TP 547- Princípios de Simulação de Sistemas de Comunicação

Prof. Samuel Baraldi Mafra

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Modelos Markovianos para canais com memória

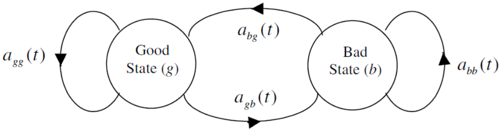
Análise de erro de estimação do canal:
Matriz de transição de probabilidades de um passo

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{gg}(t) & a_{gb}(t) \\ a_{bg}(t) & a_{bb}(t) \end{bmatrix}$$

vetor de probabilidade de estado inicial

$$\Pi_t = \begin{bmatrix} \pi_{t,g} & \pi_{t,b} \end{bmatrix}$$

Diagrama de estados



Modelos Markovianos para canais com memória: Matriz geração de erro

Matriz geração de erro

$$B = \begin{bmatrix} \Pr\{C|g\} & \Pr\{C|b\} \\ \Pr\{E|g\} & \Pr\{E|b\} \end{bmatrix}$$

As probabilidades de uma decisão correta (P_C) e erro (P_E) são dadas por:

$$\begin{bmatrix} P_C & P_E \end{bmatrix} = \Pi_{ss} B^T$$

Exemplo

Considere que ao monitorar o estado de canal foram encontradas as seguintes matrizes de transição de probabilidades de um passo

$A = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}$ e vetor de probabilidade de estado inicial dado por

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

. Do exemplo anterior, as probabilidades de estado estacionário são:

$$\pi_{ss} = \begin{bmatrix} 0.7141 & 0.2859 \end{bmatrix}$$

. Probabilidade de erro da que o canal era bom

$$\Pr\{E|g\} = 0.0005$$

Probabilidade de erro da que o canal era ruim

$$\Pr\{E|b\} = 0.1000$$

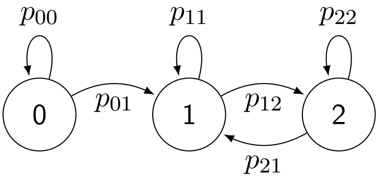
Calcule a probabilidade de uma decisão correta (P_C) e erro (P_E).

Exemplo

Calcule a probabilidade de uma decisão correta (P_C) e erro (P_E).

$$[P_C \quad P_E] = [0.7141 \quad 0.2859] \begin{bmatrix} 0.9995 & 0.0005 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} = [0.971 \quad 0.029]$$

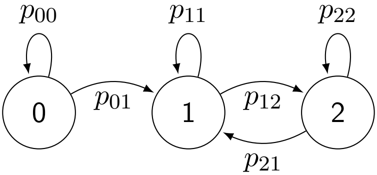
- Um estado j é acessível de um estado i, $i \rightarrow j$, se $P_{ij}(n) > 0$ para um $n > 0$. Quando um estado j não é acessível de um estado i, usa-se a notação $i \nrightarrow j$. Pelo diagrama de Markov, $i \rightarrow j$ se existe um caminho entre entre i e j.



$0 \rightarrow 1,\ 1 \rightarrow 2,\ 2 \nrightarrow 0$

Classificação dos Estados

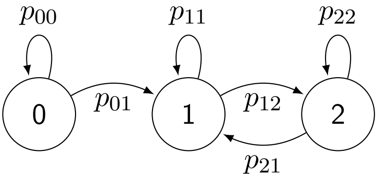
- Dois estados i e j são comunicantes, $i \leftrightarrow j$, se $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$.
- O estado i é sempre comunicante com ele mesmo, já que o sistema pode atingir i a partir de i em zero passos.
- Se um estado i é comunicante com um estado k e o estado k é comunicante com um estado j, então o estado i é comunicante com o estado j.



$1 \leftrightarrow 2$, $0 \leftrightarrow 0$

Classificação dos Estados

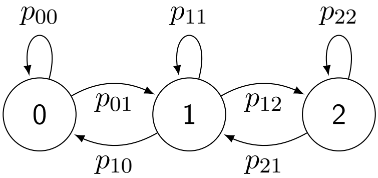
- Uma classe comunicante é um subconjunto não-vazio de estados C, tal que se $i \in C$, então $j \in C$ se e somente se $i \leftrightarrow j$.



$C_1 = \{0\}$, $C_2 = \{1{,}2\}$.

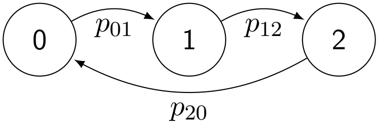
Cadeia de Markov Irredutível

- Uma cadeia de Markov é irredutível se todos os estados são comunicantes, portanto todos os estados pertencem a uma única classe.



Classificação dos Estados

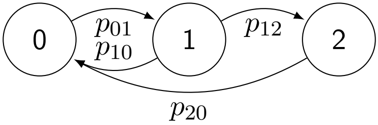
- Um estado i é periódico com período t se um retorno a este estado é possível somente em $t, 2t, 3t, \ldots$ passos para $t > 1$ e t é o maior inteiro com esta propriedade (máximo divisor comum).



A cadeia de Markov pode retornar a qualquer um dos estados com um período $t = 3$.

Classificação dos Estados

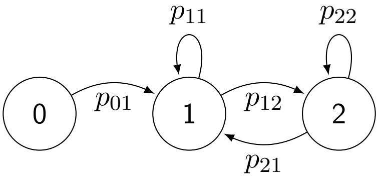
- Se há dois números consecutivos s e $s+1$ tal que o processo pode estar no estado i nos tempos s e $s+1$, o estado é dito ter período 1 e é chamado estado aperiódico.



A cadeia de Markov pode retornar ao estado 0 nos tempos 2 e 3, portanto este estado é aperiódico com $t = 1$.

Classificação dos Estados

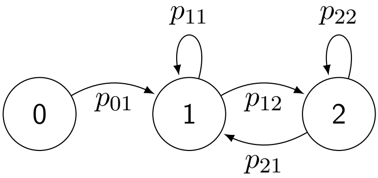
- Um estado i é transitório se saindo deste estado, o processo pode nunca retornar novamente para este estado.
- O estado i é transitório se e somente se existe um estado j $(j \neq i)$ que é alcançável a partir do estado i mas não vice-versa, isto é, o estado i não é alcançável a partir do estado j.



O estado 0 é transitório.

Classificação dos Estados

- Um estado i é recorrente se saindo deste estado, o processo definitivamente irá retornar para este estado. Portanto, um estado é recorrente, se e somente se, não é transitório.
- Uma vez que o estado recorrente será "revisitado" após cada visita (não necessariamente no próximo passo do processo), este será visitado infinitamente para o processo em tempo infinito.

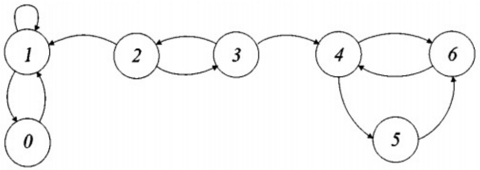


Os estados 1 e 2 são recorrentes.

Classificação dos Estados-Exercício

Para a cadeia de Markov abaixo, onde todas as transições possuem probabilidade diferente de zero, determine:

- Quais são as classes comunicantes?
- Identifique quais estados são periódicos e quais são aperiódicos.
- Identifique quais estados são transitórios e quais são recorrentes.

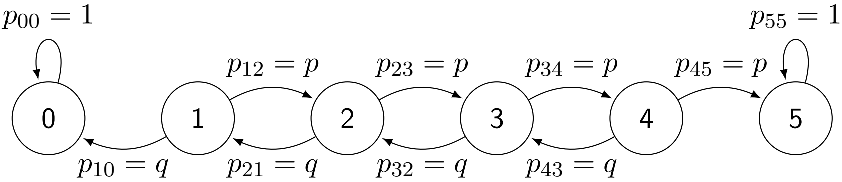


Classificação dos Estados

- Um estado i é absorvente se entrando neste estado, o processo nunca irá deixar este estado. Portanto, um estado i é absorvente se e somente se $p_{ii} = 1$.
- Um estado absorvente é um caso especial de um estado recorrente.

- Considere um jogo com uma moeda não viciada, para cada jogada o apostador pode ganhar $R\$1,00$ com probabilidade $p = 0.5$ se sair uma cara ou perder $R\$1,00$ com probabilidade $q = 1 - p = 0.5$, se sair coroa. O jogo termina quando o jogador acumula $R\$5,00$ ou $R\$0,00$. Desenhe o diagrama de transição de estados e a matriz de transição de um passo. Qual é o numero esperado de vezes que o jogador vai ficar com $R\$1,00$, dado que ele iniciou o jogo com $R\$2,00$. Qual é número médio de passos necessários para que o jogo termine? Qual é a probabilidade do sistema encerrar em cada um dos estados absorventes?

Classificação dos Estados-Exemplo



Matriz de transição de um passo

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estado Absorvente

- Uma matriz P com r estados absorventes e t estados transientes pode ser escrita em uma forma canônica.

$$P = \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right],$$

Onde I é uma matriz identidade r por r, R é uma matriz t por r e Q é uma matriz t por t.

$$P = \begin{array}{c} \text{state} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & q & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (1)$$

Estado Absorvente

- A matriz P para um passo n pode ser escrita como

$$P^n = \left[\begin{array}{c|c} Q^n & * \\ \hline 0 & I \end{array}\right].$$

- Quando $n \to \infty$, $Q^n \to 0$.

Estado Absorvente

- O número esperado de vezes que um processo está em um estado transitório e_j, se este começou em um estado e_i. Este número n_{ij} é obtido através da matriz fundamental de P, dada por
$$N = (I - Q)^{-1}.$$

Considerando $p = q = 0.5$.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \left(\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.6000 & 1.2000 & 0.8000 & 0.4000 \\ 1.2000 & 2.4000 & 1.6000 & 0.8000 \\ 0.8000 & 1.6000 & 2.4000 & 1.2000 \\ 0.4000 & 0.8000 & 1.2000 & 1.6000 \end{bmatrix}$$

Estado Absorvente

- O número médio de passos para a absorção é dada por

$$t = Nc,$$

onde c é um vetor coluna com todos os elementos iguais a um.

$$t = \begin{bmatrix} 1.6000 & 1.2000 & 0.8000 & 0.4000 \\ 1.2000 & 2.4000 & 1.6000 & 0.8000 \\ 0.8000 & 1.6000 & 2.4000 & 1.2000 \\ 0.4000 & 0.8000 & 1.2000 & 1.6000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Estado Absorvente

- A probabilidade do sistema encerrar em um dos estados absorventes, dada por:

$$B = NR.$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.6000 & 1.2000 & 0.8000 & 0.4000 \\ 1.2000 & 2.4000 & 1.6000 & 0.8000 \\ 0.8000 & 1.6000 & 2.4000 & 1.2000 \\ 0.4000 & 0.8000 & 1.2000 & 1.6000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8000 & 0.2000 \\ 0.6000 & 0.4000 \\ 0.4000 & 0.6000 \\ 0.2000 & 0.8000 \end{bmatrix}$$