ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ĐẠI SỐ TT

Chương 1 – TRƯỜNG SỐ PHỨC

ThS. LÊ HOÀNG TUẤN

XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC

☞ Xuất phát từ pt $\boxed{x^2+1=0}$ vô nghiệm trên R

☞ Tìm cách mở rộng R

☞ Ta có $R \subset R^2 = R \times R = \{(a,b) \mid a \in R, b \in R\}$

và xem $\boxed{a \equiv (a,0)}$

Trên R^2 ta chỉ có phép cộng (+) tự nhiên

$$\forall (a,b),(c,d) \in R^2 \quad : \quad (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$

✌ Ta định nghĩa thêm phép nhân (.) như sau

$$\forall (a,b),(c,d) \in R^2 \quad : \quad (a,b).(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

XÂY DỰNG TRƯỜNG SỐ PHỨC

Khi đó, $\boxed{(R^2,+,.)}$ được gọi là (đgl) trường số phức $\boxed{C}$

và mỗi $(a,b)\in C$ gọi là một số phức

☐ Ví dụ cho 2 số phức $\begin{cases} z=(2,-7) \\ w=(-5,3) \end{cases}$

Lúc này, $z+w=(2+(-5),-7+3)=(-3,-4)$, và

$$z.w=(2(-5)-(-7)3,2.3+(-5)(-7))=(11,41)$$

SỐ ẢO $\boxed{i=(0,1)\in C}$

☞ Ta có $i^2=i\times i=(0,1).(0,1)=(0-1,0)=(-1,0)\equiv -1$

SỐ ẢO

Như vậy, $\boxed{i^2 = -1}$ □ pt $x^2 + 1 = 0$ có ngiệm là $x = \pm i$

và i đgl số ảo (imaginary number)

☞ Tính chất

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$ □□

$i^3 = i^2.i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = 1$

$i^5 = i^4.i = i$

$i^6 = i^4.i^2 = -1$

$i^7 = i^6.i = -i$

Tổng quát:

$$\forall k \in Z: \; i^k = \begin{cases} 1 & \text{khi } k = 4t \\ i & k = 4t+1 \\ -1 & k = 4t+2 \\ -i & k = 4t+3 \end{cases}$$

DẠNG ĐẠI SỐ CỦA SỐ PHỨC

Xét số phức $\boxed{z = (a,b) \in C}$, ta có:

$$z = (a,0) + (0,b) = (a,0) + b(0,1)$$
$$= a + ib$$

i

- Như vậy, $\boxed{z = a + ib}$ là dạng đại số của số phức z

$\mathrm{Im}(z)$ = phần ảo của z (imaginary part)

$\mathrm{Re}(z)$ = phần thực của z (real part)

- Lúc này, $C = \{(a,b) \mid a \in R, b \in R\}$, hay

$$C = \{z = a + ib \mid a \in R, b \in R\}$$

CÁC PHÉP TÍNH DƯỚI DẠNG ĐẠI SỐ

- Ta có thể làm các phép tính: cộng, trừ, nhân, chia <u>một cách tự nhiên</u> đối với các số phức dạng đại số

☞ Lưu ý: $i^2 = -1$ và cách hạ các lũy thừa của i

- Ví dụ cho 2 số phức $\begin{cases} z = 5 - 2i \\ w = -3 + 4i \end{cases}$, thì ta có

$$z + w = (5 - 2i) + (-3 + 4i) = 2 + 2i$$

$$z - w = (5 - 2i) - (-3 + 4i) = 8 - 6i$$

$$z.w = (5 - 2i)(-3 + 4i) = -15 + 20i + 6i - 8i^2 = -7 + 26i$$

CÁC PHÉP TÍNH DƯỚI DẠNG ĐẠI SỐ

Còn

$$\frac{z}{w} = \frac{5-2i}{-3+4i} = \frac{(5-2i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$

??

$$= \frac{-15-20i+6i+8i^2}{(-3)^2-(4i)^2}$$

$$= \frac{-23-14i}{9+16} = -\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$$

tìm cách làm sao cho mẫu số mất số ảo i

□ Lưu ý $\boxed{(a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2}$

đã mất số ảo i

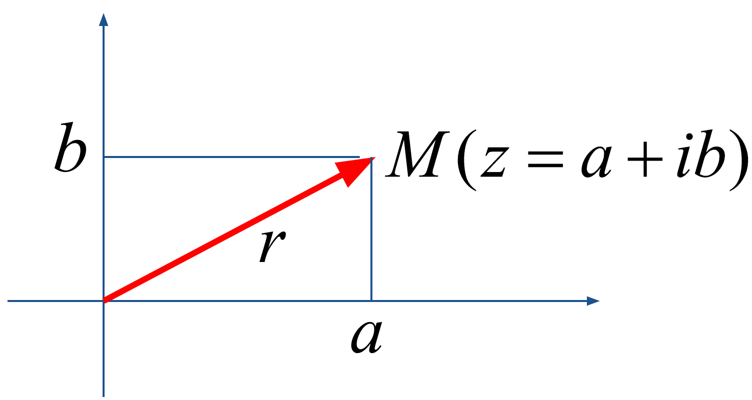
và $\boxed{(a-ib)}$ đgl số phức liên hợp của số phức $\boxed{(a+ib)}$ & ngược lại

ĐẠI SỐ TT

ĐỘ DÀI (MODULE) CỦA SỐ PHỨC

Số phức $\boxed{z = a + ib}$ có biểu diễn hình học là vector $\overrightarrow{OM} = \{a, b\}$

trên hệ trục tọa độ Oxy



Đặt $\boxed{r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}}$

= độ dài (module) của z

& ký hiệu là $\boxed{r = |z|}$

□ Ví dụ

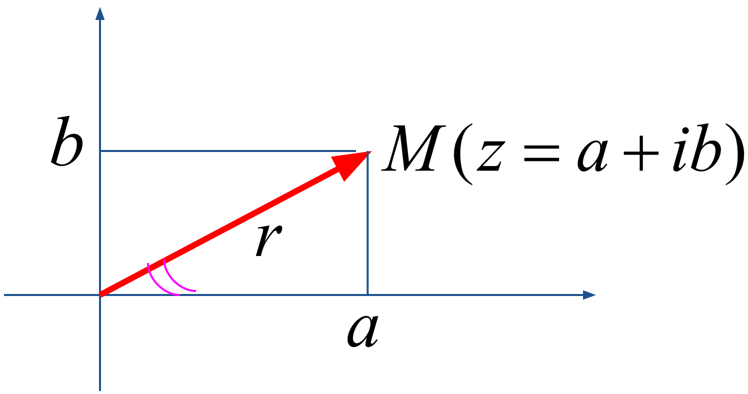
$z = 12 - 16i$ có độ dài $|z| = \sqrt{12^2 + (-16)^2} = 20$

$w = 3 + 4i$ .... $|w| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$k = 5 - 2i$ .... $|k| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

Cho số phức $\boxed{z = a + ib}$ & giả sử $\boxed{z \neq 0}$ (nghĩa là $\boxed{r = |z| > 0}$)



Viết $z = a + ib = r\left(\frac{a}{r} + i \cdot \frac{b}{r}\right)$

thì $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$ vì $r^2 = a^2 + b^2$

, nghĩa là ta tìm được góc $\boxed{\varphi \in R}$ thỏa $\sin\varphi = \frac{b}{r}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$

DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

☐ Lưu ý các nghiệm $\boxed{\varphi}$ luôn sai kém nhau một bội nguyên của $\boxed{2\pi}$, nghĩa là nếu chọn φ trên một chu kỳ $(-\pi,\pi]$ hay $[0,2\pi)$ thì φ là duy nhất

Và ta ký hiệu $\boxed{\varphi = \arg(z)}$ = đối số của z (argument)

☐ Như vậy,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

với $\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r}, \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

là dạng lượng giác của z

DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

□ Lưu ý nếu $\boxed{z=0}$ thì z có dạng lượng giác là

$$\boxed{z = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$, với φ tùy ý

□ Ví dụ a/ Cho $z = 2 + 2i\sqrt{3}$, thì ta có

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$z = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

b/ Cho $z = -5 + 5i$, có $r = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

$$z = 5\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

CÁC PHÉP TÍNH THEO DẠNG LƯỢNG GIÁC

Cho 2 số phức $\begin{cases} z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ w = s(\cos\psi + i\sin\psi) \end{cases}$, khi đó ta có

$$\begin{cases} z.w = rs[\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)] \\ \dfrac{z}{w} = \dfrac{r}{s}[\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)] \end{cases}$$ (khi $w \neq 0$)

□ Đặc biệt, nếu $\boxed{z \neq 0}$ thì

$$\boxed{z^k = r^k[\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)]} \quad , \forall k \in Z$$

□ Ví dụ Cho 2 số phức $\begin{cases} z = 3(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}) \\ w = 5(\cos\left(\dfrac{-2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{-2\pi}{5}\right) \end{cases}$

CÁC PHÉP TÍNH THEO DẠNG LƯỢNG GIÁC

$$\Rightarrow z.w = 15[\cos(\frac{\pi}{7} - \frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{7} - \frac{2\pi}{5})]$$

$$= 15[\cos(-\frac{9\pi}{35}) + i\sin(-\frac{9\pi}{35})]$$

, và

$$\frac{z}{w} = \frac{3}{5}[\cos(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{5})]$$

$$= \frac{3}{5}[\cos(\frac{19\pi}{35}) + i\sin(\frac{19\pi}{35})]$$

☐ Ví dụ 2 Cho $\boxed{z = 4\sqrt{3} - 4i}$ ☞ tính $\boxed{z^{2008}}$

CÁC PHÉP TÍNH THEO DẠNG LƯỢNG GIÁC

- Ta có $r = |z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 16} = 8$

$$\Rightarrow z = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\Rightarrow z^{2008} = 8^{2008}\left[\cos\left(-\frac{2008\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{2008\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 8^{2008}\left[\cos\left(-\frac{2004\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2004\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 8^{2008}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 8^{2008}\left[-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right] \qquad = 8^{2007}.4[-1 + i\sqrt{3}]$$

CĂN CỦA SỐ PHỨC

Cho số phức $\boxed{z \in C}$, và n nguyên $\boxed{n \geq 2}$, thì

(tập hợp các căn bậc n của z) $\longrightarrow$ $\boxed{\sqrt[n]{z} = \{w \in C \mid w^n = z\}}$

☐ Ví dụ

$$\sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\} \quad \text{, vì} \quad \begin{cases} 1^4 = 1 \\ (-1)^4 = 1 \\ i^4 = 1 \\ (-i)^4 = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{0} = \{0\}$$

CĂN BẬC 2 CỦA SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG ĐẠI SỐ

☐ Cho số phức $0 \neq z = a + ib$

CĂN BẬC 2 CỦA SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG ĐẠI SỐ

- Đặt

$$\boxed{d = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \geq 0}$$

$$\boxed{c = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \geq 0}$$

$$\boxed{u = \sqrt{c}} \qquad \boxed{v = \sqrt{d}}$$

, thì ta có

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \{(u+iv);-(u+iv)\} & (\text{ nếu } \boxed{b \geq 0}\ ) \\ \{(u-iv);-(u-iv)\} & (\text{ nếu } \boxed{b < 0}\ ) \end{cases}$$

CĂN BẬC 2 CỦA SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG ĐẠI SỐ

☐ Ví dụ Tìm $\sqrt{z}$ với $z = 21 + 20i$

a b

, nên ta có

$$c = \frac{\sqrt{20^2 + 21^2} + 21}{2} = \frac{\sqrt{841} + 21}{2} = \frac{29 + 21}{2} = 25$$

$$d = \frac{\sqrt{20^2 + 21^2} - 21}{2} = \frac{\sqrt{841} - 21}{2} = \frac{29 - 21}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{c} = 5 \\ v = \sqrt{d} = 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{21 + 20i} = \{(5 + 2i), -(5 + 2i)\}$$

CĂN BẬC 2 CỦA SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG ĐẠI SỐ

□ Ví dụ 2 Tìm $\sqrt{w}$ với $w = -8 - 6i$

a b

, nên ta có

$$c = \frac{\sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} + (-8)}{2} = \frac{\sqrt{100} - 8}{2} = \frac{10 - 8}{2} = 1$$

$$d = \frac{\sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} - (-8)}{2} = \frac{\sqrt{100} + 8}{2} = \frac{10 + 8}{2} = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{c} = 1 \\ v = \sqrt{d} = 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \sqrt{w} = \sqrt{-8 - 6i} = \{(1 - 3i), -(1 - 3i)\}$$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 TRÊN C

☐ Xét pt bậc 2 trên C $\boxed{az^2 + bz + c = 0}$ (với $a, b, c \in C; a \neq 0$)

☞ Tính $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ hay $\boxed{\Delta' = (b')^2 - ac}$ $(b' = b/2)$

👍 TH1: $\boxed{\Delta = 0}$ ☞ thì pt có nghiệm kép

$$z = -\frac{b}{2a} = -\frac{b'}{a}$$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 TRÊN C

✌ TH2: $\boxed{\Delta \neq 0}$ ☞ ta rút $\sqrt{\Delta} = \{\alpha, -\alpha\}$ (dạng đại số)

hoặc $\boxed{\Delta' \neq 0}$ ☞ ta rút $\sqrt{\Delta'} = \{\alpha, -\alpha\}$

☞ thì pt có 2 nghiệm phân biệt

$$z_1 = \frac{-b+\alpha}{2a} = \frac{-b'+\alpha}{a}$$

$$z_2 = \frac{-b-\alpha}{2a} = \frac{-b'-\alpha}{a}$$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 TRÊN C

☐ Ví dụ 1 giải pt sau trên C $\boxed{2z^2 - 3z + 7 = 0}$

☞ Ta có $\Delta = 3^2 - 4.2.7 = -47 = 47i^2$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \{i\sqrt{47}, -i\sqrt{47}\}$$

☞ Pt có 2 nghiệm pb $z_1 = \dfrac{3 + i\sqrt{47}}{4}$

$$z_2 = \frac{3 - i\sqrt{47}}{4}$$

☐ Ví dụ 2 giải pt sau trên C

$$\boxed{\underbrace{(1+i)}_{a} z^2 + \underbrace{(6-4i)}_{b} z \underbrace{- 5(3+i)}_{c} = 0}$$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 TRÊN C

☞ Ta có $\Delta' = (3-2i)^2 + 5(3+i)(1+i)$

$$= 9 + 4i^2 - 12i + 15 + 15i + 5i + 5i^2$$

$$= 15 + 8i$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{15^2+8^2}+15}{2} = \frac{17+15}{2} = 16$$

$$u = \sqrt{c} = 4$$

$$\& \, d = \frac{\sqrt{15^2+8^2}-15}{2} = \frac{17-15}{2} = 1$$

$$v = \sqrt{d} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \{(4+i), -(4+i)\}$$

☞ pt có 2 nghiệm pb

$$z_1 = \frac{2i-3+4+i}{1+i} = \frac{3i+1}{1+i} = i+2$$

$$z_2 = \frac{2i-3-(4+i)}{1+i} = \frac{i-7}{1+i} = 4i-3$$

CĂN BẬC n (n>=2) CỦA SỐ PHỨC DẠNG LƯỢNG GIÁC

- Xét số phức $\boxed{z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$

, với
$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}; \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \\ r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

- Muốn $\boxed{\varphi \in [-\pi, \pi]}$

ta chọn
$$\varphi = \begin{cases} \arcsin\dfrac{b}{r} & ; a \geq 0 \\ \pi - \arcsin\dfrac{b}{r} & ; a < 0, b \geq 0 \\ -\pi - \arcsin\dfrac{b}{r} & ; a < 0, b < 0 \end{cases}$$

CĂN BẬC n (n>=2) CỦA SỐ PHỨC DẠNG LƯỢNG GIÁC

- Nếu $\boxed{z = 0}$ thì $\sqrt[n]{z} = \{0\}$
- Nếu $\boxed{z \neq 0}$ thì $\sqrt[n]{z} = \{w \in C \mid w^n = z\}$

là tập hợp có đúng n phần tử (viết dưới dạng lượng giác) như sau:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)\right]\right\}$$

, trong đó $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ hay $k \in \{1,2,\dots,n\}$

CĂN BẬC n (n>=2) CỦA SỐ PHỨC DẠNG LƯỢNG GIÁC

- Ví dụ 1 $z = 2 + 2i\sqrt{3}$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{z} = \left\{ z_k = \sqrt[5]{4}\left[\cos\left(\frac{(\pi/3) + k2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{(\pi/3) + k2\pi}{5}\right)\right]\right\}$$

, với $k \in \{0, 1, \ldots, 4\}$ hay $k \in \{1, \ldots, 5\}$

- Cụ thể,

$$z_1 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\left(\frac{(\pi/3) + 2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{(\pi/3) + 2\pi}{5}\right)\right]$$

CĂN BẬC n (n>=2) CỦA SỐ PHỨC DẠNG LƯỢNG GIÁC

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right]$$, tương tự

$$z_2 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right]$$

$$z_3 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right]$$

$$z_4 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right]$$

$$\boxed{z_0 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right] = z_5 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{31\pi}{15} + i\sin\frac{31\pi}{15}\right]}$$

CĂN BẬC n (n>=2) CỦA SỐ PHỨC DẠNG LƯỢNG GIÁC

- Ví dụ 2: căn bậc n của đơn vị 1 $\boxed{1 = \cos 0 + i\sin 0}$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{1} = \left\{ z_k = \cos\frac{k2\pi}{n} + i\sin\frac{k2\pi}{n} \right\}}$$

, với $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ hay $k \in \{1,2,\ldots,n\}$

- Cụ thể

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ z_k = \cos\frac{k2\pi}{3} + i\sin\frac{k2\pi}{3} \right\} \quad (k = 0,1,2)$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

CĂN BẬC n (n>=2) CỦA SỐ PHỨC DẠNG LƯỢNG GIÁC

- Ví dụ 3 $z = 3 + 4i \quad = 5(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

, với $\varphi = \arcsin\frac{4}{5} \in [-\pi, \pi]$

$$\Rightarrow \sqrt[8]{z} = \sqrt[8]{3+4i} = \left\{ z_k = \sqrt[8]{5}\left[\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k2\pi}{8}\right)\right]\right\}$$

$$(k = 0,1,2,\ldots,7)$$