ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ĐẠI SỐ TT

Chương 2 – MA TRẬN & HỆ PT TUYẾN TÍNH

ThS. LÊ HOÀNG TUẤN

☐ Ký hiệu F = trường số Q (hoặc R , hoặc C)

MA TRẬN – MATRIX - MATRICE

☞ Định nghĩa một ma trận kích thước (mxn) trên *F* là 1 bảng số chữ nhật có <u>m dòng</u> và <u>n cột</u> như sau

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

☞ dòng 1
☞ dòng 2
☞ dòng 3
☞ dòng m

cột 1 cột 2 cột 3 cột n

MA TRẬN – MATRIX - MATRICE

- với $a_{ij} \in$ trường $F \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$

- viết gọn $\boxed{A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}}$

- khi m=n thì A gọi là <u>ma trận vuông cấp n</u> trên *F*, và viết gọn là $\boxed{A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}}$

- ký hiệu

$\mathrm{M}_{m \times n}(F)$ = tập hợp <u>tất cả</u> các ma trận cấp (mxn) trên *F*

$\mathrm{M}_{n}(F)$ = tập hợp <u>tất cả</u> các ma trận vuông cấp n trên *F*

MA TRẬN – MATRIX - MATRICE

- Ví dụ

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2/5 & 8 & 0 \\ 11/7 & -1 & 4 & -15 \\ 6 & 5 & -10/3 & 4/9 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(Q) \subset M_{3\times 4}(R)$$

$$B=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2/7 & -8 \\ -1 & \ln 3 & 0 \\ \sqrt[5]{11} & -9 & \sin 5 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 \\ -9/5 \\ i\ln 3 \\ e \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(C)$$

$$C=\begin{pmatrix} 7+2i & -3 & 0 & \pi + i\sqrt{5} & 4/9 \end{pmatrix} \in M_{1\times 5}(C)$$

MA TRẬN ZERO

☞ Là ma trận có tất cả các hệ số đều = 0 , ký hiệu O $O_{m\times n}$ O_n

☐ Ví dụ

$$O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG CHO MA TRẬN

☐ Có 3 phép biến đổi sơ cấp trên dòng cho ma trận

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG CHO MA TRẬN

PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG LOẠI 1

☞ nhân dòng thứ (i) với số $\boxed{c \neq 0}$ $(c \in F)$

$$\boxed{A \xrightarrow{(i) \to c(i)} A'}$$

☐ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2) \to -3/7(2)} A' = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG CHO MA TRẬN

✌ PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG LOẠI 2

☞ hoán vị dòng thứ (i) với dòng thứ (j)

$$\boxed{A \xrightarrow{(i)\leftrightarrow(j)} A'}$$

☐ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \qquad A' = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG CHO MA TRẬN

👌 PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN DÒNG LOẠI 3

☞ thay dòng (i) bằng [dòng (i) + c.dòng (j)]

$$\boxed{c \neq 0} \qquad (c \in F)$$

$$\boxed{A \xrightarrow{(i)\to[(i)+c(j)]} A'}$$

☐ Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)\to(3)-5(2)} A' = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

□ Một hệ pttt gồm m phương trình và n ẩn số trên *F* là 1 hệ pt có dạng

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

(*)

, trong đó $\boxed{a_{ij}}$ $\boxed{b_i}$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ là các hằng số cho trước

$\boxed{x_1, x_2, \cdots, x_n}$ là n ẩn số cần tìm

$$ax + by + c = 0$$

(tuyến tính ⇔ các ẩn số ở dạng bậc 1 và có tính chất đường thẳng)

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

☐ Đặt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

☞ thì hệ pt (*) được viết gọn thành 2 dạng

$$AX = B$$

(dạng tích ma trận)

$$(A \mid B)$$

(dạng ma trận hóa)

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

☐ Ví dụ xét hệ pttt

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + (9/11)x_3 - 6x_4 - (2/7)x_5 = 0 \\ 4x_5 - \pi x_1 + 8x_4 - (\ln 3)x_2 = -3 \\ 8x_3 + x_5 - 2x_2 + (\sin 2)x_4 = \sqrt[7]{2} \\ ex_4 - x_1 + 9x_5 + (10/3)x_3 = 1 \end{cases}$$

☞ dạng ma trận hóa

$$\boxed{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5}$$

hiểu ngầm

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

☞ dạng tích ma trận

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = B$$

, với

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 9/11 & -6 & -2/7 \\ -\pi & -\ln 3 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & -2 & 8 & \sin 2 & 1 \\ -1 & 0 & 10/3 & e & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ \sqrt[7]{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

NGHIỆM CỦA 1 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

- Xét hệ pttt $\boxed{AX = B}$

- Ta nói bộ số $\boxed{(c_1, c_2, \ldots, c_n)}$ là 1 nghiệm (1 lời giải) của hệ nếu tất cả các pt của hệ đều được thỏa khi ta thay thế

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$$

- Lưu ý chỉ có đúng 1 trong 3 trường hợp sau xảy ra cho 1 hệ pttt

👍 TH1: hệ vô nghiệm

✌ TH2: hệ có nghiệm duy nhất

👌 TH3: hệ có vô số nghiệm

NGHIỆM CỦA 1 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

□ Ví dụ

a/ hệ $\sqrt{5}x = -2 \quad (F = R)$

có 1 nghiệm $x = -2/\sqrt{5}$

b/ hệ $0x = \pi \quad (F = R)$ vô nghiệm

c/ hệ $0x = 0 \quad (F = R)$ có nghiệm x thực tùy ý (vô số nghiệm)

d/ hệ $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + y = -7 \end{cases} \quad (F = Q)$

có nghiệm duy nhất $x = -1, y = -2$

NGHIỆM CỦA 1 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

- ☐ Ví dụ

e/ hệ $\begin{cases} 7x+4y=5 & (1) \\ -14x-8y=2 & (2) \end{cases} \xleftrightarrow{(2)\to(2)+2(1)} \begin{cases} 7x+4y=5 \\ \boxed{0x+0y=12} \end{cases}$

vô nghiệm

f/ hệ $\begin{cases} 3x-5y=1 & (1) \\ 9x-15y=3 & (2) \end{cases} \xleftrightarrow{(2)\to(2)-3(1)} \begin{cases} 3x-5y=1 \\ \boxed{0x+0y=0} \end{cases}$

hằng đúng

☞ nghiệm $\begin{cases} y=a \\ x=\dfrac{5a+1}{3} \end{cases}$

a hữu tỷ tùy ý

HỆ PTTT THUẦN NHẤT

☞ Là hệ có dạng $\boxed{AX = O}$ (nghĩa là $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$)

☐ Dễ thấy hệ này có 1 nghiệm là $\boxed{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0}$

$\Downarrow$

(nghiệm tầm thường)

☐ Hệ thuần nhất có nghiệm duy nhất / vô số nghiệm

Vd a/ hệ

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \\ 7x - \pi y = 0 \end{cases}$$

(nghiệm duy nhất) $\boxed{x = y = 0}$ $\xleftarrow{\text{(giải)}}$

HỆ PTTT THUẦN NHẤT

☐ Ví dụ b/ hệ $\{2x - 7y + 8z = 0\}$

$$\xrightarrow[\text{giải}]{F = C} \text{nghiệm} \begin{cases} y = a, z = b \\ x = \dfrac{7a - 8b}{2} \end{cases}$$ (a,b phức tùy ý)

vô số nghiệm

PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PTTT

☐ Khi giải 1 hệ pttt trên *F* (dạng ma trận hóa) ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng mà <u>không làm thay đổi</u> tập hợp nghiệm của hệ

PHƯƠNG PHÁP GAUSS-JORDAN

- Xét 1 hệ pttt có m phương trình và n ẩn số, trên F

  viết dưới dạng ma trận hóa $\boxed{(A \mid B)}$

- Ta thực hiện các bước sau đây

  ☞ Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng thích hợp để xây dựng trong ma trận A các cột chuẩn

$$E_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

theo thứ tự

(từ trái qua phải)

PHƯƠNG PHÁP GAUSS-JORDAN

- quá trình chuẩn hóa các cột phải tuân thủ 2 nguyên tắc

👍 Khi đang xây dựng cột chuẩn $\boxed{E_k}$ thì không được làm biến đổi các cột chuẩn $\boxed{E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}}$ trước đó

✌ Nếu tại cột đang xét không xây dựng được $\boxed{E_k}$ thì ta chuyển qua cột kế cận bên phải

☞ Quá trình chuẩn hóa các cột sẽ kết thúc khi ta đã xét xong cột cuối cùng của ma trận A

☞ Có đúng 1 trong 3 trường hợp sau xảy ra

PHƯƠNG PHÁP GAUSS-JORDAN

👍 TH1: khi đang chuẩn hóa các cột, nếu có thể biến đổi dòng nào đó về dạng $\boxed{\left(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \mid a\right)}$, với $\boxed{a \neq 0}$

☞ thì hệ **VÔ NGHIỆM**

PHƯƠNG PHÁP GAUSS-JORDAN

TH2: khi chuẩn hóa xong các cột, ta được hệ có dạng

n cột chuẩn liên tiếp nhau

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_n \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

các dòng zero có thể có hoặc không có

PHƯƠNG PHÁP GAUSS-JORDAN

☞ Hệ có **NGHIỆM DUY NHẤT**

$$\boxed{x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 = c_3, \ldots, x_n = c_n}$$

👌 TH3: khi chuẩn hóa xong các cột, ta thu được $\boxed{r}$ cột chuẩn $\boxed{E_1, E_2, \ldots, E_r}$ $(r < n)$ xen kẽ với $(n-r)$ cột không chuẩn hóa được

☞ hệ có **VÔ SỐ NGHIỆM** như sau

☐ Các ẩn ứng với các cột không chuẩn hóa được là ẩn tự do, lấy giá trị tùy ý trên *F*, có (n-r) ẩn như vậy

PHƯƠNG PHÁP GAUSS-JORDAN

- Các ẩn còn lại (ứng với các cột chuẩn hóa được) được tính theo các ẩn tự do nhờ các pt không tầm thường ở hệ cuối cùng

NHẬN BIẾT 1 CỘT CÓ CHUẨN HÓA ĐƯỢC HAY KHÔNG

- Ta muốn chuẩn hóa cột

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \longrightarrow E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_1, \dots, u_{k-1}$: không được dùng để tạo 1 cho E_k

$u_k, \dots, u_m$: được dùng để tạo 1 cho E_k

NHẬN BIẾT 1 CỘT CÓ CHUẨN HÓA ĐƯỢC HAY KHÔNG

TH1: nếu $u_k = u_{k+1} = \cdots = u_m = 0$ ☞ không thể chuẩn hóa U thành E_k

TH2: nếu có (ít nhất) 1 số $\neq 0$ trong các số $u_k, u_{k+1}, \cdots, u_m$ thì chuẩn hóa được U thành E_k

☐ Ví dụ

a/ $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow E_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

KL: U không thể chuẩn hóa thành E_5

NHẬN BIẾT 1 CỘT CÓ CHUẨN HÓA ĐƯỢC HAY KHÔNG

- Ví dụ

b/ $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow E_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

KL: V chuẩn hóa được thành $\boxed{E_5}$

GIẢI HỆ PTTT

☐ Ví dụ (nghiệm duy nhất) : giải hệ sau trên R

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6$$

☞ viết dưới dạng ma trận hóa, ta có

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{} & & & \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

GIẢI HỆ PTTT

GIẢI HỆ PTTT

☐ Viết lại hệ cuối cùng

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -2 \end{cases}}$$

(nghiệm duy nhất)

GIẢI HỆ PTTT

- Ví dụ (vô nghiệm) : giải hệ sau trên Q

GIẢI HỆ PTTT

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

hệ vô nghiệm

GIẢI HỆ PTTT

- Ví dụ (vô số nghiệm) : giải hệ sau trên Q

GIẢI HỆ PTTT

GIẢI HỆ PTTT

- Lúc này hệ có thể được viết lại là

- Nghiệm (vô số nghiệm)

$$\begin{cases} x_3 = a, x_5 = b \\ x_1 = -a + \dfrac{7b}{6} + \dfrac{5}{6} \\ x_2 = a + \dfrac{5b}{6} - \dfrac{5}{6} \\ x_4 = \dfrac{b}{3} + \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

(a,b hữu tỷ tùy ý)

(do cột 3 và cột 5 <u>không chuẩn hóa được</u>)

CÁC CỘT BÁN CHUẨN

☐ Dạng tổng quát của m cột bán chuẩn (mỗi cột có m dòng) là

tùy ý, ≠ 0, trên *F*

$$E'_1 = \begin{pmatrix} \boxed{a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad E'_2 = \begin{pmatrix} b \\ \boxed{c} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad E'_3 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ \boxed{f} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad E'_m = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ \boxed{u_m} \end{pmatrix}$$

$$b, c, e, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$$

là các số tùy ý trên *F*

CÁC CỘT BÁN CHUẨN

- Lưu ý các cột chuẩn cũng là các cột bán chuẩn đặc biệt
- Ví dụ viết 5 cột bán chuẩn cấp 5

$$E'_1 = \begin{pmatrix} \boxed{-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{7} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \boxed{-3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E'_4 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ \sqrt[4]{5} \\ \boxed{\ln 2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad E'_5 = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ \boxed{\sin 1} \end{pmatrix}$$

HẠNG CỦA MỘT MA TRẬN

☐ Xét ma trận $\boxed{A \in \mathrm{M}_{m\times n}(F)}$, thì

$$A \xrightarrow[\text{(chuẩn hóa tối đa các cột)}]{\text{bán chuẩn hóa tối đa các cột}} A'$$

☐ Ta nói $\boxed{A'}$ là dạng bậc thang của ma trận $\boxed{A}$

☐ Đặt $r(A)$ = hạng của A = số dòng khác zero của A'

HẠNG CỦA MỘT MA TRẬN

- Ví dụ

a/

$$A_{4\times5} \xrightarrow{\text{bán chuẩn hóa tối đa}} \begin{array}{ccccc} E'_1 & & E'_2 & E'_3 & \\ \end{array} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

☞ A' có 3 dòng khác zero □ $\boxed{r(A) = 3}$

b/

$$B_{3\times5} \xrightarrow{\text{bán chuẩn hóa tối đa}} \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B'$$

$\boxed{r(B) = 3}$

ĐẠI SỐ TT