# DP II

zhu & sam571128

# 這堂課會講的東西

- 位元 DP (Bitmask DP)
- 區間 DP (Range DP)
- DP 回朔
- 前綴和、單調隊列優化

# 位元 DP (Bitmask DP)

## CSES - Hamiltonian Flights

有一張 $n$ 個點 $m$ 條邊的有向圖，你要從節點 $1$ 開始出發走到節點 $n$，然後經過每個點恰好一次。你要找到有多少走法?

- $2 \leq n \leq 20$
- $1 \leq m \leq n^2$

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 我們先來看一個比較好理解的狀態設計
- 若 $n = 4$，我們可以設計出以下的狀態
- $dp[x_1][x_2][x_3][x_4][i]$ 表示目前走到點 $i$ 的方法數（$x_j$ 表示是否走過點 $j$）
- 只是這樣，才 $4$ 個點，我們已經開了 $5$ 維的陣列
- 如果現在有 $20$ 個點，就要開 $21$ 維的陣列欸！

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 因為要開那麼多維的陣列太麻煩了，有什麼方法可以解決這個問題？
- 二進位！
- 但在這之前我們先複習一下位元運算

# 位元運算小複習

- 比較特別的是最底下的兩個
- $a << x$ 等同於 $a \times 2^x$
- $a >> x$ 等同於 $\lfloor \frac{a}{2^x} \rfloor$
- 判斷 $a$ 的第 $i$ 個 `bit` 是不是 `1:` $a \ \& \ (1 << i)$

| 名稱 | 符號 |
|---|---|
| and | & |
| or | \| |
| xor | ^ |
| left shift | << |
| right shift | >> |

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 有了位元運算之後，我們就可以將剛剛的狀態的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 壓成一個數字！
- 假設現在 $n = 4$，$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$
- 那就表示我們已經走過了 $x_1, x_3, x_4$，但還沒走過 $x_2$
- 就可以用 $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 2^0 = 13$ 表示！
- 所以一個狀態就可以用二進位寫成 $x_n x_{n-1} \ldots x_1$ $(x_i = 0/1)$
- 方便起見，我們會使用 0-based

# 位元 DP (Bitmask DP)

## step 1 設置狀態

令 $dp[mask][i]$ 表示走過的城市為 $mask$，然後停在 $i$ 的走法數
那麼答案就是

$$dp[2^n - 1][n - 1]$$

### step 2 導出轉移

一個狀態若要停在 $i$，則 $mask$ 一定要走過 $i$ 這個點。而轉移可以去枚舉走過來的點 $j$

$$dp[mask][i] := dp[mask][i] + dp[mask \oplus 2^i][j]$$

# 位元 DP（Bitmask DP）

## step 3 打好基底

要從第一個城市（編號是 $0$）開始出發，所以

$$dp[1][0] = 1$$

# 位元 DP (Bitmask DP)

```
int n,m,dp[(1<<20)][20];
vector<int> g[20];

void solve(){
    cin>>n>>m;
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int u,v;cin>>u>>v;
        u--,v--;
        g[u].emplace_back(v);
    }
    dp[1][0]=1;
    for(int i=0;i<(1<<n);++i){
        for(int u=0;u<n;++u){
            if(!dp[i][u]) continue;
            if(i&(1<<u)){
                for(auto v:g[u]){
                    if(i&(1<<v)) continue;
                    dp[i^(1<<v)][v]+=dp[i][u];
                    dp[i^(1<<v)][v]%=MOD;
                }
            }
        }
    }
    cout<<dp[(1<<n)-1][n-1]<<'\n';
}
```

## CSES - Elevator Rides

有 $n$ 個人和一台載重為 $x$ 的電梯，每個人的重量分別是 $w_1, \cdots, w_n$，如果要讓 $n$ 個人都搭完電梯，最少要搭幾台電梯?

- $1 \leq n \leq 20$

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 跟上一題一樣，我們可以考慮每一個人是否搭過電梯了
- 可是要怎麼維護要不要再搭新的電梯呢?

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 跟上一題一樣，我們可以考慮每一個人是否搭過電梯了
- 可是要怎麼維護要不要再搭新的電梯呢?
- 其實我們可以同時維護搭的電梯數跟目前電梯的重量！

# 位元 DP (Bitmask DP)

**step 1 設置狀態**

令 $dp[mask]$ 表示已經搭完的人為 $mask$，搭了最少電梯數跟最後一台的重量

那麼答案就是

$$dp[2^n - 1]$$

# 位元 DP (Bitmask DP)

## step 2 導出轉移

枚舉要搭電梯的人，找到最少的答案

$$dp[mask] = \min_{i=1}^{n}(dp[mask \oplus 2^i] + w[i])$$

# 位元 DP (Bitmask DP)

## step 3 打好基底

沒有人搭的時候，只會有一台電梯，最後一台電梯的重量為 $0$

$$dp[0] = \{1, 0\}$$

# 位元 DP (Bitmask DP)

```
int n,x,w[20];
vector<pii> dp(1<<20);

void solve(){
    cin>>n>>x;
    for(int i=0;i<n;++i) cin>>w[i];
    dp[0]={1,0};
    for(int i=0;i<(1<<20);++i){
        if(i!=0) dp[i]={1e18,0};
        for(int j=0;j<n;++j){
            if(i&(1<<j)){
                pii r=dp[i^(1<<j)];
                r.S+=w[j];
                if(r.S>x) r.F++,r.S=w[j];
                dp[i]=min(dp[i],r);
            }
        }
    }
    cout<<dp[(1<<n)-1].F<<'\n';
}
```

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 注意到題目或部分分經常會有 $1 \leq n \leq 20$ 之類的範圍
- 這種時候就可以考慮嘗試位元 DP 來解決

### Codeforces 895C - Square Subsets

給你 $n$ 個數字 $a_1, \cdots, a_n$，請問你有幾種選法可以使得選出來的數字的乘積為完全平方數。

- $1 \leq n \leq 10^5$
- $1 \leq a_i \leq 70$

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 這題跟位元 dp 有甚麼關係 R

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 這題跟位元 dp 有甚麼關係 R
- 觀察 $a_i$ 的範圍！

- 這題跟位元 dp 有甚麼關係 R
- 觀察 $a_i$ 的範圍！
- 你會發現小於 $a_i$ 的質數最多有 19 個！

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 那完全平方數有什麼特點呢?

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 那完全平方數有什麼特點呢?
- 想想看質因數分解！

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 那完全平方數有什麼特點呢?
- 想想看質因數分解！
- 對於一個數字 $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots$ 時，所有 $\alpha_i \bmod 2$ 都是 $0$ 的話，他就是完全平方數

# 位元 DP (Bitmask DP)

- 那完全平方數有什麼特點呢?
- 想想看質因數分解！
- 對於一個數字 $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots$ 時，所有 $\alpha_i \bmod 2$ 都是 $0$ 的話，他就是完全平方數
- 因此我們可以將質因數的次方的奇偶性寫成二進位的形式！

**step 1 設置狀態**

令 $dp[i][mask]$ 表示用小於等於 $i$ 的數字湊出質因數分解後狀態為 $mask$ 的數量

那麼答案就會是

$$dp[70][0] - 1$$

($-1$ 是因為不能選空的集合)

## step 2 導出轉移

依序把 $1 \sim 70$ 都加上去

分成兩種情況去處理，$x[i]$ 是 $i$ 質因數分解完後的狀態

1. 加奇數個 $i \Rightarrow dp[i][mask] := dp[i][mask] + dp[i-1][mask \oplus x[i]]$
2. 加偶數個 $i \Rightarrow dp[i][mask] := dp[i][mask] + dp[i-1][mask]$

然後考慮兩種情況發生的次數

1. $C_1^{cnt[i]} + C_3^{cnt[i]} + \cdots$
2. $C_0^{cnt[i]} + C_2^{cnt[i]} + \cdots$

根據二項式定理，兩個各是 $2^{cnt[i]-1}$，可以預處理 $2$ 的次方

# 位元 DP (Bitmask DP)

## step 3 打好基底

空的集合的數字乘積我們預設為 $1$，最後輸出時會 $-1$

$$dp[0][0] = 1$$

# 位元 DP (Bitmask DP)

```
int n,a[MAXN],mask[71],cnt[71],dp[2][(1<<19)];
int primes[19]={2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67};

int fastpow(int a,int b){
    int res=1;
    while(b){
        if(b&1) res=res*a%MOD;
        a=a*a%MOD;
        b>>=1;
    }
    return res;
}

void pre(){
    for(int i=2;i<=70;++i){
        int now=i;
        for(int j=0;j<19;++j){
            while(now%primes[j]==0){
                now/=primes[j];
                mask[i]^=(1<<j);
            }
        }
    }
}
```

# 位元 DP (Bitmask DP)

```cpp
void solve(){
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        cin>>a[i];cnt[a[i]]++;
    }

    pre();

    dp[0][0]=1;
    for(int i=1;i<=70;++i){
        for(int j=0;j<(1<<19);++j){
            if(cnt[i]){
                dp[i%2][j]=dp[(i+1)%2][j^mask[i]]*fastpow(2,cnt[i]-1)%MOD;
                dp[i%2][j]%=MOD;
                dp[i%2][j]+=dp[(i+1)%2][j]*fastpow(2,cnt[i]-1)%MOD;
                dp[i%2][j]%=MOD;
            }else dp[i%2][j]=dp[(i+1)%2][j];
        }
    }
    cout<<(dp[0][0]-1+MOD)%MOD<<'\n';
}
```

# 區間 DP (Range DP)

## Atcoder DP Contest N - Slimes

有 $n$ 個史萊姆排成一排，每次可以將相鄰的兩個大小為 $a, b$ 的史萊姆合併，並消耗 $a + b$ 的能量。請找出以最佳的方式進行合併，最少需要多少的能量。

- $1 \leq n \leq 400$

# 區間 DP (Range DP)

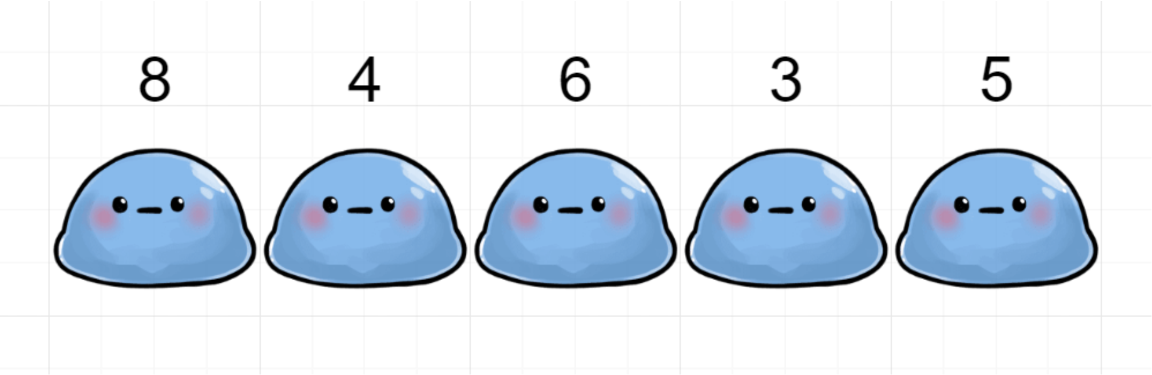
- 這題要怎麼做? 可以 Greedy 嗎?

# 區間 DP (Range DP)

- 這題要怎麼做? 可以 Greedy 嗎?
- 我們可以來找找看反例，如果找不到你就要去證明他

- 這題要怎麼做? 可以 Greedy 嗎?
- 我們可以來找找看反例，如果找不到你就要去證明他
- 來看看這個例子

# 區間 DP (Range DP)



# 區間 DP (Range DP)

- 那我們要怎麼正確的計算答案呢?
- 會發現在合併的過程中，重要的只有組成兩隻史萊姆的花費及合併時的花費
- 因此，如果我們知道將 $[l,k]$ 和 $[k+1,r]$ 的所有史萊姆合併需要耗的最少能量
- 那其實我們就可以計算出 $[l,r]$ 的答案！

# 區間 DP (Range DP)

## step 1 設置狀態

令 $dp[l][r]$ 表示將 $[l, r]$ 內的史萊姆合併需要的最少能量

那麼答案就是

$$dp[1][n]$$

# 區間 DP (Range DP)

## step 2 導出轉移

枚舉切點 $l \leq k < r$，從左右兩邊找合併後最小的答案

$$dp[l][r] = \min(dp[l][k] + dp[k+1][r] + sum(l, r))$$

$sum(l, r)$ 可以用前綴和在 $O(1)$ 得到

# 區間 DP (Range DP)

## step 3 打好基底

只有一隻史萊姆的時候，不用消耗能量

$$dp[i][i] = 0$$

# 區間 DP (Range DP)

Top-Down: (不用思考轉移順序，打好基底就好)

```
int get(int l,int r){
    if(l==r) return 0;
    int res=1e18;
    for(int i=l;i<=r;i++)
        res=min(get(l,i)+get(i+1,r)+sum(l,r));
    return dp[l][r]=res;
}
```

Bottom-Up: (要注意轉移順序)

```
for(int i=n;i>=1;i--){
    for(int j=i+1;j<=n;j++){
        for(int k=i;k<j;k++){
            dp[i][j]=min(dp[i][j],dp[i][k]+dp[k+1][j]+sum(i,j));
        }
    }
}
```

# 區間 DP (Range DP)

## TIOJ 1488 正直 DE

給你 $n$ 個矩陣，第 $i$ 個矩陣的大小為 $r_i \times c_i$。對於兩個矩陣 $A_{n\times m}$， $B_{m\times p}$ 需要的計算次數為 $nmp$。請找到將這 $n$ 個矩陣相乘所需的最少運算次數是多少?

- $1 \leq n \leq 1000$

# 區間 DP (Range DP)

## step 1 設置狀態

令 $dp[l][r]$ 表示將 $[l, r]$ 內的矩陣相乘需要的最少運算次數

那麼答案就是

$$dp[1][n]$$

# 區間 DP (Range DP)

## step 2 導出轉移

枚舉切點 $l \le k < r$，從左右兩邊找合併後最小的答案

$$dp[l][r] = \min(dp[l][k] + dp[k+1][r] + a[l] \times b[k] \times b[r])$$

## step 3 打好基底

只有一個矩陣的時候，不用任何運算次數

$$dp[i][i] = 0$$

# 區間 DP (Range DP)

```
signed main(){
    fastio

    int T;cin>>T;
    int sum=0;
    while(T--){
        int n;cin>>n;
        int r[n+1]{},c[n+1]{};
        for(int i=1;i<=n;++i) cin>>r[i]>>c[i];
        vector<vector<int>> dp(n+1,vector<int>(n+1,1e18));
        for(int i=1;i<=n;++i) dp[i][i]=0;
        for(int i=n;i>0;--i){
            for(int j=i;j<=n;++j){
                for(int k=i;k<j;++k){
                    dp[i][j]=min(dp[i][j],dp[i][k]+dp[k+1][j]+r[i]*c[k]*c[j]);
                }
            }
        }
        cout<<(dp[1][n]+999)/1000<<'\n';
        sum+=dp[1][n];
    }
    cout<<(sum+999)/1000<<'\n';
}
```

# 區間 DP (Range DP)

## AtCoder DP Contest pL - Deque

小 K 和小 B 在玩遊戲，現在有 $n$ 顆石頭排成一列。每顆石頭上面寫著一個數字 $a_i$。兩個人輪流拿石頭，每次可以拿最前面或最後面的石頭，並得到石頭上寫的數字的分數。如果兩個人都以最佳的走法（最大化自己的分數）去玩遊戲，兩人的分數差會是多少?

- $1 \leq n \leq 3000$

# 區間 DP (Range DP)

- 這題變成是兩個人玩遊戲欸，要怎麼處理呢?

# 區間 DP (Range DP)

- 這題變成是兩個人玩遊戲欸，要怎麼處理呢?
- 發現到其實當先手拿完之後，後手會變成下一輪的先手
- 所以我們可以利用這點來設計 DP 式

# 區間 DP (Range DP)

## step 1 設置狀態

令 $dp[l][r]$ 表示先手在 $[l, r]$ 內可以得到的最大分數

那麼答案就是

$$dp[1][n]$$

# 區間 DP (Range DP)

## step 2 導出轉移

先手只有兩種可能性，拿最前面的石頭，或最後面的石頭

$$dp[l][r] = \begin{cases} sum[l+1][r] - dp[l+1][r] + arr[l] & \text{,拿前面的石頭} \\ sum[l][r-1] - dp[l][r-1] + arr[r] & \text{,拿後面的石頭} \end{cases}$$

# 區間 DP (Range DP)

## step 3 打好基底

只有一個數字的時候，先手只能拿那個數字

$$dp[i][i] = a[i]$$

# DP 回溯

# DP 回溯

- 從我們找到的最優解，往回找轉移時的路徑

# DP 回溯

- 從我們找到的最優解，往回找轉移時的路徑
- 乍聽之下可能會覺得不好寫，但它其實就是紀錄狀態是從哪裡轉移過來的！

# DP 回溯

**AtCoder DP Contest F - LCS**

給你兩個字串 $s$ 和 $t$，找出他們的 LCS

- 還記得上一堂課的例題是找 LCS 的長度嗎？

# DP 回溯

## AtCoder DP Contest F - LCS

給你兩個字串 $s$ 和 $t$，找出他們的 LCS

- 還記得上一堂課的例題是找 LCS 的長度嗎？
- 但是這題要把字串回溯

# DP 回溯

- 現在要做的事情是紀錄狀態是從哪裡轉移過來的

# DP 回溯

- 現在要做的事情是紀錄狀態是從哪裡轉移過來的
- 令 $path[i][j] = dp[i][j]$ 這個狀態是從哪裡轉移過來的

$$path[i][j] = \begin{cases} i, j & \texttt{if} \quad s[i] = t[j] \\ i+1, j & \texttt{if} \quad dp[i+1][j] \geq dp[i][j+1] \\ i, j+1 & \texttt{if} \quad dp[i+1][j] < dp[i][j+1] \end{cases}$$

# DP 回溯

```
void solve(){
    string s,t;cin>>s>>t;
    int slen=s.length(),tlen=t.length();
    s=" "+s,t=" "+t;
    int dp[slen+1][tlen+1]{};
    pii r[slen+1][tlen+1]{};
    for(int i=1;i<=slen;++i){
        for(int j=1;j<=tlen;++j){
            if(s[i]==t[j]){
                dp[i][j]=dp[i-1][j-1]+1;
                r[i][j]={i-1,j-1};
            }else if(dp[i-1][j]>dp[i][j-1]){
                dp[i][j]=dp[i-1][j];
                r[i][j]={i-1,j};
            }else{
                dp[i][j]=dp[i][j-1];
                r[i][j]={i,j-1};
            }
        }
    }
    vector<char> ans;
    while(slen>0&&tlen>0){
        if(r[slen][tlen]==make_pair(slen-1,tlen-1)) ans.emplace_back(s[slen]);
        pii tmp=r[slen][tlen];
        slen=tmp.F,tlen=tmp.S;
    }
    reverse(ans.begin(),ans.end());
    for(auto i:ans) cout<<i;
}
```

# DP 回溯

- 但其實有另一種比較簡單（?）的實作方式

# DP 回溯

```
void solve(){
    string s,t;cin>>s>>t;
    int slen=s.length(),tlen=t.length();
    s=" "+s,t=" "+t;
    int dp[slen+1][tlen+1]{};
    for(int i=1;i<=slen;++i){
        for(int j=1;j<=tlen;++j){
            if(s[i]==t[j]) dp[i][j]=dp[i-1][j-1]+1;
            else if(dp[i-1][j]>dp[i][j-1]) dp[i][j]=dp[i-1][j];
            else dp[i][j]=dp[i][j-1];
        }
    }
    int a=slen,b=tlen,cnt=dp[slen][tlen];
    char ans[cnt+1]{};
    while(cnt>0){
        if(s[a]==t[b]){
            ans[cnt]=s[a];
            a--,b--,cnt--;
        }else if(dp[a-1][b]>dp[a][b-1]) a--;
        else b--;
    }
    for(int i=1;i<=dp[slen][tlen];++i) cout<<ans[i];
}
```

## AtCoder Beginner Contest 271 D - Flip and Adjust

有 $n$ 張卡片，每張卡片的正面寫著 $a_i$，反面寫著 $b_i$，現在你希望可以讓這 $n$ 張卡片朝上的數字的總和為 $S$。如果存在一種作法，就輸出每張卡片要是正面還是反面。

- $1 \leq n \leq 10^5$

# DP 回溯

- 不難看出這題是背包吧
- 而且每張卡片你要嘛選正面要嘛選反面

# DP 回溯

- 不難看出這題是背包吧
- 而且每張卡片你要嘛選正面要嘛選反面
- 令 $dp[i][j][0/1] =$ 前 $i$ 張卡片且第 $i$ 張卡片為正面/反面時，是否能湊出 $j$

# DP 回溯

- 不難看出這題是背包吧
- 而且每張卡片你要嘛選正面要嘛選反面
- 令 $dp[i][j][0/1] =$ 前 $i$ 張卡片且第 $i$ 張卡片為正面/反面時，是否能湊出 $j$
- 紀錄每個狀態的轉移來源，就可以回朔答案了

# 前綴和優化

# 前綴和優化

- 當題目出現了以下這種轉移式的時候，就可以使用前綴和進行優化

$$dp[i][j] = \sum_{k=l}^{r}(dp[i-1][k]) + f(i)$$

- 可以用 $O(n)$ 的時間預處理好前綴和，並快速地詢問答案

# 前綴和優化

## AtCoder DP Contest pT - Permutation

給你一串由 $>$ 和 $<$ 組成的字串 $s$，如果 `s[i]='>'` 那麼 $a_i > a_{i+1}$，反之，$a_i < a_{i+1}$。請找出總共有多少個 $1 \sim n$ 的排列滿足這個條件。

- $1 \leq n \leq 3000$

# 前綴和優化

- 狀態設置：令 $dp[i][j] =$ 考慮前 $i$ 個數字且第 $j$ 個數字是其中第 $k$ 大的排列數

# 前綴和優化

- 狀態設置：令 $dp[i][j] =$ 考慮前 $i$ 個數字且第 $j$ 個數字是其中第 $k$ 大的排列數
- 導出轉移：

$$\begin{cases} dp[i][j] = \sum_{k=j}^{i} dp[i-1][k] & , \texttt{if } s[i] = \texttt{'>'} \\ dp[i][j] = \sum_{k=0}^{j-1} dp[i-1][k] & , \texttt{if } s[i] = \texttt{'<'} \end{cases}$$

# 前綴和優化

- 狀態設置：令 $dp[i][j] =$ 考慮前 $i$ 個數字且第 $j$ 個數字是其中第 $k$ 大的排列數
- 導出轉移：

$$\begin{cases} dp[i][j] = \sum_{k=j}^{i} dp[i-1][k] & , \texttt{ if } s[i] = \texttt{'>'} \\ dp[i][j] = \sum_{k=0}^{j-1} dp[i-1][k] & , \texttt{ if } s[i] = \texttt{'<'} \end{cases}$$

- 打好基底： $dp[0][1] = 1$

# 前綴和優化

- 轉移需要 $O(i)$ 的時間，所以總共會是 $O(n^3)$
- 但是其實轉移時預處理一下前綴和就可以在 $O(1)$ 的時間完成轉移
- 所以時間複雜度會是 $O(n^2)$

# 前綴和優化

```
void solve(){
    int n;cin>>n;
    string s;cin>>s;
    s=" "+s;
    int dp[n+1][n+1]{};
    dp[1][1]=1;
    for(int i=2;i<=n;++i){
        if(s[i-1]=='>'){
            for(int j=i-1;j>=1;--j){
                dp[i][j]=dp[i][j+1]+dp[i-1][j];
                dp[i][j]%=MOD;
            }
        }else{
            for(int j=1;j<=i;++j){
                dp[i][j]=dp[i][j-1]+dp[i-1][j-1];
                dp[i][j]%=MOD;
            }
        }
    }
    int ans=0;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        ans+=dp[n][i];
        ans%=MOD;
    }
    cout<<ans<<'\n';
}
```

## APCS 2020/10 勇者修練

輸入為 $n \times m$ 大小的的陣列，每一格是一個介於 $-100$ 與 $100$ 之間的整數，表示經過這格可以累積的經驗值。你可以從最上面一排任何一個位置開始，在最下面一排任何一個位置結束。過程中每一步可以選擇往左、往右或往下走，但不能走回已經經過的位置。請你算出最多可以獲得的經驗值總和（可能是負數）。

- $1 \leq n \leq 50$
- $1 \leq m \leq 10000$

# 前綴和優化

- 如果上網查詢這題的題解，你們可能會看到一個非常毒瘤的解法
- 查不到的我直接給你們網址 (x (2020 APCS 十月場)

# 前綴和優化

- 設 $dp[i][j]$ 表示走到 $(i,j)$ 時的最大價值
- 轉移式為

$$dp[i][j] = \max \begin{cases} dp[i][k] + sum(k+1, j) & , k < j \\ dp[i][l] + sum(j, l-1) & , l > j \\ dp[i-1][j] + a[i][j] \end{cases}$$

# 前綴和優化

- 設 $dp[i][j]$ 表示走到 $(i, j)$ 時的最大價值
- 轉移式為

$$dp[i][j] = \max \begin{cases} dp[i][k] + sum(k+1, j) & , k < j \\ dp[i][l] + sum(j, l-1) & , l > j \\ dp[i-1][j] + a[i][j] \end{cases}$$

- 但你會發現這個轉移式的時間複雜度為 $O(nm^2)$，顯然會 TLE

# 前綴和優化

- 會發現不論是從前面開始找最大值，或是從後面找最大值
- 其實把這些東西存成前綴最大值跟後綴最大值一併轉移
- 這樣就可以在 $O(1)$ 的時間完成轉移了！
- 時間複雜度就變成 $O(nm)$ 了

# 單調隊列優化

# 單調隊列優化

- 還記得之前講過的滑動窗口 (Sliding Window) 嗎？

# 單調隊列優化

- 還記得之前講過的滑動窗口（Sliding Window）嗎？
- 我們可以用他來尋找區間極值

# 單調隊列優化

- 還記得之前講過的滑動窗口 (`Sliding Window`) 嗎？
- 我們可以用他來尋找區間極值
- 只要是轉移式長成這樣的時候，就可以使用

$$dp[i] = \max_{j=1}^{k}(dp[i-j]) + f(i)$$

- 可以利用單調隊列優化讓轉移的複雜度變成 $O(n)$

### Zerojudge c528. 相隔小於一定距離最小總和子序列

給定一個長度為 $N$ 的整數序列 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 及一個正整數 $K$ ，請蓋掉任意個數字使得原序列中任意的連續 $K$ 個數字都至少有一個數字被蓋掉了，請問蓋掉的數字的總和最小為多少？

- $1 \le N, K \le 10^6$

# 單調隊列優化

- 如果對上一堂課熟悉，那應該可以很快的想到狀態設計和轉移

- 如果對上一堂課熟悉，那應該可以很快的想到狀態設計和轉移
- 設置狀態：令 $dp[i] =$ 前 $i$ 個數字中都滿足條件而且 $a_i$ 被蓋掉了的最小總和

# 單調隊列優化

- 如果對上一堂課熟悉，那應該可以很快的想到狀態設計和轉移
- 設置狀態：令 $dp[i] =$ 前 $i$ 個數字中都滿足條件而且 $a_i$ 被蓋掉了的最小總和
- 導出轉移：$dp[i] = \min_{j=1}^{K}(dp[i-j]) + a[i]$

# 單調隊列優化

- 如果對上一堂課熟悉，那應該可以很快的想到狀態設計和轉移
- 設置狀態：令 $dp[i] =$ 前 $i$ 個數字中都滿足條件而且 $a_i$ 被蓋掉了的最小總和
- 導出轉移：$dp[i] = \min_{j=1}^{K}(dp[i-j]) + a[i]$
- 打好基底：$dp[0] = 0$

# 單調隊列優化

- 如果對上一堂課熟悉，那應該可以很快的想到狀態設計和轉移
- 設置狀態：令 $dp[i] =$ 前 $i$ 個數字中都滿足條件而且 $a_i$ 被蓋掉了的最小總和
- 導出轉移：$dp[i] = \min_{j=1}^{K}(dp[i-j]) + a[i]$
- 打好基底：$dp[0] = 0$
- 你會發現這個轉移式的時間複雜度是 $O(NK)$，顯然會 TLE

# 單調隊列優化

- 如果對上一堂課熟悉，那應該可以很快的想到狀態設計和轉移
- 設置狀態：令 $dp[i] =$ 前 $i$ 個數字中都滿足條件而且 $a_i$ 被蓋掉了的最小總和
- 導出轉移：$dp[i] = \min_{j=1}^{K}(dp[i-j]) + a[i]$
- 打好基底：$dp[0] = 0$
- 你會發現這個轉移式的時間複雜度是 $O(NK)$，顯然會 TLE
- 有發現到這個轉移式跟前一頁的很像嗎？

# 單調隊列優化

- 如果對上一堂課熟悉，那應該可以很快的想到狀態設計和轉移
- 設置狀態：令 $dp[i] =$ 前 $i$ 個數字中都滿足條件而且 $a_i$ 被蓋掉了的最小總和
- 導出轉移：$dp[i] = \min_{j=1}^{K}(dp[i-j]) + a[i]$
- 打好基底：$dp[0] = 0$
- 你會發現這個轉移式的時間複雜度是 $O(NK)$，顯然會 TLE
- 有發現到這個轉移式跟前一頁的很像嗎？
- 單調隊列優化！

# 單調隊列優化

- $\min_{j=1}^{K}$ 這個東西其實就是做滑動窗口最小值！

```
deque<int> dq;
dq.push_back(0);
for(int i=1;i<=n;++i){
    if(!dq.empty()&&dq.front()<i-k) dq.pop_front();
    dp[i]=dp[dq.front()]+a[i];
    while(!dq.empty()&&dp[dq.back()]>=dp[i]) dq.pop_back();
    dq.push_back(i);
}
```

## Codeforces 372C - Watching Fireworks is Fun

有 $n$ 條街道，接著會放 $m$ 次煙火。第 $i$ 個煙火會有 $a_i, b_i, t_i$，表示第 $i$ 煙火會在 $t_i$ 的時間在第 $a_i$ 個街道發射，假設你在當下站在第 $x$ 個街道，會得到 $b_i - |a_i - x|$ 的快樂值。請你找到看完 $m$ 次煙火之後的最大快樂值可以是多少?

- $1 \leq n \leq 150000$
- $1 \leq m \leq 300$

# 單調隊列優化

- 我們一樣可以先列出狀態和轉移式，再去想要怎麼優化它

# 單調隊列優化

- 我們一樣可以先列出狀態和轉移式，再去想要怎麼優化它
- 狀態設計：令 $dp[i][j] =$ 放完第 $i$ 個煙火停在座標 $j$ 的最大快樂值

# 單調隊列優化

- 我們一樣可以先列出狀態和轉移式，再去想要怎麼優化它
- 狀態設計：令 $dp[i][j] =$ 放完第 $i$ 個煙火停在座標 $j$ 的最大快樂值
- 導出轉移：

$$dp[i][j] = \max_{k=-(t_i-t_{i-1})d}^{(t_i-t_{i-1})d} (dp[i][j], dp[i-1][j+k]) + b[i] - |a[i] - j|$$

# 單調隊列優化

- 我們一樣可以先列出狀態和轉移式，再去想要怎麼優化它
- 狀態設計：令 $dp[i][j] =$ 放完第 $i$ 個煙火停在座標 $j$ 的最大快樂值
- 導出轉移：

$$dp[i][j] = \max_{k=-(t_i-t_{i-1})d}^{(t_i-t_{i-1})d} (dp[i][j], dp[i-1][j+k]) + b[i] - |a[i] - j|$$

- 打好基底：$dp[0][j] = 0$

# 單調隊列優化

- 我們一樣可以先列出狀態和轉移式，再去想要怎麼優化它
- 狀態設計：令 $dp[i][j] =$ 放完第 $i$ 個煙火停在座標 $j$ 的最大快樂值
- 導出轉移：

$$dp[i][j] = \max_{k=-(t_i-t_{i-1})d}^{(t_i-t_{i-1})d} (dp[i][j], dp[i-1][j+k]) + b[i] - |a[i] - j|$$

- 打好基底：$dp[0][j] = 0$
- 這個轉移式一樣是從固定大小的窗口轉移，所以可以用單調隊列優化

# 單調隊列優化

```
void solve(){
    int n,m,d;cin>>n>>m>>d;
    int N=2;
    int a[m+1]{},b[m+1]{},t[m+1]{},dp[N][n+2]{};
    t[0]=1;
    for(int i=1;i<=m;++i) cin>>a[i]>>b[i]>>t[i];
    for(int i=1;i<=m;++i){
        deque<int> dq;
        for(int j=1;j<=min(n,(t[i]-t[i-1])*d+1);++j){
            while(!dq.empty()&&dp[(i+1)%2][dq.back()]<=dp[(i+1)%2][j]) dq.pop_back();
            dq.push_back(j);
        }
        for(int j=1;j<=n;++j){
            int sz=(t[i]-t[i-1])*d*2+1,s=j-(t[i]-t[i-1])*d,tail=j+(t[i]-t[i-1])*d;
            s=max(1LL,s),tail=min(n,tail);
            if(!dq.empty()&&dq.front()<s) dq.pop_front();
            dp[i%2][j]=dp[(i+1)%2][dq.front()]+b[i]-abs(a[i]-j);
            while(!dq.empty()&&tail+1<=n&&dp[(i+1)%2][dq.back()]<=dp[(i+1)%2][tail+1]) dq.pop_back();
            if(tail+1<=n) dq.push_back(tail+1);
            /*
            for(int k=(-t[i]+t[i-1])*d;k<=(t[i]-t[i-1])*d;++k){
                if(j+k<=n) dp[i][j]=max(dp[i][j],dp[i-1][j+k])+b[i]-abs(a[i]-j);
            }
            */
        }
    }
    int ans=-1e18;
    for(int i=1;i<=n;++i) ans=max(ans,dp[m%2][i]);
    cout<<ans<<'\n';
}
```