CÁLCULO I

1B Grado en Matemáticas, 2019/20

I. Ejercicios (El cuerpo de los números reales. Temas 1, 2 y 3.)

1. Pruébense las siguientes propiedades para cada natural n

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$, **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$,

   d) $n \leq 2^{n-1}$, **e)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, **f)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   Indicación: Se puede usar inducción. Otra forma, que explicamos para f), aunque se puede aplicar también en b) la misma idea. Llamamos $f(x) = (x+1)^3$; nótese que $f(k-1) = k^3$. Usando la igualdad $\sum_{k=1}^{n}\big(f(k) - f(k-1)\big) = f(n) - f(0) = (n+1)^3 - 1$ y desarrollando ambos lados de la igualdad queda $\sum_{k=1}^{n} k^3$ en función de $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k$ y un polinomio en n. Sustituyendo $\sum_{k=1}^{n} k^2$ y $\sum_{k=1}^{n} k$ por la fórmulas correspondientes dadas en a) y e), queda la igualdad propuesta.

2. Prueba que:

   a) $3^{2n} - 1$ es múltiplo de 8 para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) $n^5 - n$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

   c) $n^3 - n + 1$ no es múltiplo de 3 para ningún $n \in \mathbb{N}$.

3. Demuestra la siguiente desigualdad:

$$\sum_{k=0}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

4. Demuestra la siguiente igualdad:

$$1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

5. **a)** Comprueba que

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n.$$

   b) Prueba la igualdad siguiente (binomio de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Recordamos que si $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k \leq n$, por definición, se verifica que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ y que $0! = 1$.

6. Discute para qué números reales x se verifican las siguientes desigualdades:

   a) $|x^2 - 2x| > 3$, **b)** $|x-1| + |x+1| < 1$, **c)** $|x+1| < |x+3|$

7. Sea A un conjunto no vacío de números reales. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado puede coincidir con el conjunto de todos los mayorantes de A:

   a) $\mathbb{R}$ *b)* $\varnothing$ *c)* $\mathbb{R}^+$ *d)* $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ *e)* $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\}$

8. Para $x, y \in \mathbb{R}$, se define la *distancia* de x a y por:

$$d(x,y) = |x-y|.$$

   Pruébense las siguientes propiedades de la distancia:

   a) $d(x,y) \geq 0 \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
   b) $d(x,y) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = y$ (no degeneración)
   c) $d(x,y) = d(y,x) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (simetría)
   d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \;\; \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (desigualdad triangular).

   De hecho, una función real definida en $\mathbb{R}^2$ se llama distancia si verifica las cuatro propiedades anteriores.

9. Sean $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$ y supongamos que se verifica

$$a \leq b, \quad \forall a \in A, b \in B.$$

   Probar que A está mayorado, B minorado y que se verifica $\text{Sup } A \leq \text{Inf } B$.

   Como consecuencia, si se supone la existencia de supremo de cualquier subconjunto no vacío y mayorado de $\mathbb{R}$, entonces se verifica el axioma de Dedekind.

10. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y mayorado y $t \in \mathbb{R}^+$. Prueba que el conjunto tA está mayorado y además se verifica

$$\text{Sup } (tA) = t\text{Sup } A.$$

   ¿Es cierta la igualdad anterior para el ínfimo? ¿Qué ocurre si $t \in \mathbb{R}^-$?

11. Sean $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$.
   a) Si B está mayorado, pruébese que A también lo está y entonces $\text{Sup } A \leq \text{Sup } B$.
   b) Si B está minorado, pruébese que A también lo está y entonces $\text{Inf } A \geq \text{Inf } B$.
   Indicación: Para el apartado a) relaciona los conjuntos $M(B)$ y $M(A)$; para b) prueba que uno de los dos conjuntos $m(B)$ y $m(A)$ está contenido en el otro.

12. Sean A y B conjuntos de números reales tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

(i) Mostrar con un ejemplo que $A \cap B$ puede estar acotado, aunque A y B no estén mayorados ni minorados.

(ii) Suponiendo que A y B están mayorados, probar que
$$\operatorname{Sup}(A \cap B) \leq \text{mín}\{\operatorname{Sup} A\,,\, \operatorname{Sup} B\}$$

(iii) Probar que, si A y B están minorados, entonces
$$\operatorname{Inf}(A \cap B) \geq \text{máx}\{\operatorname{Inf} A\,,\, \operatorname{Inf} B\}$$

(iv) Probar que, aunque A y B estén acotados, las dos desigualdades obtenidas en (ii) y (iii) pueden ser estrictas.

13. Sean $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$. Probar las siguientes afirmaciones:
a) Si A y B están mayorados, entonces $A \cup B$ también lo está y $\operatorname{Sup}(A \cup B) = \text{máx}\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$.
b) Si ambos subconjuntos están minorados, $A \cup B$ también está minorado y se verifica $\operatorname{Inf}(A \cup B) = \text{mín}\{\operatorname{Inf} A, \operatorname{Inf} B\}$.

14. Sea A un conjunto no vacío y mayorado. Pruébese que $-A$ está minorado y que además se verifica
$$-\operatorname{Sup} A = \operatorname{Inf}(-A),$$
donde $-A = \{-a : a \in A\}$.
Indicación: Relacionar $M(A)$ y $m(-A)$ y el mínimo de un conjunto B con el máximo de $-B$.
Nota: $M(A)$ es el conjunto de los mayorantes de A y $m(A)$ el de los minorantes de A.

15. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Pruébese que $A + B$ está mayorado si, y sólo si, A y B son conjuntos mayorados y que en ese caso se verifica
$$\operatorname{Sup}(A + B) = \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B,$$
donde
$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$
Enuncia el resultado análogo al anterior para el ínfimo.

16. Pruébese que no existe ningún número racional q que verifique $q^2 = 2$.

17. Pruébese que si $p, q \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $q \neq 0$, entonces $p + \alpha q \notin \mathbb{Q}$.

18. Sea $\varnothing \neq A \subset \mathbb{Z}$. Pruébense las siguientes afirmaciones:
a) Si A está mayorado, entonces tiene máximo.
b) Si A está minorado, entonces tiene mínimo.

19. Pruébese que si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.
Indicación: Primero elegir el denominador de r (n) imponiendo que el intervalo $[x, y]$ contenga al menos 2 racionales con denominador n. Luego elegir el numerador para que se verifique la desigualdad $x < r$.

20. Da un ejemplo de una aplicación biyectiva de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ sobre $\mathbb{N}$ y de otra aplicación también biyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{N}$.

21. Justifica que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ son equipotentes.

22. Prueba que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se tiene:

$$\{t \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leq t \leq 1\} \sim \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$$

23. Usando la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

comprueba que $\mathbb{R} \sim \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| < 1\}$.

24. Prueba que $\mathbb{R}^+ \sim \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x < 1\}$. Como consecuencia, deduce que $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^+$.