TP 547- Princípios de Simulação de Sistemas de Comunicação

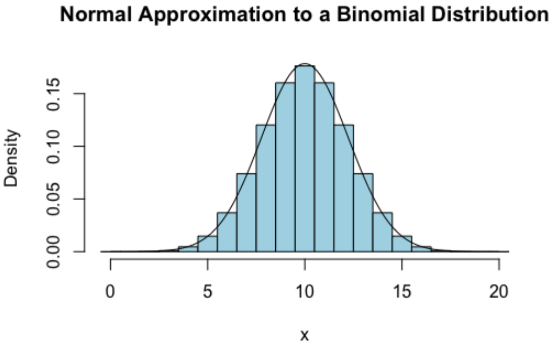
Prof. Samuel Baraldi Mafra

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Aproximações da binomial e poisson com a distribuição Normal

Aproximação Binomial

- A distribuição normal pode ser usada como uma aproximação da distribuição binomial, em certas circunstâncias, a saber:
- Se $X \approx B(n, p)$ e se n for grande e / ou p estiver próximo de $\frac{1}{2}$, então X é aproximadamente $N(np, npq)$ (onde $q = 1 - p$).
- Em alguns casos, resolver um problema usando a distribuição Normal pode ser mais fácil do que usar um Binomial.



Para fazer os cálculos precisamos pegar os valores inferior e superior dos retângulos, para x=10, seria xmin:9.5 e xmax=10.5.

Sessenta por cento dos alunos da 5ª série frequentam a escola em um determinado distrito escolar urbano. Se uma amostra de 50 crianças da 5ª série for selecionada, encontre a probabilidade de que 29 estejam realmente matriculadas na escola.

Aproximação de Poisson

- A distribuição normal também pode ser usada para aproximar a distribuição de Poisson para grandes valores de λ (a média da distribuição de Poisson).
- Se X $\approx$ Po (λ), então para grandes valores de λ , X $\approx$ N (λ , λ) aproximadamente.

Um departamento de polícia recebe em média 50 solicitações por dia. Qual a probabilidade de receber 35 solicitações num dia selecionado aleatoriamente?

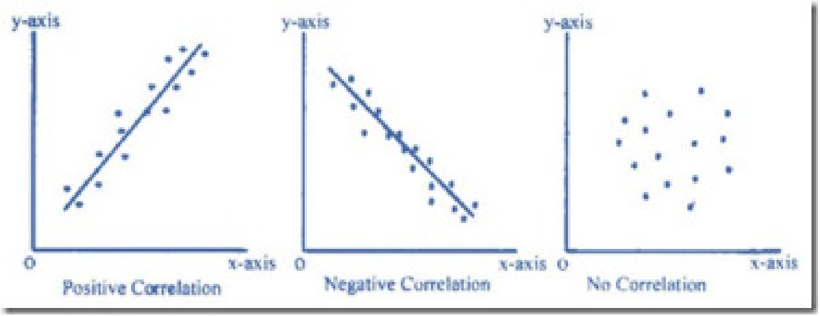
Variáveis Correlacionadas

Correlação
Variáveis dentro de um conjunto de dados podem ser relacionadas por vários motivos.
Por exemplo:

- Uma variável pode depender dos valores de outra variável.
- Uma variável pode ser ligeiramente associada a outra variável.
- Duas variáveis podem depender de uma terceira variável desconhecida.

Variáveis Correlacionadas

- Correlação positiva: ambas as variáveis mudam na mesma direção.
- Correlação Neutra: Sem relação na mudança das variáveis.
- Correlação negativa: as variáveis mudam em direções opostas.



- A covariância de duas variáveis X e Y é uma medida da variabilidade conjunta destas variáveis aleatórias.
- Se as variáveis tem covariância positiva tendem a mostrar um comportamento semelhante, ou seja, os menores(maiores) valores da variável X corresponde aos menores(maiores) da variável Y .
- Se a covariância é negativa então as variáveis tendem a mostrar um comportamento oposto, ou seja, os menores(maiores) valores da variável X corresponde aos maiores(menores) da variável Y.

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = \sum[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]/(N - 1) \tag{1}$$

Exemplo: Covariância

Calcular a covariância para os dados abaixo:

x: [2.1, 2.5, 3.6, 4.0]

y: [8, 10, 12, 14]

arquivo: covarianceex.py

A covariância apenas mostra a tendência de relação entre as variáveis. Não têm como quantificar a relação por esta métrica, para isto é usado o coeficiente de correlação.

- O coeficiente de correlação de Pearson pode ser usado para resumir a força da relação linear entre duas amostras de dados.
- O coeficiente de correlação de Pearson é calculado como a covariância das duas variáveis dividida pelo produto do desvio padrão de cada amostra de dados. É a normalização da covariância entre as duas variáveis para dar uma pontuação interpretável.

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad -1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1 \tag{2}$$

Exemplo: Covariância

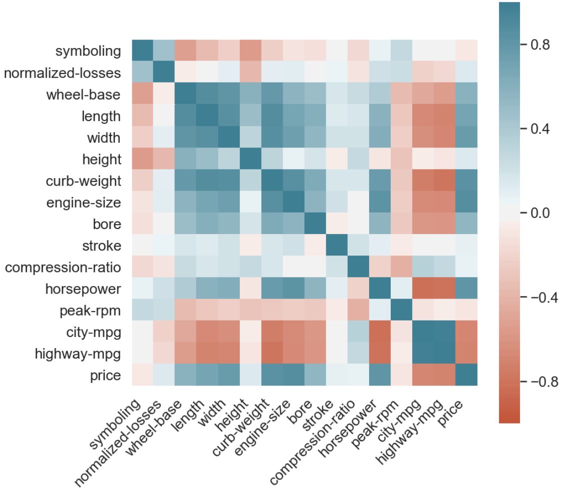
Calcular o coeficiente de correlação para os dados abaixo:

x: [2.1, 2.5, 3.6, 4.0]

y: [8, 10, 12, 14]

arquivo: correlationex.py

Dataset de informações de veículos.



http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/automobile

Exemplos:

- Calcular a covariância entre duas variáveis normais geradas aleatoriamente.
- Verificar a influência da semente no coeficiente de correlação.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

np.random.seed(10)

X=np.random.normal(0,1,10)
np.random.seed(40)
Y=np.random.normal(0,1,10)

C = np.corrcoef(X,Y)
print(C)
```

Exemplo: Correlação com variáveis dependentes

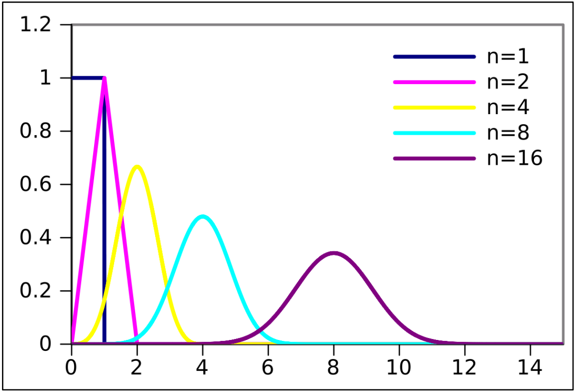
- Fazer testes para mostrar a influência de uma variável na coeficiente.
- data1 = 20 *NV + 100
- data2 = data1 +(10 *NV+ 50)
- NV: Variável normal padrão.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
# seed random number generator
np.random.seed(1)
# prepare data
data1 = 20 * np.random.normal(0,1,1000) + 100
data2 =data1 + (10 * np.random.normal(0,1,1000) + 5
C = np.corrcoef(data1,data2)

print(C)
```

Cuidado!!!!!!!!!!!

As operações com diferentes variáveis modificam a distribuição dos dados, com poucas exceções como a distribuição normal, a soma de duas variáveis de uma mesma distribuição não gera uma terceira com a mesma distribuição.



Variáveis Correlacionadas

- Para gerar uma variável normal correlacionada são usados os seguintes passos:
- Gerar duas sequencias de variáveis normais independentes X_1,X_2;
- Sendo $X_1 = N(0,1)$, $X_2 = N(0,1)$ e a variavel gerada $Z = N(0,1)$
- Calcular $Z = \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} X_2$;
- Z terá uma correlação ρ com respeito a X_1.

The proof is simple. It is clear that Z is a Gaussian random variable, since it is a linear combination of Gaussian random variables. It also follows that Z is zero mean if X and Y are zero mean. The variance of Z is

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= E\left\{[\rho X + \sqrt{1-\rho^2} Y]^2\right\} \\ &= \rho^2 E\left\{X^2\right\} + 2\rho\sqrt{1-\rho^2} E\{XY\} + (1-\rho^2) E\left\{Y^2\right\} \end{aligned} \tag{7.86}$$

Since $E\{XY\} = E\{X\} E\{Y\} = 0$ and $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$, the preceding becomes

$$\sigma_Z^2 = \rho^2 \sigma^2 + (1-\rho^2)\sigma^2 = \sigma^2 \tag{7.87}$$

The covariance $E\{XZ\}$ is

$$\begin{aligned} E\{XZ\} &= E\{X[\rho X + (1-\rho)Y]\} \\ &= \rho E\left\{X^2\right\} + (1-\rho) E\{XY\} \\ &= \rho E\left\{X^2\right\} = \rho\sigma^2 \end{aligned} \tag{7.88}$$

where the last step follows because X and Y are independent and zero mean. The correlation coefficient ρ_{XZ} is

$$\rho_{XZ} = \frac{E\{XZ\}}{\sigma_X \sigma_Z} = \frac{\rho\sigma^2}{\sigma^2} = \rho \tag{7.89}$$

as desired.

- Fazer um código para gerar Z em função de X_1 e X_2 e plotar Z. Usar $\rho = 0.9$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

np.random.seed(10)
rho=-0.9
X=np.random.normal(0,1,1000)
Y=np.random.normal(0,1,1000)

z=rho*X+pow(1-rho**2,0.5)*Y

C = np.corrcoef(X,z)
print(C)

plt.plot(X,z,'o')
plt.show()
```