數學 II

sam571128

目錄

線性代數 (Linear Algebra)

矩陣 (Matrix)

定義

一個 $n \times m$ 的矩陣是一個由 n 列 m 行的數字所形成的矩形陣列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩陣 (Matrix)

- 一些特殊的矩陣
  - 單位方陣 I_n： 左上右下的對角線全都是 1，剩餘都是 0 的正方形矩陣
  - 零矩陣 $0_{n\times m}$： 所有元素皆為 0 的矩陣

矩陣加法

對於兩個矩陣 A, B，若他們的大小相同，則他們的總和 $C = A + B$ 會有

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

簡單來說，就是每個位置分別相加

矩陣 (Matrix)

矩陣加法的一些性質

對於兩個大小相同的矩陣 A, B，以及一個常數 c

- $A + B = B + A$ (有交換律)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (有結合律)
- $c(A + B) = cA + cB$ (有分配律)
- $A + (-A) = 0$

矩陣 (Matrix)

矩陣乘法

對於兩個矩陣 $A_{n\times m}, B_{m\times p}$，定義他們的乘積 $C = AB$ 為

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \times b_{kj}$$

也就是說 c_{ij} 會是 A 的第 i 列與 B 的第 j 行內積後的結果
矩陣乘法在競程上我們通常會暴力用上面的公式在 $O(n^3)$ 的時間計算完，儘管有更快的方法

矩陣 (Matrix)

矩陣運算的一些性質

對於矩陣 $A_{n\times m}, B_{m\times p}, C_{p\times r}, D_{n\times m}$

- $AB \neq BA$（沒有交換律！）
- $(AB)C = A(BC)$（有結合律）
- $(A+D)B = AB + DB$（有分配律）
- $AI_m = I_nA = A$（有單位元）
- $A0 = 0A = 0$

矩陣 (Matrix)

- 有了這個東西之後，我們可以拿他來做什麼事情?
- 讓我們來看看一個非常經典的例子吧

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 1

費氏數列第 n 項！(CSES - Fibonacci Numbers)

定義費氏數列是每一項由 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ 且 $f_0 = f_1 = 1$ 的數列。請找到費氏數列的第 n 項會是多少？

- $1 \le n \le 10^{18}$
- 答案要 mod $10^9 + 7$

- 這個問題，大家想必已經看過好多遍了吧

費氏數列第 n 項！(CSES - Fibonacci Numbers)

定義費氏數列是每一項由 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ 且 $f_0 = f_1 = 1$ 的數列。請找到費氏數列的第 n 項會是多少？

- $1 \le n \le 10^{18}$
- 答案要 mod $10^9 + 7$

- 這個問題，大家想必已經看過好多遍了吧
- 我們來一一統整一下已經會的方法吧！

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 1

- 已經會的幾個方法：
  1. 遞迴下去（沒有記憶化）： $O(\phi^n)$ or $O(2^n)$ (指數成長)
  2. 遞迴加上記憶化 (Top down)：$O(n)$
  3. DP (Bottom up): $O(n)$

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 1

- 已經會的幾個方法：
  1. 遞迴下去（沒有記憶化）： $O(\phi^n)$ or $O(2^n)$ (指數成長)
  2. 遞迴加上記憶化 (Top down)：$O(n)$
  3. DP (Bottom up): $O(n)$
- 好像沒有任何一個做法可以處理這題欸（$n \leq 10^{18}$）

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 1

- 已經會的幾個方法：
  1. 遞迴下去（沒有記憶化）： $O(\phi^n)$ or $O(2^n)$ (指數成長)
  2. 遞迴加上記憶化 (Top down)：$O(n)$
  3. DP (Bottom up): $O(n)$
- 好像沒有任何一個做法可以處理這題欸（$n \leq 10^{18}$)
- 有沒有更快的方式呢?

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 1

- 我們可以利用剛剛講到的矩陣！
- 把轉移式寫成

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$$

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 1

- 我們可以利用剛剛講到的矩陣！
- 把轉移式寫成

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$$

- 那麼我們可以去化簡這個式子，會得到

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 1

- 我們可以利用剛剛講到的矩陣！
- 把轉移式寫成

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix}$$

- 那麼我們可以去化簡這個式子，會得到

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

- 利用快速冪，我們將可以在 $O(2^2 \log n)$ 的時間內計算出第 n 項！

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 範例程式碼

```
struct matrix{
    int arr[2][2] = {};
    matrix operator * (matrix b){
        matrix c;
        for(int i = 0;i < 2;i++){
            for(int k = 0;k < 2;k++){
                for(int j = 0;j < 2;j++){
                    c.arr[i][j] = (c.arr[i][j] + arr[i][k]*b.arr[k][j]%MOD)%MOD;
                }
            }
        }
        return c;
    }
    void init(){
        for(int i = 0;i < 2;i++){
            arr[i][i] = 1;
        }
    }
};
```

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 範例程式碼

```
matrix fastpow(matrix m, int p){
    matrix res;
    res.init();

    while(p){
        if(p&1) res = res * m;
        m = m * m;
        p >>= 1;
    }
    return res;
}

signed main(){
    fastio

    int n;
    cin >> n;
    if(n==0){
        cout << 0 << "\n";
        return 0;
    }

    matrix m;
    m.arr[0][0] = m.arr[0][1] = m.arr[1][0] = 1;

    m = fastpow(m,n-1);

    cout << m.arr[0][0] << "\n";
}
```

線性遞迴 (Linear Recurrence)

- 而這樣子的優化方式被稱為「矩陣快速冪」，不僅僅限於費氏數列
- 任何被稱為「線性遞迴」的遞迴式皆可以使用矩陣快速冪來進行優化
- 線性遞迴：形如 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_n a_{n-k}$ 的遞迴式
- 可以在 $O(k^3 \log n)$ 的時間用矩陣快速冪計算完
- 題目的特色： 當你遇到範圍到 10^9 或 10^{18} 的 DP 時

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 2

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- ~~看上去就是排列組合~~ (晚點會講排組的作法)
- 可以很輕易地列出一條 DP 式
- 令 $dp[i][0/1][0/1]$ 表示國王和皇后分別是偶數/奇數時，有幾種擺法

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 2

- ~~看上去就是排列組合~~ (晚點會講排組的作法)
- 可以很輕易地列出一條 DP 式
- 令 $dp[i][0/1][0/1]$ 表示國王和皇后分別是偶數/奇數時，有幾種擺法
- 可以列出以下的四個轉移式

$$
\begin{aligned}
dp[i][0][0] &= 4 \times dp[i-1][0][0] + dp[i-1][1][0] + dp[i-1][0][1] \\
dp[i][0][1] &= 4 \times dp[i-1][0][1] + dp[i-1][0][0] + dp[i-1][1][1] \\
dp[i][1][0] &= 4 \times dp[i-1][1][0] + dp[i-1][0][0] + dp[i-1][1][1] \\
dp[i][1][1] &= 4 \times dp[i-1][1][1] + dp[i-1][1][0] + dp[i-1][0][1]
\end{aligned}
$$

- 可以在 $O(n)$ 的時間計算出答案

- 不過範圍到 10^9 欸！該怎麼處理呢？
- 寫成矩陣！

$$\begin{bmatrix} dp[i][0][0] \\ dp[i][0][1] \\ dp[i][1][0] \\ dp[i][1][1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp[i-1][0][0] \\ dp[i-1][0][1] \\ dp[i-1][1][0] \\ dp[i-1][1][1] \end{bmatrix}$$

- 然後我們就可以在 $O(4^3 \log n)$ 的時間做完了！

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 3

有向圖的路徑數量！(CSES - Graph Paths I)

給你 n 個點 m 條邊的有向圖，問你共有幾種走法可以經過 k 條邊之後從 1 走到 n

- $1 \leq n \leq 100$
- $1 \leq m \leq n(n-1)$
- $1 \leq k \leq 10^9$

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 3

- 這個問題該怎麼處理呢?
- 一樣試著把 DP 式列出來!

- 這個問題該怎麼處理呢?
- 一樣試著把 DP 式列出來!
- 令 $dp[x][i][j]$ 表示起點為 i 經過 x 條邊之後，走到 j 的方法數
- 那麼我們可以列出這樣的轉移式

$$dp[x][i][j] = \sum_{l \in \texttt{adj[j]}}^{n} dp[x-1][i][l]$$

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 3

- 這個問題該怎麼處理呢?
- 一樣試著把 DP 式列出來！
- 令 $dp[x][i][j]$ 表示起點為 i 經過 x 條邊之後，走到 j 的方法數
- 那麼我們可以列出這樣的轉移式

$$dp[x][i][j] = \sum_{l \in \texttt{adj[j]}}^{n} dp[x-1][i][l]$$

- 可以在 $O(kn^2)$ 的時間內完成計算

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 3

- 接著你會發現一件事，原本的轉移式其實可以被寫成

$$dp[x][i][j] = \sum_{l=1}^{n} dp[x-1][i][l] \times A_{lj}$$

- A 是這張圖的鄰接矩陣
- 因此其實

$$dp[x] = dp[x-1]A$$

- 而 $dp[0]$ 為單位方陣！

線性遞迴 (Linear Recurrence) - 例題 3

- 因此，我們得到

$$dp[k] = A^k$$

- 可以在 $O(n^3 \log k)$ 的時間內做完
- 而這個告訴我們，如果想要找從 a 走到 b 經過 k 條邊的路徑數量
- 答案其實就是 $(A^k)_{ab}$

高斯消去法 (Gaussian Elimination)

- 現在，你有一個三元一次方程式，請找出這個方程式的解！

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$$

高斯消去法（Gaussian Elimination)

- 遇到聯立方程式的時候，國中分別有教過兩種不同的方法可以計算
  - 代入消去法：把某個變數用另外一個變數替換掉
  - 加減消去法：把某個方程式乘上某個常數之後與另一個方程式相加
- 這兩個方法在解兩個未知數的方程式時十分方便
- 不過到了三個未知數時，大概就會稍微有點頭痛了！

高斯消去法 (Gaussian Elimination)

- 因此，我們需要一個更好的方式來幫我們統整我們所要計算的這些方程式！
- 而這個方法，就是「高斯消去法」！
- 其實就是加減消去法，只是用比較統整的方式來做變數的消去

高斯消去法 (Gaussian Elimination)

- 對於不同的方程式，我們可以對他們做三種不同的操作使得解不會改變
  - 將某個方程式與另一個方程式交換
  - 將某個方程式乘上 c
  - 將某個方程式乘上 c 之後加到另一個方程式
- 而我們可以利用這三種運算幫助我們消出所有的變數

高斯消去法 (Gaussian Elimination)

- 回到原本的問題

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$$

- 我們通常會將聯立式寫成矩陣的形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

高斯消去法（Gaussian Elimination）

- 而變成矩陣的形式之後，剛剛的三種操作即變為「列運算（Row Operations）」
  - 將兩列交換
  - 將一列式乘上 c
  - 將一列乘上 c 之後加到另外一列
- 我們要利用這三種運算，將矩陣化簡為底下的形式（在此先不考慮無解的情形）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix}$$

高斯消去法 (Gaussian Elimination)

- 因此，讓我們來嘗試消一次這個矩陣吧

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

高斯消去法 (Gaussian Elimination)

- 因此，讓我們來嘗試消一次這個矩陣吧

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- 我們得到了

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 而方程式的解即為 $x = 1, \ y = 1, \ z = -1$

TIOJ 2170 - 地圖編修 (Map)

給你一個 n 維標準坐標系中的一個座標 $(x_1, \cdots, x_n)$，請找到坐標軸變為 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 時，座標會變成多少?

- $1 \leq n \leq 100$

高斯消去法 (Gaussian Elimination) - 例題

TIOJ 2170 - 地圖編修 (Map)

給你一個 n 維標準坐標系中的一個座標 $(x_1, \cdots, x_n)$，請找到坐標軸變為 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 時，座標會變成多少?

- $1 \le n \le 100$

- 這個其實是在做所謂的「變換基底」，但應該可以很輕易地列出聯立方程式
- 利用剛剛的想法直接將其寫出來就好了！

向量空間 (Vector Space)

向量空間 (Vector Space)

定義一個集合 V 為向量空間，若其滿足以下的七種條件 $(x, y, z \in V, \quad a, b \in \mathbb{R})$

1. (封閉性) $x + y, cx \in V$
2. (結合律) $x + (y + z) = (x + y) + z$ 與 $a(bx) = (ab)x$
3. (交換律) $x + y = y + x$
4. (加法反元素) 有 $y = -x$，使得 $x + (-x) = 0$
5. (有加法單位元) $x + 0 = x$
6. (分配律) $(a + b)x = ax + bx, a(x + y) = ax + ay$
7. (乘法單位元) $1x = x$

向量空間 (Vector Space)

- 平常在使用的一維向量 $\mathbb{R}^1$，二維向量 $\mathbb{R}^2$ 皆為向量空間
- 向量空間其實就是由 $\mathbb{R}^n$ 的向量所推廣而成的一種結構
- 再來我們要介紹一些向量空間中的詞

向量空間 (Vector Space)

線性組合 (Linear Combination)

對於 $v_1, \cdots v_n \in V$，以及一個 w，我們說 w 是 $v_1, \cdots, v_n$ 的線性組合，若且為若有 $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

線性相依 (Linear Dependent)

對於 $v_1, \cdots v_n \in V$，我們說 $v_1, \cdots, v_n$ 是線性獨立的，若且為若有其中一個向量可以被寫成其他向量的線性組合。否則，這些向量就是線性相依的

向量空間 (Vector Space)

生成空間 (Spanning Subspace)

對於 $v_1, \cdots v_n \in V$，這些向量的生成空間可以寫成

$$\mathsf{span}(\{v_1, \cdots, v_n\}) = \{c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \mid c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

也就是包含了所有的線性組合

向量空間 (Vector Space)

基底 (Basis)

對於 $v_1, \cdots v_n \in V$，若滿足以下兩種條件，即為 V 的基底

- $\text{span}(\{v_1, \cdots, v_n\}) = V$
- $v_1, \cdots, v_n$ 是線性獨立的

特別的點：

- 對於任意 $v \in V$，皆只有唯一的一種 $c_1, \cdots, c_n$ 可以湊出 v
- 任何 V 的基底，大小皆相同，而 $\dim(V)$ 表示 V 的維度，定義為基底的大小

XOR Basis

- 丟完這些定義之後，我們終於可以進入我們要講的重點了
- 也就是對於 XOR 這個運算的向量空間！
- 對於 $x, y \in \{0, 1\}$，XOR 的運算相當於 $x + y \pmod 2$
- 而每個數字，我們都可以將其寫成二進位的形式，變成一個向量
- 因此，我們可以定義一個由 XOR 組成的向量空間！

XOR Basis

- 丟完這些定義之後，我們終於可以進入我們要講的重點了
- 也就是對於 XOR 這個運算的向量空間！
- 對於 $x, y \in \{0, 1\}$，XOR 的運算相當於 $x + y \pmod 2$
- 而每個數字，我們都可以將其寫成二進位的形式，變成一個向量
- 因此，我們可以定義一個由 XOR 組成的向量空間！

XOR Basis

- 那要怎麼找到一個集合的基底呢？我們會使用高斯消去法
- 例如我們想要找到 $\{3, 5, 6\}$ 的 XOR Basis
- 先將他們換成二進位的形式 $\{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}$ 並放到矩陣上消去

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 因此 $\{(011)_2, (110)_2\} = \{3, 5\}$ 即為這三個數字的 XOR Basis

XOR Basis

- 實作上，我們不會真的使用矩陣去消，以下是一個我還滿喜歡的寫法

```
vector<int> basis;
void add_vector(int x){
    for(auto v : basis){
        x = min(x,x^v);
    }
    if(x!=0) basis.push_back(x);
}

bool check(int x){
    for(auto v : basis){
        x = min(x,x^v);
    }
    return x == 0;
}
```

XOR Basis

- 有了一群數字的 XOR Basis 之後，我們可以做到以下的一些酷酷的事情
  1. 給你一些數字，問這些數字能不能夠 XOR 出 x
  2. 給你一些數字，問這些數字能 XOR 出多少不同的數字
  3. 給你一些數字，問這些數字能 XOR 出的第 k 大的數字
- 讓我們實際來看看一些例題吧！

XOR Basis - 例題 1

CSAcademy - XOR Closure

給你一個 n 個數字所組成的集合 S，請問你至少要加入幾個數字，才能使得對於任意 $x, y \in S$，皆有 $x \oplus y \in S$

- $1 \leq n \leq 10^6$

XOR Basis - 例題 1

CSAcademy - XOR Closure

給你一個 n 個數字所組成的集合 S，請問你至少要加入幾個數字，才能使得對於任意 $x, y \in S$，皆有 $x \oplus y \in S$

- $1 \le n \le 10^6$

- 其實就是找到這個集合的 span，因此，答案就是 $2^{\dim(S)} - 1 - n$

Codeforces 895C - Square Subsets

給你 n 個數字 $a_1, \cdots, a_n$，請問有幾種選法可以使得選出來的數字的乘積為完全平方數

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq a_i \leq 70$

XOR Basis - 例題 2

Codeforces 895C - Square Subsets

給你 n 個數字 $a_1, \cdots, a_n$，請問有幾種選法可以使得選出來的數字的乘積為完全平方數

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq a_i \leq 70$

- 這題其實在 DP II 的時候也有教過

Codeforces 895C - Square Subsets

給你 n 個數字 $a_1, \cdots, a_n$，請問有幾種選法可以使得選出來的數字的乘積為完全平方數

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq a_i \leq 70$

- 這題其實在 DP II 的時候也有教過
- 由於 70 以下的數字只有 19 個，因此我們可以用二進位的方式表示一個數字質因數次方的奇偶性

XOR Basis - 例題 2

Codeforces 895C - Square Subsets

給你 n 個數字 $a_1, \cdots, a_n$，請問有幾種選法可以使得選出來的數字的乘積為完全平方數

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq a_i \leq 70$

- 這題其實在 DP II 的時候也有教過
- 由於 70 以下的數字只有 19 個，因此我們可以用二進位的方式表示一個數字質因數次方的奇偶性
- 找出每個數字的 mask 之後，其實答案就是 $2^{n-\dim(V)} - 1$
- 可以在 $O(19n)$ 做完，比位元 DP 的 $O(2^{19} \times 19)$ 還快

組合計數

排列 (Permutation)

對於相異的元素，計算他們經由不同順序可以組成的排列數量。

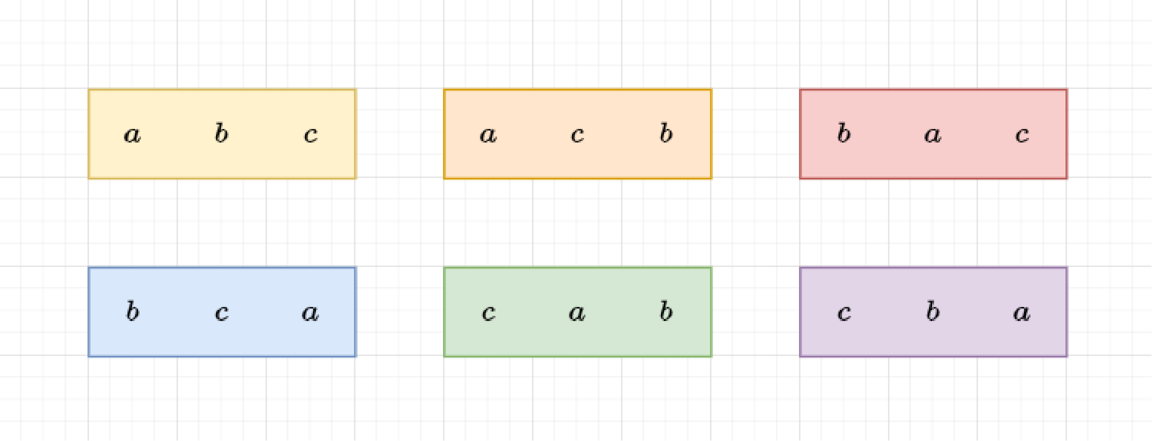
排列 (Permutation)

有 n 個相異元素時，總共有 $n!$ 種不同的排列。

- $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$
- $0! = 1$

排列 (Permutation)

以下為 $\{a, b, c\}$ 的 $3! = 6$ 種排列方式



排列 (Permutation)

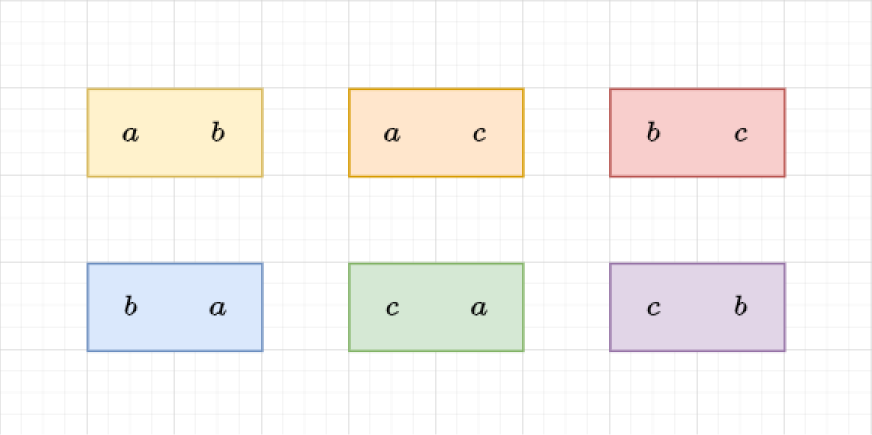
排列 (Permutation)

從 n 個相異元素選出 r 個做排列時，總共有 P^n_r 種不同的排列。

- $P^n_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

排列 (Permutation)

以下從 $\{a, b, c\}$ 中取出 2 個元素做排列時的 $P^3_2 = 6$ 種排列方式



排列 (Permutation)

不盡相異物排列

有 n 個元素，而每個元素的出現次數共有 m_i 次，則排列的次數一共有

$$\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$$

例題

CSES - Creating Strings II

給你一個字串 s，問你有幾個字串可以由 s 經過重組後得到，由於數量可能很大，請輸出答案 $\mod 10^9+7$。

例題

CSES - Creating Strings II

給你一個字串 s，問你有幾個字串可以由 s 經過重組後得到，由於數量可能很大，請輸出答案 $\bmod 10^9+7$。

基本上就是套剛剛的公式而已，不過由於剛剛有除法以及取模操作，記得要使用模反元素，不能直接用除的！

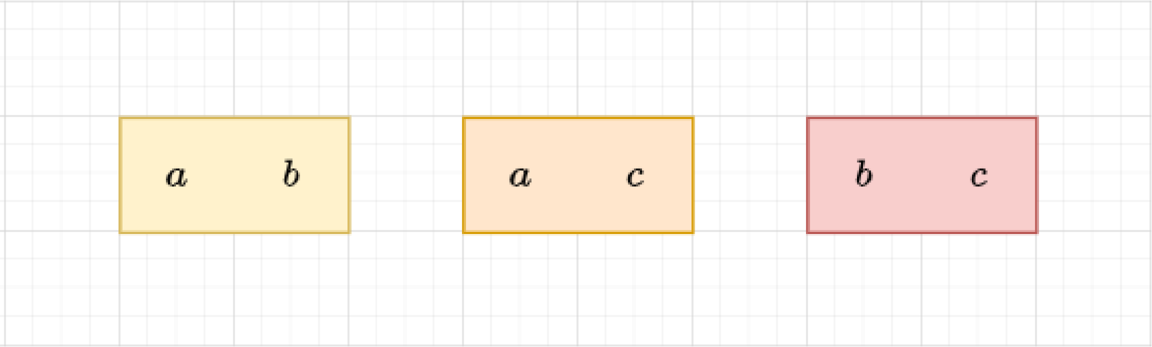
組合 (Combination)

從 n 個相異元素當中選出 r 個元素的一共有 C_r^n 種

- $C_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$
- $C_0^n = 1$
- $C_r^n = C_{n-r}^n$
- C_r^n 又可以被寫成 $\binom{n}{r}$
- $C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}$ (帕斯卡三角形)

組合 (Combination)

從 $\{a, b, c\}$ 當中任選 2 個元素的方法，一共有 $C^3_2 = 3$ 種



重複組合 (Star and Bars)

從 n 個元素中取出 r 個，而這 r 個元素可以重複出現，一共有 H^n_r 種選法

- 等同於 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = r$ 的非負整數解數量
- 英文稱為 Star and Bars，可以想成是 r 個 1 和 $n-1$ 個 $+$ 在做重複排列
- H^n_r 又可以被寫成 $\left(\!\binom{n}{r}\!\right)$
- $H^n_r = C^{n+r-1}_{n-1}$

排容原理 (Inclusion-Exclusion Principle)

若我們有 n 個集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，則

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

- $n = 2$ 時，有 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$
- $n = 3$ 時，有
  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

二項式定理 (Binomial Theorem)

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

例題

AtCoder Beginner Contest 178C - Ubiquity

請找到有多少個長度為 N 的序列 $A_1, A_2, \ldots, A_N$ 滿足

- 對於所有 i，$0 \leq A_i \leq 9$
- 至少存在一個 i 使得 $A_i = 0$
- 至少存在一個 i 使得 $A_i = 9$

例題

AtCoder Beginner Contest 178C - Ubiquity

請找到有多少個長度為 N 的序列 $A_1, A_2, \ldots, A_N$ 滿足

- 對於所有 i，$0 \leq A_i \leq 9$
- 至少存在一個 i 使得 $A_i = 0$
- 至少存在一個 i 使得 $A_i = 9$

- 排容原理！
- 全部的數量 - （沒有 0） - （沒有 9） + （沒有 0 也沒有 9）
- 答案就是 $10^n - 9^n - 9^n + 8^n$

例題

CSES - Christmas Party

在一個聖誕節派對上，有 n 個人在玩交換禮物，每個人都會送出一個禮物，也會收到一個禮物。請問有幾種送法可以讓這 n 個人都收到不是自己送出去的禮物。

- 這個問題其實是經典的「錯排」問題

例題

CSES - Christmas Party

在一個聖誕節派對上，有 n 個人在玩交換禮物，每個人都會送出一個禮物，也會收到一個禮物。請問有幾種送法可以讓這 n 個人都收到不是自己送出去的禮物。

- 這個問題其實是經典的「錯排」問題
- 我們可以用排容原理來思考看看

例題

CSES - Christmas Party

在一個聖誕節派對上，有 n 個人在玩交換禮物，每個人都會送出一個禮物，也會收到一個禮物。請問有幾種送法可以讓這 n 個人都收到不是自己送出去的禮物。

- 這個問題其實是經典的「錯排」問題
- 我們可以用排容原理來思考看看
- 答案其實就是全部 - (至少 1 個人會收到自己的禮物) + (至少 2 個人會收到自己的禮物) - (至少 3 個人會收到自己的禮物) + $\ldots$
- $n! - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (n-i)!$

例題

Codeforces 453A - Little Pony and Expected Minimum

你有一個 m 面的均勻骰子，第 i 面上有 i 個點，接著你會骰這個骰子 n 次。而你會將取這 n 次骰出的最大值作為你的分數。請問你得到的分數期望值會是多少?

期望值的計算方式為 $\sum X_i \times P_i$

例題

Codeforces 453A - Little Pony and Expected Minimum

你有一個 m 面的均勻骰子，第 i 面上有 i 個點，接著你會骰這個骰子 n 次。而你會將取這 n 次骰出的最大值作為你的分數。請問你得到的分數期望值會是多少?

期望值的計算方式為 $\sum X_i \times P_i$

- 首先，我們會發現到每個價值的機率其實就是 $(\frac{1}{m})^n$
- 因此，我們只要能夠計算所有情況的價值總和即可

例題

Codeforces 453A - Little Pony and Expected Minimum

你有一個 m 面的均勻骰子，第 i 面上有 i 個點，接著你會骰這個骰子 n 次。而你會將取這 n 次骰出的最大值作為你的分數。請問你得到的分數期望值會是多少?

期望值的計算方式為 $\sum X_i \times P_i$

- 首先，我們會發現到每個價值的機率其實就是 $(\frac{1}{m})^n$
- 因此，我們只要能夠計算所有情況的價值總和即可
- 那我們要怎麼計算這個答案呢?

例題

Codeforces 453A - Little Pony and Expected Minimum

你有一個 m 面的均勻骰子，第 i 面上有 i 個點，接著你會骰這個骰子 n 次。而你會將取這 n 次骰出的最大值作為你的分數。請問你得到的分數期望值會是多少?

期望值的計算方式為 $\sum X_i \times P_i$

- 首先，我們會發現到每個價值的機率其實就是 $(\frac{1}{m})^n$
- 因此，我們只要能夠計算所有情況的價值總和即可
- 那我們要怎麼計算這個答案呢?
- 我們將最大值為 x 的狀態分開思考

Codeforces 453A - Little Pony and Expected Minimum

你有一個 m 面的均勻骰子，第 i 面上有 i 個點，接著你會骰這個骰子 n 次。而他會將取這 n 次骰出的最大值作為你的分數。請問你得到的分數期望值會是多少?

期望值的計算方式為 $\sum X_i \times P_i$

例題

Codeforces 453A - Little Pony and Expected Minimum

你有一個 m 面的均勻骰子，第 i 面上有 i 個點，接著你會骰這個骰子 n 次。而他會將取這 n 次骰出的最大值作為你的分數。請問你得到的分數期望值會是多少?

期望值的計算方式為 $\sum X_i \times P_i$

- 假設 n 次骰出來的最大值為 x，那總共有多少可能呢?
- 排容!

例題

Codeforces 453A - Little Pony and Expected Minimum

你有一個 m 面的均勻骰子，第 i 面上有 i 個點，接著你會骰這個骰子 n 次。而他會將取這 n 次骰出的最大值作為你的分數。請問你得到的分數期望值會是多少?

期望值的計算方式為 $\sum X_i \times P_i$

- 假設 n 次骰出來的最大值為 x，那總共有多少可能呢?
- 排容!
- 答案其實就是 (其中一次骰出 x) - (其中兩次骰出 x) + (其中三次骰出 x) - …

例題

Codeforces 453A - Little Pony and Expected Minimum

你有一個 m 面的均勻骰子，第 i 面上有 i 個點，接著你會骰這個骰子 n 次。而他會將取這 n 次骰出的最大值作為你的分數。請問你得到的分數期望值會是多少?

期望值的計算方式為 $\sum X_i \times P_i$

- 假設 n 次骰出來的最大值為 x，那總共有多少可能呢?
- 排容!
- 答案其實就是 (其中一次骰出 x) - (其中兩次骰出 x) + (其中三次骰出 x) - …
- 不過其實有更簡單的方式!
- 答案就是全部 - (沒有骰出 x)

例題

Codeforces 453A - Little Pony and Expected Minimum

你有一個 m 面的均勻骰子，第 i 面上有 i 個點，接著你會骰這個骰子 n 次。而他會將取這 n 次骰出的最大值作為你的分數。請問你得到的分數期望值會是多少?

期望值的計算方式為 $\sum X_i \times P_i$

- 假設 n 次骰出來的最大值為 x，那總共有多少可能呢?
- 排容!
- 答案其實就是（其中一次骰出 x）-（其中兩次骰出 x）+（其中三次骰出 x）- …
- 不過其實有更簡單的方式!
- 答案就是全部 -（沒有骰出 x）
- 用一個迴圈跑過每種可能的 x 即可

例題

Codeforces 1288C - Two Arrays

現在給你兩個數字 n, m，請找出總共有多少對的陣列 (A, B) 滿足

- A, B 的長度皆為 m
- $1 \leq A_i, B_i \leq n$
- 對於所有 i，$A_i \leq B_i$
- A 陣列是非遞減的（$A_i \leq A_{i+1}$）
- B 陣列是非遞增的（$B_i \geq B_{i+1}$）

例題

Codeforces 1288C - Two Arrays

現在給你兩個數字 n, m，請找出總共有多少對的陣列 (A, B) 滿足

- A, B 的長度皆為 m
- $1 \leq A_i, B_i \leq n$
- 對於所有 i，$A_i \leq B_i$
- A 陣列是非遞減的（$A_i \leq A_{i+1}$）
- B 陣列是非遞增的（$B_i \geq B_{i+1}$）

- 首先，我們觀察到 $A_n \leq B_n$，而且 A 是非遞減，B 是非遞增的
- 如果我們知道 A_i, B_i 會有哪些元素，則我們可以知道要怎麼分配這些數字

例題

Codeforces 1288C - Two Arrays

現在給你兩個數字 n, m，請找出總共有多少對的陣列 (A, B) 滿足

- A, B 的長度皆為 m
- $1 \leq A_i, B_i \leq n$
- 對於所有 i，$A_i \leq B_i$
- A 陣列是非遞減的（$A_i \leq A_{i+1}$）
- B 陣列是非遞增的（$B_i \geq B_{i+1}$）

- 首先，我們觀察到 $A_n \leq B_n$，而且 A 是非遞減，B 是非遞增的
- 如果我們知道 A_i, B_i 會有哪些元素，則我們可以知道要怎麼分配這些數字
- $A_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots, B_1$ 會是一個非遞減的陣列

例題

Codeforces 1288C - Two Arrays

現在給你兩個數字 n, m，請找出總共有多少對的陣列 (A, B) 滿足

- A, B 的長度皆為 m
- $1 \leq A_i, B_i \leq n$
- 對於所有 i，$A_i \leq B_i$
- A 陣列是非遞減的（$A_i \leq A_{i+1}$）
- B 陣列是非遞增的（$B_i \geq B_{i+1}$）

- 首先，我們觀察到 $A_n \leq B_n$，而且 A 是非遞減，B 是非遞增的
- 如果我們知道 A_i, B_i 會有哪些元素，則我們可以知道要怎麼分配這些數字
- $A_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots, B_1$ 會是一個非遞減的陣列
- 我們可以發現 $1 \sim n$ 之間的數字總共出現的頻率會是 $2m$

例題

Codeforces 1288C - Two Arrays

現在給你兩個數字 n, m，請找出總共有多少對的陣列 (A, B) 滿足

- A, B 的長度皆為 m
- $1 \leq A_i, B_i \leq n$
- 對於所有 i，$A_i \leq B_i$
- A 陣列是非遞減的（$A_i \leq A_{i+1}$）
- B 陣列是非遞增的（$B_i \geq B_{i+1}$）

- 首先，我們觀察到 $A_n \leq B_n$，而且 A 是非遞減，B 是非遞增的
- 如果我們知道 A_i, B_i 會有哪些元素，則我們可以知道要怎麼分配這些數字
- $A_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots, B_1$ 會是一個非遞減的陣列
- 我們可以發現 $1 \sim n$ 之間的數字總共出現的頻率會是 $2m$
- $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 2m$ 的非負整數解數量！

例題

https://codeforces.com/problemset/problem/893/E

給你兩個數字 x, y，請找出有幾個整數陣列 F 滿足

- F 的長度為 y
- $\prod_{i=1}^{y} F_i = x$

例題

https://codeforces.com/problemset/problem/893/E

給你兩個數字 x, y，請找出有幾個整數陣列 F 滿足

- F 的長度為 y
- $\prod_{i=1}^{y} F_i = x$

- 將不同的質因數分開思考，假設 p 在 x 的質因數分解中，次方一共是 cnt_p 個
- 那我們可以把 cnt_p 分配到 y 個格子裡
- 直接使用重複組合的公式即可！

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \le n \le 10^9$

- 跟矩陣快速冪同一題，但這次我們要用數學！

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡)，請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- 這題 n 很大，不過我們先想想看，如果 $n \leq 10^3$ 要怎麼處理呢?

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡)，請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- 這題 n 很大，不過我們先想想看，如果 $n \leq 10^3$ 要怎麼處理呢?
- 枚舉國王與皇后的出現次數！

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \le n \le 10^9$

- 這題 n 很大，不過我們先想想看，如果 $n \le 10^3$ 要怎麼處理呢?
- 枚舉國王與皇后的出現次數!
- 答案會是 $\displaystyle\sum_{0\le i\le n, i \text{ odd}} \binom{n}{i} \sum_{0\le j\le n-i, j \text{ odd}} \binom{n-i}{j} 4^{n-i-j}$

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- 如果 $n \leq 10^6$ 呢?

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- 如果 $n \leq 10^6$ 呢?
- 我們把裡面的東西抓出來看看
- $$\sum_{0 \leq j \leq n-i, j \text{ odd}} \binom{n-i}{j} 4^{n-i-j}$$

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- 如果 $n \leq 10^6$ 呢?
- 我們把裡面的東西抓出來看看
- $\displaystyle\sum_{0 \leq j \leq n-i, j \text{ odd}} \binom{n-i}{j} 4^{n-i-j}$
- 欸? 是不是很像二項式定理呢? （$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$）

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- 如果 $n \leq 10^6$ 呢?
- 我們把裡面的東西抓出來看看
- $\displaystyle\sum_{0 \leq j \leq n-i, j \text{ odd}} \binom{n-i}{j} 4^{n-i-j}$
- 欸? 是不是很像二項式定理呢? （$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$）
- 其實上式可以被化簡為 $((1+4)^{n-i} + (1-4)^{n-i})/2$（$n$ 是偶數）
- 或 $((1+4)^{n-i} - (1-4)^{n-i})/2$（$n$ 是奇數）

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- 因此在 $n \leq 10^6$ 時
- 直接套 $\sum_{0 \leq i \leq n, i \text{ odd}} \binom{n}{i}((1+4)^{n-i} + (1-4)^{n-i})/2$（$n$ 是偶數）
- 或 $\sum_{0 \leq i \leq n, i \text{ odd}} \binom{n}{i}((1+4)^{n-i} - (1-4)^{n-i})/2$（$n$ 是奇數）即可

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- 那在 $n \leq 10^9$ 的時候怎麼辦呢?

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- 那在 $n \leq 10^9$ 的時候怎麼辦呢?
- 我們將剛剛化簡的式子再進一步地化簡（在此省略 n 是奇數的 case）

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

- 那在 $n \leq 10^9$ 的時候怎麼辦呢?
- 我們將剛剛化簡的式子再進一步地化簡（在此省略 n 是奇數的 case）
- $\frac{1}{2}(\sum_{0 \leq i \leq n, i \text{ odd}} \binom{n}{i}(1+4)^{n-i} + \sum_{0 \leq i \leq n, i \text{ odd}} \binom{n}{i}(1-4)^{n-i})$

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \le n \le 10^9$

- 那在 $n \le 10^9$ 的時候怎麼辦呢?
- 我們將剛剛化簡的式子再進一步地化簡（在此省略 n 是奇數的 case）
- $\frac{1}{2}(\sum_{0 \le i \le n, i \text{ odd}} \binom{n}{i}(1+4)^{n-i} + \sum_{0 \le i \le n, i \text{ odd}} \binom{n}{i}(1-4)^{n-i})$
- 再套一次二項式定理！

例題

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \leq n \leq 10^9$

$$\frac{1}{2}\Big(\sum_{0\leq i\leq n, i \text{ odd}} \binom{n}{i}(1+4)^{n-i} + \sum_{0\leq i\leq n, i \text{ odd}} \binom{n}{i}(1-4)^{n-i}\Big)$$

$$\frac{1}{2}(((1+5)^n-(1-5)^n)/2+((1-3)^n-(1+3)^n)/2)$$

$$\frac{1}{4}((6^n-(-4)^n)+((-2)^n-4^n))$$

2020 北市賽 pC - 婚禮的裝飾

有 n 個格子，每個格子可以擺上 6 種棋子中的其中一種（國王、皇后、主教、騎士、士兵、城堡），請問有幾種擺法可以使國王和皇后的出現次數皆為偶數？

- $1 \le n \le 10^9$

- 因此最後的一般式就是 $\frac{1}{4}(6^n - (-4)^n + (-2)^n - 4^n)$（$n$ 是偶數）
- 或 $\frac{1}{4}(6^n + (-4)^n - (-2)^n - 4^n)$（$n$ 是奇數）
- 只要使用快速冪就能在 $O(\log n)$ 計算完成了！