

4.1. Si A y B son anillos conmutativos, probar que el conjunto producto cartesiano $A \times B$, con las operaciones

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b'), \quad (a, a')(b, b') = (ab, a'b').$$

es efectivamente un anillo conmutativo. Se llama el "*anillo producto cartesiano*" de A y B . Escribir las tablas de sumar y multiplicar del anillo producto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

4.2. En el conjunto \mathbb{Z} definimos las operaciones de suma \oplus y producto \otimes por

$$a \oplus b = a + b - 1,$$

$$a \otimes b = a + b - ab.$$

Así, por ejemplo, $2 \oplus 3 = 4$ y $2 \otimes 3 = -1$. ¿Es \mathbb{Z} un anillo conmutativo con estas operaciones?

4.3. En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definimos las operaciones

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b'),$$

$$(a, a') \cdot (b, b') = (ab, ab' + a'b).$$

¿Es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un anillo conmutativo con estas operaciones?

4.4. Escribir las tablas de sumar y multiplicar de los anillos \mathbb{Z}_5 y \mathbb{Z}_6 .

4.5. Efectuar los siguientes cálculos en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$:

$$(3 + 2\sqrt{3}) + (4 - 5\sqrt{3}), \quad (3 + 2\sqrt{3})(4 - 5\sqrt{3}), \quad (2 - \sqrt{3})^3.$$

4.6. ¿Cuáles de los siguientes son subanillos de los anillos indicados?

(i) $\{a \in \mathbb{Q} \mid 3a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$,

(ii) $\{m + 2n\sqrt{3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$.

4.7. Determinar las unidades del anillo definido por el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, con las operaciones $(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b')$ y $(a, a') \cdot (b, b') = (ab, ab' + a'b)$ (ver el Ejercicio 3).

4.8. Encontrar todas las unidades de los anillos \mathbb{Z}_6 , \mathbb{Z}_7 y \mathbb{Z}_8 .

4.9. Efectuar las siguientes operaciones en el anillo $\mathbb{Z}_5[X]$

$$\begin{aligned} & (3 + 4X + X^2 + 2X^3) + (3 + 4X + 4X^4 + 3X^3), \\ & (3 + 4X + X^2 + 2X^3)(3 + 4X + 4X^4 + 3X^3), \\ & (2 - 4X + X^2 - 2X^3) + (3 - 4X + 4X^2 - 3X^3), \\ & (2 - 4X + X^2 - 2X^3)(3 - 4X + 4X^2 - 3X^3). \end{aligned}$$

4.10. Si $p(X) \in \mathbb{Z}_5[X]$ es cualquiera de los cuatro polinomios obtenidos al realizar el ejercicio anterior, calcular $p(1)$ y $p(-1)$ en cada caso.

4.11. Sea R un anillo y sea $a \in R$ un elemento invertible. Demostrar que la aplicación $f_a : R \rightarrow R$ dada por $f_a(x) = axa^{-1}$ es un automorfismo de R .

4.12. Dado un anillo R , demostrar que existe un único homomorfismo de anillos de \mathbb{Z} en R .

4.13. Demostrar que si A es un anillo de característica n , entonces existe un único homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en A que es inyectivo.

4.14. Dados dos números naturales n y m , dar condiciones para que exista un homomorfismo de anillos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.