

# 筆記

陳定善

## 1 logic 邏輯

這一章只會簡單介紹會用到的邏輯符號及基本的一些公理 (axiom) 與定理 (theorem)。

通常上,「對」會表示為  $T$  或是  $\top$ , 而「錯」會表達為  $F$  或是  $\perp$ 。在這篇文章當中, 會以  $\top$  及  $\perp$  表達。

首先,「公理」是對該話題的預先假設, 而「定理」是從假設中推論出來的, 而定理會附帶證明。通常, 推論會寫成  $A, B \vdash C$ , 意味著以  $A, B$  為前提推論出  $C$ 。

若是以  $\vdash A$  表達, 則代表除了此定理或公理外, 不需要其他前提, 就可以推導出  $A$ 。

公理:

$$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (1)$$

公理:

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (2)$$

公理:

$$(A \rightarrow B), A \vdash B \quad (\text{MP})$$

以上三個公理中,  $A, B, C$  是任意敘述。以上公理, 可以理解成是在對  $\rightarrow$  做定義, 只要符合以上公理形式的概念, 都是可以使用的。

在定理的證明當中, 我會以以下格式書寫:

條目	內容	(前提)
條目	內容	(前提)
條目	內容	(前提)
...	...	(...)

定理:

$$A \vdash B \rightarrow A \quad (3)$$

證明:

i	$A$	(前提)
ii	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	(1)
iii	$B \rightarrow A$	(i, ii, MP)

定理:

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad (4)$$

證明:

i	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	(前提)
ii	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	(2)
iii	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	(i, ii, MP)

定理:

$$\vdash A \rightarrow A \quad (5)$$

證明:

i	$A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$	(1)
ii	$(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	(i, 4)
iii	$A \rightarrow (A \rightarrow A)$	(1)
iv	$A \rightarrow A$	(ii, iii, MP)

定理:

$$(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C) \quad (6)$$

證明：

i	$(A \rightarrow B)$	(前提)
ii	$(B \rightarrow C)$	(前提)
iii	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	(ii, 3)
iv	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	(iii, 4)
v	$A \rightarrow C$	(i, iv, MP)

定理：

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash (A \rightarrow C) \quad (7)$$

證明：

i	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	(前提)
ii	$B$	(前提)
iii	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	(i, 4)
iv	$A \rightarrow B$	(ii, 3)
v	$A \rightarrow C$	(iii, iv, MP)

公理：

$$\vdash ((\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (8)$$

這個公理是對  $\neg$  的定義。

定理：

$$(\neg A) \rightarrow (\neg B) \vdash B \rightarrow A \quad (9)$$

證明：

i	$(\neg A) \rightarrow (\neg B)$	(前提)
ii	$((\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (B \rightarrow A)$	(8)
iii	$B \rightarrow A$	(i, ii, MP)

定理：

$$\vdash (\neg \neg A) \rightarrow A \quad (10)$$

證明：

i	$(\neg \neg A) \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg A) \rightarrow (\neg \neg A))$	(1)
ii	$((\neg \neg \neg \neg A) \rightarrow (\neg \neg A)) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow (\neg \neg A))$	(8)
iii	$(\neg \neg A) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow (\neg \neg A))$	(i, ii, 6)
iv	$((\neg A) \rightarrow (\neg \neg A)) \rightarrow ((\neg \neg A) \rightarrow A)$	(8)
v	$(\neg \neg A) \rightarrow ((\neg \neg A) \rightarrow A)$	(iii, iv, 6)
vi	$((\neg \neg A) \rightarrow (\neg \neg A)) \rightarrow ((\neg \neg A) \rightarrow A)$	(v, 4)
viii	$(\neg \neg A) \rightarrow (\neg \neg A)$	(5)
ix	$(\neg \neg A) \rightarrow A$	(vii, viii, MP)

定理：

$$\vdash A \rightarrow (\neg \neg A) \quad (11)$$

證明：

i	$(\neg \neg \neg A) \rightarrow (\neg A)$	(10)
iii	$A \rightarrow (\neg \neg A)$	(i, 9)

定理：

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A)) \quad (12)$$

證明：

i	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B))$	(1)
ii	$((\neg \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((\neg \neg A) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg \neg A) \rightarrow B))$	(2)
iii	$(A \rightarrow B) \rightarrow (((\neg \neg A) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg \neg A) \rightarrow B))$	(i, ii, 6)
iv	$(\neg \neg A) \rightarrow A$	(10)
v	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg \neg A) \rightarrow B)$	(iii, iv, 7)
vi	$B \rightarrow (\neg \neg B)$	(11)
vii	$(\neg \neg A) \rightarrow (B \rightarrow (\neg \neg B))$	(vi, 3)
viii	$((\neg \neg A) \rightarrow B) \rightarrow ((\neg \neg A) \rightarrow (\neg \neg B))$	(vii, 4)
ix	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg \neg A) \rightarrow (\neg \neg B))$	(v, viii, 6)
x	$((\neg \neg A) \rightarrow (\neg \neg B)) \rightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A))$	(8)
xi	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A))$	(ix, x, 6)

定理：

$$A \rightarrow B \vdash (\neg B) \rightarrow (\neg A) \quad (13)$$

證明：

$$\begin{array}{ll}
 \text{i} & A \rightarrow B \quad (\text{前提}) \\
 \text{ii} & (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A)) \quad (12) \\
 \text{iii} & (\neg B) \rightarrow (\neg A) \quad (\text{i, ii, MP})
 \end{array}$$

定理：

$$\vdash ((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A \quad (14)$$

證明：

$$\begin{array}{ll}
 \text{i} & ((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow A) \quad (5) \\
 \text{ii} & (((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A)) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A) \quad (\text{i, 4}) \\
 \text{iii} & (\neg A) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A)) \quad (1) \\
 \text{iv} & (\neg A) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A) \quad (\text{ii, iii, 6}) \\
 \text{v} & (((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow (\neg((\neg A) \rightarrow A))) \quad (12) \\
 \text{vi} & (\neg A) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow (\neg((\neg A) \rightarrow A))) \quad (\text{v, vi, 6}) \\
 \text{vii} & ((\neg A) \rightarrow (\neg A)) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow (\neg((\neg A) \rightarrow A))) \quad (\text{vi, 4}) \\
 \text{viii} & (\neg A) \rightarrow (\neg A) \quad (5) \\
 \text{ix} & (\neg A) \rightarrow (\neg((\neg A) \rightarrow A)) \quad (\text{vii, viii, MP}) \\
 \text{x} & ((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A \quad (\text{ix, 9})
 \end{array}$$

定理：

$$\vdash ((\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (15)$$

證明：

$$\begin{array}{ll}
 \text{i} & ((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A \quad (14) \\
 \text{ii} & (B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow (B \rightarrow A)) \quad (1) \\
 \text{iii} & ((\neg A) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow A)) \quad (2) \\
 \text{iv} & (B \rightarrow A) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow A)) \quad (\text{ii, iii, 6}) \\
 \text{v} & ((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A) \quad (\text{i, 3}) \\
 \text{vi} & (B \rightarrow A) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A)) \quad (\text{v, 3}) \\
 \text{vii} & (((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow \\
 & (((((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow A)) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow \\
 \text{viii} & (B \rightarrow A) \rightarrow (((((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow A)) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow A)) \quad (\text{vi, vii, 6}) \\
 \text{ix} & ((B \rightarrow A) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A) \rightarrow A))) \rightarrow \\
 & ((B \rightarrow A) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow A)) \quad (\text{viii, 4}) \\
 \text{x} & (B \rightarrow A) \rightarrow (((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow A) \quad (\text{iv, ix, MP})
 \end{array}$$

定理：

$$A \rightarrow B, (\neg A) \rightarrow B \vdash B \quad (16)$$

證明：

$$\begin{array}{ll}
 \text{i} & A \rightarrow B \quad (\text{前提}) \\
 \text{ii} & (\neg A) \rightarrow B \quad (\text{前提}) \\
 \text{iii} & (\neg B) \rightarrow (\neg A) \quad (\text{i, 13}) \\
 \text{iv} & (\neg B) \rightarrow B \quad (\text{i, ii, 6}) \\
 \text{v} & ((\neg B) \rightarrow B) \rightarrow B \quad (14) \\
 \text{vi} & B \quad (\text{iv, v, MP})
 \end{array}$$

定理：

$$A, \neg A \vdash B \quad (17)$$

證明：

$$\begin{array}{ll}
 \text{i} & A \quad (\text{前提}) \\
 \text{ii} & \neg A \quad (\text{前提}) \\
 \text{iii} & (\neg B) \rightarrow A \quad (\text{i, 3}) \\
 \text{iv} & (\neg B) \rightarrow (\neg A) \quad (\text{ii, 3}) \\
 \text{v} & (\neg A) \rightarrow (\neg \neg B) \quad (\text{iii, 13}) \\
 \text{vi} & (\neg \neg B) \rightarrow B \quad (10) \\
 \text{vii} & (\neg A) \rightarrow B \quad (\text{v, vi, 6}) \\
 \text{viii} & A \rightarrow B \quad (\text{iv, 9}) \\
 \text{ix} & B \quad (\text{vii, viii, 16})
 \end{array}$$

定理：

$$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B) \quad (18)$$

證明：

i	$A$	(前提)
ii	$\neg B$	(前提)
iii	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	(5)
iv	$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$	(iii, 4)
v	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	(i, 3)
vi	$(A \rightarrow B) \rightarrow B$	(iv, v, MP)
vii	$(\neg B) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B))$	(vi, 13)
viii	$\neg(A \rightarrow B)$	(ii, vii, MP)

定理：

$$\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg B \quad (19)$$

證明：

i	$\neg(A \rightarrow B)$	(前提)
ii	$B \rightarrow (A \rightarrow B)$	(1)
iii	$(\neg(A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg B)$	(ii, 13)
iv	$\neg B$	(i, iii, MP)

定理：

$$\neg(A \rightarrow B) \vdash A \quad (20)$$

證明：

i	$\neg(A \rightarrow B)$	(前提)
ii	$(\neg A) \rightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A))$	(1)
iii	$((\neg B) \rightarrow (\neg A)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	(8)
iv	$(\neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	(ii, iii, 6)
v	$(\neg(A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg \neg A)$	(iv, 13)
vi	$(\neg \neg A)$	(i, v, MP)
vii	$(\neg \neg A) \rightarrow A$	(10)
viii	$A$	(vi, vii, MP)

定理：

$$A \rightarrow (\neg B), B \vdash \neg A \quad (21)$$

證明：

i	$A \rightarrow (\neg B)$	(前提)
ii	$B$	(前提)
iii	$B \rightarrow (\neg \neg B)$	(11)
iv	$(\neg \neg B) \rightarrow (\neg A)$	(i, 13)
v	$B \rightarrow (\neg A)$	(iii, iv, 6)
vi	$\neg A$	(ii, v, MP)

定理：

$$(\neg A) \rightarrow B, \neg B \vdash A \quad (22)$$

證明：

i	$(\neg A) \rightarrow B$	(前提)
ii	$\neg B$	(前提)
iii	$(\neg B) \rightarrow (\neg \neg A)$	(i, 13)
iv	$(\neg \neg A) \rightarrow A$	(10)
v	$\neg \neg A$	(ii, iii, MP)
vi	$A$	(iv, v, MP)

定義：

$$A \wedge B := \neg(A \rightarrow (\neg B)) \quad (23)$$

這種  $:=$  符號稱為定義，例如  $A := B$  就是將  $A$  定義為  $B$ 。

定義也可以看成是一種縮寫，將一個概念包裝成新的符號。

定理：

$$\vdash (A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A) \quad (24)$$

證明：

i	$((\neg\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (A \rightarrow ((\neg\neg A) \rightarrow (\neg B)))$	(1)
ii	$(A \rightarrow ((\neg\neg A) \rightarrow (\neg B))) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg\neg A)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B)))$	(2)
iii	$((\neg\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg\neg A)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B)))$	(i, ii, 6)
iv	$A \rightarrow (\neg\neg A)$	(11)
v	$((\neg\neg A) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B))$	(iii, iv, 7)
vi	$(B \rightarrow (\neg A)) \rightarrow ((\neg\neg A) \rightarrow (\neg B))$	(12)
vii	$(B \rightarrow (\neg A)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B))$	(v, vi, 6)
viii	$(\neg(A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow (\neg(B \rightarrow (\neg A)))$	(vii, 13)
ix	$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	(viii, 23)

定理：

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C) \quad (25)$$

證明：

i	$(B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B))$	(12)
ii	$A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)))$	(i, 3)
iii	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)))$	(ii, 4)
iv	$(A \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B))) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg C)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B)))$	(2)
v	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg C)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B)))$	(iii, iv, 6)
vi	$((A \rightarrow (\neg C)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg C)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B))))$	(1)
vii	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg C)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B))))$	(v, vi, 6)
viii	$((\neg C) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg C)) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B)))) \rightarrow$ $((\neg C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg C))) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B)))$	(2)
ix	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (((\neg C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg C))) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B))))$	(vii, viii, 6)
x	$(\neg C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg C))$	(1)
xi	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B)))$	(ix, x, 7)
xii	$(A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow (\neg B)))$	(11)
xiii	$(\neg C) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow (\neg B))))$	(xii, 3)
xiv	$((\neg C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow (\neg B))))$	(xiii, 4)
xv	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow (\neg B))))$	(xi, xiv, 6)
xvi	$((\neg C) \rightarrow (\neg\neg(A \rightarrow (\neg B)))) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow C)$	(8)
xvii	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow C)$	(xv, xvi, 6)
xviii	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$	(xvii, 23)

定理：

$$\vdash ((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad (26)$$

證明：

i	$C \rightarrow (\neg\neg C)$	(11)
ii	$(\neg(A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow (C \rightarrow (\neg\neg C))$	(i, 3)
iii	$((\neg(A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow (\neg\neg C))$	(ii, 4)
iv	$((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg(A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow (\neg\neg C))$	(iii, 23)
v	$((\neg(A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow (\neg\neg C)) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B)))$	(8)
vi	$((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B)))$	(iv, v, 6)
vii	$((\neg C) \rightarrow (A \rightarrow (\neg B))) \rightarrow (((\neg C) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)))$	(2)
viii	$((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (((\neg C) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)))$	(vi, vii, 6)
ix	$((\neg C) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (A \rightarrow (((\neg C) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B))))$	(1)
x	$((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (((\neg C) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B))))$	(viii, ix, 6)
xi	$(A \rightarrow (((\neg C) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)))) \rightarrow$ $((A \rightarrow (\neg C) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)))$	(2)
xii	$A \rightarrow ((\neg C) \rightarrow A)$	(1)
xiii	$(A \rightarrow (((\neg C) \rightarrow A) \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)))) \rightarrow (A \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)))$	(xi, xii, 7)
xiv	$((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)))$	(x, xiii, 6)
xv	$((\neg C) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (B \rightarrow C)$	(8)
xvi	$A \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (B \rightarrow C)$	(xv, 3)
xvii	$(A \rightarrow ((\neg C) \rightarrow (\neg B))) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	(xvi, 4)
xviii	$((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$	(xiv, xvii, 6)