筆記

陳定善

1 logic 邏輯

這一章只會簡單介紹會用到的邏輯符號及基本的一些公理 (axiom) 與定理 (theorem)。
通常上,「對」會表示爲 T 或是 $\top$,而「錯」會表達爲 F 或是 $\bot$。在這篇文章當中,會以 $\top$ 及 $\bot$ 表達。
首先,「公理」是對該話題的預先假設,而「定理」是從假設中推論出來的,而定理會附帶證明。通常,推論會寫成 $A, B \vdash C$,意味著以 A, B 爲前提推論出 C。
若是以 $\vdash A$ 表達,則代表除了此定理或公理外,不需要其他前提,就可以推導出 A。
至於推論與假設代表什麼,我還不知道該如何解釋。
公理:

$$\vdash A \to (B \to A) \tag{1}$$

公理:

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \tag{2}$$

公理:

$$\vdash ((\neg A) \to (\neg B)) \to (B \to A) \tag{3}$$

公理:

$$(A \to B), A \vdash B \tag{MP}$$

以上四個公理中,A, B, C 是任意敘述。以上公理,可以理解成是在對 $\to, \neg$ 做定義,只要符合以上公理形式的概念,都是可以使用的。
在定理的證明當中,我會以以下格式書寫:

條目	內容	(前提)
條目	內容	(前提)
條目	內容	(前提)
$\cdots$	$\cdots$	$(\cdots)$

定理:

$$\vdash A \to A \tag{4}$$

證明:

1	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	(2)
2	$A \to ((A \to A) \to A)$	(1)
3	$A \to (A \to A)$	(1)
4	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$	(1, 2, MP)
5	$A \to A$	(3, 4, MP)

定理:

$$(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C) \tag{5}$$

證明:

1	$(A \to B)$	(Hyp)
2	$(B \to C)$	(Hyp)
3	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	(1)
4	$(A \to (B \to C))$	(C_2, C_3, MP)
5	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	(2)
6	$(A \to B) \to (A \to C)$	$(C_4, C_5 MP)$
7	$(A \to C)$	(C_1, C_6, MP)

定理:

$$A \to (B \to C), B \vdash (A \to C) \tag{6}$$

證明：

1	$A \to (B \to C)$	(Hyp)
2	B	(Hyp)
3	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	(2)
4	$(A \to B) \to (A \to C)$	(C_1, C_3, MP)
5	$B \to (A \to B)$	(1)
6	$A \to B$	(C_2, C_5, MP)
7	$A \to C$	(C_4, C_6, MP)

定理：

$$\vdash (\neg\neg A) \to A \tag{7}$$

證明：

1	$(\neg\neg A) \to ((\neg\neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A))$	(1)
2	$((\neg\neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A)) \to ((\neg A) \to (\neg\neg\neg A))$	(3)
3	$(\neg\neg A) \to ((\neg A) \to (\neg\neg\neg A))$	$(C_1, C_2, 5)$
4	$((\neg A) \to (\neg\neg\neg A)) \to ((\neg\neg A) \to A)$	(3)
5	$(\neg\neg A) \to ((\neg\neg A) \to A)$	$(C_3, C_4, 5)$
6	$((\neg\neg A) \to ((\neg\neg A) \to A)) \to (((\neg\neg A) \to (\neg\neg A)) \to ((\neg\neg A) \to A))$	(2)
7	$((\neg\neg A) \to (\neg\neg A)) \to ((\neg\neg A) \to A)$	(C_5, C_6, MP)
8	$(\neg\neg A) \to (\neg\neg A)$	(4)
9	$(\neg\neg A) \to A$	(C_7, C_8, MP)

定理：

$$\vdash A \to (\neg\neg A) \tag{8}$$

證明：

1	$(\neg\neg\neg A) \to (\neg A)$	(7)
2	$((\neg\neg\neg A) \to (\neg A)) \to (A \to (\neg\neg A))$	(3)
3	$A \to (\neg\neg A)$	(C_1, C_2, MP)

定理：

$$(\neg A) \to (\neg B) \vdash B \to A \tag{9}$$

證明：

1	$(\neg A) \to (\neg B)$	(Hyp)