TP 547- Princípios de Simulação de Sistemas de Comunicação

Prof. Samuel Baraldi Mafra

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Análise de sistemas em tempo discreto: Cadeias de Markov

- Introdução a cadeias de Markov;
- Modelagem e estrutura de simuladores de eventos discretos;
- Simulação de sistemas de filas;
- Aplicações e estudos de caso.

Andrei Markov

- Em 1907, Andrei Markov iniciou um estudo sobre processos onde o resultado de um experimento depende do resultado de um experimento anterior.

Processo Markoviano

Processo Markoviano, $X(t)$**:** Um processo aleatório é considerado Markoviano quando o estado futuro do processo dado o estado presente é independente do passado. Isto é, se para tempos arbitrários $t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1}$,

$$P[X(t_{n+1}) = x_{n+1}|X(t_n) = x_n,...,X(t_1) = x_1] \\ = P[X(t_{n+1}) = x_{n+1}|X(t_n) = x_n]$$

Este tipo de Processo Estocástico é também denominado de *memoryless process* (processo sem memória), uma vez que o passado é "esquecido"(desprezado).

Processos Markoviano – Exemplo

- Uma urna inicialmente contém duas bolas pretas e duas bolas brancas. O seguinte experimento é realizado indefinidamente: uma bola é retirada da urna, se a bola é branca, então é colocada novamente na urna, senão é retirada. X_n é o número de bolas pretas restantes na urna após n retiradas da urna.
  - a) X_n é um processo Markoviano? Quais são as probabilidade de transição ?
  - b) As probabilidades de transição dependem de n?

Cadeia de Markov: Um Processo Markoviano é dito ser uma Cadeia de Markov quando as variáveis randômicas X_n estão definidas em um espaço de estados discreto $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$.

- O processo inicia-se em um dos estados com probabilidade P_o e se move sucessivamente de um estado para outro;
- A probabilidade de um processo estar no estado e_j no instante $n+1$, dado que antes estava no estado e_i no instante n, é dada por:

$$P[X_{n+1} = e_j | X_n = e_i] = p_{ij},$$

  este valor é fixo e não muda com o tempo. Esta probabilidade é chamada de probabilidade de transição.
- Exemplos:
  - Sistemas On/Off;
  - Estado de um canal sem fio.

Diagrama de transição de estados

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[loop above, "p_{00}"] \arrow[r, bend left, "p_{01}"] & 1 \arrow[loop above, "p_{11}"] \arrow[l, bend left, "p_{10}"] \arrow[r, bend left, "p_{12}"] & 2 \arrow[loop above, "p_{22}"] \arrow[l, bend left, "p_{21}"]
\end{tikzcd}
$$

Matriz de transição de probabilidades de um passo

$$
P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ 0 & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}
$$

A soma de cada linha da matriz de transição é igual a um.

Probabilidade de transição de passo n

- A probabilidade do processo estar no estado e_j após n passos, dado que seu estado inicial era e_i, é dada por P^n.

$$P^n = \begin{bmatrix} p_{00}^n & p_{01}^n & p_{02}^n \\ p_{10}^n & p_{11}^n & p_{12}^n \\ p_{20}^n & p_{21}^n & p_{22}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}^n$$

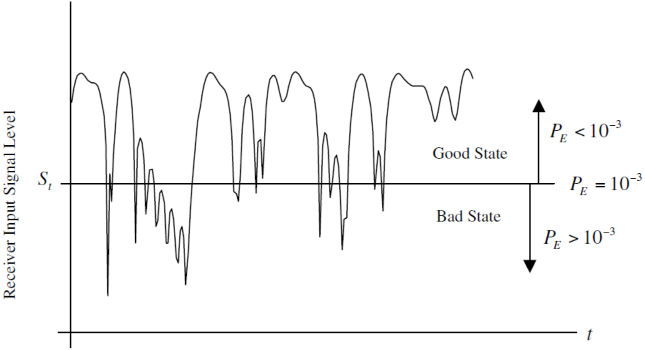
  Exemplos:
    - A probabilidade que faça sol daqui dois dias se hoje está chovendo.
    - A probabilidade de que haja uma falha num processo daqui uma semana, sendo que hoje ele está funcionando corretamente.

A probabilidade do processo estar no estado e_j n passos adiante é dada por:

$$p^n = p_0 P^n,$$

onde p_0 é o vetor de probabilidade de estado inicial.

Modelos Markovianos para canais com memória



Modelos Markovianos para canais com memória

No início de cada intervalo de símbolo (bit), o canal está em um dos dois estados. Se o canal estiver em bom estado, a probabilidade de erro de transmissão é insignificante. Por outro lado, se o canal estiver em mau estado, a probabilidade de erro de transmissão é inaceitavelmente alto. Antes da transmissão de cada novo bit, o canal pode mudar de estado ou permanecer no estado atual.

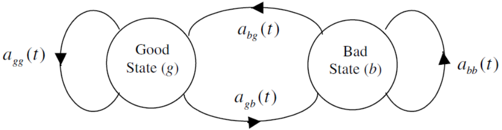
Matriz de transição de probabilidades de um passo

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{gg}(t) & a_{gb}(t) \\ a_{bg}(t) & a_{bb}(t) \end{bmatrix}$$

vetor de probabilidade de estado inicial

$$\Pi_t = \begin{bmatrix} \pi_{t,g} & \pi_{t,b} \end{bmatrix}$$

Diagrama de estados



Exemplo

Considere que ao monitorar o estado de canal foram encontradas as seguintes matrizes de transição de probabilidades de um passo

$$A = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}$$

e vetor de probabilidade de estado inicial dado por

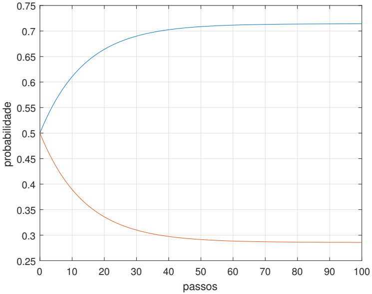
$$\pi_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

.

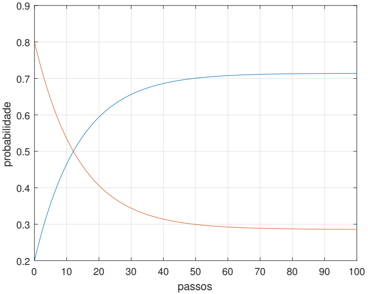
- Calcule a probabilidade do estado estar em um estado bom após um intervalo de tempo.
- Calcule a probabilidade do estado estar em um estado bom após três intervalos de tempo.
- Quais são as probabilidades de estado permanente para cada um dos estados?

Cadeia de Markov – Exemplo

$$\pi_0 = [0.5 \;\; 0.5]$$



$$\pi_0 = [0.2 \;\; 0.8]$$



código:markovstates2.py

- Uma cidade possui duas empresas de internet fixa. A empresa A tem uma probabilidade de 40% de ser escolhida. Entretanto, após um período de um ano apenas 30% escolhem a empresa A novamente. Os clientes que escolhem a empresa B, tem 50% de chance de ser escolhida novamente.
    - Quais são as probabilidades de um usuário usar os serviços das empresas A e B após um período de um ano?
    - Quais são as probabilidades de um usuário usar os serviços das empresas A e B após um período de três anos?
    - Quais são as probabilidades de estado permanente para cada uma das empresas?

Cadeia de Markov – Exemplo

- Uma cidade possui duas empresas de internet fixa. A empresa A tem uma probabilidade de 40% de ser escolhida. Entretanto, após um período de um ano apenas 30% escolhem a empresa A novamente. Os clientes que escolhem a empresa B, tem 50% de chance de ser escolhida novamente.
  - Quais são as probabilidades de um usuário usar os serviços das empresas A e B após um período de três anos?

$$p^3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \right)^3$$

$$p^3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.41 & 0.59 \\ 0.42 & 0.58 \end{bmatrix}$$

$$p_A^3 = 0.4 \cdot 0.41 + 0.6 \cdot 0.42 = 0.416$$

$$p_B^3 = 0.4 \cdot 0.59 + 0.6 \cdot 0.58 = 0.584$$

- Após três anos a probabilidade de um usuário estar usando a empresa A é de 41.6% e a empresa B de 58.4%.

Cadeia de Markov – Exemplo

- Quais são as probabilidades de estado permanente para cada uma das empresas?

$$P^3 = \left(\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\right)^3 = \begin{bmatrix} 0.41 & 0.59 \\ 0.42 & 0.58 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \left(\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\right)^5 = \begin{bmatrix} 0.4165 & 0.5835 \\ 0.4168 & 0.5832 \end{bmatrix}$$

$$P^7 = \left(\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\right)^7 = \begin{bmatrix} 0.4167 & 0.5833 \\ 0.4167 & 0.5833 \end{bmatrix}$$

$$p^7 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4167 & 0.5833 \\ 0.4167 & 0.5833 \end{bmatrix}$$

$$p^7_A = 0.4 \cdot 0.4167 + 0.6 \cdot 0.4167 = 0.4167$$

$$p^7_B = 0.4 \cdot 0.5833 + 0.6 \cdot 0.5833 = 0.5833$$

Cadeia de Markov – Exemplo

- Quais são as probabilidades de estado permanente para cada uma das empresas?

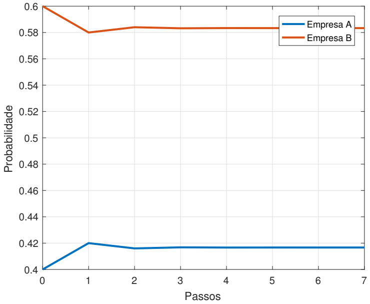
$$[p_A^n \quad p_B^n] = [p_A^n \quad p_B^n] \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_A^n = 0.3p_A^n + 0.5p_B^n \\ p_B^n = 0.7p_A^n + 0.5p_B^n \\ p_A^n + p_B^n = 1 \end{cases}$$

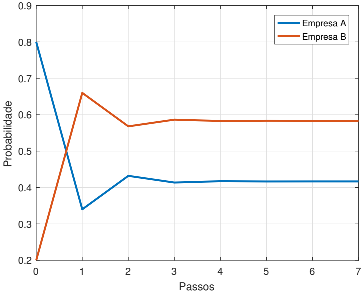
- $p_A^n = 0.4167$, $p_B^n = 0.5833$

Cadeia de Markov – Exemplo

$$p_0 = [0.4 \quad 0.6]$$



$$p_0 = [0.8 \quad 0.2]$$



- Suponha que a função de um trabalhador em uma empresa pode ser classificada como pesquisador, trabalhador qualificado ou técnico. Monitorando as funções na empresa de uma dada família através de várias gerações. Obteve-se a conclusão que dos filhos de pesquisador, 80 % são pesquisadores, 10 % são trabalhadores qualificados e 10 % são técnicos. No caso de filhos de trabalhadores qualificados, 60 % são trabalhadores qualificados, 20 % são pesquisadores, e 20 % são técnicos. Finalmente, no caso de técnicos, 50 % dos filhos são técnicos, 25 % são trabalhadores qualificados e 25 % são pesquisadores. Suponha que cada trabalhador tem pelo menos um filho e formam uma cadeia de Markov. Qual é probabilidade de que um neto de um técnico ser um pesquisador? Qual é probabilidade de que um neto de um pesquisador ser um técnico?