基礎演算法 III

sam571128

小小的自我介紹

- 常用 handle: sam571128，可以叫我山姆
- 我不是附中的學長
- 被邪惡的總召騙進來講課了
- 跟你們的學長 Foxyy、和 Gino 是高中隊友，隊名 BurnChicken Lemma。
- 聽不懂都可以說，我看到就會回

目錄

Greedy

- 貪心？ 什麼是貪心啊？
- 讓我們直接來看一個例子

一個簡單的小例子

找零問題

現在，你走進一間商店。你買了 34 塊新台幣的商品。可是你現在身上只有 100 紙鈔。那店員在找零錢的時候，最少要拿幾個硬幣給你?

- 對於這個問題，你應該會很直接的想到答案

一個簡單的小例子

找零問題

現在，你走進一間商店。你買了 34 塊新台幣的商品。可是你現在身上只有 100 紙鈔。那店員在找零錢的時候，最少要拿幾個硬幣給你?

- 對於這個問題，你應該會很直接的想到答案
- 首先我們知道店員一共要找我們 66 塊錢
- 接著，你很直覺的就會想到，店員會找 $50 + 10 + 5 + 1$ 給我們

一個簡單的小例子

找零問題

現在，你走進一間商店。你買了 34 塊新台幣的商品。可是你現在身上只有 100 紙鈔。那店員在找零錢的時候，最少要拿幾個硬幣給你?

- 對於這個問題，你應該會很直接的想到答案
- 首先我們知道店員一共要找我們 66 塊錢
- 接著，你很直覺的就會想到，店員會找 $50+10+5+1$ 給我們
- 而事實上，最少的拿法，就是從最大面額的硬幣開始拿取

Greedy

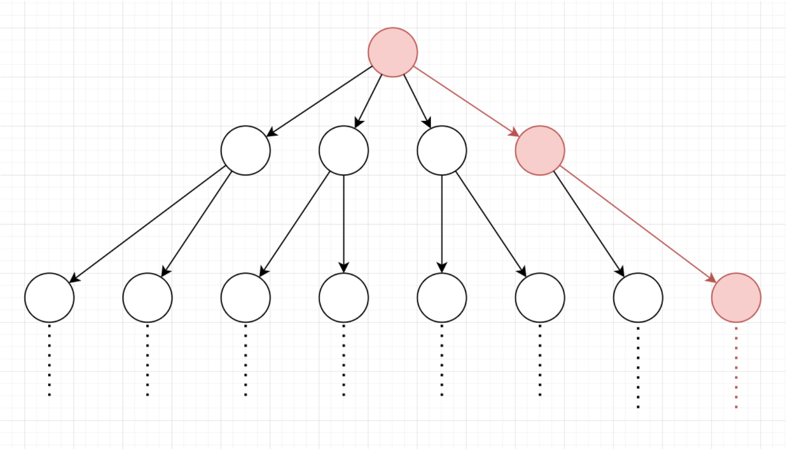
- 從剛剛那個例子當中，我們看到了什麼?

Greedy

- 從剛剛那個例子當中，我們看到了什麼?
- 事實上，我們照著直覺走，認為只要從最大的硬幣開始選，一定可以選到最少的
- 而這樣的方式，就是 Greedy

Greedy

- Greedy 其實就是照著某個策略走，他或許就可以給我們一個正確的答案
- 可以把他想成一棵暴搜的樹上，直接照著某個路徑走到正確的答案



Greedy

- 在很多的情況下，Greedy 的想法還滿直覺的
- 像剛剛的硬幣問題，事實上直覺的做法就是正確的方法
- 不過並不是任何時候，按照直覺都會讓我們得到正確的答案

一個貪心會錯的小例子

找零問題（改）

現在，你到了長頸鹿國，這裡的硬幣面額只有 $1, 5, 8$ 塊錢三種種類。你走進一間商店。你買了 15 塊長頸鹿幣的商品。請問你最少要拿出多少硬幣才能購買這個商品。

- 以這個例子來看的話，使用剛剛的想法，一路拿最大面額的硬幣會發生什麼事?

一個貪心會錯的小例子

找零問題（改）

現在，你到了長頸鹿國，這裡的硬幣面額只有 $1, 5, 8$ 塊錢三種種類。你走進一間商店。你買了 15 塊長頸鹿幣的商品。請問你最少要拿出多少硬幣才能購買這個商品。

- 以這個例子來看的話，使用剛剛的想法，一路拿最大面額的硬幣會發生什麼事?
- 我們會選 $\{8, 5, 1, 1\}$

一個貪心會錯的小例子

找零問題（改）

現在，你到了長頸鹿國，這裡的硬幣面額只有 $1, 5, 8$ 塊錢三種種類。你走進一間商店。你買了 15 塊長頸鹿幣的商品。請問你最少要拿出多少硬幣才能購買這個商品。

- 以這個例子來看的話，使用剛剛的想法，一路拿最大面額的硬幣會發生什麼事?
- 我們會選 $\{8, 5, 1, 1\}$
- 但事實上，你會發現 $\{5, 5, 5\}$ 才會是最大的答案！

直覺不見得會是對的?

- 從剛剛的例子，我們發現到，Greedy 有可能會是錯的
- 有時，我們必須要實際去證明 Greedy 的策略後，才能確定他會是對的

直覺不見得會是對的?

- 從剛剛的例子，我們發現到，Greedy 有可能會是錯的
- 有時，我們必須要實際去證明 Greedy 的策略後，才能確定他會是對的
- 不過你應該很好奇，同樣都是硬幣，為什麼一個會對一個會錯呢?

回到剛剛的兩個例子

- 在第一個例子中，我們所用的是新台幣，面額大概是 $\{1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000\}$
- 而在第二個例子中，則是使用了面額比較奇怪的硬幣，面額是 $\{1, 5, 8\}$
- 這兩者的差別在哪呢?

回到剛剛的兩個例子

- 在第一個例子中，我們所用的是新台幣，面額大概是 $\{1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000\}$
- 而在第二個例子中，則是使用了面額比較奇怪的硬幣，面額是 $\{1, 5, 8\}$
- 這兩者的差別在哪呢?
- 應該會發現到，第一個例子中，兩兩硬幣互相有因倍數的關係！
- 而這個就會影響到 Greedy 策略的正確性！

回到剛剛的兩個例子

- 在這裡，我們來仔細想想看為什麼第一種就會是正確的吧

回到剛剛的兩個例子

- 在這裡，我們來仔細想想看為什麼第一種就會是正確的吧
- 會發現，硬幣互相有倍數關係時，其實我們可以發現，當小面額的數量過多可以被替換成大面額的硬幣時，我們就替換
- 一路將小面額的硬幣替換成大面額後，我們就會得到最少的選法了

回到剛剛的兩個例子

- 在這裡，我們來仔細想想看為什麼第一種就會是正確的吧
- 會發現，硬幣互相有倍數關係時，其實我們可以發現，當小面額的數量過多可以被替換成大面額的硬幣時，我們就替換
- 一路將小面額的硬幣替換成大面額後，我們就會得到最少的選法了
- 當然，這個有更加嚴謹的證明寫法

讓我們來看看下一個例子

活動排程問題 (CSES - Movie Festival)

現在一共有 n 部電影，每部電影的播放時段為 $[l_i, r_i]$。在同一個時間，你只能看一部電影，你希望每一部電影你都能完整看完，請問你最多可以看幾部電影?

讓我們來看看下一個例子

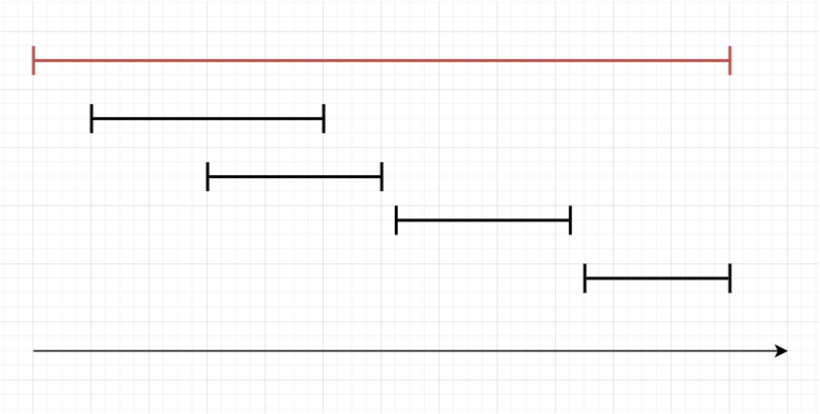
活動排程問題 (CSES - Movie Festival)

現在一共有 n 部電影，每部電影的播放時段為 $[l_i, r_i]$。在同一個時間，你只能看一部電影，你希望每一部電影你都能完整看完，請問你最多可以看幾部電影?

- 一個滿直覺的想法，既然想要看最多的電影，那從開始時間最早的電影開始看?
- 然後就發現出現問題了

會發生的問題

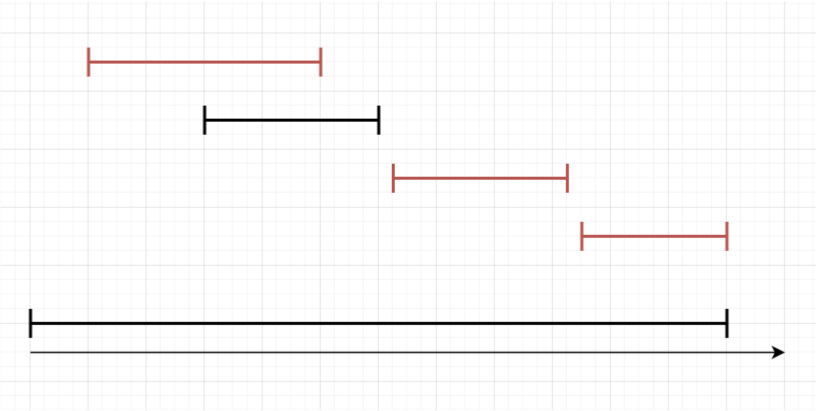
- 注意到當有其中一部電影的開始時間很早，但時長很長
- 它就會影響到後面可以看電影的時間



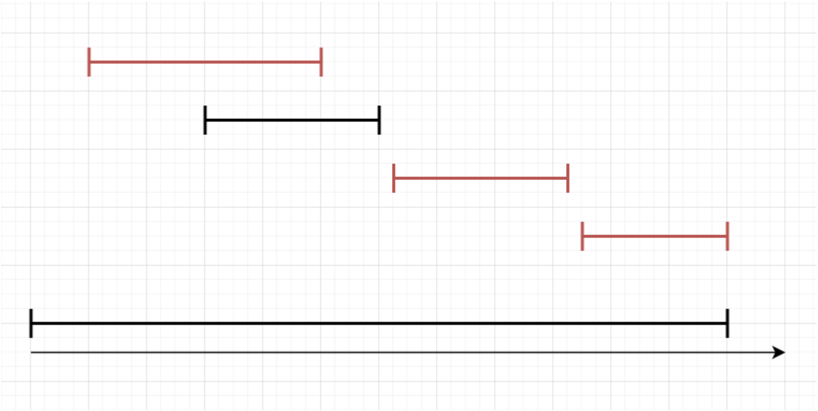
那該怎麼辦?

- 既然剛剛的想法是錯的，那我們換一個思路
- 一部電影的結束時間越早，是不是就能給我們更多的時間能夠看接下來的電影呢?

新的想法



新的想法



- 這樣的想法，其實是正確的！

貪心的正確性?

- 聽到這裡，你可能會覺得，貪心到底是在做什麼
- 為什麼我們幾乎都在猜答案?

貪心的正確性？

- 聽到這裡，你可能會覺得，貪心到底是在做什麼
- 為什麼我們幾乎都在猜答案？
- 貪心難道就只是單純的猜答案，然後祈禱它會是對的嗎？

貪心的正確性？

- 常見的做法：
  - ~~Proof By AC~~ （不嚴謹）
  - 試著想反例，想不到就丟（不嚴謹）
  - 實際寫下數學證明（嚴謹）

貪心的正確性？

- 常見的做法：
  - ~~Proof By AC~~（不嚴謹）
  - 試著想反例，想不到就丟（不嚴謹）
  - 實際寫下數學證明（嚴謹）
- 有時候實際證明自己的作法，可能比較不會在比賽中去做
- 但學習如何證明貪心的做法也算是一個重要的能力

簡單證明一下剛剛的活動排程問題

1. 設貪心所拿的線段為 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，而一種最佳解所取的線段為 $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$
2. 可以得知，對於所有 $i \leq n$，r_{a_i} 必定小於 r_{b_i}，可以使用數學歸納法簡單證明
3. 接著，假設貪心所拿的線段比最佳解還少，表示最佳解至少比貪心多拿了一個線段
4. 但由於 $r_{a_n} \leq r_{b_i} \leq l_{b_{i+1}}$，貪心解一定也可以取第 b_i 條線段
5. 產生矛盾。因此貪心解一定會取到最多的線段。

下一個例題

TIOJ 1072 誰先晚餐

有 n 個人來餐廳吃飯，第 i 個人點的餐點要花 c_i 分鐘煮，煮完後他要吃 e_i 分鐘。廚師在同一個時間只能煮一個人的菜，但大家可以同時吃飯，至少要花多少時間才能讓所有人吃完飯。

下一個例題

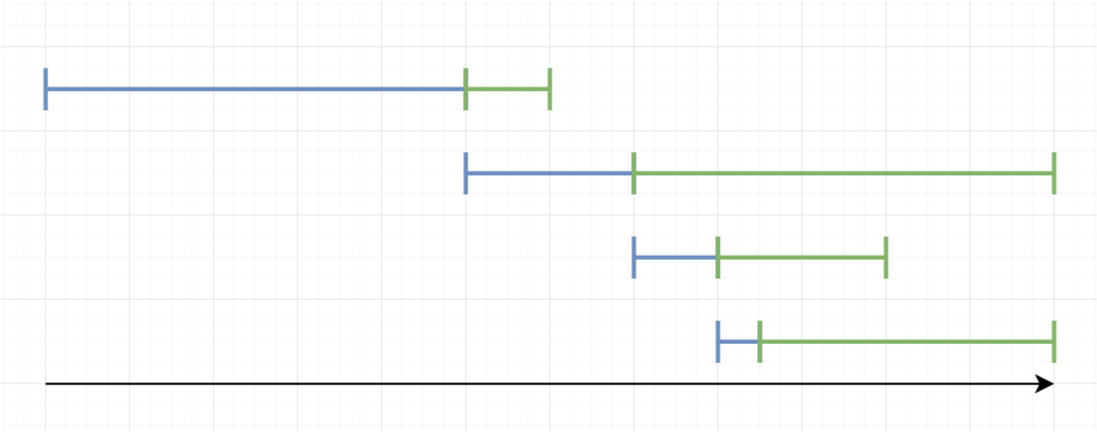
TIOJ 1072 誰先晚餐

有 n 個人來餐廳吃飯，第 i 個人點的餐點要花 c_i 分鐘煮，煮完後他要吃 e_i 分鐘。廚師在同一個時間只能煮一個人的菜，但大家可以同時吃飯，至少要花多少時間才能讓所有人吃完飯。

- 既然要讓每個人吃完飯的時間最短，那我們讓煮最久的餐點先煮呢?

誰先晚餐

- 會發現，這樣的想法並不會是最好的，可以很輕易的構出更好的解



誰先晚餐

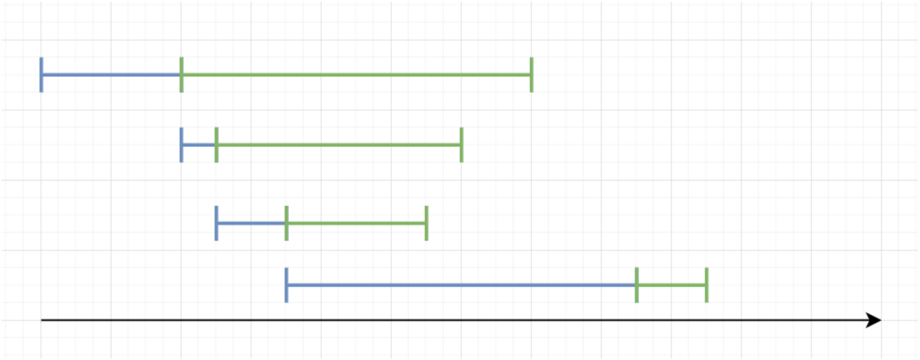
- 剛剛的想法，在某個人的餐點準備時間很短，但吃很慢的時候會發生問題

誰先晚餐

- 剛剛的想法，在某個人的餐點準備時間很短，但吃很慢的時候會發生問題
- 那我們修改策略，讓吃比較慢的人先吃呢?

誰先晚餐

- 事實上，這樣的做法就是對的了！



誰先晚餐證明

1. 首先，我們設貪心解的順序為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，一定滿足 $e_{a_1} \geq e_{a_2} \geq \cdots \geq e_{a_n}$
2. 而另一組解的順序為 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，而這個順序一定存在一個 i，使得 $e_{b_i} < e_{b_{i+1}}$
3. 發現到對於另一組解所得到的順序中，第 j 個人吃完飯的時間為 $(\sum_{k=1}^{j} C_{b_k}) + E_{b_j}$
4. 假設我們將第一個使得 $e_{b_i} < e_{b_{i+1}}$ 的 b_i 與 b_{i+1} 進行對調
5. 第 i 個人吃完飯的時間變為 $(\sum_{k=1}^{i} C_{b_k}) - C_{b_i} + C_{b_{i+1}} + E_{i+1}$
6. 第 $i+1$ 個人吃完飯的時間變為 $(\sum_{k=1}^{i} C_{b_k}) + E_i$
7. 而不論是第 i 或第 $i+1$ 個人，吃完飯的時間都比原本的第 $i+1$ 個人還要早吃完，答案不會變差
8. 因此只要不停交換使得 $e_{b_i} < e_{b_{i+1}}$ 的 b_i, b_{i+1}，最後就會得到貪心所得到的解

經典例題（一）

CSES - Stick Division

現在你有一個長度為 x 的木棒，你希望可以將其切成長度為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的部分。每一次在切的時候，你會需要耗費當前木棒長度的能量。請問你最少要耗費多少能量才可以切割完這個木棒。

經典例題（一）

CSES - Stick Division

現在你有一個長度為 x 的木棒，你希望可以將其切成長度為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的部分。每一次在切的時候，你會需要耗費當前木棒長度的能量。請問你最少要耗費多少能量才可以切割完這個木棒。

- 發現到切割其實等同於將兩個大小為 x, y 的部分合併，耗費 $x + y$ 的能量

經典例題（一）

CSES - Stick Division

現在你有一個長度為 x 的木棒，你希望可以將其切成長度為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的部分。每一次在切的時候，你會需要耗費當前木棒長度的能量。請問你最少要耗費多少能量才可以切割完這個木棒。

- 發現到切割其實等同於將兩個大小為 x, y 的部分合併，耗費 $x + y$ 的能量
- 我們可以將目前的所有木棒丟進一個 `priority_queue`，每次拿出最小的兩個木棒進行合併。

經典例題（二）

Codeforces 1526C2 - Potions (Hard Version)

在數線上依序擺著 n 瓶藥水，喝完藥水後，你的血量會改變 a_i （正的表示補血，負的會扣血）。你一開始的血量為 0，必須依序從左走到右，每個藥水可喝可不喝，但是喝完之後，血量不能低於 0。請問你最多可以喝幾瓶藥水？

經典例題（二）

Codeforces 1526C2 - Potions (Hard Version)

在數線上依序擺著 n 瓶藥水，喝完藥水後，你的血量會改變 a_i （正的表示補血，負的會扣血）。你一開始的血量為 0，必須依序從左走到右，每個藥水可喝可不喝，但是喝完之後，血量不能低於 0。請問你最多可以喝幾瓶藥水？

- 對於藥水，我們其實可以分為補血和扣血的兩個進行考慮

經典例題（二）

Codeforces 1526C2 - Potions (Hard Version)

在數線上依序擺著 n 瓶藥水，喝完藥水後，你的血量會改變 a_i （正的表示補血，負的會扣血）。你一開始的血量為 0，必須依序從左走到右，每個藥水可喝可不喝，但是喝完之後，血量不能低於 0。請問你最多可以喝幾瓶藥水？

- 對於藥水，我們其實可以分為補血和扣血的兩個進行考慮
- 當我們遇到補血藥水時，喝掉一定不會比較差

經典例題（二）

Codeforces 1526C2 - Potions (Hard Version)

在數線上依序擺著 n 瓶藥水，喝完藥水後，你的血量會改變 a_i （正的表示補血，負的會扣血）。你一開始的血量為 0，必須依序從左走到右，每個藥水可喝可不喝，但是喝完之後，血量不能低於 0。請問你最多可以喝幾瓶藥水？

- 對於藥水，我們其實可以分為補血和扣血的兩個進行考慮
- 當我們遇到補血藥水時，喝掉一定不會比較差
- 那扣血藥水呢？

經典例題（二）

Codeforces 1526C2 - Potions (Hard Version)

在數線上依序擺著 n 瓶藥水，喝完藥水後，你的血量會改變 a_i （正的表示補血，負的會扣血）。你一開始的血量為 0，必須依序從左走到右，每個藥水可喝可不喝，但是喝完之後，血量不能低於 0。請問你最多可以喝幾瓶藥水？

- 如果遇到扣血藥水，有兩種可能性
  1. 現在的血量在喝完藥水後，不會小於 0
  2. 喝完之後，血量會小於 0

經典例題（二）

Codeforces 1526C2 - Potions (Hard Version)

在數線上依序擺著 n 瓶藥水，喝完藥水後，你的血量會改變 a_i （正的表示補血，負的會扣血）。你一開始的血量為 0，必須依序從左走到右，每個藥水可喝可不喝，但是喝完之後，血量不能低於 0。請問你最多可以喝幾瓶藥水?

- 如果遇到扣血藥水，有兩種可能性
  1. 現在的血量在喝完藥水後，不會小於 0
  2. 喝完之後，血量會小於 0
- 顯然遇到第一種 case 的時候，我們直接喝掉就好
- 那第二種呢?

經典例題（二）

Codeforces 1526C2 - Potions (Hard Version)

在數線上依序擺著 n 瓶藥水，喝完藥水後，你的血量會改變 a_i （正的表示補血，負的會扣血）。你一開始的血量為 0，必須依序從左走到右，每個藥水可喝可不喝，但是喝完之後，血量不能低於 0。請問你最多可以喝幾瓶藥水?

- 有可能發生的事情是，在前面，我們喝過了扣血的藥水，導致我們現在沒有辦法喝這個藥水

經典例題（二）

Codeforces 1526C2 - Potions (Hard Version)

在數線上依序擺著 n 瓶藥水，喝完藥水後，你的血量會改變 a_i （正的表示補血，負的會扣血）。你一開始的血量為 0，必須依序從左走到右，每個藥水可喝可不喝，但是喝完之後，血量不能低於 0。請問你最多可以喝幾瓶藥水？

- 有可能發生的事情是，在前面，我們喝過了扣血的藥水，導致我們現在沒有辦法喝這個藥水
- 把每個喝過的藥水存起來，如果換掉前面喝過的藥水，能夠讓我們喝完這個藥水後，血量還更高，就替換

經典例題（二）

Codeforces 1526C2 - Potions (Hard Version)

在數線上依序擺著 n 瓶藥水，喝完藥水後，你的血量會改變 a_i （正的表示補血，負的會扣血）。你一開始的血量為 0，必須依序從左走到右，每個藥水可喝可不喝，但是喝完之後，血量不能低於 0。請問你最多可以喝幾瓶藥水？

- 有可能發生的事情是，在前面，我們喝過了扣血的藥水，導致我們現在沒有辦法喝這個藥水
- 把每個喝過的藥水存起來，如果換掉前面喝過的藥水，能夠讓我們喝完這個藥水後，血量還更高，就替換
- 使用一個 `pq` 存喝過的藥水即可

經典例題（二）

Codeforces 1526C2 - Potions (Hard Version)

在數線上依序擺著 n 瓶藥水，喝完藥水後，你的血量會改變 a_i （正的表示補血，負的會扣血）。你一開始的血量為 0，必須依序從左走到右，每個藥水可喝可不喝，但是喝完之後，血量不能低於 0。請問你最多可以喝幾瓶藥水？

- 有可能發生的事情是，在前面，我們喝過了扣血的藥水，導致我們現在沒有辦法喝這個藥水
- 把每個喝過的藥水存起來，如果換掉前面喝過的藥水，能夠讓我們喝完這個藥水後，血量還更高，就替換
- 使用一個 pq 存喝過的藥水即可
- 這種將前面操作刪除的 Greedy，我們一般稱其為反悔 Greedy

經典例題（三）

分數背包問題（Fractional Knapsack Problem）

現在你有一個容量為 W 的背包，桌上有 n 個物品，第 i 個物品的重量為 w_i，價值為 v_i。對於每個物品，你可以選擇將其放進背包，或者是只拿一部分放進背包。請問你最多可以拿到總價值為多少的物品?

經典例題（三）

分數背包問題（Fractional Knapsack Problem）

現在你有一個容量為 W 的背包，桌上有 n 個物品，第 i 個物品的重量為 w_i，價值為 v_i。對於每個物品，你可以選擇將其放進背包，或者是只拿一部分放進背包。請問你最多可以拿到總價值為多少的物品？

- 其實只要從 CP 值 $(\frac{v_i}{w_i})$ 最大的物品開始拿即可

經典例題（四）

字串串接問題（Codeforces 632C - The Smallest String Concatenation）

現在你有 n 個字串，現在你想要把這些字串接在一起，請問能使最後接出來的字串的字典序最小的接法為何?

字串串接問題（Codeforces 632C - The Smallest String Concatenation）

現在你有 n 個字串，現在你想要把這些字串接在一起，請問能使最後接出來的字串的字典序最小的接法為何?

- 有沒有人有什麼 Greedy 的想法呢?

經典例題（四）

字串串接問題（Codeforces 632C - The Smallest String Concatenation）

現在你有 n 個字串，現在你想要把這些字串接在一起，請問能使最後接出來的字串的字典序最小的接法為何?

- 有沒有人有什麼 Greedy 的想法呢?
- 實際上，這題只要排序就好！

經典例題（四）

字串串接問題（Codeforces 632C - The Smallest String Concatenation）

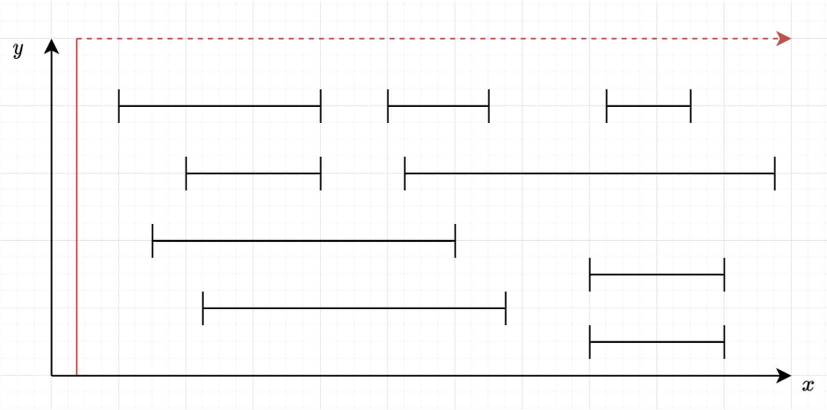
現在你有 n 個字串，現在你想要把這些字串接在一起，請問能使最後接出來的字串的字典序最小的接法為何?

- 有沒有人有什麼 Greedy 的想法呢?
- 實際上，這題只要排序就好！
- 排序的函數為 $a + b < b + a$

掃描線 (Sweep Line)

什麼是掃描線?

- 當我們遇到二維平面上的線段、矩形，甚至是三角形或圓時
- 用一條鉛直或水平的線進行處理，問題就會簡化許多



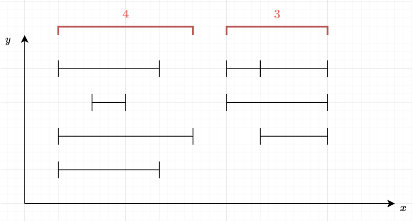
來看一個簡單的例題

線段覆蓋長度（APCS 2016/03）

給你 n 條線段，每個線段覆蓋了 $[l_i, r_i]$，請找到這些線段一共覆蓋了多少長度？

範圍：

- $1 \leq n \leq 10^4$
- $1 \leq l_i, r_i \leq 10^9$

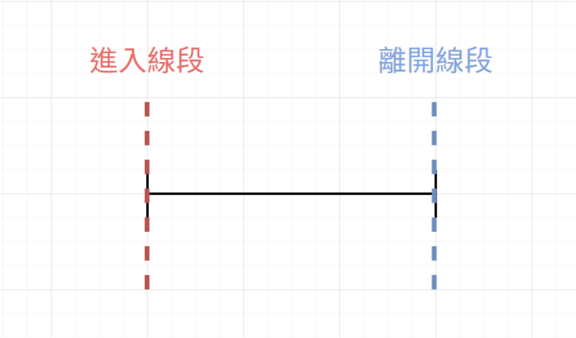


線段覆蓋長度

- 對於這個問題，我們使用掃描線的想法，固定一個鉛直的掃描線，從左掃到右
- 只要找到掃描線一共在多少時間有經過線段即可

線段覆蓋長度

- 事實上，需要考慮的只有每個線段的端點
- 將每條線段的左右界分別考慮，當掃描線掃過左界時，表示掃描線進入線段
- 反之經過右界時，表示離開線段



線段覆蓋長度

實作細節：

- 用 `pair` 去儲存每條線段的左界與右界
- $\{l, 1\}$ 表示在 l 的位置進入線段，$\{r+1, -1\}$ 表示在 $r+1$ 的位置離開了線段
- 用一個數字 a 維護目前掃描線經過了幾個線段，只要去維護有幾個位置 $a > 0$ 即可

ABC188D - Snuke Prime

有一間公司推出了訂閱制的服務，訂閱後可以免費使用任何的 app，訂閱這個服務每天需要付 C 塊錢，隨時都可以訂閱和解除。現在，你有 n 個需要使用的 app，你知道每個 app 你會需要使用的時間是第 a_i 天到第 b_i 天，在沒有訂閱的情況下，每天會需要付 c_i 的錢。請問你最少會需要花多少錢?

範圍:

- $1 \leq n \leq 2 \times 10^5$
- $1 \leq C, a_i, b_i, c_i \leq 10^9$

下一個例題

- 發現到每一天只有兩種選擇，訂閱服務或者是付所有 app 的錢

下一個例題

- 發現到每一天只有兩種選擇，訂閱服務或者是付所有 `app` 的錢
- 因此我們只要知道每一天付 `app` 需要花費的錢，與 C 取 `min` 即可

下一個例題

- 發現到每一天只有兩種選擇，訂閱服務或者是付所有 `app` 的錢
- 因此我們只要知道每一天付 `app` 需要花費的錢，與 C 取 `min` 即可
- 與剛剛的想法很類似，只要使用掃描線去維護一段時間內的花費，一起計算即可！

一個酷酷的例題

Codeforces EDU - Get together

在一條數線上，有 n 個人，第 i 個人站在 a_i 的位置上，每個人每秒走路的速度是 v_i
現在，這 n 個人想要聚在同一個點，請問最少要花多少時間才能讓他們站在同一個位置

範圍：

- $1 \leq n \leq 2 \times 10^5$
- $1 \leq v_i \leq 10^9$
- $-10^9 \leq x \leq 10^9$

Get together

- 遇到這種要找最小可以達成某件事情的題目時
- 考慮進行二分搜

Get together

- 遇到這種要找最小可以達成某件事情的題目時
- 考慮進行二分搜
- 因此，現在題目轉換為，要檢查在某個時間點 t 的時候，每個人是否有辦法聚在一起

Get together

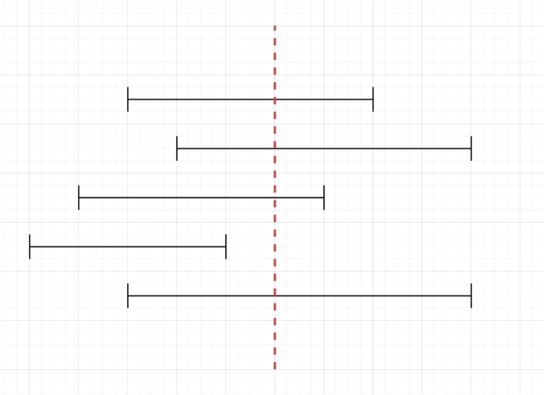
- 遇到這種要找最小可以達成某件事情的題目時
- 考慮進行二分搜
- 因此，現在題目轉換為，要檢查在某個時間點 t 的時候，每個人是否有辦法聚在一起
- 在時間點 t 時，每個人可以走到的位置會是 $[a_i - v_i t, a_i + v_i t]$

Get together

- 遇到這種要找最小可以達成某件事情的題目時
- 考慮進行二分搜
- 因此，現在題目轉換為，要檢查在某個時間點 t 的時候，每個人是否有辦法聚在一起
- 在時間點 t 時，每個人可以走到的位置會是 $[a_i - v_i t, a_i + v_i t]$
- 現在問題就被我們轉換成，有 n 個線段，而這 n 個線段是否有交集

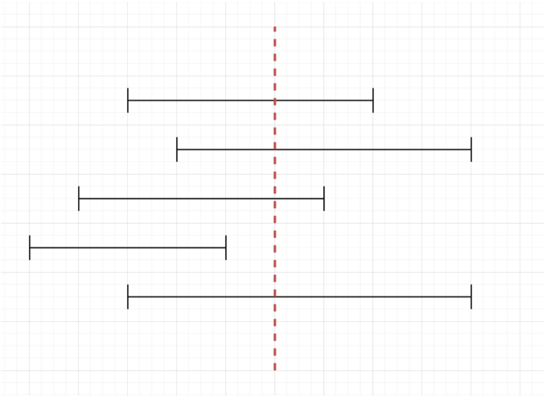
Get together

- 要如何檢查線段是否有交集呢?



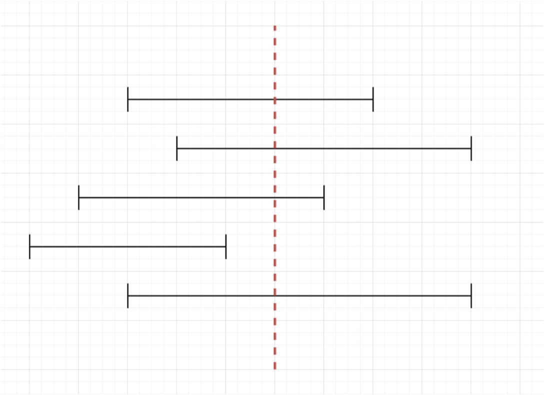
Get together

- 要如何檢查線段是否有交集呢?
- 掃描線?



Get together

- 要如何檢查線段是否有交集呢?
- 掃描線?
- 其實根本不用，只要左界的最大值小於右界的最小值就好了！



其他應用

- 最近點對（使用 set 的做法）
- 矩形覆蓋面積（搭配資結）
- 線段交點數量（搭配資結）
- 極角掃描線（計算幾何）
- 還有更多...

前綴和 & 差分

一個簡單的小例子

CSES - Static Range Sum Queries

給你一個 n 項的陣列，每次詢問 $[l, r]$ 之間所有數字的總和。

範圍： $1 \leq n, q \leq 10^5$

- 既然想要求 $[l, r]$ 之間數字的總和，那每次都直接跑過所有數字不就好了？

一個簡單的小例子

CSES - Static Range Sum Queries

給你一個 n 項的陣列，每次詢問 $[l, r]$ 之間所有數字的總和。

範圍： $1 \leq n, q \leq 10^5$

- 既然想要求 $[l, r]$ 之間數字的總和，那每次都直接跑過所有數字不就好了？
- 然後這樣子的複雜度會是 $O(nq)$，會 TLE 欸?

一個簡單的小例子

CSES - Static Range Sum Queries

給你一個 n 項的陣列，每次詢問 $[l, r]$ 之間所有數字的總和。

範圍： $1 \leq n, q \leq 10^5$

- 仔細想一下，我們其實是要求一段連續數字的總和，真的需要每次都跑過一次嗎?

一個簡單的小例子

CSES - Static Range Sum Queries

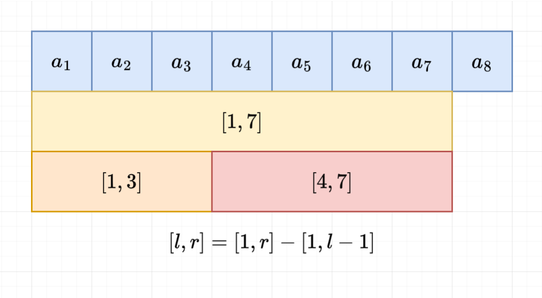
給你一個 n 項的陣列，每次詢問 $[l, r]$ 之間所有數字的總和。

範圍： $1 \leq n, q \leq 10^5$

- 仔細想一下，我們其實是要求一段連續數字的總和，真的需要每次都跑過一次嗎?
- 而這時，我們就會用到所謂的前綴和！

前綴和

- 定義 `pref[i]` $= \sum_{j=1}^{i} a_i$，也就是 $[1, i]$ 所有數字的總和
- 則我們會發現，其實 $[l, r]$ 可以用 $[1, r]$ 減去 $[1, l-1]$ 來得到
- 因此只要我們跑過一次整個陣列，就可以在 $O(1)$ 的時間，得到任意區間的總和了



下一個小例子

HackerRank - Array Manipulation

給你一個 n 項的陣列，一開始每個數字都是 0，每次對 $[l_i, r_i]$ 的數字加上 v_i。在做完所有操作之後，輸出整個陣列最大的數字。

範圍：

- $1 \leq n \leq 10^7$
- $1 \leq m \leq 2 \times 10^5$

下一個小例子

HackerRank - Array Manipulation

給你一個 n 項的陣列，一開始每個數字都是 0，每次對 $[l_i, r_i]$ 的數字加上 v_i。在做完所有操作之後，輸出整個陣列最大的數字。

範圍：

- $1 \leq n \leq 10^7$
- $1 \leq m \leq 2 \times 10^5$

- 如果剛剛有認真聽課，應該會發現這題其實如果我們把區間加值想成線段
- 使用掃描線其實就可以計算出每個位置在操作完的數字了！

下一個小例子

HackerRank - Array Manipulation

給你一個 n 項的陣列，一開始每個數字都是 0，每次對 $[l_i, r_i]$ 的數字加上 v_i。在做完所有操作之後，輸出整個陣列最大的數字。

範圍：

- $1 \le n \le 10^7$
- $1 \le m \le 2 \times 10^5$

- 如果剛剛有認真聽課，應該會發現這題其實如果我們把區間加值想成線段
- 使用掃描線其實就可以計算出每個位置在操作完的數字了！
- 不過事實上，我們在做的這件事情，其實概念上是所謂的「差分」

差分

- 注意到當我們對一段連續區間 $[l, r]$ 進行加值時
- 對於這個區間內，兩兩相鄰的數字之間有一個東西不會改變
- 而那就是兩兩之間的**差**

差分

- 對於原本的陣列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，我們另外開一個陣列 b
- 令 $b_i = a_i - a_{i-1}$，我們稱 b 為 a 的「差分陣列」

差分

- 對於原本的陣列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，我們另外開一個陣列 b
- 令 $b_i = a_i - a_{i-1}$，我們稱 b 為 a 的「差分陣列」
- 當我們對一整個區間進行加值時，其實只會改變 b_l 和 b_{r+1}
- 分別對應的操作是 $b_l := b_l + v, \quad b_{r+1} := b_{r+1} - v$
- 因此每個操作我們都只需要花 $O(1)$ 的時間即可完成

差分

- 對於原本的陣列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，我們另外開一個陣列 b
- 令 $b_i = a_i - a_{i-1}$，我們稱 b 為 a 的「差分陣列」
- 當我們對一整個區間進行加值時，其實只會改變 b_l 和 b_{r+1}
- 分別對應的操作是 $b_l := b_l + v, \ \ b_{r+1} := b_{r+1} - v$
- 因此每個操作我們都只需要花 $O(1)$ 的時間即可完成
- 在做完所有操作之後，只要對差分陣列找出前綴和即可

前綴和與差分之間的關係

- 在很多時候，我們常常會利用到前綴和與差分來幫助我們更快速地完成一些操作
- 這兩種操作事實上也互為反操作
- 因此，其實只要有兩個互為逆運算的操作（$+/-$，$\times/\div$，$\oplus/\oplus$）都可以做類似的事
- 之後學到可以做動態前綴和的資料結構 BIT 的時候，也會利用到這兩種操作

變成區間加等差數列呢?

區間加等差數列，單點查值

給你一個 n 項的陣列，每次對 $[l_i, r_i]$ 的數字依序加上 $v_i, v_i + d_i, v_i + 2d_i, \cdots$。在做完所有操作之後，輸出所有數字。

範圍：

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq m \leq 10^5$

變成區間加等差數列呢?

- 發現到每個位置被加的值會依序遞增
- 用一個神奇的表示方式，將目前的 $a_i := x_i \times i + y_i$

x	0	0	0	0	0	0	0	0
y	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8

變成區間加等差數列呢？

- 事實上等同於對 x_i 和 y_i 分別做區間加值
- 分別維護兩個的差分即可

Range Add $v_i = 3, d_i = 2$

x	0	$+2$	$+2$	$+2$	$+2$	0	0	0
y	a_1	-1	-1	-1	-1	a_6	a_7	a_8
true value	a_1	$+3$	$+5$	$+7$	$+9$	a_6	a_7	a_8

變成區間加等差數列呢?

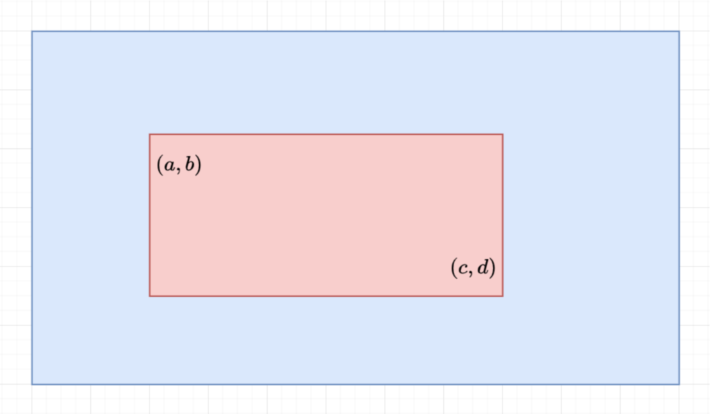
- 我們用 `diffx[i]` 與 `diffy[i]` 來分別表示兩個的差分
- 對區間 $[l, r]$ 加等差數列時，等同於
  1. `diffx[l]` $:=$ `diffx[l]` $+ d_i$, `diffx[r+1]` $:=$ `diffx[r+1]` $- d_i$
  2. `diffy[l]` $:=$ `diffy[l]` $+ v_i - i \times d_i$, `diffy[r+1]` $:=$ `diffy[r+1]` $- v_i + i \times d_i$
- 做完之後再一起做前綴和，找到真正的 x_i, y_i，就可以找到真正的 a_i 了

CSES - Forest Queries

給你一個二維的表格，每個位置上可能會有種樹。接著詢問 q 次，每次詢問 (a, b) 和 (c, d) 所夾成的矩形內有幾棵樹?

二維前綴和

- 現在問題從剛剛的陣列上的詢問，變成是二維表格上的詢問了
- 能不能用類似的方式計算答案呢?



二維前綴和

- 事實上，我們想要找的東西是

$$\sum_{i=a}^{c}\sum_{j=b}^{d} a_{ij}$$

- 現在，我們想要用前綴和的方式來快速計算這個東西

二維前綴和

- 事實上，我們想要找的東西是

$$\sum_{i=a}^{c}\sum_{j=b}^{d} a_{ij}$$

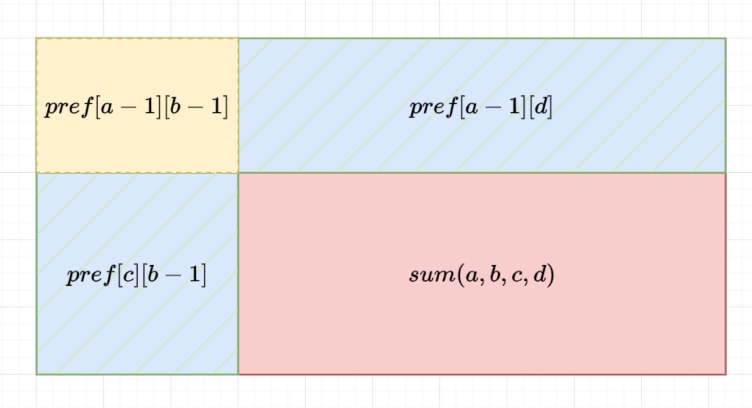
- 現在，我們想要用前綴和的方式來快速計算這個東西
- 可以用 `pref[x][y]` 表示

$$\sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{y} a_{ij}$$

- 就可以用類似剛剛在一維陣列上的做法得到答案了

二維前綴和

- $sum(a, b, c, d) =$ `pref[c][d] - pref[a-1][d] - pref[c][b-1] + pref[a-1][b-1]`



二維前綴和

- 建立二維前綴和與詢問十分相似

```
pref[x][y] = pref[x-1][y] + pref[x][y-1] - pref[x-1][y-1]
```

- 可以在 $O(nm)$ 的時間完成預處理

二維差分?

- 既然有二維前綴和，那有沒有二維差分?
- 有的！作法也很類似，留給大家自己思考看看

二維差分?

- 既然有二維前綴和，那有沒有二維差分?
- 有的！作法也很類似，留給大家自己思考看看
- 小提示是一維的差分對 l 加值等同於對後綴加值
- 那對二維的差分加值，會等同什麼呢?

單調隊列

來看一個簡單的小例題

CSES - Nearest Smaller Value

給你一個 n 項的序列，請找到每個元素往左邊找第一個小於這個數字的位置。

來看一個簡單的小例題

CSES - Nearest Smaller Value

給你一個 n 項的序列，請找到每個元素往左邊找第一個小於這個數字的位置。

- 遇到這個題目後，你可能會想要直接對每個數字往前枚舉，找到想要的答案。
- 不過這樣做會是 $O(n^2)$。

來看一個簡單的小例題

CSES - Nearest Smaller Value

給你一個 n 項的序列，請找到每個元素往左邊找第一個小於這個數字的位置。

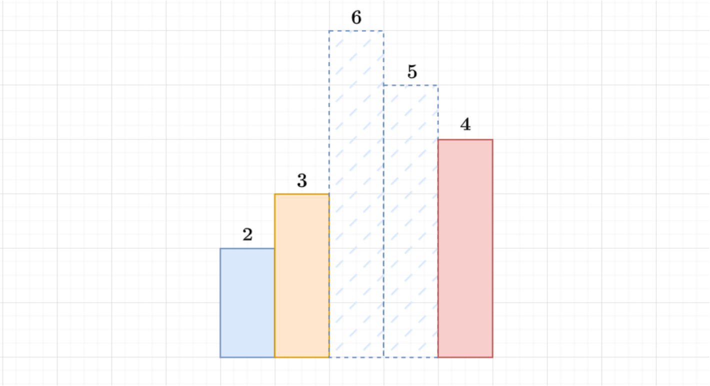
- 遇到這個題目後，你可能會想要直接對每個數字往前枚舉，找到想要的答案。
- 不過這樣做會是 $O(n^2)$。
- 有沒有更好的做法呢?

來看一個簡單的小例題

- 因此，我們要來講講單調隊列這個東西
- 使用一個 `stack` 紀錄
- 維護一個遞增或遞減的序列
- 遞增 $\rightarrow$ 第一個位置是整個陣列的最小值
- 遞減 $\rightarrow$ 第一個位置是整個陣列的最大值

回到原題

- 注意到當我們從左開始往右枚舉數字時
- 在 a_i 前面大於 a_i 的數字都在後來都沒有用了



回到原題

- 因此，我們根本不用在每一次遇到新數字都去往前找
- 需要的資訊都存在 stack 上面了
- 時間複雜度： $O(n)$
- 參考程式碼：

```
stack<int> st;

for(int i = 1;i <= n;i++){
    while(!st.empty() && arr[st.top()] >= arr[i]){
        st.pop();
    }
    if(!st.empty()) ans[i] = st.top();
    st.push(i);
}
```

Sliding Maximum/Minimum (Zerojudge a146)

你有一個長度為 n 的陣列 $a_1, \ldots, a_n$，請找出所有長度為 k 的子陣列的最大和最小值。

測資範圍： $n \le 10^6$

固定長度區間極值

Sliding Maximum/Minimum (Zerojudge a146)

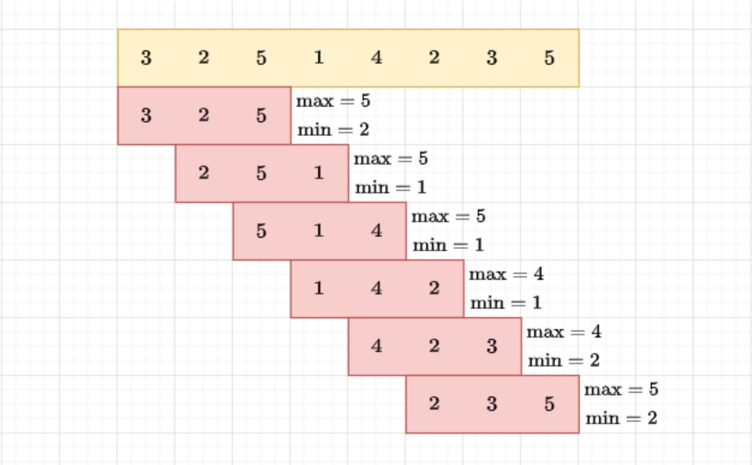
你有一個長度為 n 的陣列 $a_1, \ldots, a_n$，請找出所有長度為 k 的子陣列的最大和最小值。

測資範圍： $n \leq 10^6$

- 既然我們剛剛講到了單調隊列的概念，我們來想想這題的做法吧！

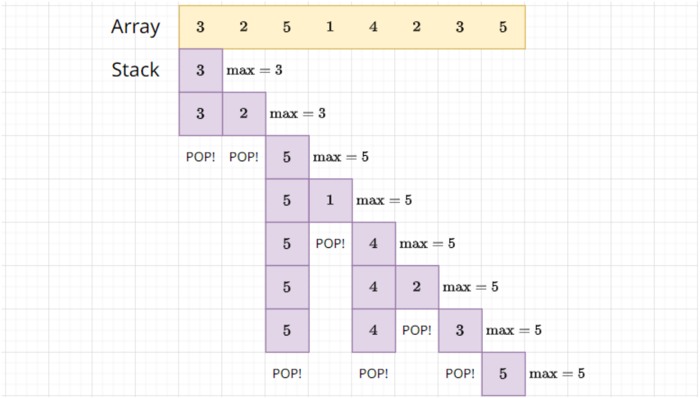
固定長度區間極值

- 避免有人不理解剛剛題目的意思，這裡放個圖進行說明



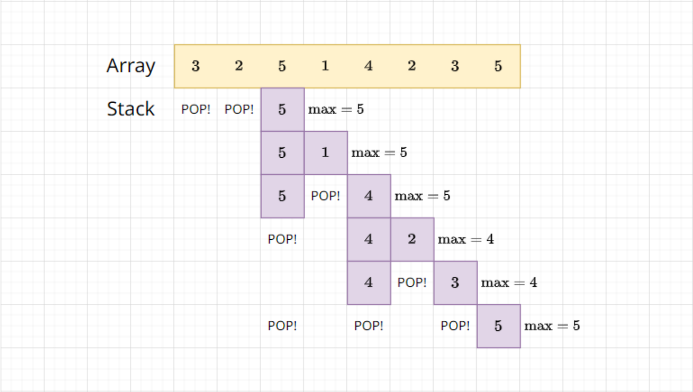
固定長度區間極值

- 現在，我們想一個簡單一點的問題，我們對前綴找出維護最大值的單調隊列試試



固定長度區間極值

- 用一樣的做法，不過長度超過 k 的也跟著 POP 掉！



固定長度區間極值

一些小小的實作細節

- 為了只維護長度在 k 以內的 window，我們會在 deque 上面存 index
- 維護最大值 $\rightarrow$ 前面有比較小的就 pop 掉
- 維護最小值 $\rightarrow$ 前面有比較大的就 pop 掉
- 詳細的話，我們等等來講實際的程式碼
- 同樣的東西會在 DP II 遇到，大家要搞懂這邊喔！

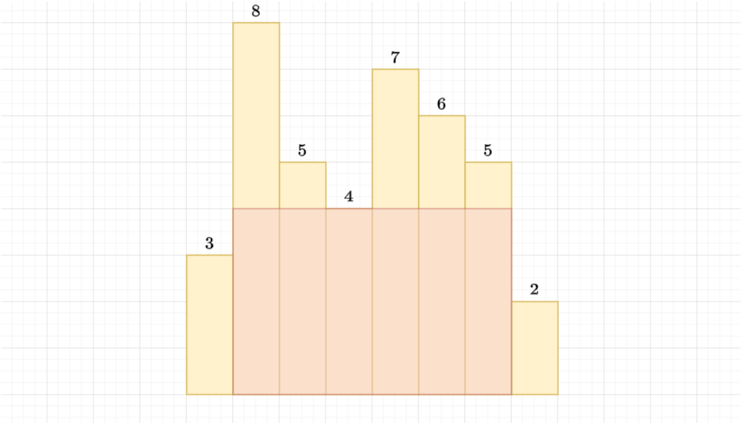
參考程式碼

```cpp
for(int i = 0;i < n;i++){
    //MIN
    while(!mn.empty() && i-mn.front() >= k)
        mn.pop_front();
    while(!mn.empty() && arr[mn.back()] >= arr[i])
        mn.pop_back();
    mn.push_back(i);
    if(i >= k-1) ansMN.push_back(arr[mn.front()]);
    //MAX
    while(!mx.empty() && i-mx.front() >= k)
        mx.pop_front();
    while(!mx.empty() && arr[mx.back()] <= arr[i])
        mx.pop_back();
    mx.push_back(i);
    if(i >= k-1) ansMX.push_back(arr[mx.front()]);
}
```

經典例題 - 最大長方形面積

CSES - Advertisement

現在有 n 個寬為 1，長為 a_i 的長條排成一列，請找到最大的長方形面積是多少



經典例題 - 最大長方形面積

- 有沒有什麼想法呢?

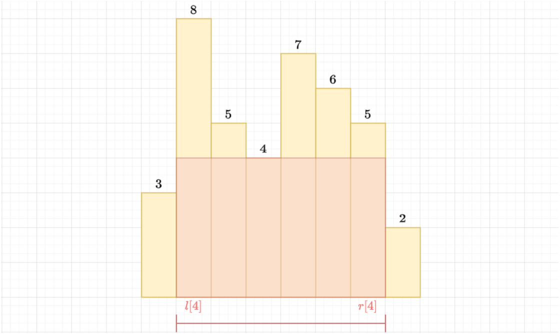
經典例題 - 最大長方形面積

- 有沒有什麼想法呢?
- 最簡單的方式是枚舉一整個區間 $[l, r]$，而答案會是 $(r - l + 1)\min\{a_l, \cdots, a_r\}$ 的最大值

- 有沒有什麼想法呢?
- 最簡單的方式是枚舉一整個區間 $[l, r]$，而答案會是 $(r-l+1)\min\{a_l, \cdots, a_r\}$ 的最大值
- 不過這樣做太慢了！

經典例題 - 最大長方形面積

- 注意到我們可以換一個思路
- 對每個 a_i，往左往右找最遠到哪個位置，a_j 都會大於等於 a_i
- 我們用 `l[i]` 與 `r[i]` 表示，那答案其實就是 $\max_{i=1}^{n}(r[i]-l[i]+1)a_i$



經典例題 - 最大長方形面積

- 怎麼計算 `l[i]` 和 `r[i]` 呢?
- 其實就是剛剛講過的第一個小於 x 的位置，但從左右都各做一次！
- 時間複雜度： $O(n)$

經典例題 - 最大全 0 矩形

CSES - Maximum Building I

給你一張網格圖，每個位置可能會種樹，也可能不會種樹。你現在要建造一個長方形的房子，但有種樹的格子上不能蓋房子，請問這個房子最大可以是多少?

Hint: 這題其實就是剛剛那題，留給大家當作練習

補充： 模運算

模運算

- 這邊的內容會在數學的時候講述更多
- 不過因為這件事還滿重要的，我們在此先講一下模運算
- 但這裡會先用比較沒那麼嚴謹的方式進行說明

模運算

- 你可能常常會在題目上遇到這樣的要求
- 「由於答案可能會很大，請輸出 $\bmod 10^9+7$ 後的結果」
- 這邊的 $\bmod$ 究竟是什麼意思呢?

模運算

模運算 (Modulo Operation)

定義 $a \bmod b = r$，表示你可以找到一個 $q \in \mathbb{Z}$，使得 $a = bq + r$，而 $0 \leq r < b$

- 等同於 C++ 當中的 % 所做的事情
- 事實上，C++ 的 % 做的事情就是這個，不同的點在於可能會有負數
- C++ 的 % 定義為 $a \ \% \ b = a - b \times \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$
- 由於 int 和 long long 都有固定的範圍，我們會利用 mod 來避免超出範圍

模運算

模運算的性質

1. $(a+b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$
2. $ab \bmod n = (a \bmod n)(b \bmod n) \bmod n$
3. $\dfrac{a}{b} \bmod n \neq \dfrac{a \bmod n}{b \bmod n}$

- 前兩點告訴我們，其實在進行加減和乘的時候，不管有沒有 `mod` 都是一樣的
- 不過第三點是錯的**超級重要**，這點絕對要記住
- 如何在有 `mod` 的時候進行除法，會在之後的數學課時講到

模運算性質證明（一）

令 $a = k_1 n + r_1, \quad b = k_2 n + r_2$，而 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ and $0 \leq r_1, r_2 < n$。根據 mod 的定義，$r_1 = a \bmod n, \quad r_2 = b \bmod n$。

$$
\begin{aligned}
(a+b) \bmod n &= (k_1 n + r_1 + k_2 n + r_2) \bmod n \\
&= (n(k_1 + k_2) + r_1 + r_2) \bmod n \\
&= (r_1 + r_2) \bmod n \\
&= (a \bmod n) + (b \bmod n) \bmod n
\end{aligned}
$$

因此，我們證明了 $(a+b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$。

模運算性質證明（二）

令 $a = k_1 n + r_1, \quad b = k_2 n + r_2$，而 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ and $0 \le r_1, r_2 < n$。根據 mod 的定義，$r_1 = a \bmod n, \quad r_2 = b \mod n$.

$$
\begin{aligned}
ab \bmod n &= (k_1 n + r_1)(k_2 n + r_2) \bmod n \\
&= (k_1 k_2 n^2 + k_1 r_2 n + k_2 r_1 n + r_1 r_2) \bmod n \\
&= (n(k_1 k_2 n + k_1 r_2 + k_2 r_1) + r_1 r_2) \bmod n \\
&= r_1 r_2 \bmod n \\
&= (a \bmod n)(b \bmod n) \bmod n
\end{aligned}
$$

因此，我們證明了 $ab \bmod n = (a \bmod n)(b \bmod n) \bmod n$.

模運算結論

- 不過講了那麼多，相信有些人還是不能理解剛剛所講的東西
- 但沒關係，只要記得不論是加減乘，先 `mod` 或後 `mod` 都是一樣的

模運算小練習

我們來做點小練習吧！

用 C++ 計算以下數值

1. $100000 \times 99999 \bmod 13$
2. $2^{100} \bmod 10^9 + 7$
3. $(-4) \times 1234567890 \bmod 998244353$
4. 費氏數列（$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$）第 100 項 $\bmod$ $10^9 + 7$
5. 一個奇怪的遞迴數列第 100 項 $\bmod$ 998244353

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \texttt{if } n \le 1, \\ f(n-1)f(n-2) - 2f(n-1) - 3f(n-2) & \texttt{otherwise} \end{cases}$$

模運算小練習

練習題的答案

1. 12
2. 976371285
3. 52950205
4. 782204094
5. 901665516