CÁLCULO I

1B Grado en Matemáticas, 2019/20

III. Ejercicios (sucesiones)

1. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$, define una sucesión $\{x_n\}$ de puntos del conjunto $\{\alpha, \beta\}$ tal que los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : x_n = \alpha\}$ y $\{n \in \mathbb{N} : x_n = \beta\}$ sean infinitos.

2. Prueba que las sucesiones $\{1/n^2\}$, $\{1/2^n\}$ y $\{1/n!\}$ convergen a cero.

3. ¿Es cierta la siguiente afirmación? Justifica la respuesta probando el resultado o dando un contraejemplo.

   Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales positivos convergente a x. Entonces $x > 0$.

4. Para cada una de las afirmaciones siguientes, da un ejemplo que verifique el enunciado o prueba que no existe tal ejemplo:

   a) Una sucesión tal que ninguno de sus términos es 0 ni 1, pero que tiene una subsucesión convergente a 0 y otra convergente a 1.

   b) Una sucesión que no sea acotada pero que admite una subsucesión convergente.

5. Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones de números reales tales que $\{x_n y_n\} \to 0$, ¿es cierto que $\{x_n\} \to 0$ ó $\{y_n\} \to 0$? Prueba la afirmación o da un contraejemplo.

6. En cada uno de los siguientes casos, probar que la sucesión dada es convergente y calcular su límite:

$$\text{(a)} \quad \left\{\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right\} \qquad \text{(b)} \quad \left\{\frac{2n+5(-1)^n}{n+1}\right\} \qquad \text{(c)} \quad \left\{\frac{(-1)^n n^2 - 3n + 4}{n^3+1}\right\}$$

7. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

   i) $\left\{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}\right\}$

   ii) $\left\{\dfrac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}}{n}\right\}$

8. Sea $J_n = [a_n, b_n]$ una sucesión de intervalos no vacíos tales que $J_{n+1} \subset J_n$ para cada natural n. Supongamos además que $\{b_n - a_n\} \to 0$ y que $x_n \in J_n$ para cada natural n. Pruébese que entonces $\{x_n\}$ es convergente.

9. Pruébese que una subsucesión de una sucesión monótona es también monótona.

10. Da un ejemplo de una sucesión que converja a cero y que no sea monótona.

11. Pruébese que toda sucesión monótona que tiene una subsucesión acotada es convergente.

12. Dar un ejemplo de una sucesión $\{x_n\}$ con la siguiente propiedad: para todo $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ tal que $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$.

13. Prueba que la sucesión $\{a_n\}$ dada por

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

es convergente y su límite es menor o igual que 1.

14. Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ dada por

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

no está acotada.

15. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones

a) $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

c) $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

l) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = \frac{1}{2}\big(x_{n+1} + x_n\big), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

n) Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $x_1 = a, \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+x_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$

16. Dados dos números reales positivos $a_1 < b_1$ definimos las sucesiones dadas por

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demuestra que las dos sucesiones son monótonas y convergen al mismo número.

17. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas verificando que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\liminf\{x_n\} \leq \liminf\{y_n\}$ y que $\limsup\{x_n\} \leq \limsup\{y_n\}$.

18. Prueba que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es convergente. Denotaremos por e a su límite.
Indicación: Usando la desigualdad de las medias, se obtiene que si $a, b \in \mathbb{R}^+$, se verifica que $ab^n \leq \left(\dfrac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}$ para todo natural n. Deducir que la sucesión anterior es creciente. Para la acotación, usar el binomio de Newton, obtener que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. Por último la acotación $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

19. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales tal que las subsucesiones $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n-1}\}$ son convergentes. Prueba que $\{x_n\}$ es acotada y se verifica

$$\liminf\{x_n\} = \min\,\{\lim\{x_{2n}\}, \lim\{x_{2n-1}\}\}, \qquad \limsup\{x_n\} = \operatorname{Max}\,\{\lim\{x_{2n}\}, \lim\{x_{2n-1}\}\}.$$

20. Calcula el límite superior e inferior de las siguientes sucesiones:

   a) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\right\}$

   b) $\left\{(-1)^n\Big(2 + \dfrac{3}{n}\Big)\right\}$

   c) $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}$

   d) $\left\{\dfrac{n + (-1)^n(2n+1)}{n}\right\}$

21. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales acotadas. Prueba que

   a) $\text{lím sup}\{a_n + b_n\} \leq \text{lím sup}\{a_n\} + \text{lím sup}\{b_n\}$

   b) $\text{lím inf}\{a_n + b_n\} \geq \text{lím inf}\{a_n\} + \text{lím inf}\{b_n\}$

   c) Si $a_n, b_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

   $$\text{lím sup}\{a_n b_n\} \leq \text{lím sup}\{a_n\}\,\text{lím sup}\{b_n\}$$

   d) Si $a_n, b_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

   $$\text{lím inf}\{a_n b_n\} \geq \text{lím inf}\{a_n\}\,\text{lím inf}\{b_n\}$$

   e) Si $\{a_n\} \to a$, entonces

   $$\text{lím sup}\{a_n + b_n\} = a + \text{lím sup}\{b_n\}$$

   f) Si $\{a_n\} \to a$, entonces

   $$\text{lím inf}\{a_n + b_n\} = a + \text{lím inf}\{b_n\}$$

   Dar ejemplos para los que las desigualdades en los apartados a), b), c) y d) sean estrictas.

22. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que existe una sucesión $\{y_n\}$ de números reales positivos tal que $\{y_n\} \to 0$ y $|x_{n+k} - x_n| \leq y_n$ para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

23. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que existen $M \in \mathbb{R}$ y $r \in [0, 1[$ tales que $|x_{n+1} - x_n| \leq M r^n$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.
   Indicación: Prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

24. Para cada una de las afirmaciones siguientes, da un ejemplo que verifique el enunciado o prueba que no existe tal ejemplo:

   c) Una sucesión que admite una subsucesión acotada, pero que no tiene ninguna subsucesión convergente.

   d) Una sucesión de Cauchy que no sea monótona.

   e) Una sucesión monótona que no sea de Cauchy.

   g) Una sucesión no acotada que tiene alguna subsucesión de Cauchy.

25. ¿Existe alguna sucesión de Cauchy que admite una subsucesión divergente?

26. Da un ejemplo de una sucesión que diverja positivamente y que no sea creciente.

27. Sea A un subconjunto de números reales no vacío. Prueba que A no está mayorado si, y sólo si, A contiene una sucesión que diverge positivamente. ¿Se puede conseguir que la sucesión sea creciente?

28. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y $k \in \mathbb{N}$ fijo. Prueba que $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{x_{k+n}\} \to +\infty$.

29. Prueba que una sucesión $\{x_n\}$ diverge positivamente si, y sólo si, las sucesiones $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{2n}\}$ divergen positivamente.

30. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\text{(a)} \ \left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right\} \qquad \text{(b)} \ \left\{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-1}\right\} \qquad \text{(c)} \ \left\{\frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\right\}$$

31. Probar que si $x_n \to \pm\infty$, entonces $(1 + \dfrac{1}{x_n})^{x_n} \to e$.

32. Da un ejemplo de una sucesión que diverja, pero que no diverja positivamente ni negativamente.

33. Da ejemplos de sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que verifiquen las siguientes condiciones

    a) Las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{a_n - b_n\}$ divergen positivamente.

    b) Las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ divergen positivamente, pero $\{a_n - b_n\}$ converge.

    c) Las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ divergen positivamente y $\{a_n - b_n\}$ es acotada y no converge.

    d) La sucesión $\{a_n\} \to 0$, $\{b_n\}$ diverge positivamente y $\{a_n b_n\}$ diverge.

    e) La sucesión $\{a_n\} \to 0$, $\{b_n\}$ diverge positivamente y $\{a_n b_n\}$ converge.

    f) La sucesión $\{a_n\} \to 0$, $\{b_n\}$ diverge positivamente y $\{a_n b_n\}$ no converge ni diverge.

34. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$ y supongamos que las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ verifican que $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$. Definimos la sucesión $\{z_n\}$ como sigue

$$z_{2n} = y_n, \qquad z_{2n-1} = x_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

    Prueba que la sucesión $\left\{\dfrac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}\right\}$ converge.

35. Dada una sucesión $\{z_n\}$, definimos la sucesión $\{y_n\}$ como sigue

$$y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

    Da un ejemplo en el que $\{y_n\}$ sea convergente sin serlo $\{z_n\}$.

36. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y, calcula su límite (si existe):

(a) $\left\{ \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \right\}$ (b) $\left\{ \dfrac{n^2\sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \ldots + n\sqrt{n}} \right\}$

(c) $\left\{ \dfrac{1}{n\,!} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,! \right\}$ (d) $\left\{ \dfrac{1}{n^{\,n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\,k} \right\}$

37. Sea $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^*$. Para $p \in \mathbb{N}$, estudiar la convergencia de la sucesión $\left\{ \dfrac{1}{n^{\,p}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, x_k \right\}$.

38. Probar las siguientes igualdades:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\,n} + n^{\,5}}{3^{\,n} - \sqrt{n}} = 0$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\,3^{\,n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{3^{\,n}\sqrt{n+1} + 2^{\,n}} = \frac{1}{2}$

39. Sean P y Q polinomios con coeficientes reales, con $Q(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in \mathbb{R}^*$, estudiar la convergencia de la sucesión $\{x^{\,n}\, P(n)/Q(n)\}$.

40. Probar que las siguientes sucesiones son convergentes y calcular sus límites:

(a) $\left\{ \sqrt[n]{\dfrac{3n^3 - 2}{n^2 + 1}} \right\}$ (b) $\left\{ \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}} \right\}$

41. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{ \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} \right\}_n$ donde k es un número natural.

b) $\left\{ \dfrac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \right\}$.

42. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales tales que

$$a_n > 0\ \forall n, \qquad \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\} \longrightarrow +\infty, \qquad \{b_n\} \to L,$$

donde $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Prueba que la sucesión $\left\{ \dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \right\} \to L$.

43. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales convergente a x. Prueba que la sucesión $\left\{ \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_k \right\}$ también converge a x.

44. Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales convergente a un real a. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{ \dfrac{\exp(a_1) + \exp(\frac{a_2}{2}) + \ldots + \exp(\frac{a_n}{n}) - n}{\log n} \right\}$.

b) $\left\{ \dfrac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n}}{\log n} \right\}$.