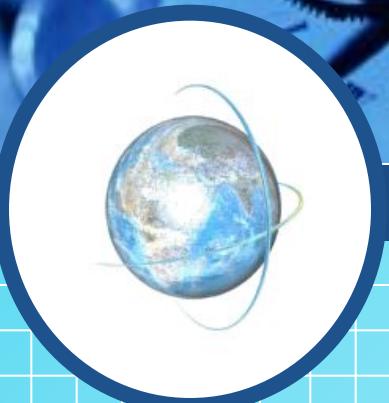


ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



Chương 6 – **DẠNG SONG TUYẾN TÍNH & DẠNG TOÀN PHƯƠNG**

ThS. LÊ HOÀNG TUẤN

Đ
A
T
S
O
X

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

Xét V và W là các KGVT trên F

Lúc này, ánh xạ $f : V \times W \rightarrow F$
 $(\alpha, \beta) \mapsto f(\alpha, \beta)$

đgl dạng song tuyến tính nếu f tuyến tính theo từng biến, nghĩa là

$$\begin{cases} f(c\alpha + \alpha', \beta) = cf(\alpha, \beta) + f(\alpha', \beta) \\ f(\alpha, c\beta + \beta') = cf(\alpha, \beta) + f(\alpha, \beta') \end{cases}$$

$$\forall \alpha, \alpha' \in V; \forall \beta, \beta' \in W; \forall c \in F$$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

Ví dụ xét V là KGVT các hàm liên tục trên \mathbb{R}

W là KGVT các hàm có đạo hàm mọi cấp trên \mathbb{R}

, và f là ánh xạ $f : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g, h) \mapsto \int_0^1 g(x)h(x)e^x dx$$

☞ f tuyễn tính theo từng biến (kiểm chứng dễ dàng)

☞ f là 1 dạng song tuyễn tính trên $V \times W$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

Ví dụ 2 xét $f : Q^2 \times Q^3 \rightarrow Q$

$$\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) \otimes f(\alpha, \beta) = 2u_1v_1 + 5u_1v_3 - 7u_2v_2 + 8u_2v_3$$

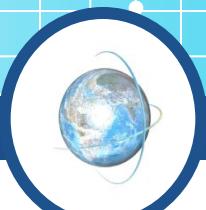
$\downarrow \qquad \downarrow$
 $\alpha \qquad \beta$

- ☞ f tuyễn tính theo từng biến (kiểm chứng dễ dàng)
- ☞ f là 1 dạng song tuyễn tính trên $Q^2 \times Q^3$

DẠNG
SƠ
GIẢ

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



DẠNG SONG TUYẾN TÍNH ĐỐI XỨNG

Xét dạng song tuyến tính

$$f : V \times V \rightarrow F$$

Lúc này, ta nói

f **đối xứng**, nếu $f(\beta, \alpha) = f(\alpha, \beta)$; $\forall \alpha, \beta \in V$

f **không đối xứng**, nếu $\exists \alpha, \beta : f(\alpha, \beta) \neq f(\beta, \alpha)$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



MA TRẬN BIỂU DIỄN DẠNG STT TRÊN CÁC KG HỮU HẠN CHIỀU

- Xét dạng song tuyến tính

$$f : V_m \times W_n \rightarrow F$$

, và V_m có cơ sở $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$

W_n có cơ sở $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$

- Tính

$$a_{ij} = f(\alpha_i, \beta_j) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

- Lập ma trận

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(F)$$

- Ký hiệu

$$A = [f]_{a, \beta}$$

& gọi là ma trận biểu diễn f theo cặp cơ sở a, β



Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



MA TRẬN BIỂU DIỄN DẠNG STT TRÊN CÁC KG HỮU HẠN CHIỀU

Ngoài
ra,

$\forall X \in V_m, \forall Y \in W_n$ thỏa

$$[X]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \otimes \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad [Y]_\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \otimes \\ y_n \end{pmatrix}$$

☞ thì

$$f(X, Y) = ([X]_a)^t A [Y]_\beta$$

, nghĩa là ta tính giá trị $f(X, Y)$ (với X, Y bất kỳ) dựa theo

$$= (x_1 \quad x_2 \quad \otimes \quad x_m) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \otimes \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A = [f]_{a,\beta}$$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



MA TRẬN BIỂU DIỄN DẠNG STT TRÊN CÁC KG HỮU HẠN CHIỀU

Ví dụ

$$f : R^3 \times R^2 \rightarrow R$$
$$(X, Y) \mapsto f(X, Y) \text{ , với } \begin{cases} X = (x_1, x_2, x_3) \\ Y = (y_1, y_2) \end{cases}$$

, và $f(X, Y) = 3x_1y_1 + 6x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 - 5x_3y_1$

☞ Và do $\left[\begin{array}{ll} R^3 \text{ có cơ sở} & a = \beta_0 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \\ R^2 \text{ có cơ sở} & \beta = \beta_0' = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2\} \end{array} \right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = f(\varepsilon_1, \varepsilon'_1) = 3 & ; a_{12} = f(\varepsilon_1, \varepsilon'_2) = 6 \\ a_{21} = f(\varepsilon_2, \varepsilon'_1) = -2 & ; a_{22} = f(\varepsilon_2, \varepsilon'_2) = 4 \\ a_{31} = f(\varepsilon_3, \varepsilon'_1) = -5 & ; a_{32} = f(\varepsilon_3, \varepsilon'_2) = 0 \end{cases}$$

DẠNG
TÍCH
SỐ
TỰ

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



MA TRẬN BIỂU DIỄN DẠNG STT TRÊN CÁC KG HỮU HẠN CHIỀU

$$\Rightarrow A = [f]_{\alpha, \beta} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}}$$

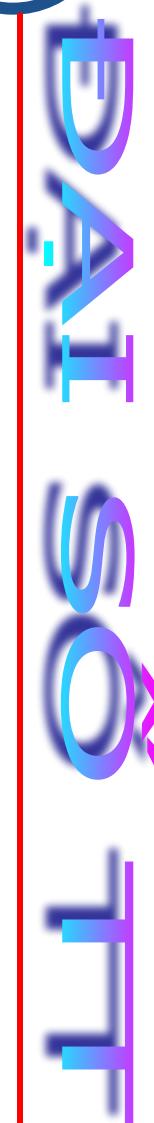
$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

Xét $f : V_m \times W_n \rightarrow F$ là dạng song tuyến tính

V_m có 2 cơ sở là a và a' ($P = P(a \rightarrow a')$)

W_n có 2 cơ sở là β và β' ($Q = P(\beta \rightarrow \beta')$)



Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

Ta có

$$[f]_{a',\beta'} = P^t [f]_{a,\beta} Q$$

Đặc biệt, nếu

$$\begin{cases} V_m \equiv W_n \\ a = \beta \quad ; P \equiv Q \\ a' = \beta' \end{cases} \text{ thì ta ghi}$$

$$\begin{cases} [f]_{a,\beta} \equiv [f]_a \\ [f]_{a',\beta'} \equiv [f]_{a'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [f]_{a'} = P^t [f]_a Q = P^t [f]_a P$$

Đặt

$$\text{rank}(f) = r([f]_{a,\beta})$$

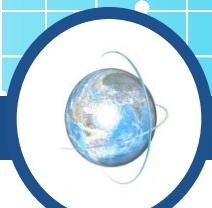
(độc lập với cặp cơ sở a và β)

hạng của f

hạng của ma trận

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

Ví dụ $f : R^2 \times R^3 \rightarrow R$

$$(X, Y) \mapsto f(X, Y) = 3x_1y_2 - 7x_1y_3 + 4x_2y_1 - 8x_2y_2$$

R^2 có cơ sở $a = \beta_0$ và $a' = \{\alpha_1 = (-2, 3), \alpha_2 = (5, -4)\}$

R^3 có cơ sở $\beta = \beta'_0$ và $\beta' = \{\beta_1 = (1, -2, 3), \beta_2 = (0, 4, -5), \beta_3 = (0, 0, 7)\}$

$$\Rightarrow P = P(a \rightarrow a') = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = P(\beta \rightarrow \beta') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

$$\Rightarrow [f]_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{\alpha', \beta'} = P^t [f]_{\alpha, \beta} Q$$

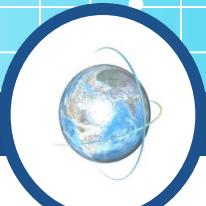
$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 114 & -190 & 98 \\ -215 & 363 & -245 \end{pmatrix}$$

& ta có $\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \boxed{\text{rank}(f) = 2}$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



DẠNG TOÀN PHƯƠNG

- Xét V là KGVT trên F
- Lúc này, ánh xạ $f : V \rightarrow F$ đgl **dạng toàn phương**, nếu

có dạng **song tuyễn tính** $\varphi : V \times V \rightarrow F$ sao cho

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha, \alpha) \quad ; \forall \alpha \in V$$

(φ không duy nhất)

- Tiếp theo, giả sử cho dạng toàn phương $f : V \rightarrow F$, nghĩa là tồn tại dạng song tuyễn tính φ thỏa

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha, \alpha)$$

DẠNG
TOÀN
PHƯƠNG

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



DẠNG TOÀN PHƯƠNG

- Khi đó, $\exists!$ dạng song tuyến tính đối xứng ψ thỏa

$$\psi(\alpha, \alpha) = f(\alpha); \forall \alpha \in V$$

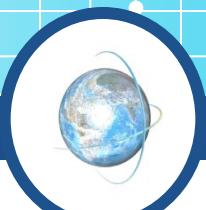
- Như vậy, dạng toàn phương $f \Leftrightarrow$ dạng song tuyến tính đối xứng ψ

$$\begin{cases} f(\alpha) = \psi(\alpha, \alpha); \forall \alpha \in V \\ \psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(f(\alpha + \beta) - f(\alpha) - f(\beta)) \quad \forall (\alpha, \beta) \end{cases}$$

DẠNG
TP
TOÀN
PHƯƠNG

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



MA TRẬN BIỂU DIỄN DẠNG TP TRÊN KG HỮU HẠN CHIỀU

- Giả sử V_n có cơ sở $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

$f : V_n \rightarrow F$ là dạng toàn phương

ψ là dạng song tuyến tính đối xứng (duy nhất) xác định f

- Đặt $[f]_a = [\psi]_a = (a_{ij} = \psi(\alpha_i, \alpha_j))_{1 \leq i, j \leq n}$

& gọi là ma trận biểu diễn f theo cơ sở a

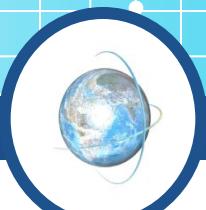
- Lúc này, $rank(f) = rank(\psi) = r([\psi]_a)$

- ☞ f không suy biến $\Leftrightarrow [f]_a$ khả nghịch $\Leftrightarrow rank(f) = n$ (không kỳ dị)
- ☞ f suy biến (kỳ dị) $\Leftrightarrow [f]_a$ không khả nghịch $\Leftrightarrow rank(f) < n$

D
A
I
S
O
-

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



CHUYỂN ĐỔI CƠ SỞ

- Giả sử V_n có 2 cơ sở a và a'

$$P = P(a \rightarrow a')$$

$f : V_n \rightarrow F$ là dạng toàn phương

- Ta có

$$[f]_{a'} = P^t [f]_a P \quad , \text{với} \quad \begin{cases} [f]_{a'} = [\psi]_{a'} \\ [f]_a = [\psi]_a \end{cases}$$

LƯU Ý

$f : V_n \rightarrow F$ là dạng toàn phương (V_n có cơ sở a)

$$[f]_a = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



LƯU Ý

$$\forall X \in V_n \quad \text{mà} \quad [X]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \otimes \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(X) = [X]_a^t [f]_a [X]_a$$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad \otimes \quad x_n) (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \otimes \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + \otimes + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j}^n a_{ij}x_i x_j$$

DẠNG
DẠNG
DẠNG
DẠNG
DẠNG
DẠNG

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



CHÍNH TẮC HÓA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

- Cho dạng toàn phương $f : V_n \rightarrow F$ (V_n có cơ sở a)

$$\forall X \in V_n \quad \text{mà} \quad [X]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \otimes \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ và}$$

$$f(X) = a_{11}x_1^2 + \otimes + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j}^n a_{ij}x_i x_j$$

- Ta muốn tìm cơ sở β của V_n sao cho

D
A
T
S
O
T

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



CHÍNH TẮC HÓA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

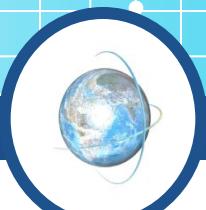
$$\forall X \in V_n \quad \text{mà} \quad [X]_{\beta} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \otimes \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{thì}$$

$$f(X) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \otimes + \lambda_n y_n^2$$

(quá trình này đgl chính tắc hóa dạng toàn phương)

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



THUẬT TOÁN LAGRANGE

□ Xét dạng toàn phương $f \neq 0$ (V_n có cơ sở a)

$$\forall X \in V_n \quad \text{mà} \quad [X]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \otimes \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ và}$$

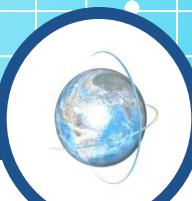
$$f(X) = a_{11}x_1^2 + \otimes + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i < j}^n a_{ij}x_i x_j$$

☞ TH1: nếu $a_{11} = a_{22} = \otimes = a_{nn} = 0$

$$\Rightarrow f(X) = \sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j \neq 0$$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



THUẬT TOÁN LAGRANGE

, nghĩa là $\exists k < l : a_{kl} \neq 0$

□ Đổi biến

$$\begin{cases} z_k = \frac{1}{2}(x_k + x_l) \\ z_l = \frac{1}{2}(x_k - x_l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = z_k + z_l \\ x_l = z_k - z_l \end{cases}$$

$$z_j = x_j \quad \text{với các } j \text{ còn lại}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(X) &= a_{kl}x_kx_l + \square = a_{kl}(z_k + z_l)(z_k - z_l) + \square \\ &= a_{kl}z_k^2 - a_{kl}z_l^2 + \square \end{aligned}$$

☞ Ta chuyển qua trường hợp 2

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



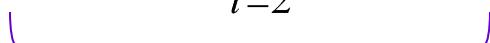
THUẬT TOÁN LAGRANGE

☞ TH2: nếu

$$\exists j \in \{1, 2, \dots, n\} : a_{jj} \neq 0$$

Chẳng hạn như giả sử $a_{11} \neq 0$

Ta viết lại $f(X) = (a_{11}x_1^2 + \sum_{t=2}^n a_{1t}x_1x_t) + g(x_2, \dots, x_n)$



có x_1



không có x_1

$$y_1^2$$

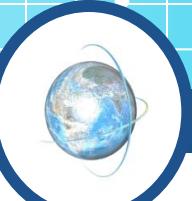
$$= a_{11} \left(x_1^2 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{t=2}^n a_{1t}x_1x_t \right) + g(x_2, \dots, x_n)$$

$$= a_{11} \left[\left(x_1 + \frac{1}{2a_{11}} \sum_{t=2}^n a_{1t}x_t \right)^2 \right] - a_{11} \left(\frac{1}{2a_{11}} \sum_{t=2}^n a_{1t}x_t \right)^2 + g(x_2, \dots, x_n)$$

D
A
T
I
S
O
+

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



THUẬT TOÁN LAGRANGE

$$\Rightarrow f(X) = a_{11}y_1^2 + h(x_2, \otimes, x_n)$$

dạng toàn phương theo (n-1) biến là x_2, \otimes, x_n

☞ Tiếp tục làm (theo tinh thần quy nạp)

$$\Rightarrow f(X) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \otimes + \lambda_n y_n^2$$

□ Đặt

$$[X]_{\beta} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \otimes \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \otimes \\ x_n \end{pmatrix} [X]_a$$

đang tìm

đã cho

$P = P(\beta \rightarrow a)$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



THUẬT TOÁN LAGRANGE

Ta biết $P = P(\beta \rightarrow a)$

$$\Rightarrow Q = P(a \rightarrow \beta) = P^{-1}$$

mà ta đã biết cơ sở a

☞ cơ sở β (theo định nghĩa)

D
A
T
A
S
O
T

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



CHÍNH TẮC HÓA BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

Xét dạng toàn phương $f : V_n \rightarrow R$ có

$$f(X) = b_{11}x_1^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 + \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij}x_i x_j \quad (\forall X \in V_n)$$

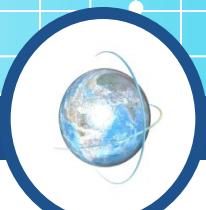
mà $[X]_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

, với a là 1 cơ sở
cố định của V_n

Đặt $a_{ij} = a_{ji} = \begin{cases} b_{ii} & \text{khi } i = j \\ b_{ij}/2 & \text{khi } i < j \end{cases}$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



CHÍNH TẮC HÓA BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

Khi lúc này, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ là ma trận đối xứng , và

$$f(X) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (a_{ij} + a_{ji})x_i x_j$$

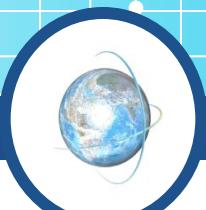
$$b_{ij}$$

$$= a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} b_{ij}x_i x_j$$

$$\Rightarrow f(X) = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



CHÍNH TẮC HÓA BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

$$\Rightarrow f(X) = [X]_a^t A [X]_a$$

□ Lúc này, $\exists P \in M_n(R)$ thỏa $P^{-1} = P^t$ và

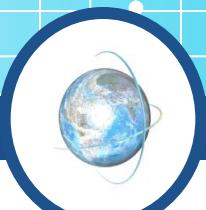
$$P^{-1}AP = P^t AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

☞ Chọn cơ sở β của V_n sao cho $P(a \rightarrow \beta) = P$

D
A
T
A
S
O
-

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



CHÍNH TẮC HÓA BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

Đặt $[X]_{\beta} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \otimes \\ y_n \end{pmatrix}$ thì $\begin{cases} [X]_a = P[X]_{\beta} \\ [X]_a^t = (P[X]_{\beta})^t = [X]_{\beta}^t P^t \end{cases}$

Thay vào $f(X)$ ta có

$$\begin{aligned} f(X) &= [X]_a^t A [X]_a \\ &= ([X]_{\beta}^t P^t) A (P[X]_{\beta}) \\ &= [X]_{\beta}^t P^t A P [X]_{\beta} \end{aligned}$$

D
A
T
S
O
L
T

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



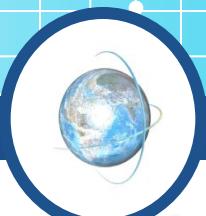
CHÍNH TẮC HÓA BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO

$$\Rightarrow f(X) = (y_1 \quad y_2 \quad \otimes \quad y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \otimes & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \otimes \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \otimes + \lambda_n y_n^2$$

đây là **dạng chính tắc hóa dạng toàn phương** thực
bằng phép biến đổi trực giao

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



LUẬT QUÁN TÍNH

- Cho dạng toàn phương

$$f : V_n \rightarrow R$$

- Xét 1 dạng chính tắc của f (theo 1 cơ sở a nào đó)

$$f(X) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

$$\forall X \in V_n \quad \text{mà} \quad [X]_a = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Đặt $\begin{cases} p = \text{số hệ số} > 0 \text{ của dạng chính tắc trên} \\ q = \dots < 0 \\ r = \dots = 0 \end{cases}$

$$p + q + r = n$$

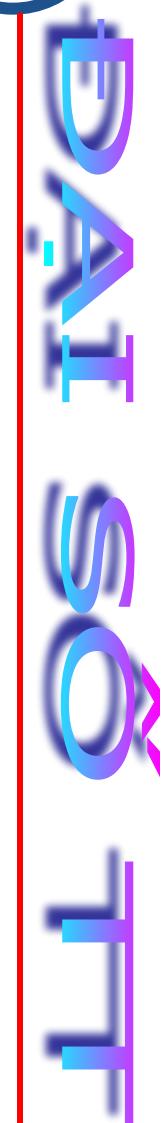
Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



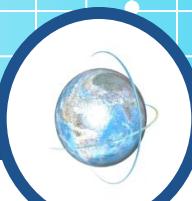
LUẬT QUÁN TÍNH

- Khi đó,
- p, q, r là 3 hằng số, chỉ phụ thuộc f , và độc lập với cơ sở a
(tương ứng mỗi dạng chính tắc)
- gọi (p, q) là **cặp chỉ số** quán tính của **dạng toàn phương** f
- f không suy biến $\Leftrightarrow p + q = n$ (nghĩa là $r = 0$)
- f suy biến $\Leftrightarrow p + q < n$ (nghĩa là $r \geq 1$)



Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



ĐỊNH NGHĨA

- Cho dạng toàn phương

$$f : V_n \rightarrow R$$

- Ta nói f xác định dương, nếu

$$f(X) > 0 \quad (\forall X \in V_n \setminus \{0\})$$

- Ta nói f xác định âm, nếu

$$f(X) < 0 \quad (\forall X \in V_n \setminus \{0\})$$

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



MỆNH ĐỀ

- Cho dạng toàn phương

$$f : V_n \rightarrow R$$

có cặp chỉ số quán tính p và q . Khi đó

- f xác định dương $\Leftrightarrow p = n \Leftrightarrow q = r = 0$

(tất cả hệ số trong mọi dạng chính tắc của f đều > 0)

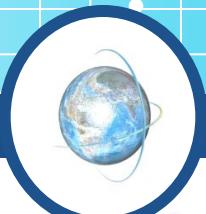
- f xác định âm $\Leftrightarrow q = n \Leftrightarrow p = r = 0$

(tất cả hệ số trong mọi dạng chính tắc của f đều < 0)

- Suy ra, nếu f xác định dương (hoặc âm) thì f không suy biến

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



ĐỊNH NGHĨA

- Cho ma trận

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(R)$$

- Đặt

$$A_1 = (a_{11}) \in M_1(R) \quad \text{và} \quad \Delta_1 = |A_1|$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(R) \quad \text{và} \quad \Delta_2 = |A_2|$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(R) \quad \text{và} \quad \Delta_3 = |A_3|$$

DẠNG
STT
DẠNG
TP
DẠNG
SƠ
DẠNG

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



ĐỊNH NGHĨA

Tương tự, ta
có

$$A_n = A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(R) \quad \text{và} \quad \Delta_n = |A_n|$$

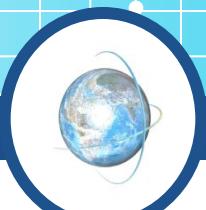
, với

A_1, A_2, \dots, A_n là các ma trận (vuông) con ở góc
trên,
bên trái của A

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ là các định thức con (chính) của A

Chương 6 – DẠNG STT & DẠNG TP

Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin – ĐHQG Tp.HCM – <http://www.uit.edu.vn>



TIÊU CHUẨN SYLVESTER VỀ TÍNH XÁC ĐỊNH > 0 VÀ < 0

- Cho dạng toàn phương

$$f : V_n \rightarrow R$$

- Tìm ma trận đối xứng A sao cho

$$f(X) = [X]_a^t A [X]_a$$

$\forall X \in V_n$ và a là 1 cơ sở của V_n

- Gọi $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ là các định thức con (chính) của A

- Khi đó,

- f xác định dương $\Leftrightarrow (\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0)$

- f xác định âm $\Leftrightarrow (-f)$ xác định dương (*)

mà $-f(X) = [X]_a^t (-A) [X]_a$, nên

$$(*) \Leftrightarrow ((-1)^1 \Delta_1 > 0, (-1)^2 \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0)$$

