ÁLGEBRA 1

GRADO MATEMÁTICAS - CURSO 19-20

RELACIÓN DE EJERCICIOS 2

2.1. Construir todas las aplicaciones del conjunto $X = \{a, b, c\}$ en el conjunto $Y = \{1, 2\}$ y clasificarlas según sean inyectivas, sobreyectivas, biyectivas ó de ninguno de estos tipos.

2.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x - 3$. Demostrar que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$. ¿Es cierto también que $f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$?

2.3. Sean $f : X \to Y$ una aplicación y $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Demostrar:

i) $f_*(f^*(B)) \subseteq B$ y se da la igualdad si f es sobreyectiva.

ii) $A \subseteq f^*(f_*(A))$ y se da la igualdad si f es inyectiva.

2.4. Se consideran las aplicaciones

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad \text{y} \quad X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{k} Z\,.$$

Demostrar que f y h inducen una única aplicación $f \times h : A \times X \to B \times Y$ verificando que

$$fpr_A = pr_B(f \times h) \;\text{ y }\; hpr_X = pr_Y(f \times h).$$

Demostrar que $(g \times k) \circ (f \times h) = (g \circ f) \times (k \circ h)$.

2.5. Sea $f : X \to Y$ una aplicación, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Demostrar

$$f_*(A \cap f^*(B)) = f_*(A) \cap B$$

2.6. Dada una aplicación $f : X \to Y$ y $A \subseteq X$, se llama saturación de A al conjunto $f^*(f_*(A))$. Se dice que A es saturado si $A = f^*(f_*(A))$.

i) Caracterizar los subconjuntos saturados de f si $X = Y = \mathbb{R}$ y f es la aplicación definida por $f(x) = x^2 + 1$.

ii) Hallar la saturación del conjunto $\{\pi\}$ si $X = Y = \mathbb{R}$ y f es la aplicación coseno.

2.7. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) f es inyectiva

ii) $\forall A, B \in P(X), f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$.

2.8. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones y sea $h = g \circ f$ la composición de dichas aplicaciones. Demostrar:

i) Si h es inyectiva entonces f es inyectiva.

ii) Si h es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

iii) Si h es inyectiva y f es sobreyectiva entonces g es inyectiva.

iv) Si h es sobreyectiva y g es inyectiva entonces f es sobreyectiva.

2.9. Sean las aplicaciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : Z \to X$ tales que $h \circ g \circ f$ es inyectiva, $g \circ f \circ h$ es inyectiva y $f \circ h \circ g$ es sobreyectiva. Demostrar que las aplicaciones f, g y h son biyectivas.