \{X \in Q^3 \mid (A + 3I_3)X = O\}}$

☞ Tiếp theo, ta giải $(A + 3I_3)X = O$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{giải}} \boxed{x = y = z = 0}$$

$$\Rightarrow E_{-3} = \{O = (0,0,0)\}$$

$\Rightarrow c = -3$ không là trị riêng của A

TRỊ RIÊNG, VECTOR RIÊNG, KHÔNG GIAN RIÊNG

□ Xét $\boxed{c = 2 \in Q}$, ta có $\boxed{E_2 = \{X \in Q^3 \mid (A - 2I_3)X = O\}}$

☞ Tiếp theo, ta giải $(A - 2I_3)X = O$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{giải}}$$

vô số nghiệm (2 ẩn tự do)

$$\begin{cases} x_1 = b - 2a \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_2 \neq \{O = (0,0,0)\}$$

$\Rightarrow c = 2$ là trị riêng của A (trên Q) , và

E_2 là không gian riêng (ứng với trị riêng 2) của A , và

mỗi $\boxed{\alpha \in E_2 \setminus \{O\}}$ là vector riêng (ứng với trị riêng 2) của A

ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG CỦA TOÁN TỬ TT VÀ MA TRẬN VUÔNG

- Xét $\boxed{f \in L(V_n)}$, và a là 1 cơ sở tùy ý của V_n
- Viết ma trận $[f]_a$, và lập ma trận $(xI_n - [f]_a)$
- Đặt $p_f(x) = \det(xI_n - [f]_a)$ ☞ gọi là đa thức đặc trưng của f

$$= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

hệ số của bậc cao nhất luôn = 1

- Xét $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$
- Lập ma trận $\boxed{(xI_n - A)}$
- Đặt $\boxed{p_A(x) = \det(xI_n - A)}$ ☞ gọi là đa thức đặc trưng của A

$$= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG CỦA TOÁN TỬ TT VÀ MA TRẬN VUÔNG

☐ Ví dụ a/ $f : R^2 \to R^2$

$$(u,v) \mapsto (2u+5v, 3u-8v)$$

☞ Chọn $a = \beta_0 = \{(1,0),(0,1)\}$

$$\Rightarrow [f]_a = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow xI_2 - [f]_a = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 & -5 \\ -3 & x+8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -5 \\ -3 & x+8 \end{vmatrix} = x^2 + 6x - 31$$

ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG CỦA TOÁN TỬ TT VÀ MA TRẬN VUÔNG

☐ Ví dụ (tt) b/ $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(C)$ ☞ tìm $p_A(x)$

☞ Ta có $xI_2 - A = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+7 & -1 \\ -2 & x+5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow p_A(x) = \begin{vmatrix} x+7 & -1 \\ -2 & x+5 \end{vmatrix} = x^2 + 12x + 33$$

LIÊN HỆ GiỮA TRỊ RIÊNG VÀ ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG

- Xét $\boxed{f \in L(V_n)}$, và $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$

a/ nếu c là 1 trị riêng (trên F) của f (hoặc A)

$\Leftrightarrow c$ là 1 nghiệm (trên F) của $p_f(x)$ (hoặc $p_A(x)$)

b/ suy ra, muốn tìm tất cả các trị riêng (trên F) của toán tử f hoặc ma trận vuông A, thì ta tìm tất cả các nghiệm trên F của đa thức đặc trưng tương ứng

- Ví dụ a/ $f \in L(V_4)$ có $p_f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

☞ Giả sử $F = R \Rightarrow p_f(x) = (x-2)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

☞ f có 4 trị riêng thực $c_1 = 2, c_2 = -2, c_3 = \sqrt{2}, c_4 = -\sqrt{2}$

LIÊN HỆ GiỮA TRỊ RIÊNG VÀ ĐA THỨC ĐẶC TRƯNG

☐ Ví dụ (tt) b/ $A \in \mathrm{M}_4(Q) \subset \mathrm{M}_4(R) \subset \mathrm{M}_4(C)$ có

$$p_A(x) = (x^4 - 4) = (x^2 - 2)(x^2 + 2) \quad \text{(trường Q)}$$

$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) \quad \text{(trường R)}$$

$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$$

(trường C)

, nghĩa là

☞ nếu F=Q : thì A không có trị riêng trên Q

☞ nếu F=R : thì A có 2 trị riêng trên R (là $\pm\sqrt{2}$)

☞ nếu F=C : thì A có 4 trị riêng trên C (là $\pm\sqrt{2}, \pm i\sqrt{2}$)

ĐỊNH LÝ HAMILTON - CAYLEY

- Xét $\boxed{f \in L(V_n)}$, và $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$
- Giả sử $p_f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = p_A(x)$
- Lúc này, đa thức đặc trưng của f (hoặc A) sẽ triệt tiêu chính toán tử f (hoặc chính ma trận A), nghĩa là

$$p_f(f) = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 f^0 = \mathrm{O}$$

toán tử zero

Id_{V_n}

$$p_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 A^0 = \mathrm{O}_n$$

I_n

MỆNH ĐỀ

□ Xét $\boxed{f \in L(V_n)}$, và $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$

□ Giả sử $p_f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = p_A(x)$

☞ Để ý $\boxed{p_f(0) = a_0 = p_A(0)}$, khi đó

a/ f song ánh $\Leftrightarrow p_f(0) = a_0 \neq 0$

b/ A khả nghịch $\Leftrightarrow p_A(0) = a_0 \neq 0$

c/ giả sử f song ánh (hoặc A khả nghịch), nghĩa là $\boxed{a_0 \neq 0}$

☞ Ta tìm f^{-1} và A^{-1} như sau

MỆNH ĐỀ

- Theo định lý Hamilton - Cayley

$$p_f(f) = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 Id_{V_n} = O$$

$$\Rightarrow Id_{V_n} = -a_0^{-1}(f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1 f)$$

$$= [\underbrace{-a_0^{-1}(f^{n-1} + a_{n-1}f^{n-2} + \cdots + a_2 f + a_1 Id_{V_n})}_{f^{-1}}]_0 f$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1} = -a_0^{-1}(f^{n-1} + a_{n-1}f^{n-2} + \cdots + a_2 f + a_1 Id_{V_n})}$$

(tính f^{-1} theo f)

- Tương tự

$$\boxed{A^{-1} = -a_0^{-1}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 I_n)}$$

TOÁN TỬ VÀ MA TRẬN CHÉO HÓA ĐƯỢC

☐ Xét $\boxed{f \in L(V_n)}$, lúc này ta nói f chéo hóa được trên V_n

nếu tồn tại cơ sở $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ của V_n

sao cho $[f]_a = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$ nghĩa là $\begin{cases} f(\alpha_1) = c_1\alpha_1 \\ f(\alpha_2) = c_2\alpha_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ f(\alpha_n) = c_n\alpha_n \end{cases}$

ma trận đường chéo

, trong đó $[f(\alpha_1)]_a = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; [f(\alpha_n)]_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_n \end{pmatrix}$

TOÁN TỬ VÀ MA TRẬN CHÉO HÓA ĐƯỢC

- Xét $\boxed{A \in M_n(F)}$, lúc này ta nói A chéo hóa được trên F nếu tồn tại ma trận P khả nghịch $\in M_n(F)$ thỏa

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$$

ma trận chéo

ĐK CẦN VÀ ĐỦ ĐỂ 1 TOÁN TỬ (MT VUÔNG) CHÉO HÓA ĐƯỢC

- Xét $\boxed{f \in L(V_n)}$, và $\boxed{A \in M_n(F)}$

f chéo hóa được trên V_n

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_f(x) = (x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\cdots(x-c_k)^{r_k} \\ \dim_{V_n} E_{c_j} = r_j; \forall j = 1,2,\ldots,k \end{cases}$$

A chéo hóa được trên F

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_A(x) = (x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2}\cdots(x-c_k)^{r_k} \\ \dim_{F} E_{c_j} = r_j; \forall j = 1,2,\ldots,k \end{cases}$$

ĐK CẦN VÀ ĐỦ ĐỂ 1 TOÁN TỬ (MT VUÔNG) CHÉO HÓA ĐƯỢC

f không chéo hóa được trên V_n

$\Leftrightarrow p_f(x)$ không tách được trên V_n, hay

$$\begin{cases} p_f(x) = (x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2} \cdots (x-c_k)^{r_k} \\ \exists j \in \{1,2,\ldots,k\} : \dim_{V_n} E_{c_j} \neq r_j \end{cases}$$

A không chéo hóa được trên F

$\Leftrightarrow p_A(x)$ không tách được trên F, hay

$$\begin{cases} p_A(x) = (x-c_1)^{r_1}(x-c_2)^{r_2} \cdots (x-c_k)^{r_k} \\ \exists j \in \{1,2,\ldots,k\} : \dim_F E_{c_j} \neq r_j \end{cases}$$

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

- Xét $\boxed{f \in L(V_n)}$

- Tìm $p_f(x) = \det(xI_n - [f]_\beta)$, với β là 1 cơ sở tùy ý của V_n

  ☞ Nếu $p_f(x)$ không tách được trên F : thì f không chéo hóa được trên V_n

  ☞ Nếu $p_f(x)$ tách được trên V_n thành

  $$p_f(x) = (x - c_1)^{r_1}(x - c_2)^{r_2} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

  , với $c_1, c_2, \ldots, c_k \in F$

  - Thì ta tìm cơ sở a_j cho không gian riêng

  $$\boxed{E_{c_j} = Ker(f - c_j Id_{V_n})} \quad (1 \le j \le k)$$

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

☞ Nếu $\exists j \in \{1,2,\ldots,k\}$ sao cho $\boxed{\dim_F E_{c_j} < r_j}$

thì f không chéo hóa được trên V_n

☞ Nếu $\dim_F E_{c_j} = r_j \quad ,\forall j \in \{1,2,\ldots,k\}$

thì f chéo hóa được trên V_n

☐ Đặt $\boxed{a = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_k}$ ☞ thì a là cơ sở của V_n

☐ Lúc này,

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

$$[f]_a = \left(\begin{array}{ccccccc} c_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & c_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & c_k \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} c_1 \\ \ddots \\ c_1 \end{array}}\right\} r_1 \text{ lần} \\ \vphantom{\ddots} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} c_k \\ \ddots \\ c_k \end{array}}\right\} r_k \text{ lần} \end{array}$$

ma trận chéo

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

- Xét $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$
- Tìm $p_A(x) = \det(xI_n - A)$

☞ Nếu $p_A(x)$ không tách được trên F : thì A không chéo hóa được trên F

☞ Nếu $p_A(x)$ tách được trên F thành

$$p_A(x) = (x - c_1)^{r_1}(x - c_2)^{r_2} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

, với $c_1, c_2, \ldots, c_k \in F$

- Thì ta tìm cơ sở a_j cho không gian riêng

$$\boxed{E_{c_j} = \{X \in F^n \mid (A - c_j I_n)X = \mathrm{O}\}} \quad (1 \le j \le k)$$

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

☞ Nếu $\exists j \in \{1,2,\ldots,k\}$ sao cho $\boxed{\dim_F E_{c_j} < r_j}$

thì A không chéo hóa được trên F

☞ Nếu $\dim_F E_{c_j} = r_j \quad ,\forall j \in \{1,2,\ldots,k\}$

thì A chéo hóa được trên F

☐ Đặt $\boxed{a = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_k}$ ☞ thì a là cơ sở của F^n

☐ Đặt $\boxed{P = P(\beta_0 \to a)}$

dễ tìm

cơ sở chính tắc của F^n

(không cần tìm P^{-1} nếu không có yêu cầu)

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} c_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & c_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & c_k \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} r_1 \text{ lần} \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} r_k \text{ lần} \end{array}$$

ma trận chéo

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

☐ Ví dụ $f : R^3 \to R^3$

$$(u, v, w) \mapsto (8u - v - 5w, 3v - 2u + w, 4u - v - w)$$

$$\Rightarrow [f]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ nên $p_f(x) = \det(xI_3 - [f]_{\beta_0})$

$$\Rightarrow p_f(x) = \begin{vmatrix} x-8 & 1 & 5 \\ 2 & x-3 & -1 \\ -4 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{(1)\to(1)-(3)} \begin{vmatrix} x-4 & 0 & -x+4 \\ 2 & x-3 & -1 \\ -4 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

$$\xleftrightarrow{(3)'\to(3)'+(1)'}\begin{vmatrix} x-4 & 0 & 0 \\ 2 & x-3 & 1 \\ -4 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-4)\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= (x-4)^2(x-2)$$

$\Rightarrow p_f(x) = (x-4)^2(x-2)$ tách được trên R

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2, r_1 = 1 \\ c_2 = 4, r_2 = 2 \end{cases}$$

☞ Tiếp theo, ta tìm cơ sở a_2 cho $E_{c_2} = E_4 = Ker(f - 4Id_{R^3})$

☞ Ta có $(f - 4Id_{R^3})(u,v,w) = f(u,v,w) - 4(u,v,w)$

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

$$\Rightarrow (f - 4Id_{R^3})(u,v,w) = (4u - v - 5w, -v - 2u + w, 4u - v - 5w)$$

□ giải $(f - 4Id_{R^3})(u,v,w) = O$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u - v - 5w = 0 \\ -v - 2u + w = 0 \\ 4u - v - 5w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)\to\frac{1}{2}(1)]{(2)\to(2)-2(1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1)\to(1)-\frac{1}{2}(2)]{(2)\to-\frac{1}{3}(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

☞ nghiệm $\begin{cases} w \quad \text{tùy ý} \\ u = w \\ v = -w \end{cases}$

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

$$\Rightarrow E_4 = \{X = (w, -w, w) \mid w \in R\}$$
$$= \{X = w(1, -1, 1) \mid w \in R\}$$
$$= < \{\alpha = (1, -1, 1)\} >$$

$\Rightarrow E_4$ có cơ sở $a_2 = \{\alpha = (1, -1, 1)\}$

$$\Rightarrow \dim_R E_4 = 1 < r_2 = 2$$

☞ KL: f không chéo hóa được trên R

☐ Ví dụ 2

cho $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ☞ hỏi A có chéo hóa được không?

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

- Ta có $p_A(x) = |xI_3 - A| = \begin{vmatrix} x-5 & -6 & 3 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -2 & x-1 \end{vmatrix}$

$$\xleftrightarrow{(2)\to(2)+(3)} \begin{vmatrix} x-5 & -6 & 3 \\ 0 & x-2 & x-2 \\ -1 & -2 & x-1 \end{vmatrix} \xleftrightarrow{(3)'\to(3)'-(2)'}$$

$$\begin{vmatrix} x-5 & -6 & 9 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -1 & -2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x-5 & 9 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)^3$$

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

$$\Rightarrow p_A(x) = (x-2)^3$$ tách được trên R

☞ Tiếp theo, ta tìm cơ sở a cho

$$\boxed{E_c = E_2 = \{X \in R^3 \mid (A - 2I_3)X = O\}}$$

☞ Ta có $$(A-2I_3)X = O \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

☞ nghiệm $\begin{cases} v, w & \text{thực tùy ý} \\ u = w - 2v \end{cases}$

THUẬT TOÁN CHÉO HÓA

$$\Rightarrow E_2 = \{X = (w - 2v, v, w) \mid v, w \in R\}$$

$$= \{X = v\underbrace{(-2,1,0)}_{\alpha_1} + w\underbrace{(1,0,1)}_{\alpha_2} \mid v, w \in R\}$$

$$\Rightarrow E_2 =< \{\alpha_1 = (-2,1,0), \alpha_2 = (1,0,1)\} >$$

tọa độ không tỷ lệ

$\Rightarrow E_2$ có cơ sở $\boxed{a = \{\alpha_1, \alpha_2\}}$

$$\Rightarrow \dim_F E_2 = 2 < r = 3$$

☞ KL: A không chéo hóa được trên R

MỆNH ĐỀ

☐ Xét $\boxed{f \in L(V_n)}$ (hay $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$)

☐ Nếu $p_f(x)$ (hay $p_A(x)$) tách được trên F, và chỉ có nghiệm đơn

$$p_f(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$, hay

$$p_A(x) = (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

$$c_i \neq c_j; 1 \leq i \neq j \leq n$$

☞ thì f (hay A) chéo hóa được trên V_n (trên F)

MA TRẬN BIỂU DIỄN TOÁN TỬ

- Xét $\boxed{f \in L(V_n)}$
- Chọn cơ sở a cố định (tùy ý) của V_n
- Ta có sự tương ứng song ánh $\boxed{f \mapsto [f]_a}$ giữa $L(V_n)$ với $\mathrm{M}_n(F)$

, nghĩa là

Cho $f \in L(V_n)$ thì có $A = [f]_a \in \mathrm{M}_n(F)$

Ngược lại, cho $A \in \mathrm{M}_n(F)$ thì có $f \in L(V_n)$

mà $[f]_a = A$

MA TRẬN BIỂU DIỄN TOÁN TỬ

f chéo hóa được trên V_n $\Leftrightarrow [f]_a$ chéo hóa được trên F

TOÁN TỬ HÓA MA TRẬN VUÔNG

- Xét $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$
- Lập toán tử $f_A : F^n \to F^n$

$$X \mapsto XA^t$$

chuyển vị của A

☞ Ta có $f_A \in L(F^n)$, và $[f_A]_{\beta_0} \equiv A$

☞ f_A gọi là toán tử hóa của A

TOÁN TỬ HÓA MA TRẬN VUÔNG

☐ Ví dụ $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(Q)$

☐ Lập $f_A : R^3 \to R^3$

$$X = (u, v, w) \mapsto XA^t = (u, v, w)\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 5 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= (-2u + v + 5w, 3u - 4v + 6w, 2v - 5w)$$

☞ thì $f_A \in L(R^3)$, và $[f_A]_{\beta_0} \equiv A$

MỆNH ĐỀ

- Xét A và f_A như trên , khi đó

a/ $p_{f_A}(x) = p_A(x)$

b/ $E_c^{f_A} \equiv E_c^A$

c/ f_A chéo hóa được trên F^n ⇔ A chéo hóa được trên F