ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ĐẠI SỐ TT

Chương 3 –

CÁC PHÉP TÍNH MA TRẬN & ĐỊNH THỨC

ThS. LÊ HOÀNG TUẤN

CÁC PHÉP TÍNH ĐƠN GIẢN

PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MA TRẬN

- Xét $c \in F$ và $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)$, thì

$$cA = (ca_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

- Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 15 & -4 & -24 \end{pmatrix} \qquad c = -3/5$$

$$\Rightarrow \; cA = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

CÁC PHÉP TÍNH ĐƠN GIẢN

PHÉP CỘNG TRỪ MA TRẬN

☐ Xét 2 ma trận cùng kích thước

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

, thì

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

☐ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$, và $A - B = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

CÁC PHÉP TÍNH ĐƠN GIẢN

PHÉP NHÂN MA TRẬN

TÍCH VÔ HƯỚNG 1 DÒNG VỚI 1 CỘT

☐ Xét dòng $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$, và cột $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

thì

$$UV = \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & \boxed{u_2} & \cdots & \boxed{u_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$=$$

CÁC PHÉP TÍNH ĐƠN GIẢN

PHÉP NHÂN 2 MA TRẬN

- Xét 2 ma trận

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \qquad B = (b_{jk})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le p}}$$

(số cột của A $= n =$ số dòng của B)

- Viết lại

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{☞ dòng 1} \\ \text{☞ dòng 2} \\ \\ \text{☞ dòng m} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{cột 2} & & \\ B = \big(& B_1 & B_2 & \cdots & B_p \big) \\ & \text{cột 1} & & & \text{cột p} \end{array}$$

PHÉP NHÂN 2 MA TRẬN

- Nhân ma trận A với B nghĩa là lập các tích vô hướng giữa mỗi dòng của A với mỗi cột của B

- Cụ thể như sau

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \end{pmatrix}$$

ma trận tích của A và B

$$= \begin{pmatrix} \quad - \quad \end{pmatrix}$$

PHÉP NHÂN 2 MA TRẬN

- Ví dụ

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1 & 4\\ 5 & 0 & 2 & -6\\ -4 & 7 & -3 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}6 & 9 & 0\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & 8 & 1\\ -4 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = AB = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

PHÉP NHÂN 2 MA TRẬN

- Ví dụ (tt)

$$\& \; D = BA = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 8 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -6 \\ -4 & 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

- Để ý

$$\boxed{AB \neq BA}$$

MA TRẬN ĐƠN VỊ

- Ma trận đơn vị cấp n trên trường F, là ma trận vuông cấp n như sau

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ví dụ

$$I_1 = (1)$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ PHÉP NHÂN MA TRẬN

a/ $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b/ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c/ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

d/ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ PHÉP NHÂN MA TRẬN

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ nhưng $$AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

☞ Có thể xảy ra $\boxed{A \neq O}$ $\boxed{B \neq O}$ nhưng $(AB) = O$

☐ do đó, từ $AB = O$ ta <u>không thể kết luận gì</u> về A và B

PHÉP TÍNH MA TRẬN VUÔNG

PHÉP LŨY THỪA (nguyên ≥ 0)

☐ Xét ma trận $A \in \mathrm{M}_n(F)$, ta định nghĩa

$$A^0 = I_n$$

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \times A$$

$$A^k = (A^{k-1})A = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\text{k lần}}$$

và ta luôn có

$$A^k \in \mathrm{M}_n(F), \forall k \geq 0$$

PHÉP LŨY THỪA

☐ Ví dụ cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(Q)$. Tính $A^k, \forall k \ge 0$

☞ ta có $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

☞ dự đoán $\boxed{A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \forall k \ge 0}$ (*)

PHÉP LŨY THỪA

☐ Thật vậy, giả sử (*) đúng với $\boxed{n = k}$, ta cần cm (*) đúng với $\boxed{n = k+1}$

☞ ta có $A^{k+1} = A^k \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

(nghĩa là (*) đúng với $n = k+1$)

☞ đpcm

ĐA THỨC TÁC ĐỘNG MA TRẬN VUÔNG

- Xét ma trận $A \in \mathrm{M}_n(F)$, và đa thức $p(x)$, với

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- Đặt $p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 A^0$

thay $x = A$

I_n

- Ví dụ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ có $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall k \geq 0$, và cho

$$p(x) = -2x^3 + 7x^2 + 8x - 4$$

ĐA THỨC TÁC ĐỘNG MA TRẬN VUÔNG

- Suy ra

$$p(A) =$$

$$=$$

$$=$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

CÁC MA TRẬN VUÔNG ĐẶC BIỆT

MA TRẬN ĐƯỜNG CHÉO

- Là ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

, với $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ tùy ý

- Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt[4]{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CÁC MA TRẬN VUÔNG ĐẶC BIỆT

MA TRẬN TAM GIÁC TRÊN

- Là ma trận có dạng

tùy ý

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 3/7 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & \sin 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt[5]{11} \end{pmatrix}$$

CÁC MA TRẬN VUÔNG ĐẶC BIỆT

MA TRẬN TAM GIÁC DƯỚI

- Là ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tùy ý

- Ví dụ

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & \ln 2 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & e \end{pmatrix}$$

CÁC MA TRẬN VUÔNG ĐẶC BIỆT

- Khi thực hiện các phép toán: cộng, trừ, nhân và lũy thừa nguyên dương cho các ma trận chéo, thì ta tính toán tự nhiên trên đường chéo và thu được ma trận cũng là đường chéo

- Khi thực hiện các phép toán: cộng, trừ, nhân và lũy thừa nguyên dương cho các ma trận tam giác cùng loại, thì ta thu được ma trận tam giác cùng loại

CÁC MA TRẬN VUÔNG ĐẶC BIỆT

- Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 0 & \\ & & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \underset{\bullet}{\pm} B = \begin{pmatrix} -2 \underset{\bullet}{\pm} 4 & & \\ & 1 \underset{\bullet}{\pm} 0 & \\ & & 7 \underset{\bullet}{\pm} (-5) \end{pmatrix}$$

$$\& \ A^5 = \begin{pmatrix} (-2)^5 & & \\ & 1^5 & \\ & & 7^5 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH

- ☐ Xét ma trận $A \in \mathrm{M}_n(F)$
- ☐ Ta nói A khả nghịch nếu có $A' \in \mathrm{M}_n(F)$ thỏa

$$A'A = AA' = I_n$$

- ☐ Ma trận A' (nếu có) thì duy nhất
- ☐ Ta ký hiệu $A^{-1} = A'$, và ta nói A^{-1} là ma trận nghịch đảo của A

MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH

- Nếu A không khả nghịch, thì ta chỉ định nghĩa $A^k, k \geq 0$
- Nếu A khả nghịch thì ta định nghĩa thêm các lũy thừa nguyên âm cho A như sau

$$A^{-1} = A'$$ (ma trận nghịch đảo của A)

$$A^{-2} = (A^{-1})^2$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3$$

$$A^{-k} = (A^{-1})^k, \forall k \geq 2$$

MA TRẬN VUÔNG KHẢ NGHỊCH

- Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \ \& \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Ta có $\boxed{BA = AB = I_3}$

$\Rightarrow$ A khả nghịch, và $\boxed{A^{-1} = B}$

B khả nghịch, và $\boxed{B^{-1} = A}$

, lúc này

$$\boxed{A^3 = A.A.A}$$

$$\boxed{A^{-7} = (A^{-1})^7 = B^7}$$

NHẬN DIỆN MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

☐ Xét ma trận $\boxed{A \in M_n(F)}$

$$A \xrightarrow[\text{(phương pháp Gauss - Jordan)}]{\text{chuẩn hóa }\underline{\text{tối đa}}\text{ các cột}} R_A$$

☐ Khi đó

$\boxed{A}$ khả nghịch $\Leftrightarrow R_A = I_n$

$\boxed{A}$ <u>không</u> khả nghịch $\Leftrightarrow R_A \neq I_n$

NHẬN DIỆN MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

☐ Ví dụ

cho ma trận $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(Q)$$

☞ ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = R_A \neq I_3$$

A không khả nghịch

NHẬN DIỆN MA TRẬN KHẢ NGHỊCH

☐ Ví dụ 2

cho ma trận $B = \begin{pmatrix} 13 & 8 & -12 \\ -12 & -7 & 12 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

☞ ta có

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = R_B = I_3$$

B khả nghịch

PP TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

- ☐ Cho ma trận A khả nghịch $\in M_n(F)$ (nghĩa là $R_A = I_n$)
- ☐ Ta tìm $\boxed{A^{-1}}$ theo quy tắc sau

👍 Những phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào biến A thành $I_n = R_A$ thì chính những phép biến đổi đó (giữ nguyên thứ tự) sẽ biến $\boxed{I_n}$ thành $\boxed{A^{-1}}$

☞ Cụ thể như sau

Nếu A

thì I_n

PP TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

✌ Trong thực hành thì ta làm 2 việc cùng 1 lúc (kiểm tra A khả nghịch

và tìm A^{-1}) theo sơ đồ sau

$(A \mid I_n)$ $\mid$

$\boxed{I_n}$ $\boxed{A^{-1}}$

☞ Các phép biến đổi $(1),(2),\ldots,(k)$ do ma trận bên trái quy định

☞ Thử lại (nếu cần thiết) $\boxed{AA^{-1} \overset{?}{=} I_n}$ hay $\boxed{A^{-1}A \overset{?}{=} I_n}$

PP TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

- Ví dụ chứng minh A khả nghịch, và tìm A^{-1}, với

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Ta có

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{c|c} \quad & \quad \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

PP TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

$$R_A = I_3 \qquad A^{-1}$$

☐ Như vậy, $\boxed{R_A = I_3}$ nên A khả nghịch, và $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix}$

PP TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO CỦA MA TRẬN CẤP 2

☐ Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ thì $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

(với đk $(ad - bc) \neq 0)$

☐ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-4+3}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-20-6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

GIẢI PT MA TRẬN

PHƯƠNG TRÌNH AX=B , trong đó

$\boxed{A}$ là ma trận vuông khả nghịch

$\boxed{B}$ là ma trận cho trước

$\boxed{X}$ là ma trận ẩn cần tìm

- Ta có $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \quad \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X = A^{-1}B}$$ (nghiệm duy nhất)

- Ví dụ

giải pt $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

PHƯƠNG TRÌNH AX=B

- Ta có $$A^{-1} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{44}\begin{pmatrix} -24 & -27 & -30 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Ví dụ 2 giải pt $$X\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 22 & -75 & -12 \\ -9 & 31 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

PHƯƠNG TRÌNH AX=B

- Ta có $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = BA^{-1} = (4 \quad -2 \quad 1)\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \quad 15 \quad 36)$$

GIẢI PT MA TRẬN

PHƯƠNG TRÌNH AXC=B , trong đó

$\boxed{A}$ và $\boxed{C}$ là các ma trận vuông khả nghịch

$\boxed{B}$ là ma trận cho trước

$\boxed{X}$ là ma trận ẩn cần tìm

- Ta có $A^{-1}(AXC)C^{-1} = A^{-1}BC^{-1}$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)X(CC^{-1}) = A^{-1}BC^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1}BC^{-1}}$$ (nghiệm duy nhất)

- Ví dụ giải pt $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

PHƯƠNG TRÌNH AXC=B

- Ta có $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 7 & 1\\ 22 & -75 & -12\\ -9 & 31 & 5\end{pmatrix}$ $\& \, C=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X=A^{-1}BC^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 7 & 1\\ 22 & -75 & -12\\ -9 & 31 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\\ 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 7 & 1\\ 22 & -75 & -12\\ -9 & 31 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 7\\ -14 & -15\\ 12 & 8\end{pmatrix}=\square$$

ĐẠI SỐ TT

GIẢI PT MA TRẬN

PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN TỔNG QUÁT $\boxed{\varphi(X) = O}$

- ☐ Xác định kích thước (pxq) của X để biết số ẩn cần tìm là (p.q)
- ☐ Viết hệ $\boxed{\varphi(X) = O}$ thành 1 hệ pt theo (p.q) ẩn rồi giải để tìm tất cả các ẩn và chỉ ra X
- ☐ Ví dụ 1 giải $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (*)

2 dòng

2 cột

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$$

☞ Thế X vào pt (*) rồi giải tiếp …

GIẢI PT MA TRẬN

PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN TỔNG QUÁT $\boxed{\varphi(X) = O}$

□ Ví dụ 2 giải $X^2 = I_2$ (*)

☞ Đặt $X = \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$, lúc này

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \square$$

ĐỊNH THỨC MA TRẬN VUÔNG

- Với mỗi ma trận vuông A, ta xác định duy nhất 1 con số $c_A \in F$ mà ta gọi c_A là định thức của ma trận A

- Ký hiệu $c_A = \det(A)$ (determinant of A) hay $c_A = |A|$

TÍNH ĐỊNH THỨC |A| (n = 1, 2)

a/ Nếu $A = (a)$ thì $|A| = a$

- Ví dụ

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$A = (-\pi) \Rightarrow |A| = -\pi$$

ĐỊNH THỨC MA TRẬN VUÔNG

TÍNH ĐỊNH THỨC |A| (n = 1, 2)

b/ Nếu $\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$ thì $\boxed{|A| = ad - bc}$

☐ Ví dụ

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 2(8) - 9(-6) = 70$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 4(-7) - 5(3) = -43$$

ĐỊNH THỨC MA TRẬN VUÔNG

TÍNH ĐỊNH THỨC |A| (n = 3) (QUY TẮC SARRUS)

☐ Xét $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ u & v \\ p & q \end{matrix}$

$$\Rightarrow |A| = [(\qquad\qquad\qquad\qquad) - (\qquad\qquad\qquad\qquad)]$$

☐ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 5 & 8 & -6 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = [(-2)8(-4) + (-3)(-6)2 + 4.5.7]$$
$$-[4.8.2 + (-3)5(-4) + (-2)(-6)7]$$

$$\Rightarrow |A| = 240 - 208 = 32$$

ĐỊNH THỨC MA TRẬN VUÔNG

TÍNH ĐỊNH THỨC |A| (n >= 3)

- Ta tính định thức của A dựa trên các định thức cấp (n-1)
- Ký hiệu

$$\boxed{A(i\,|\,j)} \quad \text{= ma trận A xóa bỏ dòng (i) và cột (j)}$$

$$\boxed{c_{ij}^{A} = (-1)^{i+j}\,|\,A(i\,|\,j)\,|} \qquad (1 \le i, j \le n)$$

- Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \\ & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(3\,|\,2) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_{32}^{A} = (-1)^{3+2}\left|A(3\,|\,2)\right|$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 18$$

ĐỊNH THỨC MA TRẬN VUÔNG

TÍNH ĐỊNH THỨC |A| (n >= 3)

- Ví dụ $A = \begin{pmatrix} & & 7 & -1 \\ & & -6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A(1|1) = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow c_{11}^{A} = (-1)^{1+1} \, | A(1|1) |$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -27$$

TÍNH |A|

- Ta có thể tính định thức A dựa theo bất cứ dòng hoặc cột nào của nó

ĐỊNH THỨC MA TRẬN VUÔNG

TÍNH ĐỊNH THỨC |A| (n >= 3)

- Xét ma trận $\boxed{A = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i, j \le n}}$, lúc này

$$|A| = \qquad \text{(dòng 1)}$$

$$= a_{21}c_{21}^{A} + a_{22}c_{22}^{A} + \cdots + a_{2n}c_{2n}^{A} \qquad \text{(dòng 2)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$= a_{i1}c_{i1}^{A} + a_{i2}c_{i2}^{A} + \cdots + a_{in}c_{in}^{A} \qquad \text{(dòng i)}$$

$$= a_{11}c_{11}^{A} + a_{21}c_{21}^{A} + \cdots + a_{n1}c_{n1}^{A} \qquad \text{(cột 1)}$$

$$= a_{1j}c_{1j}^{A} + a_{2j}c_{2j}^{A} + \cdots + a_{nj}c_{nj}^{A} \qquad \text{(cột j)}$$

TÍNH |A| (n >=3)

- Ví dụ $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & -1 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$, ta có $c_{11} = -27$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 13 \quad \& \, c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -44$$

$$\Rightarrow |A| = (-2)(-27) + 3(13) + 4(-44) = -83$$

dòng 1

☞ Còn nếu xét theo cột 2 thì

$$|A| = a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32}$$

$$= 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 7(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 6(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 39 - 14 - 108 = -83$$

TÍNH |A| (n >=3)

- Lưu ý nếu $\boxed{a_{ij} = 0}$ thì $\boxed{a_{ij}c_{ij}^{A} = 0}$

(nghĩa là ta không cần phải tính $\boxed{c_{ij}^{A}}$)

Do vậy, khi tính định thức **|A|**, ta chọn dòng hoặc cột nào có nhiều hệ số 0 nhất

- Ví dụ

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & \boxed{5} & 7 \\ 0 & 4 & \boxed{0} & 6 \\ 2 & 0 & \boxed{0} & -9 \\ 1 & 0 & \boxed{0} & -8 \end{vmatrix} \xrightarrow[a_{23} = a_{33} = a_{43} = 0]{\text{cột 3}} 5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & \boxed{4} & 6 \\ 2 & \boxed{0} & -9 \\ 1 & \boxed{0} & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 5(4)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -20(-7) = 140$$

ĐỊNH THỨC MỘT SỐ MA TRẬN ĐƠN GIẢN

- Xét ma trận $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$

- Nếu A là ma trận đường chéo hay tam giác thì **|A|** bằng tích các số hạng trên đường chéo chính

$$\boxed{|A| = a_{11}.a_{22}.\cdots.a_{nn}}$$

- Nếu A có 1 dòng hoặc 1 cột triệt tiêu thì **|A|=0**

  (do ta tính định thức theo dòng hoặc cột này)

- Nếu A có 2 dòng hoặc 2 cột tỷ lệ nhau (đặc biệt là bằng nhau) thì **|A|=0**

ĐỊNH THỨC MỘT SỐ MA TRẬN ĐƠN GIẢN

☐ Ví dụ

a/

$$0 = 4.0.\sqrt{7} = |B| \Leftarrow \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ & 0 & -3 \\ & & \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 5 & \\ & & \pi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = (-2).5.\pi = -10\pi$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & \ln 3 & \\ -2 & -6 & \cos 4 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$|C| = 1.\ln 3.\cos 4 = (\ln 3)(\cos 4)$$

ĐỊNH THỨC MỘT SỐ MA TRẬN ĐƠN GIẢN

☐ Ví dụ

b/ $A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt[4]{6} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & u & v \end{pmatrix}$ có $|A| \overset{dòng\,2}{=} 0$

cột 3

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 2 & \pi & 0 \\ e & \sqrt{11} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

c/

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -3 \\ 3 & -21 & 9 \\ \pi & e^2 & -5 \end{pmatrix}$$

tỉ lệ $(k = -3)$

$\Rightarrow |C| = 0$

ĐỊNH THỨC MỘT SỐ MA TRẬN ĐƠN GIẢN

- Ví dụ

c/ $$D = \begin{pmatrix} a & -5 & a^2 \\ b & 8 & ab \\ c & \sin e & ac \end{pmatrix} \Rightarrow |D| = 0$$

tỉ lệ $k = a$

$$G = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & x \\ \beta & \beta & y \\ \gamma & \gamma & z \end{pmatrix} = \;|G| = 0$$

$$E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 7 & -2 & 4 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \;|E| = 0$$

MA TRẬN CHUYỂN VỊ

- Xét ma trận $\boxed{A \in M_n(F)}$

$$\boxed{A} \xrightarrow[\text{các cột thành các dòng}]{\text{các dòng thành các cột}} \boxed{A^t}$$

- Lúc này, $\boxed{A^t}$ đgl ma trận chuyển vị của A

- Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 6 \\ 5 & -7 & -8 & 3 \\ -1 & 9 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & -7 & 9 \\ 4 & -8 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

MA TRẬN CHUYỂN VỊ

- Lưu ý

$$\boxed{(A \pm B)^t = A^t \pm B^t}$$

$$\boxed{(AB)^t = B^t A^t}$$

$$\boxed{(cA)^t = cA^t}$$

$$\boxed{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$$

$$\boxed{|A^t| = |A|}$$

- Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -8 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 0 \\ -1 & 3 & -9 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\& \; |A^t| = |A|$$

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG VÀ CỘT Đ/V ĐỊNH THỨC

- Ta đã biết 3 phép biến đổi sơ cấp trên dòng đối với ma trận
  - ☞ Tương tự, ta cũng có 3 phép biến đổi sơ cấp trên cột đ/v ma trận

$$A \xrightarrow{(i)\to c(i)} A', \quad A \xrightarrow{(i)\leftrightarrow(j)} A', \quad A \xrightarrow{(i)\to(i)+c(j)} A'$$

$$A \xrightarrow{(i)'\to c(i)'} A', \quad A \xrightarrow{(i)'\leftrightarrow(j)'} A', \quad A \xrightarrow{(i)'\to(i)'+c(j)'} A'$$

các phép biến đổi sơ cấp trên cột

các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG VÀ CỘT Đ/V ĐỊNH THỨC

☐ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -8 & 4 & 2 \\ 5 & -9 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)' \to -5(2)'} A_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{(1)' \leftrightarrow (3)'} A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & -8 \\ 0 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{(3)' \to (3)' + 6(2)'} A_3 = \begin{pmatrix} 7 & -1 & \\ -8 & 4 & \\ 5 & -9 & \end{pmatrix}$$

MỆNH ĐỀ

- Xét ma trận $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$

- Giả sử $\boxed{A} \xrightarrow{(i)\to c(i)} \boxed{A'}$, hoặc

$$\boxed{A} \xrightarrow{(i)'\to c(i)'} \boxed{A'}$$

☞ thì khi đó $\boxed{|A'| = c\,|A|}$ (gấp c lần)

- Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\to -3(1)} A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_1| = -3\,|A|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)'\to 5(2)'} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_2| = 5\,|A|$$

MỆNH ĐỀ

☐ Xét ma trận $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$

☐ Giả sử $\boxed{A} \xrightarrow{(i)\leftrightarrow(j)} \boxed{A'}$, hoặc

$$\boxed{A} \xrightarrow{(i)'\leftrightarrow(j)'} \boxed{A'}$$

☞ thì khi đó $\boxed{|A'| = -|A|}$ (đổi dấu)

☐ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_1| = -|A|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)'\leftrightarrow(2)'} A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_2| = -|A|$$

MỆNH ĐỀ

☐ Ví dụ 2

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \xrightarrow{(1)'\leftrightarrow(2)'} B=\begin{pmatrix}2&1&3\\5&4&6\\8&7&9\end{pmatrix} \xrightarrow{(1)'\leftrightarrow(3)'} C=\begin{pmatrix}3&1&2\\6&4&5\\9&7&8\end{pmatrix}$$

☞ Ta có

$$\left.\begin{array}{l}|B|=-|A|\\ |C|=-|B|\end{array}\right\}\Rightarrow |A|=|C|$$

MỆNH ĐỀ

□ Xét ma trận $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$

□ Giả sử $\boxed{A} \xrightarrow{(i)\to(i)+c(j)} \boxed{A'}$, hoặc

$$\boxed{A} \xrightarrow{(i)'\to(i)'+c(j)'} \boxed{A'}$$

☞ thì khi đó $\boxed{|A'| = |A|}$ (không thay đổi)

□ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)\to(2)+7(1)} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_1| = |A|$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)'\to(1)'-2(2)'} A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A_2| = |A|$$

ÁP DỤNG

- Khi tính định thức **|A|** cấp **n>=3**, ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng hay cột để tạo thật nhiều số 0 trên 1 dòng, hoặc cột nào đó rồi tính định thức theo dòng (hay cột) đó

- Ví dụ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} \longleftrightarrow \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix}$$

ÁP DỤNG

☐ Ví dụ

$$\underline{\underline{\text{cột } 1}} \quad b_{11}c_{11}^{B} = 1(-1)^{1+1}|B(1|1)| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ -10 & 0 & -3 & -11 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{(2) \to (2) - 2(1)}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & -3 & -11 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{dòng } 2}} \quad 1(-1)^{2+1}|D(2|1)|$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -11 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underline{\underline{(3) \to (3) - 2(1)}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -11 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

ÁP DỤNG

☐ Ví dụ

cột 1 $-1(-1)^{1+1}|E(1|1)| = -\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -(3-55) = 52$

MA TRẬN KHẢ NGHỊCH VÀ ĐỊNH THỨC

☐ Xét ma trận $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$

☞ TH1: Nếu $\boxed{|A| \neq 0}$, thì A khả nghịch

☞ TH2: Nếu $\boxed{|A| = 0}$, thì A không khả nghịch

☐ Ví dụ go to blackboard...

TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO BẰNG PP ĐỊNH THỨC

- Xét ma trận $\boxed{A \in \mathrm{M}_n(F)}$, và giả sử A khả nghịch
- Lúc này ta tìm $\boxed{A^{-1}}$ bằng pp định thức như sau

☝ tính $\boxed{n^2}$ hệ số $\boxed{c_{ij}^A = (-1)^{i+j} \, | A(i \mid j) |}$ $(1 \le i, j \le n)$

✌ lập ma trận $\boxed{C = (c_{ij}^A)_{1 \le i, j \le n}}$

👌 ta có $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t}$, với

$\boxed{C^t}$ là ma trận chuyển vị của C

TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO BẰNG PP ĐỊNH THỨC

□ Ví dụ chứng minh A khả nghịch, và tìm $\boxed{A^{-1}}$ (= pp định thức)

, với $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ -7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

□ Ta có $|A| = (-3).1.3 + 6(-2)(-7) + 4.5.8$

$$-[4.1.(-7) + 6.5.3 + (-3)(-2).8]$$

$$\Rightarrow |A| = -9 + 84 + 160 + 28 - 90 - 48 = 125$$

$\Rightarrow |A| = 125 \neq 0$ ☞ nên A khả nghịch

TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO BẰNG PP ĐỊNH THỨC

☐ Ví dụ ☞ tiếp theo, ta tính 9 hệ số

$$\boxed{c_{ij} = (-1)^{i+j} \, |A(i \mid j)|} \quad (1 \le i, j \le 3)$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 16 = 19$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -(15 - 14) = -1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 40 + 7 = 47$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -(18 - 32) = 14$$

TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO BẰNG PP ĐỊNH THỨC

- Ví dụ

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 28 = 19$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -(-24 + 42) = -18$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(6 - 20) = 14$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 30 = -33$$

TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO BẰNG PP ĐỊNH THỨC

- Ví dụ ☞ tiếp theo ta lập $\boxed{C = (c_{ij})_{1 \le i, j \le 3}}$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 19 & -1 & 47 \\ 14 & 19 & -18 \\ -16 & 14 & -33 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{125} \cdot C^t =$$

TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO BẰNG PP ĐỊNH THỨC

☐ Lưu ý

☞ Tìm $\boxed{A^{-1}}$ (bằng pp GAUSS-JORDAN)

: dùng cho các ma trận không có tham số

☞ Tìm $\boxed{A^{-1}}$ (bằng pp định thức)

: dùng cho các ma trận có tham số hay có cấp n nhỏ

QUY TẮC CRAMER

☐ Ký hiệu xét hệ pttt viết dưới dạng tích ma trận

$$\boxed{AX = B}$$

QUY TẮC CRAMER

- Đặt $\boxed{\Delta = |A|}$

$\boxed{A_j}$ = ma trận A xóa cột j và thay thế bằng cột B $(1 \le j \le n)$

$$\boxed{\Delta_j = |A_j|} \quad (1 \le j \le n)$$

TH1: Nếu $\boxed{\Delta \neq 0}$ (nghĩa là $|A| \neq 0)$

☞ thì hệ **CÓ NGHIỆM DUY NHẤT**

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}} \quad \boxed{x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}} \quad \ldots \quad \boxed{x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}}$$

QUY TẮC CRAMER

✌ TH2: Nếu $\boxed{\Delta = 0}$, và có ít nhất một số j $\in \{1,2,\dots,n\}$

thỏa $\boxed{\Delta_j \neq 0}$ ☞ hệ **VÔ NGHIỆM**

👌 TH3: Nếu $\boxed{\Delta = 0}$, và $\boxed{\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0}$

☞ hệ **VÔ NGHIỆM** hoặc **VÔ SỐ NGHIỆM**

(không duy nhất nghiệm)

☞ phải giải hệ bằng pp **GAUSS-JORDAN** để có kết quả chính xác

QUY TẮC CRAMER

- Ví dụ giải và biện luận hệ sau

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{pmatrix}}_{A}\left|\underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{matrix}}_{B}\right.$$

, với m là tham số thực

- Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} \longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ m \end{vmatrix}$$

QUY TẮC CRAMER

- Ví dụ

$$\xlongequal{\text{dòng 1}} 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} m+2 & -3 \\ 1-2m & m \end{vmatrix} = m^2+2m+3-6m$$

$$= m^2-4m+3 = (m-1)(m-3)$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} \xleftrightarrow{(3)\to(3)+(2)} \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ m-2 \\ m-1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ m-5 \\ 2m-4 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột 1}} 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ m-1 & 2m-4 \end{vmatrix} = -2(2m-6) = 4(3-m)$$

QUY TẮC CRAMER

- Ví dụ

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & -2 & m+1 \end{vmatrix} \xleftrightarrow{(3)\to(3)+(2)} \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & 2 \\ -2 & \boxed{2} & m-5 \\ m-2 & \boxed{0} & 2m-4 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{cột 2}}{=\!=\!=} 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m-2 & 2m-4 \end{vmatrix} = 2m-4-2m+4 = 0$$

QUY TẮC CRAMER

- Ví dụ

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} \xleftrightarrow{(3)\to(3)+(2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{0} \\ -2 & m-2 & \boxed{2} \\ m-2 & m-1 & \boxed{0} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{cột 3}} 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m-2 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(m-1-2m+4) = 2(m-3)$$

QUY TẮC CRAMER

- Ví dụ

vậy, ta có

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta &= (m-1)(m-3) \\ \Delta_1 &= 4(3-m) \\ \Delta_2 &= 0 \\ \Delta_3 &= 2(m-3) \end{aligned}}$$

☞ Nếu $\boxed{1 \neq m \neq 3}$ thì $\boxed{\Delta \neq 0}$

☞ hệ **CÓ NGHIỆM DUY NHẤT**

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{1-m} \quad ; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0 \quad ; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2}{m-1}$$

QUY TẮC CRAMER

☐ Ví dụ ☞ Nếu $\boxed{m=1}$ thì $\boxed{\Delta = 0}$

, mà do $\boxed{\Delta_1 = 4(3-1) = 8 \neq 0}$

☞ hệ pt **VÔ NGHIỆM**

☞ Nếu $\boxed{m=3}$ thì $\boxed{\Delta = 0}$, và $\boxed{\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0}$

☞ ta giải hệ bằng pp **GAUSS-JORDAN**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

QUY TẮC CRAMER

- Ví dụ

$$\xrightarrow{(3)\to(3)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

☞ hệ pt đã cho có vô số nghiệm

$$\begin{cases} \\ x_3 = a \\ \\ \end{cases}$$

, với a thực tùy ý