DP I

zhu & sam571128

這堂課會教的東東 owo

- 什麼是 DP
- 常見 DP 經典題
- 背包問題
- 其他練習題

Warm up!

走樓梯

有一個 n 階的樓梯，每次可以走一格或是兩格，求走到第 n 階有幾種走法？

Warm up!

走樓梯

有一個 n 階的樓梯，每次可以走一格或是兩格，求走到第 n 階有幾種走法？

- 學過遞迴的應該都會知道要怎麼做了 ><

Warm up!

走樓梯

有一個 n 階的樓梯，每次可以走一格或是兩格，求走到第 n 階有幾種走法？

- 學過遞迴的應該都會知道要怎麼做了 ><
- 令 $F(n)$ 為走到第 n 階的方法數
- 有兩種可能，一種是從 $n-1$ 階走一步過來，另一種是從 $n-2$ 階走兩步過來

Warm up!

走樓梯

有一個 n 階的樓梯，每次可以走一格或是兩格，求走到第 n 階有幾種走法？

- 學過遞迴的應該都會知道要怎麼做了 ><
- 令 $F(n)$ 為走到第 n 階的方法數
- 有兩種可能，一種是從 $n-1$ 階走一步過來，另一種是從 $n-2$ 階走兩步過來
- 那遞迴式就是 $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

Warm up!

走樓梯

有一個 n 階的樓梯，每次可以走一格或是兩格，求走到第 n 階有幾種走法？

- 學過遞迴的應該都會知道要怎麼做了 ><
- 令 $F(n)$ 為走到第 n 階的方法數
- 有兩種可能，一種是從 $n-1$ 階走一步過來，另一種是從 $n-2$ 階走兩步過來
- 那遞迴式就是 $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$
- 且遞迴終止條件為 $F(0) = 1, F(1) = 1$

Warm up!

走樓梯

有一個 n 階的樓梯，每次可以走一格或是兩格，求走到第 n 階有幾種走法？

- 學過遞迴的應該都會知道要怎麼做了 ><
- 令 $F(n)$ 為走到第 n 階的方法數
- 有兩種可能，一種是從 $n-1$ 階走一步過來，另一種是從 $n-2$ 階走兩步過來
- 那遞迴式就是 $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$
- 且遞迴終止條件為 $F(0) = 1, F(1) = 1$

```
int F(int n){
    if(n<=1) return 1;
    else return (F(n-1)+F(n-2));
}
```

Warm up!

- 你會發現吃 TLE 了

Warm up!

- 你會發現吃 TLE 了
- why?

Warm up!

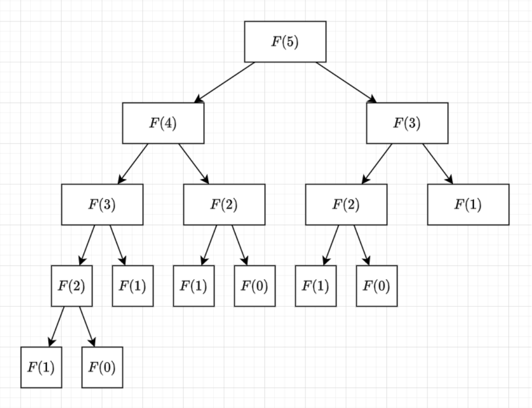
- 你會發現吃 TLE 了
- why?
- 在自己的電腦跑一次，你會發現當 $n = 50$ 的時候就很慢了

Warm up!

- 你會發現吃 TLE 了
- why?
- 在自己的電腦跑一次，你會發現當 $n = 50$ 的時候就很慢了
- 複雜度大約是 $O(F(n))$，那其實這是一個指數級成長的函數

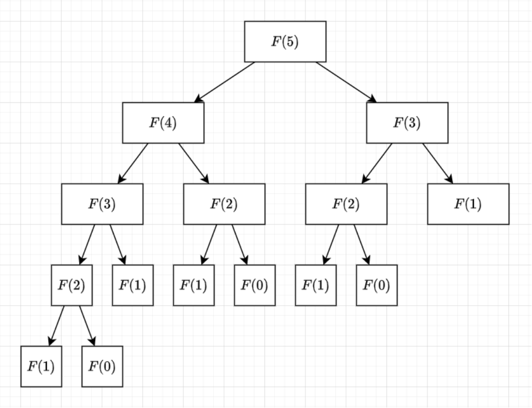
Warm up!

- 觀察下圖，我們可以發現有很多狀態會被重複使用到



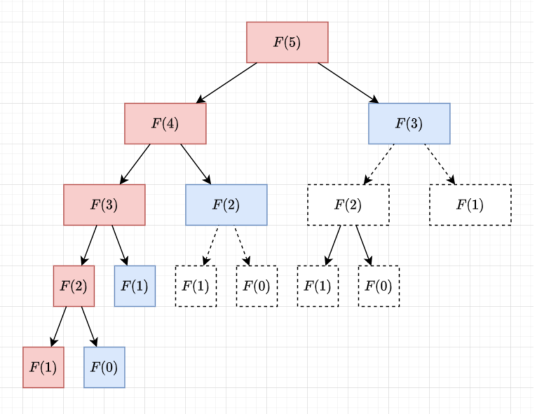
Warm up!

- 觀察下圖，我們可以發現有很多狀態會被重複使用到
- 用前面的暴力遞迴，這些狀態每次都要重複算



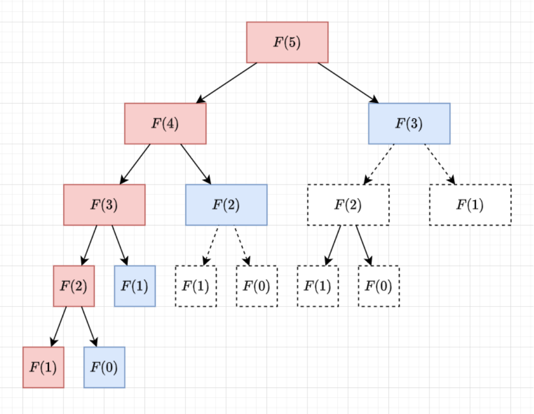
Warm up!

- 我們可以多開一個陣列用來記錄已經計算過的狀態！



Warm up!

- 我們可以多開一個陣列用來記錄已經計算過的狀態！
- 這個動作叫做記憶化（Memoization）



Warm up!

- 將狀態記錄下來後，複雜度從指數級變成線性 $O(n)$

```
int F(int n){
    if(n<=1) return 1;
    else if(dp[i]) return dp[i];
    else return (dp[i]=F(i-1)+F(i-2));
}
```

Warm up!

- 將狀態記錄下來後，複雜度從指數級變成線性 $O(n)$
- 「記憶化」就是動態規劃的基本精神！

```
int F(int n){
    if(n<=1) return 1;
    else if(dp[i]) return dp[i];
    else return (dp[i]=F(i-1)+F(i-2));
}
```

什麼是 DP？

甚麼是動態規劃？

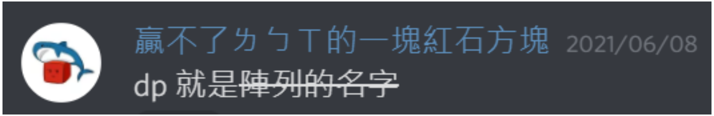
- 動態規劃（Dynamic Programming），簡稱 DP

甚麼是動態規劃？

- 動態規劃（Dynamic Programming），簡稱 DP
- 他不是演算法，比較像是一種想法或技巧

甚麼是動態規劃？

- 動態規劃（Dynamic Programming），簡稱 DP
- 他不是演算法，比較像是一種想法或技巧



一些 DP 的性質

- 重複子問題 (overlapping subproblems)
  1. 同樣性質的子問題，會被重複計算
  2. 可以使用「記憶化」來避免重複計算
- 最佳子結構 (optimal substructures)
  1. 對於某個狀態的最佳解，可以從小狀態的最佳解轉移過來
- 無後效性
  1. 轉移順序必須是一張 DAG (有向無環圖)，子問題之間不會互相呼叫
  2. 因此轉移順序很重要

dp 的步驟（以走樓梯為例）

step 1 設置狀態

一個狀態其實就是一個子問題。令 $dp[i]$ 表示走到第 i 階的方法數

step 2 導出轉移

思考要怎麼從其他以計算過的狀態求解

$$dp[i] = dp[i-1] + dp[i-2]$$

step 3 打好基底

基底可以是遞迴的終止條件或是迴圈中的邊界條件

$$dp[0] = 1, \quad dp[1] = 1$$

dp 的實作

- Top-down
  1. 從大子問題去找小子問題
  2. 實作方式通常是遞迴
  3. 轉移式列出來其實就差不多了
  4. 需要遞迴終止條件
- Buttom-up
  1. 從小子問題去推到大子問題
  2. 實作方式是用迴圈
  3. 比較需要去注意轉移順序
  4. 需要初始化邊界條件
- 我個人比較習慣都寫迴圈，所以之後放的程式碼大部分都會是迴圈版的 ><

常見 DP 經典題

常見 DP 經典題

- 接下來每題大概給 3∼5 分鐘的思考時間 ><
- 按照步驟：設置狀態、導出轉移、打好基底

AtCoder DP Contest pB - Frog 2

給你 N 顆石頭，對於每個石頭 i，它的高度為 h_i。一開始在第 1 個石頭上，每次可以往前跳 $1 \sim K$ 格，從第 i 個石頭跳到第 j 個石頭的花費是 $|h_i - h_j|$，求跳到第 N 格的最小花費

- $1 \leq N \leq 10^5$
- $1 \leq K \leq 100$

step 1 設置狀態

令 $dp[i]$ 為從第 1 顆石頭跳到第 i 顆石頭的最小花費

step 2 導出轉移

枚舉最後一次跳了幾步，假設最後一次跳了 j 步，則轉移式就會是

$$dp[i] = \min_{j=1}^{k}(dp[i-j] + |h_i - h_j|)$$

常見 DP 經典題 - 0

step 3 打好基底

在第一顆石頭的時候不會有任何花費，所以有 $dp[1] = 0$

常見 DP 經典題 - 0

```
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);

using namespace std;

signed main(){
    fastio

    int n,k;cin>>n>>k;
    int h[n+1]{},dp[n+1]{};
    for(int i=1;i<=n;++i) cin>>h[i];
    for(int i=2;i<=n;++i){
        dp[i]=1e9;
        for(int j=1;j<=k;++j){
            if(i-j>=1) dp[i]=min(dp[i],dp[i-j]+abs(h[i]-h[i-j]));
        }
    }

    cout<<dp[n]<<'\n';
}
```

AtCoder DP Contest pC - Vacation

有 N 天的假期，並且有 a, b, c 三種活動

1. 在第 i 天做活動 a 會獲得 a_i 點的快樂值
2. 在第 i 天做活動 b 會獲得 b_i 點的快樂值
3. 在第 i 天做活動 c 會獲得 c_i 點的快樂值

但為了避免對活動感到厭倦，不可以兩天以上都進行同一種活動
求 N 天後的最大快樂值

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq a_i, b_i, c_i \leq 10^4$

step 1 設置狀態

令 $dp[i]$ 為第 i 天結束後的最大快樂值

那麼答案就會是 $dp[N]$

step 1 設置狀態

令 $dp[i]$ 為第 i 天結束後的最大快樂值

那麼答案就會是 $dp[N]$

- 好像列不出正確的轉移？

常見 DP 經典題 - 1

step 1 設置狀態

令 $dp[i]$ 為第 i 天結束後的最大快樂值

那麼答案就會是 $dp[N]$

- 好像列不出正確的轉移？
- 沒關係！一維不夠就讓他多一維！

常見 DP 經典題 - 1

step 1 設置狀態

令 $dp[i][j]$ 為在第 i 天做完第 j 種活動後的最大快樂值（$j = 0, 1, 2$）

那麼答案就會是 $\max(dp[N][0],\ dp[N][1],\ dp[N][2])$

常見 DP 經典題 - 1

step 2 導出轉移

題目有條件是「不可以兩天以上都進行同一種活動」，故轉移式為

$$dp[i][0] = \max(dp[i-1][1],\ \ dp[i-1][2]) + a_i$$
$$dp[i][1] = \max(dp[i-1][0],\ \ dp[i-1][2]) + b_i$$
$$dp[i][2] = \max(dp[i-1][0],\ \ dp[i-1][1]) + c_i$$

常見 DP 經典題 - 1

step 3 打好基底

顯然有 $dp[1][0] = a[1], \quad dp[1][1] = b[1], \quad dp[1][2] = c[1]$

常見 DP 經典題 - 1

```
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);

using namespace std;

signed main(){
    fastio

    int n;cin>>n;
    int a[n+1]{},b[n+1]{},c[n+1]{},dp[n+1][3]{};
    for(int i=1;i<=n;++i) cin>>a[i]>>b[i]>>c[i];

    dp[1][0]=a[1],dp[1][1]=b[1],dp[1][2]=c[1];
    for(int i=2;i<=n;++i){
        dp[i][0]=max(dp[i-1][1],dp[i-1][2])+a[i];
        dp[i][1]=max(dp[i-1][0],dp[i-1][2])+b[i];
        dp[i][2]=max(dp[i-1][0],dp[i-1][1])+c[i];
    }
    cout<<max({dp[n][0],dp[n][1],dp[n][2]})<<'\n';
}
```

CSES Maximum Subarray Sum

求連續子陣列最大和（最長連續子陣列：陣列中一段連續的數字）

- $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$

step 1 設置狀態

令 $dp[i]$ 為前 i 項（包含第 i 項）的連續子陣列最大和

那麼答案就會是 $dp[1] \sim dp[n]$ 的最大值

step 2 導出轉移

對於每個 i，可以分成選 $i-1$ 以前的或是不選 $i-1$ 以前的

$$dp[i] = \max(a[i] + dp[i-1], a[i])$$

step 3 打好基底

題目說至少要選取一個數，那顯然有 $dp[1] = a[1]$

常見 DP 經典題 - 2

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);

using namespace std;

signed main(){
    fastio

    int n;cin>>n;
    long long a[n+1]{},dp[n+1]{},mx=-1e18;
    for(int i=1;i<=n;++i) cin>>a[i];
    dp[1]=a[1];
    for(int i=1;i<=n;++i){
        dp[i]=max(dp[i-1]+a[i],a[i]);
        mx=max(mx,dp[i]);
    }
    cout<<mx<<'\n';
}
```

常見 DP 經典題 - 3

ZeroJudge Longest Common Subsequence

給兩個字串 a, b，長度為 n, m，求他們的最長共同子序列（LCS）

- $1 \leq n, m \leq 1000$

常見 DP 經典題 - 3

ZeroJudge Longest Common Subsequence

給兩個字串 a, b，長度為 n, m，求他們的最長共同子序列（LCS）

- $1 \leq n, m \leq 1000$

- $a = \texttt{abcdgh}$, $b = \texttt{aedfhr}$
- 那他們的 LCS 就是 a, d, h

常見 DP 經典題 - 3

step 1 設置狀態

令 $dp[i][j]$ 為在字串 a 的前 i 個字母與字串 b 的前 j 個字母的 LCS 長度

那麼答案就會是 $dp[n][m]$

常見 DP 經典題 - 3

step 2 導出轉移

若 $a[i] = b[j]$，兩字串最後的字母是相同的，所以 $dp[i][j] = dp[i-1][j-1] + 1$

否則 $dp[i][j] = \max(dp[i-1][j], dp[i][j-1])$

常見 DP 經典題 - 3

step 3 打好基底

如果其中一個字串長度為 0，則他們的 LCS 就是 0

$$dp[i][0] = 0, dp[0][j] = 0$$

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);

using namespace std;

signed main(){
    fastio

    string a;
    while(cin>>a){
        string b;cin>>b;
        int alen=a.length(),blen=b.length();
        a=" "+a,b=" "+b;
        int dp[alen+1][blen+1]{};
        for(int i=1;i<=alen;++i){
            for(int j=1;j<=blen;++j){
                if(a[i]==b[j]) dp[i][j]=dp[i-1][j-1]+1;
                else dp[i][j]=max(dp[i-1][j],dp[i][j-1]);
            }
        }
        cout<<dp[alen][blen]<<'\n';
    }
}
```

CSES Edit Distance

給定兩個字串 a, b，長度分別為 n, m，以下有三種操作：
1. 加一個字母到字串 a 中
2. 刪除字串 a 中的一個字母
3. 將字串 a 中的字母替換成你想要的字母
求最少要幾次操作才使得兩個字串相同

- $1 \leq n, m \leq 5000$

常見 DP 經典題 - 4

step 1 設置狀態

令 $dp[i][j]$ 為在字串 a 取到第 i 個字母且在字串 b 取到第 j 個字母的最少操作數
那麼答案就會是 $dp[n][m]$

常見 DP 經典題 - 4

step 2 導出轉移

$$dp[i][j] = \min \begin{cases} dp[i-1][j-1] & \texttt{if } s[i] = s[j] \\ dp[i][j-1] + 1 & \text{對 a 加上字母 b[i]} \\ dp[i-1][j] + 1 & \text{刪除 a 的最後一個字母 a[i]} \\ dp[i-1][j-1] + 1 & \text{把 a 的最後一個字母換成 b 的最後一個字母} \end{cases}$$

常見 DP 經典題 - 4

step 3 打好基底

$$dp[0][0] = 0, \quad dp[i][0] = i, \quad dp[0][j] = j$$

常見 DP 經典題 - 4

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);

using namespace std;

signed main(){
    fastio

    string a,b;cin>>a>>b;
    int alen=a.length(),blen=b.length();
    a=" "+a,b=" "+b;
    int dp[alen+1][blen+1]{};
    for(int i=1;i<=alen;++i) dp[i][0]=i;
    for(int i=1;i<=blen;++i) dp[0][i]=i;
    for(int i=1;i<=alen;++i){
        for(int j=1;j<=blen;++j){
            if(a[i]==b[j]) dp[i][j]=dp[i-1][j-1];
            else dp[i][j]=min({dp[i-1][j]+1,dp[i][j-1]+1,dp[i-1][j-1]+1});
        }
    }
    cout<<dp[alen][blen]<<'\n';
}
```

常見 DP 經典題 - 5

CSES Grid Paths

給一個 $n \times n$ 的網格圖，只能往下或往右走，不能走到陷阱，問有幾種走法

- $1 \leq n \leq 1000$

step 1 設置狀態

令 $dp[i][j]$ 為走到 (i,j) 的方法數

那麼答案就會是 $dp[n][n]$

step 2 導出轉移

有兩種情況

$$dp[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{若 (i,j) 有陷阱} \\ dp[i-1][j] + dp[i][j-1] & \text{Otherwise} \end{cases}$$

常見 DP 經典題 - 5

step 3 打好基底

如果 $(1,1)$ 沒有陷阱，$dp[1][1] = 1$，否則 $dp[i][j]$ 皆為 0

常見 DP 經典題 - 5

```
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(0); cin.tie(0);

using namespace std;

const int MOD = 1e9+7;

signed main(){
    fastio

    int n;cin>>n;
    char g[n+1][n+1]{};

    for(int i=1;i<=n;++i){
        for(int j=1;j<=n;++j) cin>>g[i][j];
    }

    int dp[n+1][n+1]{};
    for(int i=1;i<=n;++i){
        for(int j=1;j<=n;++j){
            if(g[i][j]=='*') dp[i][j]=0;
            else if(i==1&&j==1) dp[i][j]=1;
            else dp[i][j]=(dp[i-1][j]+dp[i][j-1])%MOD;
        }
    }
    cout<<dp[n][n]%MOD<<'\n';
}
```

常見 DP 經典題 - 6

CSES Increasing Subsequence

給長度為 n 的序列，求最長遞增子序列（LIS）長度

- $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$

常見 DP 經典題 - 6

CSES Increasing Subsequence

給長度為 n 的序列，求最長遞增子序列（LIS）長度

- $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$

- $A = \{7, 3, 5, 3, 6, 2, 9, 8\}$
- LIS 長度為 4

- 看到 n 的範圍，感覺就是 $O(n)$ 或 $O(n \log n)$ 之類的東西

常見 DP 經典問題 - 6

- 看到 n 的範圍，感覺就是 $O(n)$ 或 $O(n \log n)$ 之類的東西
- 一時間好像想不到複雜度會過的解...

- 看到 n 的範圍，感覺就是 $O(n)$ 或 $O(n \log n)$ 之類的東西
- 一時間好像想不到複雜度會過的解...
- 沒關係！一樣可以先列出 DP 式再去思考要怎麼優化他！

step 1 設置狀態

令 $dp[i]$ 為最後一個數為 $a[i]$ 的最長遞增遞增子序列長度

那麼答案就是

$$\max_{j=1}^{n}(dp[j])$$

step 2 導出轉移

對於所有位置在 i 之前，且小於 $a[j]$ 的數，可以在他後面接上 $a[j]$，長度 $+1$

$$dp[i] = \max_{j<i, a[j]<a[i]} (dp[j] + 1)$$

常見 DP 經典題 - 6

step 3 打好基底

有兩種方式

1. $dp[0] = 0$，把 $a[0] := -\infty$，在沒有數字時，LIS 長度為 0
2. $dp[i] = 1$，所有結尾在 $a[i]$ 的 LIS 最短長度會是 1（自己一個）

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);

using namespace std;

signed main(){
    fastio

    int n;cin>>n;
    vector<int> a(n+1),dp(n+1,0);
    for(int i=1;i<=n;++i) cin>>a[i];
    for(int i=1;i<=n;++i){
        for(int j=0;j<=i;++j){
            if(a[j]<a[i]) dp[i]=max(dp[i],dp[j]+1);
        }
    }
    cout<<*max_element(dp+1,dp+n+1)<<'\n';
}
```

- 咦他的複雜度是 $O(n^2)$ 欸！這樣會 TLE！

常見 DP 經典題 - 6

- 咦他的複雜度是 $O(n^2)$ 欸！這樣會 TLE！
- 想想看有哪裡優化？

- 咦他的複雜度是 $O(n^2)$ 欸！這樣會 TLE！
- 想想看有哪裡優化？
- 這個技巧沒看過的應該很難想到，所以我會直接講解

- 開一個 v，而 $v[j]$ 表示對於所有 $dp[i] = j$ 的最小 $a[i]$
- 邊二分搜邊更新 $dp[i]$ 和 v

數列	1	3	7	5	4	6	1
$dp[i]$	1	2	3	3	3	4	1

$dp[i]$	1	2	3	4
$v[dp[i]]$	1	3	4	6

常見 DP 經典題 - 6

- 開一個 v，而 $v[j]$ 表示對於所有 $dp[i] = j$ 的最小 $a[i]$
- 邊二分搜邊更新 $dp[i]$ 和 v
- 這樣時間複雜度會是 $O(n \log n)$

數列	1	3	7	5	4	6	1
$dp[i]$	1	2	3	3	3	4	1

$dp[i]$	1	2	3	4
$v[dp[i]]$	1	3	4	6

常見 DP 經典題 - 6 - $O(n \log n)$

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);

using namespace std;

signed main(){
    fastio

    int n;cin>>n;
    vector<int> a(n+1),v,dp(n+1,0);
    for(int i=0;i<n;++i) cin>>a[i];
    for(int i=0;i<n;++i){
        int num=lower_bound(v.begin(),v.end(),a[i])-v.begin();
        dp[i]=num+1;
        if(num==v.size()) v.emplace_back(a[i]);
        else v[num]=a[i];
    }
    cout<<v.size()<<'\n';
}
```

背包問題

Warm up!

簡單的硬幣問題

給你無限個 1 元、5 元、8 元的硬幣，請問最少需要多少硬幣才能湊出 x 元？

Warm up!

簡單的硬幣問題

給你無限個 1 元、5 元、8 元的硬幣，請問最少需要多少硬幣才能湊出 x 元？

- 還記得之前 greedy 的時候講過的最佳策略嗎？

簡單的硬幣問題

給你無限個 1 元、5 元、8 元的硬幣，請問最少需要多少硬幣才能湊出 x 元？

- 還記得之前 greedy 的時候講過的最佳策略嗎？
- 先從幣值大的開始選，如果會超過 x，就往小的選

Warm up!

簡單的硬幣問題

給你無限個 1 元、5 元、8 元的硬幣，請問最少需要多少硬幣才能湊出 x 元？

- 還記得之前 greedy 的時候講過的最佳策略嗎？
- 先從幣值大的開始選，如果會超過 x，就往小的選
- 這樣真的會是最佳解嗎？

背包問題 - 0

Atcoder DP Contest D - Knapsack 1

有 N 個物品，每個物品有價值 v_i 和大小 w_i，每個物品只有一個。你有一個容量為 W 的背包。請問你最多可以拿多少價值?

背包問題 - 0

Atcoder DP Contest D - Knapsack 1

有 N 個物品，每個物品有價值 v_i 和大小 w_i，每個物品只有一個。你有一個容量為 W 的背包。請問你最多可以拿多少價值?

- 這題是經典的 0/1 背包問題
- 其實也就是每個東西只有一個，要嘛選要嘛不選

step 1 設置狀態

令 $dp[i][j]$ 為取到第 i 個物品且重量為 j 時的最大價值

那麼答案就是 $dp[N][W]$

step 2 導出轉移

對於每個物品，可以選或不選

$$dp[i][j] = \max \begin{cases} dp[i-1][j-w[i]] + v[i] & \text{選物品} \\ dp[i-1][j] & \text{不選物品} \end{cases}$$

背包問題 - 0

step 3 打好基底

以這題來講，因為它的價值皆為正，當你未選取任何物品（重量為 0）時，價值為 0

$$dp[0][i] = 0, \quad dp[j][0] = 0, \texttt{for all } i, j$$

- 觀察一下轉移式

$$dp[i][j] = \max \begin{cases} dp[i-1][j-w[i]] + v[i] & \text{選物品} \\ dp[i-1][j] & \text{不選物品} \end{cases}$$

- 觀察一下轉移式

$$dp[i][j] = \max \begin{cases} dp[i-1][j-w[i]] + v[i] & \text{選物品} \\ dp[i-1][j] & \text{不選物品} \end{cases}$$

- 可以發現我們的每個狀態都是從 $i-1$ 轉移過來的

- 觀察一下轉移式

$$dp[i][j] = \max \begin{cases} dp[i-1][j-w[i]] + v[i] & \text{選物品} \\ dp[i-1][j] & \text{不選物品} \end{cases}$$

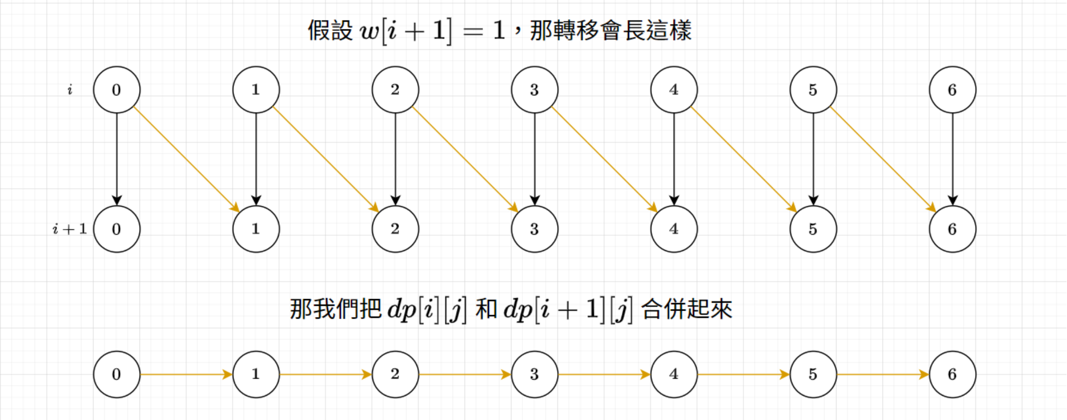
- 可以發現我們的每個狀態都是從 $i-1$ 轉移過來的
- 轉移後 $i-1$ 那格的狀態已經不重要了

- 觀察一下轉移式

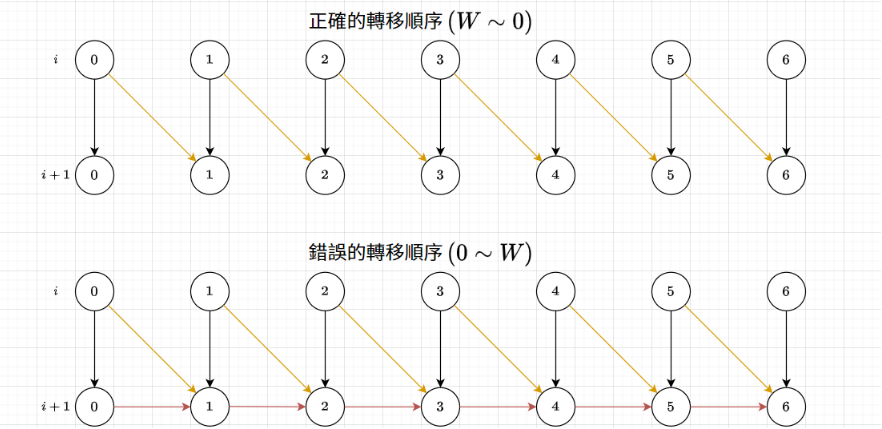
$$dp[i][j] = \max \begin{cases} dp[i-1][j-w[i]] + v[i] & \text{選物品} \\ dp[i-1][j] & \text{不選物品} \end{cases}$$

- 可以發現我們的每個狀態都是從 $i-1$ 轉移過來的
- 轉移後 $i-1$ 那格的狀態已經不重要了
- 所以其實是可以做到一維的！

背包問題 - 0



背包問題 - 0


正確的轉移順序 $(W \sim 0)$
i
0 1 2 3 4 5 6
$i+1$
0 1 2 3 4 5 6
錯誤的轉移順序 $(0 \sim W)$
i
0 1 2 3 4 5 6
$i+1$
0 1 2 3 4 5 6

背包問題 - 0

```
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);

using namespace std;

signed main(){
    fastio

    int N,W;cin>>N>>W;
    int w[N+1]{},v[N+1]{};
    for(int i=1;i<=N;++i) cin>>w[i]>>v[i];
    long long dp[W+1]{};
    for(int i=1;i<=N;++i){
        for(int j=W;j>=0;--j){
            if(j>=w[i]) dp[j]=max(dp[j],dp[j-w[i]]+v[i]);
        }
    }
    cout<<dp[W]<<'\n';
}
```

無限背包問題

有 N 個物品，每個物品有價值 v_i 和大小 w_i，每種物品有無限多個。你有一個容量為 W 的背包。請問你最多可以拿多少價值?

背包問題 - 1

無限背包問題

有 N 個物品，每個物品有價值 v_i 和大小 w_i，每種物品有無限多個。你有一個容量為 W 的背包。請問你最多可以拿多少價值?

- 有注意到這題跟上一題不同的地方嗎？

背包問題 - 1

無限背包問題

有 N 個物品，每個物品有價值 v_i 和大小 w_i，每種物品有無限多個。你有一個容量為 W 的背包。請問你最多可以拿多少價值?

- 有注意到這題跟上一題不同的地方嗎？
- 他每個物品可以拿**無限**個！

背包問題 - 1

- 其實只有轉移的地方需要修改

$$dp[i][j] = \max \begin{cases} dp[i][j-w[i]] + v[i] & \text{選物品} \\ dp[i-1][j] & \text{不選物品} \end{cases}$$

背包問題 - 1

- 其實只有轉移的地方需要修改
- 一樣是分選或不選，只是同個物品可以選了再選

$$dp[i][j] = \max \begin{cases} dp[i][j-w[i]] + v[i] & \text{選物品} \\ dp[i-1][j] & \text{不選物品} \end{cases}$$

背包問題 - 1

```
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);
using namespace std;

signed main(){
    fastio

    int n,W;cin>>n>>W;
    int v[n+1]{},w[n+1]{};
    for(int i=1;i<=n;i++) cin>> v[i] >> w[i];

    int dp[n+1][W+1]{};
    for(int i=1;i<=n;i++){
        for(int j=1;j<=W;j++){
            dp[i][j]=dp[i-1][j];
            if(j-v[i]>=0) dp[i][j]=max(dp[i][j],dp[i][j-v[i]]+w[i]);
        }
    }
    int ans=0;
    for(int j=0;j<=W;j++) ans=max(dp[n][j],ans);

    cout<<ans<<'\n';
}
```

背包問題 - 2

CSES - Book Shop II

有 N 個物品，每個物品有價值 v_i 和大小 w_i，每種物品有 a_i 個。你有一個容量為 W 的背包。請問你最多可以拿多少價值?

- 這個是有限背包問題

背包問題 - 2

- 如果能理解前面兩個問題，應該不難列出這個轉移式

$$dp[i][j] = \max \begin{cases} dp[i][j-k*w[i]]+k*v[i] & \text{選 k 個物品} \\ dp[i-1][j] & \text{不選物品} \end{cases}$$

- 他的時間複雜度為 $O(NW\sum a_i)$

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);
using namespace std;

signed main(){
    fastio

    int n,x;cin>>n>>x;
    int h[n+1]{},s[n+1]{},k[n+1]{};
    for(int i=1;i<=n;i++) cin>>h[i];
    for(int i=1;i<=n;i++) cin>>s[i];
    for(int i=1;i<=n;i++) cin>>k[i];

    int dp[n+1][x+1]{};
    for(int i=1;i<=n;i++){
        for(int j=1;j<=x;j++){
            dp[i][j]=dp[i-1][j];
            for(int kk=1;kk<=k[i];kk++){
                if(j-kk*h[i]>=0) dp[i][j]=max(dp[i][j],dp[i-1][j-kk*h[i]]+kk*s[i]);
            }
        }
    }
    int ans=0;
    for(int j=0;j<=x;j++) ans=max(dp[n][j],ans);

    cout<<ans<<'\n';
}
```

背包問題 - 2

- 原本的作法，會去枚舉拿 $0, 1, ..., a_i$ 個物品，但是真的需要枚舉那麼多個嗎?

背包問題 - 2

- 原本的作法，會去枚舉拿 $0, 1, ..., a_i$ 個物品，但是真的需要枚舉那麼多個嗎?
- 有甚麼辦法可以不用枚舉這麼多卻可以湊出 $0 \sim a_i$ 的每個數字？

背包問題 - 2

- 原本的作法，會去枚舉拿 $0, 1, ..., a_i$ 個物品，但是真的需要枚舉那麼多個嗎?
- 有甚麼辦法可以不用枚舉這麼多卻可以湊出 $0 \sim a_i$ 的每個數字？
- 想想看二進位！

背包問題 - 2

- 原本的作法，會去枚舉拿 $0, 1, ..., a_i$ 個物品，但是真的需要枚舉那麼多個嗎?
- 有甚麼辦法可以不用枚舉這麼多卻可以湊出 $0 \sim a_i$ 的每個數字？
- 想想看二進位！
- 這樣我們只需要枚舉 $\log a_i$ 個物品，而且有辦法湊出所有的數！

背包問題 - 2

- 原本的作法，會去枚舉拿 $0, 1, ..., a_i$ 個物品，但是真的需要枚舉那麼多個嗎?
- 有甚麼辦法可以不用枚舉這麼多卻可以湊出 $0 \sim a_i$ 的每個數字？
- 想想看二進位！
- 這樣我們只需要枚舉 $\log a_i$ 個物品，而且有辦法湊出所有的數！
- 有人會叫這個東西叫二的冪次綑綁優化

背包問題 - 2

- 原本的作法，會去枚舉拿 $0, 1, ..., a_i$ 個物品，但是真的需要枚舉那麼多個嗎?
- 有甚麼辦法可以不用枚舉這麼多卻可以湊出 $0 \sim a_i$ 的每個數字？
- 想想看二進位！
- 這樣我們只需要枚舉 $\log a_i$ 個物品，而且有辦法湊出所有的數！
- 有人會叫這個東西叫二的冪次綑綁優化
- $O(NW \log \max(a_i))$

其他練習題

CodeForces D. Make Them Equal

有一個陣列 a，一開始所有數字都是 1

每次操作可以選擇 i 和 x，並且把 $a[i] := a[i] + \left\lfloor \frac{a_i}{x} \right\rfloor$

當 $a[i] = b[i]$ 時，可以獲得 c_i 的錢，問在 k 次操作內，最多可以拿到多少錢？

- $1 \le n \le 10^3$
- $0 \le k \le 10^6$
- $1 \le b_i \le 10^3$

練習題 - 0

- 如果知道要把 1 變成 b_i 最少需要 d_i 次操作

- 如果知道要把 1 變成 b_i 最少需要 d_i 次操作
- 那我們可以把 c_i 當作物品的價值，d_i 當作物品的大小，k 為背包的容量

練習題 - 0

- 如果知道要把 1 變成 b_i 最少需要 d_i 次操作
- 那我們可以把 c_i 當作物品的價值，d_i 當作物品的大小，k 為背包的容量
- 這樣不就變成背包問題了嗎！

練習題 - 0

- 如果知道要把 1 變成 b_i 最少需要 d_i 次操作
- 那我們可以把 c_i 當作物品的價值，d_i 當作物品的大小，k 為背包的容量
- 這樣不就變成背包問題了嗎！
- 那我們要怎麼知道 d_i？

練習題 - 0

- 如果知道要把 1 變成 b_i 最少需要 d_i 次操作
- 那我們可以把 c_i 當作物品的價值，d_i 當作物品的大小，k 為背包的容量
- 這樣不就變成背包問題了嗎！
- 那我們要怎麼知道 d_i？
- 預處理就好了

練習題 - 0

- 這樣做的時間複雜度為 $O(nk)$
- 可是這樣不會 TLE 嗎?
- 其實不會，但如果把 d_i 全部輸出看看，會發現 d_i 不會超過 12
- 所以其實可以只跑到 $12n$，因此複雜度其實只需要 $O(12n^2)$

練習題 - 0

```
int n,k,r,a[MAXN],b[MAXN],c[MAXN];
void init(){
    for(int i=2;i<MAXN;++i) a[i]=MAXN;
    a[1]=0,r=0;
    for(int i=1;i<MAXN;++i){
        for(int j=1;j<=i;++j) if(i+i/j<MAXN) a[i+i/j]=min(a[i]+1,a[i+i/j]);
    }
}
void solve(){
    cin>>n>>k;
    init();
    for(int i=1;i<=n;++i) cin>>b[i];
    for(int i=1;i<=n;++i) cin>>c[i];
    for(int i=1;i<=n;++i) r+=a[b[i]];
    k=min(k,r);
    int dp[k+1]{};
    for(int i=1;i<=n;++i){
        for(int j=k;j>=0;--j){
            if(j>=a[b[i]]) dp[j]=max(dp[j],dp[j-a[b[i]]]+c[i]);
        }
    }
    cout<<*max_element(dp,dp+k+1)<<'\n';
}
signed main(){
    int T;cin>>T;
    while(T--){
        solve();
    }
}
```

練習題 - 0

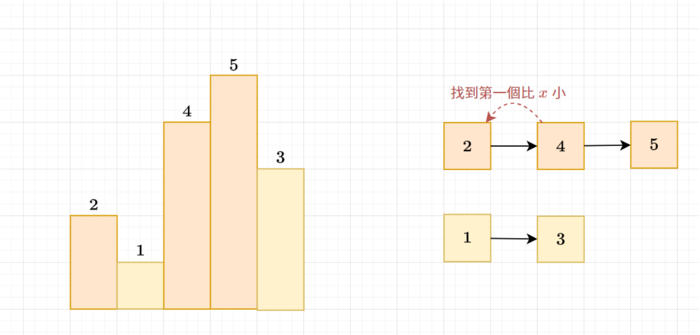
- 會出現在比賽中的題目基本上是不會出現裸背包問題的
- 通常會像這題一樣經過包裝 ><

練習題 - 1

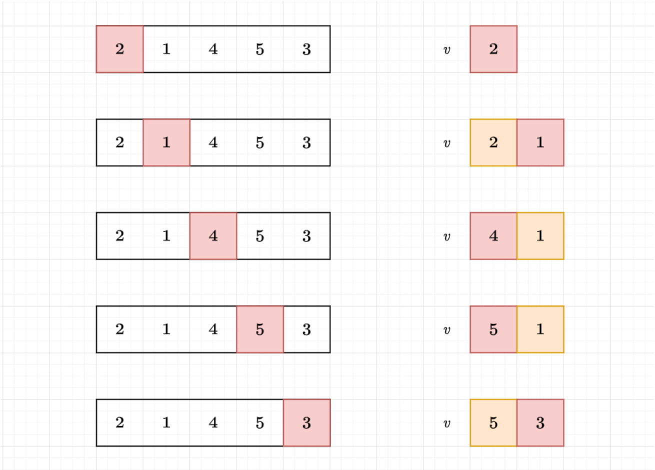
Atcoder E - Sequence Decomposing

給你一個陣列 a，問你最少可以將這個陣列分成幾個遞增子序列

- 考慮貪心，維護多個遞增的子序列



- 發現這樣做，其實等價於 LDS (Longest Decreasing Sequence)



練習題 - 1

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);

using namespace std;

signed main(){
    fastio

    int n;cin>>n;
    int v[n+1]{};
    vector<int> lis;
    for(int i=n;i>=1;--i) cin>>v[i];
    for(int i=1;i<=n;++i){
        int now=upper_bound(lis.begin(),lis.end(),v[i])-lis.begin();
        if(now==lis.size()) lis.emplace_back(v[i]);
        else lis[now]=v[i];
    }
    cout<<lis.size()<<'\n';
}
```

TIOJ 2048 - 最大不連續和問題

給你一個 N 項的陣列 a，請找到不連續的子序列中最大的總和是多少?

- $3 \leq N \leq 10^6$
- $|a_i| \leq 10^9$

練習題 - 2

- 一樣按照之前的 dp 三步驟去想想看
- 先設好狀態！

練習題 - 2

step 1 設置狀態

我們可以把狀態設成以下這樣：

$$dp[0][j] = \text{前 } j \text{ 項的最大不連續和}$$
$$dp[1][j] = \text{前 } j \text{ 項的最大連續和}$$
$$dp[2][j] = \text{前 } j \text{ 項不選 } j$$

那麼答案就會是 $dp[0][N]$

練習題 - 2

step 2 導出轉移

$$dp[0][i] = \max(dp[0][i-1] + \max(0, a[i]), dp[2][i-1] + a[i])$$
$$dp[1][i] = \max(dp[1][i-1] + a[i], a[i])$$
$$dp[2][i] = \max(dp[2][i-1], dp[1][i-1])$$

step 3 打好基底

因為 a_i 有可能是負的，所以初始化的時候要設為 $-\infty$

練習題 - 2

```
int dp[3][1000005]{},a[1000005]{};

void solve(){
    int n;cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;++i) cin>>a[i];
    dp[0][0]=-1e18,dp[1][0]=-1e18,dp[2][0]=-1e18;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        dp[0][i]=max(dp[0][i-1]+max(0LL,a[i]),dp[2][i-1]+a[i]);
        dp[1][i]=max(dp[1][i-1]+a[i],a[i]);
        dp[2][i]=max(dp[2][i-1],dp[1][i-1]);
    }
    cout<<dp[0][n]<<'\n';
}
```

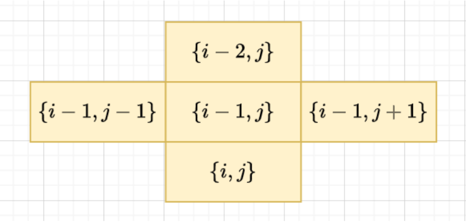
練習題 - 3

Codeforces 1393D Rarity and New Dress

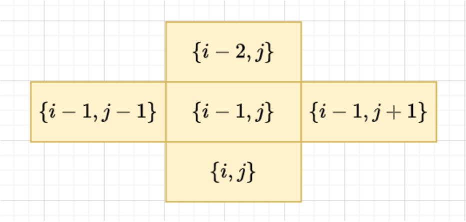
給你一個 $n \times m$ 的網格，每個格子上寫著一個字母，你要計算在這裡面有幾個轉了 45° 的正方形。

- $1 \leq n, m \leq 2000$

- 沒想法的話可以先來觀察一下這個圖形



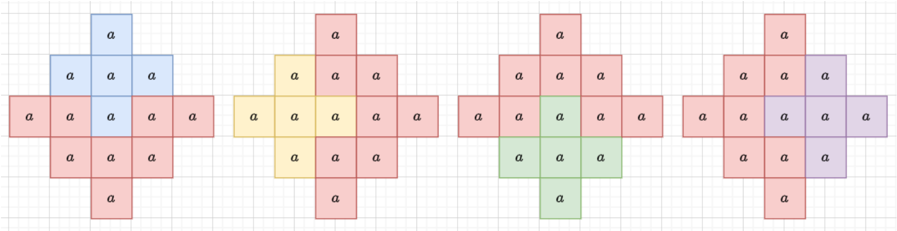
- 沒想法的話可以先來觀察一下這個圖形

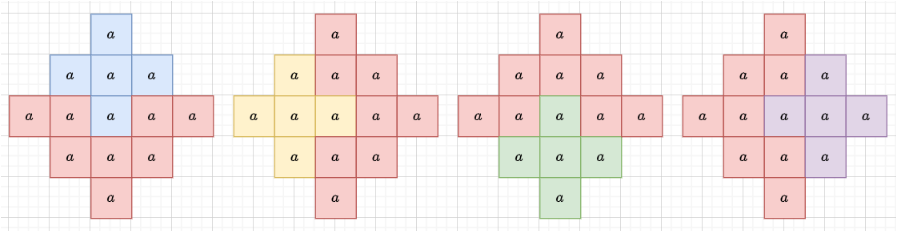


- 很顯然的，如果要構成一個邊長為 2 的正方形，則必須符合

$$f_{i,j} = f_{i-1,j} = f_{i-2,j} = f_{i-1,j-1} = f_{i-1,j+1}$$

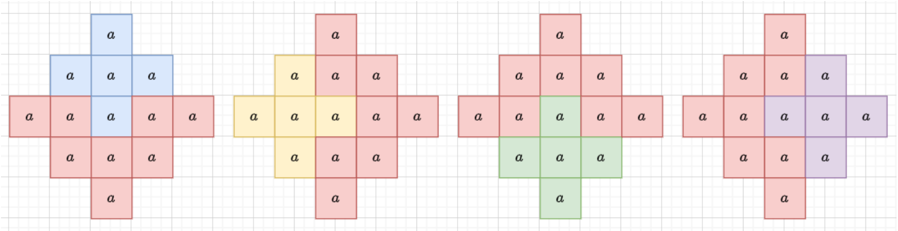
練習題 - 3





- 由圖可知，邊長為 3 的正方形是 4 個邊長為 2 的正方形組成的

練習題 - 3



- 由圖可知，邊長為 3 的正方形是 4 個邊長為 2 的正方形組成的
- 同理，邊長為 4 的正方形是 4 個邊長為 3 的正方形組成的

step 1 設置狀態

令 $dp[i][j]$ 為當正方形右下角位於座標 i, j 時的合法正方形數量

那麼答案就會是

$$\max_{i \le n, j \le m} dp[i][j]$$

step 2 導出轉移

如果 $g[i][j] = g[i-1][j] = g[i-2][j] = g[i-1][j+1] = g[i-1][j-1]$，則轉移式為

$$dp[i][j] := \min\{dp[i-2][j], dp[i-1][j-1], dp[i-1][j+1]\} + 1$$

表示我們可以用小的正方形去組成大的正方形

練習題 - 3

step 3 打好基底

每一格自己都是一個合法的正方形

$$dp[i][j] = 1$$

練習題 - 3

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);

using namespace std;

char g[2005][2005];
vector<vector<int>> dp(2005,vector<int>(2005,1));

signed main(){
    fastio

    int n,m;cin>>n>>m;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        for(int j=1;j<=m;++j) cin>>g[i][j];
    }
    int ans=0;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        for(int j=1;j<=m;++j){
            if(g[i][j]==g[i-1][j]&&g[i][j]==g[i-2][j]&&g[i][j]==g[i-1][j+1]&&g[i][j]==g[i-1][j-1]){
                dp[i][j]+=min({dp[i-1][j-1],dp[i-1][j+1],dp[i-2][j]});
            }
            ans+=dp[i][j];
        }
    }
    cout<<ans<<'\n';
}
```

練習題 - 3

- 官解有提供另外一種方法
- 實作比較麻煩一點
- 但可能比較好想 (?
- 有興趣的可以去看看
- 1393D - Rarity and New Dress solution

練習題 - 4

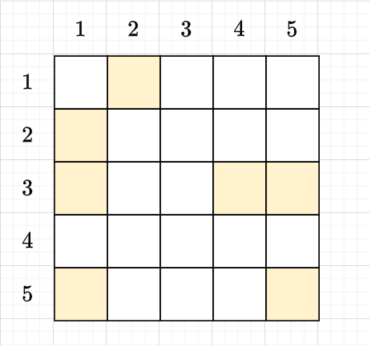
2019 北市賽 - 搜集寶藏 (Treasure)

給你一個 $M \times N$ 的網格圖上面有很多寶藏，有兩個人要從左上角走去右下角，而且只能往右或往下移動，寶藏不可重複領取，問最多能拿到幾個寶藏

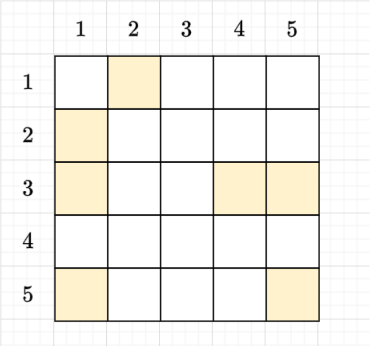
- $2 \leq M, N \leq 100$

練習題 - 4

- 如果先讓一個人走完再讓另一個人走
- 兩個人都用最佳策略去走，會是最佳解嗎？



- 如果先讓一個人走完再讓另一個人走
- 兩個人都用最佳策略去走，會是最佳解嗎？



- WA!

練習題 - 4

- 這樣看來分開做是不行的，我們需要同時維護兩個人一起移動的答案

練習題 - 4

- 這樣看來分開做是不行的，我們需要同時維護兩個人一起移動的答案
- 設置狀態：$dp[x_1][y_1][x_2][y_2]$ 表示兩人分別走到 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 的答案

練習題 - 4

- 這樣看來分開做是不行的，我們需要同時維護兩個人一起移動的答案
- 設置狀態：$dp[x_1][y_1][x_2][y_2]$ 表示兩人分別走到 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 的答案
- 這樣會 MLE

練習題 - 4

- 要怎麼減少狀態？

練習題 - 4

- 要怎麼減少狀態？
- 你會發現在第 k 分鐘時，$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = k$

練習題 - 4

- 要怎麼減少狀態？
- 你會發現在第 k 分鐘時，$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = k$
- 減少狀態：$dp[k][x_1][x_2]$

練習題 - 4

- 要怎麼減少狀態？
- 你會發現在第 k 分鐘時，$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = k$
- 減少狀態：$dp[k][x_1][x_2]$
- 雖然沒必要，但想要壓常的話可以滾動

練習題 - 4

- 要怎麼減少狀態？
- 你會發現在第 k 分鐘時，$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = k$
- 減少狀態：$dp[k][x_1][x_2]$
- 雖然沒必要，但想要壓常的話可以滾動
- 小提醒：這題的轉移式跟之前的格子路徑差不多，但是要注意兩個人走到同一個位置的時候，不能重複計算