筆記

陳定善

1 logic 邏輯

這一章只會簡單介紹會用到的邏輯符號及基本的一些公理 (axiom) 與定理 (theorem)。
通常上，「對」會表示爲 T 或是 $\top$，而「錯」會表達爲 F 或是 $\bot$。在這篇文章當中，會以 $\top$ 及 $\bot$ 表達。
首先，「公理」是對該話題的預先假設，而「定理」是從假設中推論出來的，而定理會附帶證明。通常，推論會寫成 $A, B \vdash C$，意味著以 A, B 爲前提推論出 C。
若是以 $\vdash A$ 表達，則代表除了此定理或公理外，不需要其他前提，就可以推導出 A。
公理：

$$\vdash A \to (B \to A) \tag{1}$$

公理：

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \tag{2}$$

公理：

$$(A \to B), A \vdash B \tag{MP}$$

以上三個公理中，A, B, C 是任意敘述。以上公理，可以理解成是在對 $\to$ 做定義，只要符合以上公理形式的概念，都是可以使用的。
在定理的證明當中，我會以以下格式書寫：

條目	內容	(前提)
條目	內容	(前提)
條目	內容	(前提)
$\cdots$	$\cdots$	$(\cdots)$

定理：

$$A \vdash B \to A \tag{3}$$

證明：

i	A	(前提)
ii	$A \to (B \to A)$	(1)
iii	$B \to A$	(i, ii, MP)

定理：

$$A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C) \tag{4}$$

證明：

i	$A \to (B \to C)$	(前提)
ii	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	(2)
iii	$(A \to B) \to (A \to C)$	(i, ii, MP)

定理：

$$\vdash A \to A \tag{5}$$

證明：

i	$A \to ((A \to A) \to A)$	(1)
ii	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	(i, 4)
iii	$A \to (A \to A)$	(1)
iv	$A \to A$	(ii, iii, MP)

定理：

$$(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C) \tag{6}$$

證明：

i	$(A \to B)$	(前提)
ii	$(B \to C)$	(前提)
iii	$A \to (B \to C)$	(ii, 3)
iv	$(A \to B) \to (A \to C)$	(iii, 4)
v	$A \to C$	(i, iv, MP)

定理：

$$A \to (B \to C), B \vdash (A \to C) \tag{7}$$

證明：

i	$A \to (B \to C)$	(前提)
ii	B	(前提)
iii	$(A \to B) \to (A \to C)$	(i, 4)
iv	$A \to B$	(ii, 3)
v	$A \to C$	(iii, iv, MP)

公理：

$$\vdash ((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A) \tag{8}$$

這個公理是對 $\neg$ 的定義。

定理：

$$(\neg A) \to (\neg B) \vdash B \to A \tag{9}$$

證明：

i	$(\neg A) \to (\neg B)$	(前提)
ii	$((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A)$	(8)
iii	$B \to A$	(i, ii, MP)

定理：

$$\vdash (\neg\neg A) \to A \tag{10}$$

證明：

i	$(\neg\neg A) \to ((\neg\neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A))$	(1)
ii	$((\neg\neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A)) \to ((\neg A) \to (\neg\neg\neg A))$	(8)
iii	$(\neg\neg A) \to ((\neg A) \to (\neg\neg\neg A))$	(i, ii, 6)
iv	$((\neg A) \to (\neg\neg\neg A)) \to ((\neg\neg A) \to A)$	(8)
v	$(\neg\neg A) \to ((\neg\neg A) \to A)$	(iii, iv, 6)
vi	$((\neg\neg A) \to (\neg\neg A)) \to ((\neg\neg A) \to A)$	(v, 4)
viii	$(\neg\neg A) \to (\neg\neg A)$	(5)
ix	$(\neg\neg A) \to A$	(vii, viii, MP)

定理：

$$\vdash A \to (\neg\neg A) \tag{11}$$

證明：

i	$(\neg\neg\neg A) \to (\neg A)$	(10)
iii	$A \to (\neg\neg A)$	(i, 9)

$$\vdash (A \to B) \to ((\neg B) \to (\neg A)) \tag{12}$$

證明：

i	$(B \to A) \to ((\neg\neg B) \to (B \to A))$	(1)
ii	$((\neg\neg B) \to (B \to A)) \to (((\neg\neg B) \to B) \to ((\neg\neg B) \to A))$	(2)
iii	$(B \to A) \to (((\neg\neg B) \to B) \to ((\neg\neg B) \to A))$	(i, ii, 6)
iv	$(\neg\neg B) \to B$	(10)
v	$(B \to A) \to ((\neg\neg B) \to A)$	(iii, iv, 7)

定理：

$$A \to B \vdash (\neg B) \to (\neg A) \tag{13}$$

證明：

i	$A \to B$	(前提)
ii	$(\neg\neg A) \to A$	(10)
iii	$(\neg\neg A) \to B$	(i, ii, 6)
iv	$B \to (\neg\neg B)$	(11)
v	$(\neg\neg A) \to (\neg\neg B)$	(iii, iv, 6)
vi	$(\neg B) \to (\neg A)$	(8)

定理：

$$\vdash ((\neg A) \to (\neg B)) \to (((\neg A) \to B) \to A) \tag{14}$$

證明：

i	$((\neg A) \to A) \to ((\neg A) \to A)$	(5)
ii	$(((\neg A) \to A) \to (\neg A)) \to (((\neg A) \to A) \to A)$	(i, 4)
iii	$(\neg A) \to (((\neg A) \to A) \to (\neg A))$	(1)
iv	$(\neg A) \to (((\neg A) \to A) \to A)$	(ii, iii, 6)

定理：

$$A \to B, (\neg A) \to B \vdash B \tag{15}$$

證明：

i	$A \to B$	(前提)
ii	$(\neg A) \to B$	(前提)
iii		()