

筆記

陳定善

1 logic 邏輯

這一章只會簡單介紹會用到的邏輯符號及基本的一些公理 (axiom) 與定理 (theorem)。

通常上,「對」會表示為 T 或是 \top , 而「錯」會表達為 F 或是 \perp 。在這篇文章當中,會以 \top 及 \perp 表達。

首先,「公理」是對該話題的預先假設,而「定理」是從假設中推論出來的,而定理會附帶證明。通常,推論會寫成 $B, C \vdash D$, 意味著以 B, C 為前提推論出 D 。

若是以 $\vdash B$ 表達,則代表除了此定理或公理外,不需要其他前提,就可以推導出 B 。

至於推論與假設代表什麼,我還不知道該如何解釋。

公理:

$$\vdash B \rightarrow (C \rightarrow B) \quad (1)$$

公理:

$$\vdash (B \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D)) \quad (2)$$

公理:

$$\vdash ((\neg B) \rightarrow (\neg C)) \rightarrow (((\neg B) \rightarrow C) \rightarrow B) \quad (3)$$

公理:

$$(B \rightarrow C), B \vdash C \quad (\text{MP})$$

以上四個公理中, B, C, D 是任意敘述。以上公理,可以理解成是在對 \rightarrow, \neg 做定義,只要符合以上公理形式的概念,都是可以使用的。

在定理的證明當中,我會以以下格式書寫:

條目	內容	前提
條目	內容	前提
條目	內容	前提
...

定理:

$$\vdash B \rightarrow B \quad (4)$$

證明:

C_1 :	$(B \rightarrow ((B \rightarrow B) \rightarrow B)) \rightarrow ((B \rightarrow (B \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow B))$	(2)
C_2 :	$B \rightarrow ((B \rightarrow B) \rightarrow B)$	(1)
C_3 :	$B \rightarrow (B \rightarrow B)$	(1)
C_4 :	$(B \rightarrow (B \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow B)$	(C_1, C_2, MP)
C_5 :	$B \rightarrow B$	(C_3, C_4, MP)

定理:

$$(B \rightarrow C), (C \rightarrow D) \vdash (B \rightarrow D) \quad (5)$$

證明:

C_1 :	$(B \rightarrow C)$	(Hyp)
C_2 :	$(C \rightarrow D)$	(Hyp)
C_3 :	$(C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D))$	(1)
C_4 :	$(B \rightarrow (C \rightarrow D))$	(C_2, C_3, MP)
C_5 :	$(B \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D))$	(2)
C_6 :	$(B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D)$	$(C_4, C_5 \text{MP})$
C_7 :	$(B \rightarrow D)$	(C_1, C_6, MP)