筆記

陳定善

1 logic 邏輯

這一章只會簡單介紹會用到的邏輯符號及基本的一些公理 (axiom) 與定理 (theorem)。
通常上,「對」會表示爲 T 或是 $\top$,而「錯」會表達爲 F 或是 $\bot$。在這篇文章當中,會以 $\top$ 及 $\bot$ 表達。
首先,「公理」是對該話題的預先假設,而「定理」是從假設中推論出來的,而定理會附帶證明。通常,推論會寫成 $A, B \vdash C$,意味著以 A, B 爲前提推論出 C。
若是以 $\vdash A$ 表達,則代表除了此定理或公理外,不需要其他前提,就可以推導出 A。
公理:

$$\vdash A \to (B \to A) \tag{1}$$

公理:

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \tag{2}$$

公理:

$$(A \to B), A \vdash B \tag{MP}$$

以上三個公理中,A, B, C 是任意敘述。以上公理,可以理解成是在對 $\to$ 做定義,只要符合以上公理形式的概念,都是可以使用的。
在定理的證明當中,我會以以下格式書寫:

條目	內容	(前提)
條目	內容	(前提)
條目	內容	(前提)
⋯	⋯	(⋯)

定理:

$$A \vdash B \to A \tag{3}$$

證明:

i	A	(前提)
ii	$A \to (B \to A)$	(1)
iii	$B \to A$	(i, ii, MP)

定理:

$$A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C) \tag{4}$$

證明:

i	$A \to (B \to C)$	(前提)
ii	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	(2)
iii	$(A \to B) \to (A \to C)$	(i, ii, MP)

定理:

$$\vdash A \to A \tag{5}$$

證明:

i	$A \to ((A \to A) \to A)$	(1)
ii	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	(i, 4)
iii	$A \to (A \to A)$	(1)
iv	$A \to A$	(ii, iii, MP)

定理:

$$(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C) \tag{6}$$

證明：

i	$(A \to B)$	(前提)
ii	$(B \to C)$	(前提)
iii	$A \to (B \to C)$	(ii, 3)
iv	$(A \to B) \to (A \to C)$	(iii, 4)
v	$A \to C$	(i, iv, MP)

定理：

$$A \to (B \to C), B \vdash (A \to C) \tag{7}$$

證明：

i	$A \to (B \to C)$	(前提)
ii	B	(前提)
iii	$(A \to B) \to (A \to C)$	(i, 4)
iv	$A \to B$	(ii, 3)
v	$A \to C$	(iii, iv, MP)

公理：

$$\vdash ((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A) \tag{8}$$

這個公理是對 $\neg$ 的定義。

定理：

$$(\neg A) \to (\neg B) \vdash B \to A \tag{9}$$

證明：

i	$(\neg A) \to (\neg B)$	(前提)
ii	$((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A)$	(8)
iii	$B \to A$	(i, ii, MP)

定理：

$$\vdash (\neg\neg A) \to A \tag{10}$$

證明：

i	$(\neg\neg A) \to ((\neg\neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A))$	(1)
ii	$((\neg\neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A)) \to ((\neg A) \to (\neg\neg\neg A))$	(8)
iii	$(\neg\neg A) \to ((\neg A) \to (\neg\neg\neg A))$	(i, ii, 6)
iv	$((\neg A) \to (\neg\neg\neg A)) \to ((\neg\neg A) \to A)$	(8)
v	$(\neg\neg A) \to ((\neg\neg A) \to A)$	(iii, iv, 6)
vi	$((\neg\neg A) \to (\neg\neg A)) \to ((\neg\neg A) \to A)$	(v, 4)
viii	$(\neg\neg A) \to (\neg\neg A)$	(5)
ix	$(\neg\neg A) \to A$	(vii, viii, MP)

定理：

$$\vdash A \to (\neg\neg A) \tag{11}$$

證明：

i	$(\neg\neg\neg A) \to (\neg A)$	(10)
iii	$A \to (\neg\neg A)$	(i, 9)

定理：

$$\vdash (A \to B) \to ((\neg B) \to (\neg A)) \tag{12}$$

證明：

i	$(A \to B) \to ((\neg\neg A) \to (A \to B))$	(1)
ii	$((\neg\neg A) \to (A \to B)) \to (((\neg\neg A) \to A) \to ((\neg\neg A) \to B))$	(2)
iii	$(A \to B) \to (((\neg\neg A) \to A) \to ((\neg\neg A) \to B))$	(i, ii, 6)
iv	$(\neg\neg A) \to A$	(10)
v	$(A \to B) \to ((\neg\neg A) \to B)$	(iii, iv, 7)
vi	$B \to (\neg\neg B)$	(11)
vii	$(\neg\neg A) \to (B \to (\neg\neg B))$	(vi, 3)
viii	$((\neg\neg A) \to B) \to ((\neg\neg A) \to (\neg\neg B))$	(vii, 4)
ix	$(A \to B) \to ((\neg\neg A) \to (\neg\neg B))$	(v, viii, 6)
x	$((\neg\neg A) \to (\neg\neg B)) \to ((\neg B) \to (\neg A))$	(8)
xi	$(A \to B) \to ((\neg B) \to (\neg A))$	(ix, x, 6)

定理：

$$A \to B \vdash (\neg B) \to (\neg A) \tag{13}$$

證明：

i $A \to B$ (前提)

ii $(A \to B) \to ((\neg B) \to (\neg A))$ (12)

iii $(\neg B) \to (\neg A)$ (i, ii, MP)

定理：

$$\vdash ((\neg A) \to A) \to A \tag{14}$$

證明：

i $((\neg A) \to A) \to ((\neg A) \to A)$ (5)

ii $(((\neg A) \to A) \to (\neg A)) \to (((\neg A) \to A) \to A)$ (i, 4)

iii $(\neg A) \to (((\neg A) \to A) \to (\neg A))$ (1)

iv $(\neg A) \to (((\neg A) \to A) \to A)$ (ii, iii, 6)

v $(((\neg A) \to A) \to A) \to ((\neg A) \to (\neg((\neg A) \to A)))$ (12)

vi $(\neg A) \to ((\neg A) \to (\neg((\neg A) \to A)))$ (v, vi, 6)

vii $((\neg A) \to (\neg A)) \to ((\neg A) \to (\neg((\neg A) \to A)))$ (vi, 4)

viii $(\neg A) \to (\neg A)$ (5)

ix $(\neg A) \to (\neg((\neg A) \to A))$ (vii, viii, MP)

x $((\neg A) \to A) \to A$ (ix, 9)

定理：

$$\vdash ((\neg A) \to (\neg B)) \to (((\neg A) \to B) \to A) \tag{15}$$

證明：

i $((\neg A) \to A) \to A$ (14)

ii $(B \to A) \to ((\neg A) \to (B \to A))$ (1)

iii $((\neg A) \to (B \to A)) \to (((\neg A) \to B) \to ((\neg A) \to A))$ (2)

iv $(B \to A) \to (((\neg A) \to B) \to ((\neg A) \to A))$ (ii, iii, 6)

v $((\neg A) \to B) \to (((\neg A) \to A) \to A)$ (i, 3)

vi $(B \to A) \to (((\neg A) \to B) \to (((\neg A) \to A) \to A))$ (v, 3)

vii $(((\neg A) \to B) \to (((\neg A) \to A) \to A)) \to$ $((((\neg A) \to B) \to ((\neg A) \to A)) \to (((\neg A) \to B) \to A))$ (2)

viii $(B \to A) \to ((((\neg A) \to B) \to ((\neg A) \to A)) \to (((\neg A) \to B) \to A))$ (vi, vii, 6)

ix $((B \to A) \to (((\neg A) \to B) \to ((\neg A) \to A))) \to$ $((B \to A) \to (((\neg A) \to B) \to A))$ (viii, 4)

x $(B \to A) \to (((\neg A) \to B) \to A)$ (iv, ix, MP)

定理：

$$A \to B, (\neg A) \to B \vdash B \tag{16}$$

證明：

i $A \to B$ (前提)

ii $(\neg A) \to B$ (前提)

iii $(\neg B) \to (\neg A)$ (i, 13)

iv $(\neg B) \to B$ (i, ii, 6)

v $((\neg B) \to B) \to B$ (14)

vi B (iv, v, MP)

定理：

$$A, \neg A \vdash B \tag{17}$$

證明：

i A (前提)

ii $\neg A$ (前提)

iii $(\neg B) \to A$ (i, 3)

iv $(\neg B) \to (\neg A)$ (ii, 3)

v $(\neg A) \to (\neg\neg B)$ (iii, 13)

vi $(\neg\neg B) \to B$ (10)

vii $(\neg A) \to B$ (v, vi, 6)

viii $A \to B$ (iv, 9)

ix B (vii, viii, 16)

定理：