

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



Criação de um sistema de apoio à decisão Sistema de distribuição de correspondência

Carlos Tiago Feijão Duarte Torres de Almeida	UP201303918
Sandro Augusto Costa Magalhães	UP201304932
Sérgio António Moreira Fernandes	UP201305659
Telmo Miguel Silva Costa	UP201305393
Tiago José Ferreira Mendonça	UP201305394

Projecto realizado no âmbito do
Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Major Automação
Unidade curricular de Sistemas de Apoio à Decisão

Professor: Jorge Pinho de Sousa

2º Semestre 2016/17

Índice

1. Introdução	1
2. O problema	2
2.1. Formulação do problema	2
2.2. Recurso a um sistema de apoio à decisão	2
2.3. Benefícios esperados	3
3. O sistema de apoio à decisão	4
3.1. Arquitetura SAD	4
3.2. Aplicação ao Caso de Estudo	5
4. Tutorial do Sistema de Apoio à Decisão.....	8
5. Projeto do Sistema de Apoio à Decisão	10
6. Conclusão	11
A. Modelo Matemático	14
B. Resolução do problema no <i>solver</i> do Excel	16
C. Abordagem Heurística.....	20

Lista de figuras

Figura 3.1 Arquitetura geral de um sistema de apoio à decisão [2]	4
Figura 3.2 Arquitetura do sistema de apoio à decisão especificada	7
Figura 4.1 Interface de configuração dos parâmetros dos funcionários	8
Figura 4.2 Interface de configuração dos parâmetros de cada zona	9
Figura 4.3 Interface de visualização dos resultados do sistema de apoio à decisão	9
Figura 5.1 Diagrama de Gantt com a planificação do projeto	10

Lista de tabelas

Tabela B-I Excerto das restrições descritas no Excel	17
Tabela B-II Excerto do Excel referente ao cálculo da função objectivo	18
Tabela B-III Resultado das variáveis de decisão após a resolução do solver	18
Tabela B-IV Resultados das variáveis de decisão com o peso de 0,5 para a minimização do esforço médio dos funcionários e 0,5 para a minimização do custo total com funcionários (custo dos funcionários igual a 75,21€ e esforço médio dos funcionários igual a 48,75)	19
Tabela B-V Resultados das variáveis de decisão com o peso de 0,7 para a minimização do esforço médio dos funcionários e 0,3 para a minimização do custo total com funcionários (custo dos funcionários igual a 75,21€ e esforço médio dos funcionários igual a 48,75)	19
Tabela C-I Características e necessidades de cada zona.....	20
Tabela C-II Resolução do problema (zonas para o carteiro 1).....	21
Tabela C-III Resolução do problema (zonas para o carteiro 2).....	21
Tabela C-IV Resolução do problema (zonas para o carteiro 3).....	21
Tabela C-V Resolução do problema (zonas para o carteiro 4).....	21
Tabela C-VI Resolução do problema (zonas para o carteiro 5).....	21
Tabela C-VII Resolução do problema (zonas para o carteiro 6)	22

1. Introdução

Um sistema de apoio à decisão (SAD) pertence à classe dos sistemas de informação ou sistemas baseados em conhecimento e pretende depreender um modelo genérico de tomada de decisão. Alguns autores definiram-no como um “sistema computacional que auxilia o processo de tomada de decisão”, porém, outros tomam uma posição mais intermédia na relação homem-máquina e definem que este “concilia recursos intelectuais e individuais com a capacidade do computador em melhorar a qualidade da decisão” [1].

Segundo Hättenschniller (1999), existem três tipos de SAD para o relacionamento com o utilizador: o passivo, o ativo e o cooperativo. No primeiro tipo, o sistema que auxilia a tomada de decisão não produz uma solução explícita da sugestão ou solução do problema, aproximando-se mais do tipo de análise estudada na primeira metade da unidade curricular. Por outro lado, o relacionamento ativo, produz uma solução clara para o problema a explorar, podendo esta ser ótima global ou ótima local (uma solução ótima no universo da sua vizinhança). Por fim, o relacionamento cooperativo, apresenta ao tomador da decisão opções para modificar, completar ou refinar as sugestões apresentadas por outros colaboradores, para que estas sejam validadas [1].

Tendo esta análise em mente, pretendemos desenvolver um projeto que nos permita obter uma solução ativa para um problema SAD. Consideramos para análise um problema típico de distribuição de correspondência numa estação de correios, que vamos formular na próxima secção.

2. O problema

2.1. Formulação do problema

Considera-se, então, uma estação de correios que pretende melhorar o sistema logístico associado à distribuição de correspondência. Sabe-se que a estação já possui a zona geográfica de que é responsável dividida em pequenas áreas que devem ser assumidas, cada uma, por um único carteiro. Cada uma destas áreas é caracterizada por um esforço para a entrega da correspondência, que é fixo. Além disso, é ainda associada a cada uma um volume de correspondência que se tem de distribuir diariamente e o tempo que demora a entregar o mesmo, variável em função do esforço e do volume de correspondência.

A cada carteiro pode ser atribuído uma ou mais áreas, sabendo que estes podem trabalhar um máximo de sete horas diárias. Adicionalmente, garante-se que o volume diário por zona é sempre inferior ao máximo suportado por cada carteiro e, independentemente do esforço associado a esta, o tempo de distribuição será inferior a 7 horas, retirando-se, portanto, que a correspondência de cada zona será toda distribuída num único dia de trabalho, não acumulando volume para os dias posteriores. Cada funcionário tem ainda um custo por hora e um custo adicional (fixo), aplicável apenas caso seja selecionado.

Tendo em conta estas considerações, depreende-se que se pretende maximizar o volume de correspondência entregue por cada carteiro, o que implica a minimização do custo da operação logística, minimizando o esforço dos funcionários.

2.2. Recurso a um sistema de apoio à decisão

Tal como referido na introdução, há interesse em recorrer a um SAD, sempre que estamos perante um problema que envolve decisão, nomeadamente quando estamos perante as seguintes situações [2]:

- Problema complexo e não estruturado
- Necessidade de apoio no processo de decisão (em sistemas não automatizados)
- Problemas idênticos à estrutura básica

De acordo com as especificações do problema, pretende-se que se desenvolva uma interface que seja passível de ser utilizada por um utilizador para fazer o escalonamento dos distribuidores dos correios. Esta interface corresponde a uma estrutura básica que requer, além de si, um *solver* e um banco de dados do problema. Esta especificação, só por si, já requer que se recorra a uma análise SAD.

No entanto, o facto de o serviço que se está a procurar otimizar ser um serviço logístico e desempenhado por recursos humanos (não é um serviço automatizado) também requer que se recorra a um SAD.

Por fim, observa-se que estamos perante um problema de resolução binária, que é complexo, procurando-se otimizar três funções objetivo que não estão devidamente estruturadas no problema.

2.3. Benefícios esperados

Com a resolução deste problema, prevê-se que surja um *software* que seja passível de ser utilizado diariamente, por forma a desenhar todas as rotas dos diferentes carteiros da estação, minimizando o seu esforço médio, mas maximizando a carga que transportam (menor custo). Espera-se, portanto, que a utilização de um SAD possa otimizar as opções possíveis no curto espaço de tempo disponível para o processamento computacional (tempo de espera variável de acordo com as especificidades da estação).

Portanto, como objetivo final, espera-se a apresentação de uma solução que consiga conjugar rentabilidade económica e temporal aliada à satisfação dos funcionários.

3. O sistema de apoio à decisão

3.1. Arquitetura SAD

Tendo em conta a definição já apresentada, um sistema de apoio à decisão consiste num sistema computacional cujo principal propósito é auxiliar o utilizador na escolha de uma alternativa entre vários casos possíveis que constitua uma solução admissível para o problema no qual se aplica [1]. De forma a atribuir tais características ao sistema, este apresenta uma arquitetura base que aglutina vários componentes, cada um afeto a uma determinada função preponderante para o seu funcionamento. Regra geral, assume-se a estrutura representada na Figura 3.1.

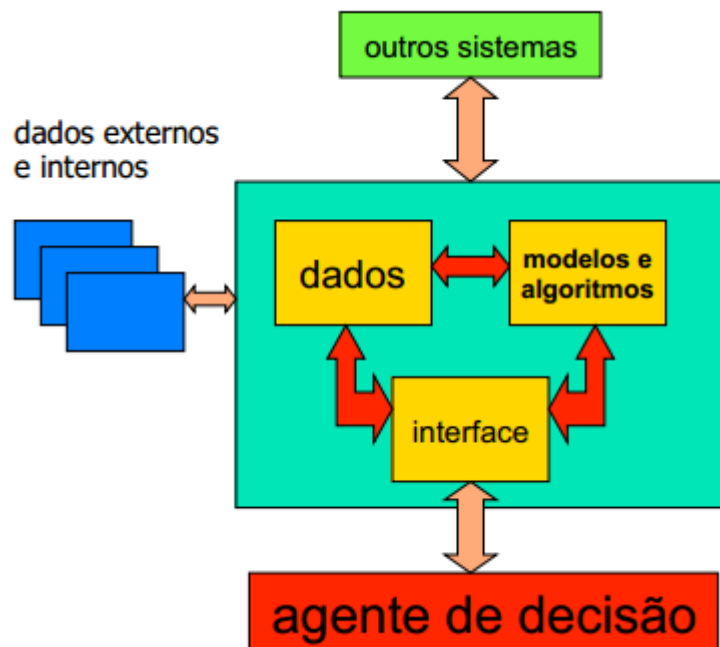


Figura 3.1 Arquitetura geral de um sistema de apoio à decisão [2]

Por observação, imediatamente se retira que é possível a classificação dos componentes em dois grupos, elementos internos e externos. Relativamente aos primeiros, representam a lógica interna do sistema, isto é, são o núcleo de toda a arquitetura e são estes que efetivamente conferem a capacidade de processamento pretendida, fazendo uso dos segundos. Os modelos e algoritmos definem o problema e ditam de que forma os dados obtidos do ambiente externo devem ser tratados com o intuito de se aproximar do propósito final, apresentação de uma solução admissível ao utilizador. A interface medeia a interação decisor-sistema e define os pontos de intervenção deste no decorrer do processo, fornecendo dados que pela sua validade temporal não podem ser armazenados de forma persistente. Outros elementos externos relevantes são a base de dados, responsável por registar dados padrão e valores de configuração que se mantém entre execuções, e os sistemas legados, representando sistemas externos sobre os quais não é possível interferir, mas apenas

tirar partido das suas funcionalidades. A conjugação de tudo isto constitui a estrutura que sustenta um SAD.

3.2. Aplicação ao Caso de Estudo

Tal como já enunciado na formulação do problema, o presente estudo prende-se com a otimização da distribuição de carteiros por um conjunto de zonas de uma determinada cidade. O primeiro passo na conceção da estrutura do sistema que vai suportar a decisão do utilizador consiste na elaboração do modelo matemático exato do caso de estudo (anexo A). Este modelo tem em conta todas as restrições apresentadas em termos de carga horária, volume de transporte e esforço físico e como objetivo a minimização do custo inerente a esta operação logística bem como do esforço médio por funcionário. A decisão consiste em atribuir a uma zona um determinado funcionário. Contudo, uma vez que as variáveis de decisão são binárias, a consequente complexidade computacional exigida para a sua resolução torna este caminho de procura da solução ótima inviável, pois não permite a obtenção de uma resposta satisfatória em tempo útil. Desta forma, a aceitação de uma certa relaxação das restrições do problema permite a construção de uma heurística que garante a obtenção de uma solução que, embora não sendo ótima, produz resultados suficientemente satisfatórios.

Contrapondo o caso em análise com problemas recorrentes em otimização combinatória, constata-se que este pode ser considerado como uma variante do problema da mochila, também conhecido como *Knapsack problem*. A sua formulação é a seguinte: considera-se que se têm objetos com diferentes valores monetários e pesos e que se pretende preencher uma mochila com o máximo valor possível, sem ultrapassar o peso máximo suportado [3]. Metaforicamente, pode-se considerar que, no presente estudo, a mochila corresponde a um funcionário e cada objeto corresponde a uma zona. Assim, pretende-se aglomerar o maior número de zonas numa mochila, maximizando o volume de transporte e minimizando o esforço do conjunto de zonas selecionado, sendo que, quando preenchida, passa-se para uma nova mochila (outro funcionário). Uma heurística simples e recorrente para o problema da mochila consiste no cálculo, para cada objeto, da razão entre o seu valor e peso e selecionar os objetos por ordem decrescente deste parâmetro, até perfazer o peso máximo. Inspirado nesta premissa, procedeu-se à elaboração do seguinte algoritmo para a distribuição da correspondência (ilustrado com um exemplo em anexo):

1. Cálculo de um quociente para cada zona a distribuir dado por: $Q_j = \frac{V_j}{E_j}$;
2. Selecionar novo funcionário com um conjunto de zonas a distribuir vazio;
3. Adicionar ao conjunto de soluções do funcionário a zona ainda não atribuída com maior Q ;
4. Verificar se foi ultrapassado o volume máximo, esforço máximo ou tempo máximo do conjunto de soluções;
 - 4.1. Se sim, retirar a última zona atribuída e verificar se já foram exploradas todas as outras zonas não atribuídas;
 - 4.1.1. Se sim, voltar a 2;

- 4.1.2. Se não, voltar a 3;
- 4.2. Se não, verificar se existem zonas a atribuir;
 - 4.2.1. Se sim, voltar a 3;
 - 4.2.2. Se não, quebrar ciclo e terminar algoritmo.

Estabelecida a heurística de resolução do problema, procede-se à sua implementação em *software*, completando o módulo de modelos e algoritmos.

A base de dados também se revela um componente relevante no caso de estudo. Esta permite armazenar de forma permanente a configuração do mapa da cidade, registar o esforço associado a cada zona e também guardar os parâmetros referentes à situação laboral dos funcionários, custo, esforço e carga horária suportada. Adicionalmente, também é importante registar aqui a distribuição de funcionários diária, de forma a acautelar qualquer interrupção imprevista do sistema e garantindo o acesso às rotas estabelecidas para esse dia.

No geral, o sistema revela-se autossuficiente, não revelando necessidade de interagir com plataformas externas. Contudo, no sentido de o tornar mais completo e robusto, poder-se-ia considerar a existência de um *software* externo de gestão de recursos humanos que, de acordo com a oferta de funcionários para um determinado dia, informação conseguida através monitorização da sua assiduidade, realizava uma operação de seleção, no sentido de se escolherem aqueles que revelam maior aptidão física para a operação de distribuição e, dessa forma, realizar a atribuição por ordem decrescente dessas características, o que implicaria alteração do esforço e volume máximo suportados para valores dinâmicos. A automatização do processo de escolha dos funcionários e a consideração dos mais aptos poderia acelerar a operação logística e, por conseguinte, reduzir os custos. Da iteração com este sistema de gestão de recursos humanos, saberíamos ainda qual o salário de cada um, por forma a minimizar os custos com esta operação. Adicionalmente, poderíamos ainda, interligar o sistema com o software de registo de correspondência, por forma a saber qual o volume de correspondência para cada zona. Isto tornaria o nosso sistema SAD quase um sistema autónomo (com pouca intervenção de um utilizador).

Por último, especifica-se a interação sistema-utilizador. Esta interface tem como propósito garantir uma comunicação bidirecional, isto é, por um lado, solicitar uma ação por parte do agente de decisão em determinados momentos de execução do processo e, por outro, informá-lo do estado de progresso do mesmo e da solução encontrada. Assim, o utilizador diariamente procede a indicação do volume de correspondência que é imperativo assegurar por zona e da mão-de-obra disponível para o efeito. Eventualmente, se algo o propiciar, também pode proceder à alteração do esforço por zona. Posto isto, o algoritmo é executado e a solução para as rotas apresentada. Posteriormente, no tópico tutorial, a interação será mais discriminada e acompanhada de ecrãs ilustrativos da mesma.

Com base nas ideias explicitadas, o esquema representativo da arquitetura do sistema resultante é o apresentado na figura 3.2.

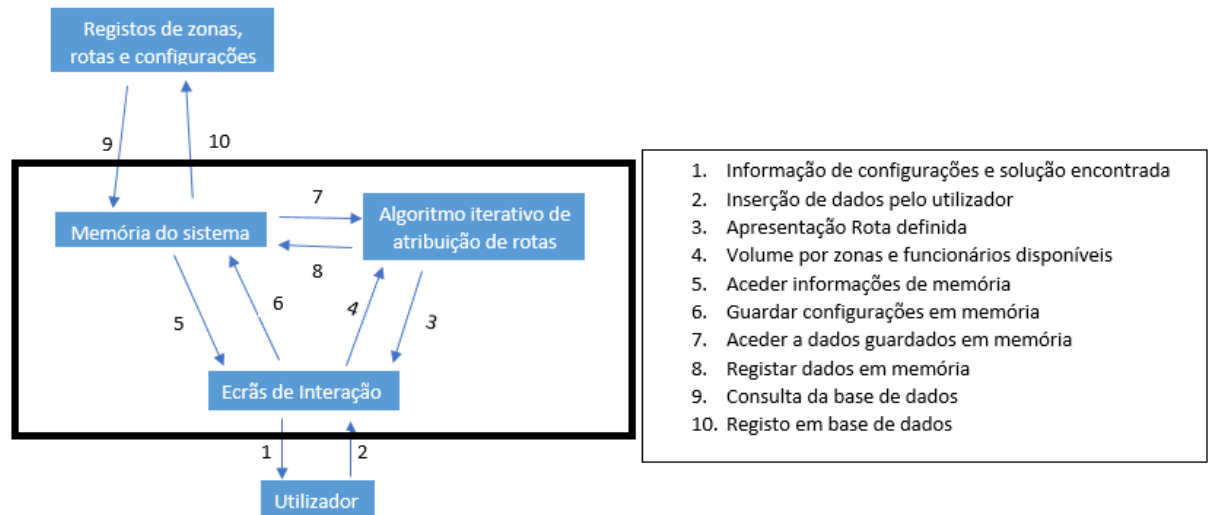
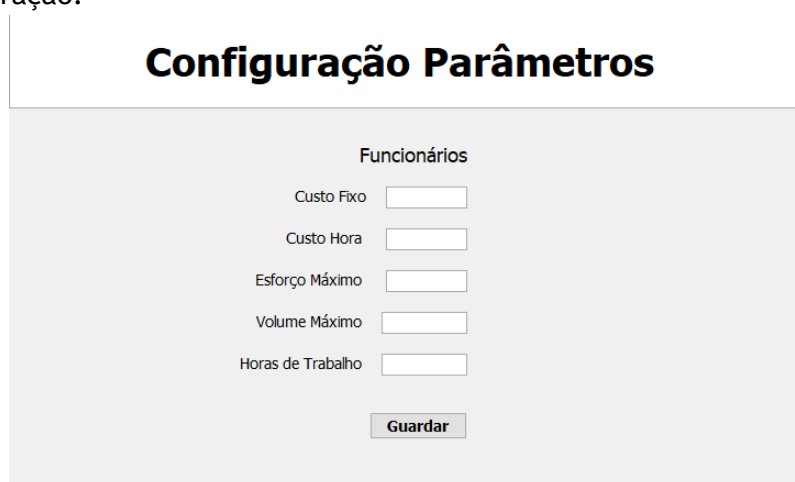


Figura 3.2 Arquitetura do sistema de apoio à decisão especificada

4. Tutorial do Sistema de Apoio à Decisão

Uma vez apresentada a arquitetura subjacente ao sistema concebido, procede-se, então, à clarificação do seu mecanismo de funcionamento e de que forma alcança os objetivos pretendidos, fornecendo uma solução adequada ao problema proposto.

Para a execução do algoritmo estruturado, há diversos parâmetros que têm de ser previamente configurados, de forma a ser possível a sua execução. Assim, numa primeira inicialização do sistema, o utilizador é contemplado com uma aba de configuração, em que regista todos os valores importantes para a imposição de restrições ao processo. Nas execuções seguintes, na ausência de qualquer ação, o sistema assume que são estes os parâmetros em vigor, embora seja possível a sua posterior alteração.

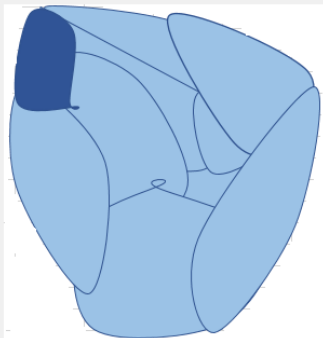


The image shows a web interface titled "Configuração Parâmetros" (Parameter Configuration). Below the title, there is a section labeled "Funcionários" (Employees). This section contains five input fields, each with a label to its left: "Custo Fixo" (Fixed Cost), "Custo Hora" (Hourly Cost), "Esforço Máximo" (Maximum Effort), "Volume Máximo" (Maximum Volume), and "Horas de Trabalho" (Working Hours). Each label is followed by a text input box. At the bottom of this section, there is a button labeled "Guardar" (Save).

Figura 4.1 Interface de configuração dos parâmetros dos funcionários

Avançado este passo, surge uma nova interface entre utilizador-sistema. Esta interação vai ser necessariamente diária, dado que os dados introduzidos apresentam a validade temporal de apenas um dia. Neste instante, surge um mapa ilustrativo da cidade na qual se pretende efetuar o escalonamento dos funcionários, cidade esta subdividida em dez zonas, cada uma com um esforço já predefinido. Assim, o utilizador procede a indicação do volume de correspondência que necessita de ser distribuído em cada uma e, eventualmente, alteração do esforço e confirma os respetivos dados introduzidos. O mapa é interativo, pelo que para mudar de zona basta carregar em cima da mesma, aparecendo a zona selecionada destacada em relação às outras. Uma vez realizado este procedimento para todas as zonas, termina-se com o cálculo das rotas.

Inserir Dados



Configuração

Zona 1

Esforço

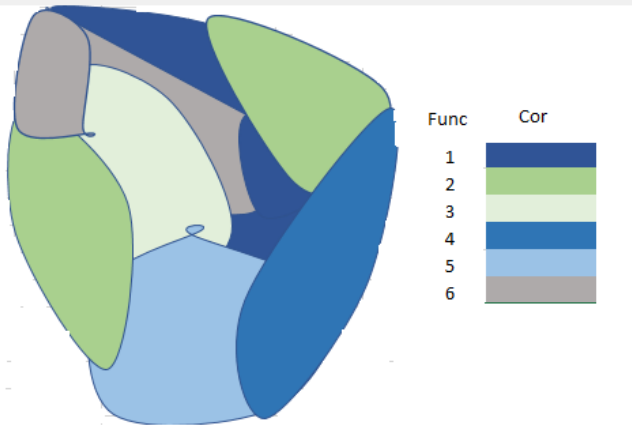
Volume

Funcionários Disponíveis

Figura 4.2 Interface de configuração dos parâmetros de cada zona

O cálculo das rotas para cada um dos carteiros consiste em associar zonas de distribuição a cada um de forma a respeitar as premissas do problema. No presente caso, as funções objetivo consideradas são o critério de custo mínimo (volume máximo) e minimização do esforço médio por funcionário. O peso exercido por cada um dos critérios na função objetivo final encontra-se pré-configurado como 0.5 para cada uma. Posto isto, o sistema determina as zonas asseguradas por cada um dos funcionários, sendo esta associação representada de forma cromática, isto é, cada uma das zonas do mapa vai ter uma cor associada que depende do funcionário que ficou responsável pela mesma, indicando-se, lateralmente, a respetiva legenda. Adicionalmente, indica-se o valor da função objetivo para a solução encontrada de acordo com os pesos padrão. Apesar disso, é possível a realização de uma análise de sensibilidades, alterando os respetivos parâmetros para um determinado valor desejado, entre 0 e 1, e observar de que forma varia a função objetivo e como é feita a atribuição de rotas de acordo com esta mudança.

Rotas Definidas



Solução Encontrada

Função Objetivo 35

Pesos

Custo

Esforço Médio

Func	Cor
1	Verde Escuro
2	Verde Claro
3	Verde Médio
4	Azul Escuro
5	Azul Claro
6	Azul Médio

Figura 4.3 Interface de visualização dos resultados do sistema de apoio à decisão

Por tudo isto, constata-se que o binómio utilizador-sistema comunica de forma harmoniosa e intuitiva, permitindo a fácil adaptação do SAD às diferentes restrições diárias que o problema envolve e fornecendo uma resposta em tempo útil suficientemente ilustrativa e com um valor satisfatório em termos da função de custo.

5. Projeto do Sistema de Apoio à Decisão

Após a apresentação do SAD a aplicar e o seu funcionamento, apresenta-se a planificação para a realização do projeto. Em primeiro lugar, definem-se as tarefas a realizar e estimam-se os períodos de duração para cada uma, conforme ilustra o seguinte Diagrama de Gantt:

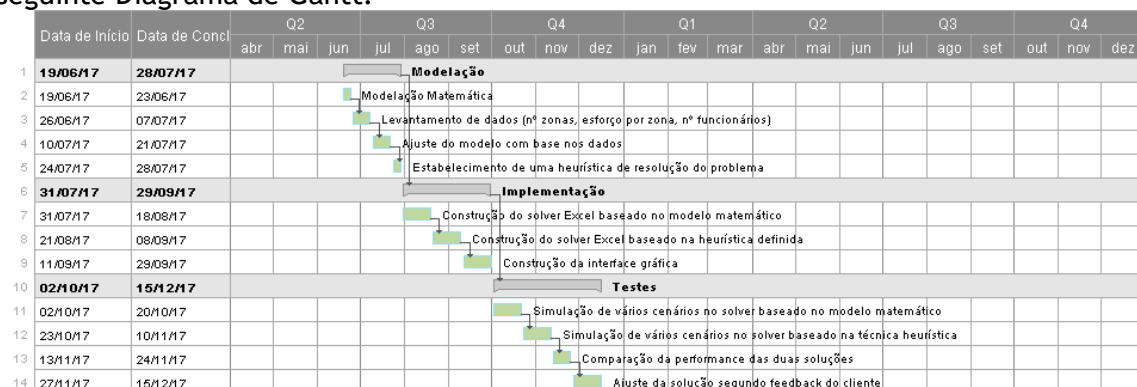


Figura 5.1 Diagrama de Gantt com a planificação do projeto

Determinou-se a divisão do projeto em três fases: Modelação, Implementação e Testes. A fase de modelação tem a duração prevista de seis semanas e consagra 4 tarefas — construção do modelo matemático (duração prevista de 1 semana), levantamento dos dados referentes ao problema (2 semanas), eventuais ajustes do modelo tendo em conta os dados levantados (2 semanas) e a construção de uma heurística de resolução do problema (1 semana).

A fase de implementação, por sua vez, tem uma duração prevista de 9 semanas e prevê a construção dos *solvers* baseados no modelo matemático (3 semanas), na solução heurística (3 semanas) e a construção da interface gráfica de utilizador (3 semanas).

Por fim, a fase de testes terá uma duração prevista de 11 semanas, contemplando as seguintes tarefas: simulações de vários cenários para ambos os *solvers* (3 semanas para cada), comparação da performance das duas soluções (2 semanas) e apresentação da solução ao cliente com eventual ajuste segundo o *feedback* (2 semanas).

Em relação aos custos, será necessário contemplar os salários dos engenheiros responsáveis pelo projeto e o custo do *software* a utilizar. Por outro lado, a fase de levantamento de dados relativos às zonas de atuação e ao número de funcionários exige a participação de funcionários da empresa de correios, cujos salários terão também de ser tidos em conta.

Pretende-se um envolvimento constante do cliente, principalmente nas fases de modelação e de testes, com a já referida contribuição no levantamento de dados em relação ao sistema e, posteriormente, na fase de testes através de *feedback* relativo ao funcionamento da solução apresentada. Ressalva-se, no entanto, uma especial participação do cliente na segunda etapa da modelação e nas duas últimas etapas da fase de teste, caracterizadas na Figura 5.1.

6. Conclusão

A partir do que foi exposto, conseguimos perceber que os sistemas de apoio à decisão (SAD) são muito úteis para a resolução de problemas de otimização combinatória e, para este caso em particular, verificamos que se conseguem obter soluções admissíveis a partir do SAD proposto para o problema formulado, constatando, de facto, a sua utilidade. No entanto, é difícil perceber se conseguimos chegar a uma solução ótima, uma vez que existem muitas soluções admissíveis e, chegando a uma solução admissível, dificilmente se visitam todas as suas soluções vizinhas. Isto pode dever-se ao facto do SAD não estar completamente adequado ao problema em causa ou devido ao problema ser demasiado complexo (não linear). Neste caso, deve-se à complexidade do problema. Há muitas variáveis, restrições e objetivos a ter em conta e, por isso, os resultados obtidos podem não ter sido os melhores, mas são, garantidamente, aceitáveis.

De forma a contrariar o problema de não se encontrar uma solução ótima global, sugere-se ainda que se procure implementar uma sistema baseado em meta-heurísticas, que são capazes de pesquisar ao longo de uma vizinhança aceitável maior, permitindo, assim, procurar uma solução melhor ou até mesmo uma solução ótima global.

Deste modo, consideramos ter alcançado os objetivos propostos para este trabalho, ao implementar um Sistema de Apoio à Decisão com resultados satisfatórios num problema concreto. Por fim, ressaltar a importância deste trabalho para uma melhor assimilação e compreensão dos conteúdos leccionados na Unidade Curricular.

Referências

- [1] "Sistema de suporte à decisão," 1 Setembro 2016. [Online]. Available: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Sistema_de_suporte_%C3%A0_decis%C3%A3o&oldid=46603563.
- [2] J. P. Sousa, *Documentos da unidade curricular*, Porto, 2017.
- [3] "Knapsack problem," Wikipedia, [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem.

ANEXOS

A. Modelo Matemático

Em relação à modelação do problema formulado anteriormente, começou-se por definir restrições tendo em conta, por um lado, as limitações dos funcionários, tais como a carga horária diária, o volume máximo de transporte e o esforço máximo a que os funcionários podem ser sujeitos, e por outro, os interesses da empresa em cumprir todos os serviços solicitados.

De seguida definiram-se os objetivos da empresa, que não só pretende cumprir satisfatoriamente todas as tarefas da qual está incumbida, mas também salvaguardar os seus interesses financeiros e manter boas relações com os funcionários. Assim, pretende-se minimizar o custo global das operações e ainda o esforço médio dos funcionários.

Deste modo, teceram-se algumas considerações:

- Cada funcionário admitido ao serviço tem um custo fixo por hora (CV), que pode ser diferente entre funcionários. Para além disso, há ainda um custo adicional (CF), também fixo e independente do número de horas, referente ao subsídio de alimentação, transporte, seguro e outros encargos;
- Cada funcionário suporta um volume máximo de correspondência, estimando-se que este seja na ordem de 800 cartas ($V_{max} = 800$);
- Cada funcionário suporta um esforço máximo, referente ao desgaste físico provocado pelas características geográficas da zona a percorrer, esforço esse normalizado entre 0 e 100, sendo este último o máximo que ele suporta ($E_{max} = 100$);
- Para uma determinada zona, o esforço e volume de distribuição associados condicionam o tempo estimado para entrega da correspondência, pelo que se deve assegurar que o conjunto de zonas atribuído a um funcionário não ultrapassa o seu limite diário de horas de trabalho (7h/dia). O tempo em função do esforço e volume é dado por: $T(V, E) = V \times E \times 0.85 \times 10^{-5}$;
- Adicionalmente, considera-se que cada zona é assegurada por apenas um funcionário;
- Posto isto, a decisão a tomar consiste em atribuir cada zona a um determinado funcionário, respeitando os requisitos impostos.

Tendo em conta as ideias compreendidas anteriormente passou-se a uma análise mais formal, através da elaboração do modelo matemático:

Variável de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o funcionário } i \text{ assegura a zona } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que $i \in [1, 2, \dots, K]$ e $j \in [1, 2, \dots, N]$.

Restrições

1. $\sum_{j=1}^N x_{ij} V_j \leq V_{\max, i}, \forall i$
2. $\sum_{j=1}^N x_{ij} E_j \leq E_{\max, i}, \forall i$
3. $\sum_{j=1}^N x_{ij} T_j \leq T_{\max, i}, \forall i$
4. $\sum_{i=1}^K x_{ij} = 1, \forall j$
5. $\sum_{j=1}^N x_{ij} \leq \delta_i M, \forall i, M \rightarrow \infty$

Variável Auxiliar

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{se o funcionário } i \text{ atribuído a pelo menos uma zona} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função Objetivo

F1. Minimizar Custo:

$$\min \sum_{i=1}^K \left[\sum_{j=1}^N (x_{ij} T_j) \cdot CV_i + \delta_i CF_i \right]$$

F2. Minimizar Esforço de distribuição médio:

$$\min \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N x_{ij} E_j}{\sum_{i=1}^K \delta_i}$$

F. Função global

$$\min \alpha \times F1 + (1 - \alpha) \times F2$$

em que α representa o peso atribuído a cada função objetivo, ou seja, para um valor α elevado dá-se primazia aos interesses económicos da empresa e à minimização do custo. Por outro lado, a escolha de um valor baixo implica uma maior consideração pelas condições dos funcionários.

B. Resolução do problema no *solver* do Excel

Para a resolução do problema no *solver* do Excel, implementou-se um modelo simplificado do problema, mas igual ao modelo matemático desenhado. Pretendeu-se, então, otimizar duas funções objetivo, minimizar o esforço médio dos funcionários e minimizar o custo com funcionários (3€ de custo fixo e 2,5€ à hora).

Para a função de cálculo do tempo de entrega de cada carta (B.1), considerou-se, também, uma função simplificada, onde 'e' corresponde ao esforço de cada zona e 'v' ao volume de cada correspondência.

$$t = \frac{7}{800 \times 100} \cdot e \times v \quad (\text{B.1})$$

Volume máximo				Volume da correspondência de cada zona	
Carteiro 1	880	<=	1000	Zona 1	20
Carteiro 2	750	<=	1000	Zona 2	750
Carteiro 3	0	<=	1000	Zona 3	180
Carteiro 4	0	<=	1000	Zona 4	400
Carteiro 5	0	<=	1000	Zona 5	620
Carteiro 6	0	<=	1000	Zona 6	590
Carteiro 7	730	<=	1000	Zona 7	330
Carteiro 8	311	<=	1000	Zona 8	288
Carteiro 9	590	<=	1000	Zona 9	311
Carteiro 10	928	<=	1000	Zona 10	700

Esforço máximo				Esforço de cada zona	
Carteiro 1	90	<=	100	Zona 1	20
Carteiro 2	30	<=	100	Zona 2	30
Carteiro 3	0	<=	100	Zona 3	70
Carteiro 4	0	<=	100	Zona 4	50
Carteiro 5	0	<=	100	Zona 5	15
Carteiro 6	0	<=	100	Zona 6	40
Carteiro 7	60	<=	100	Zona 7	10
Carteiro 8	75	<=	100	Zona 8	60
Carteiro 9	40	<=	100	Zona 9	75
Carteiro 10	95	<=	100	Zona 10	20

Tempo de trabalho máximo				Tempo de cada zona	
Carteiro 1	2.3275	<=	7	Zona 1	0.035
Carteiro 2	1.96875	<=	7	Zona 2	1.96875

Carteiro 3	0	<=	7	Zona 3	1.1025
Carteiro 4	0	<=	7	Zona 4	1.75
Carteiro 5	0	<=	7	Zona 5	0.81375
Carteiro 6	0	<=	7	Zona 6	2.065
Carteiro 7	2.03875	<=	7	Zona 7	0.28875
Carteiro 8	2.0409375	<=	7	Zona 8	1.512
Carteiro 9	2.065	<=	7	Zona 9	2.0409375
Carteiro 10	2.36075	<=	7	Zona 10	1.225

Cobrir todas as zonas

Zona 1	1	=	1
Zona 2	1	=	1
Zona 3	1	=	1
Zona 4	1	=	1
Zona 5	1	=	1
Zona 6	1	=	1
Zona 7	1	=	1
Zona 8	1	=	1
Zona 9	1	=	1
Zona 10	1	=	1

Funcionário trabalha a distribuir correspondência ou não

Carteiro 1	2	<=	1000
Carteiro 2	1	<=	1000
Carteiro 3	0	<=	0
Carteiro 4	0	<=	0
Carteiro 5	0	<=	0
Carteiro 6	0	<=	0
Carteiro 7	2	<=	1000
Carteiro 8	1	<=	1000
Carteiro 9	1	<=	1000
Carteiro 10	3	<=	1000

Tabela B-I Excerto das restrições descritas no Excel

No que se refere à otimização das funções objetivo, considerou-se uma nova função objectivo global que corresponde a uma média ponderada, com 0,7 para a minimização do custo com funcionários e 0,3 para a minimização do esforço médio dos funcionários ativos.

												Resultado	Res Norm
MIN	Custo	12.31	10.88	0	0	0	0	11.155	11.165	11.26	12.44	69.20675	0.33
MIN	Esforço	90	30	0	0	0	0	60	75	40	95	65	0.065

	Pesos	Custo	Esforço	Resultado
MIN	Global	0.7	0.3	0.250189167

Tabela B-II Excerto do Excel referente ao cálculo da função objectivo

Após a resolução do solver pelo método *Evolutionary*, que corresponde ao método dos algoritmos genéticos para variáveis de decisão binárias, resulta uma lista dos funcionários que vão distribuir correspondência e as respectivas zonas que asseguram.

Zona \ Carteiro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Activo?	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Tabela B-III Resultado das variáveis de decisão após a resolução do solver

Como se pode verificar pela Tabela B-III, assume-se que quando uma zona é seleccionada todas as suas cartas são entregues e que todas as zonas têm de ser seleccionadas.

Se fizermos variar os pesos de cada função, conseguimos observar como tende a responder o sistema.

Zona \ Carteiro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Activo?	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Tabela B-IV Resultados das variáveis de decisão com o peso de 0,5 para a minimização do esforço médio dos funcionários e 0,5 para a minimização do custo total com funcionários (custo dos funcionários igual a 75,21€ e esforço médio dos funcionários igual a 48,75)

Zona \ Carteiro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Activo?	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Tabela B-V Resultados das variáveis de decisão com o peso de 0,7 para a minimização do esforço médio dos funcionários e 0,3 para a minimização do custo total com funcionários (custo dos funcionários igual a 75,21€ e esforço médio dos funcionários igual a 48,75)

C. Abordagem Heurística

Tal como foi descrito anteriormente, nesta secção será apresentado um exemplo concreto, que ilustra a aplicação da heurística, descrita no ponto 3.2 deste documento, e representada pelo algoritmo:

Cálculo de um quociente para cada zona a distribuir dado por: $Q_j = \frac{V_j}{E_j}$;
 Selecionar novo funcionário com um conjunto de zonas a distribuir vazio;
 Adicionar ao conjunto de soluções do funcionário a zona ainda não atribuída com maior Q;
 Verificar se foi ultrapassado o volume máximo, esforço máximo ou tempo máximo do conjunto de soluções;
 Se sim, retirar a última zona atribuída e verificar se já foram exploradas todas as outras zonas não atribuídas;
 Se sim, voltar a 2;
 Se não, voltar a 3;
 Se não, verificar se existem zonas a atribuir;
 Se sim, voltar a 3;
 Se não, quebrar ciclo e terminar algoritmo.

Assim, a título de exemplo, consideraram-se como dados do problema os valores apresentados na seguinte tabela, sendo que para o cálculo do tempo foi usada a expressão $T(E,V) = \frac{7}{800 \times 100} \cdot E \times V$, em que E representa o esforço avaliado em cada zona e V o volume de correspondência a distribuir nessa zona. Por sua vez, o valor de Q para cada zona também foi obtido dividindo o Volume pelo Esforço em cada zona, pois considera-se que a melhor opção é aquela que permite a distribuição de um maior volume de cartas com o mínimo esforço para os funcionários.

<i>Zona</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>
<i>Volume (em cartas)</i>	50	750	180	400	600	590	300	288	311	700
<i>Esforço (0-100)</i>	40	30	60	50	30	80	70	90	75	60
<i>Tempo (h)</i>	0,18	1,97	0,95	1,75	1,58	4,13	1,84	2,27	2,04	3,68
<i>Q(V/E)</i>	1,25	25	3	8	20	7,38	4,29	3,20	4,15	11,67

Tabela C-I Características e necessidades de cada zona

O passo seguinte consiste em definir valores para as restrições de cada funcionário. Neste caso, definiu-se que, para todos os trabalhadores, o volume de cartas não deverá ultrapassar as 1000 unidades, o esforço acumulado de cada um não deverá ultrapassar 130 e o trabalho diário não deverá exceder as 7 horas.

De seguida, aplicou-se o algoritmo:

Iteração	Zona candidata	Volume total	Esforço total	Carga horária	Restrições Respeitadas?	Solução
0	2	750	30	1,97	Sim	{2}
1	5	1350	60	3,55	Não	{2}
2	10	1450	90	5,65	Não	{2}
3	4	1150	80	3,72	Não	{2}
4	6	1340	110	6,1	Não	{2}
5	7	1080	100	3,99	Não	{2}
6	9	1061	105	4,01	Não	{2}
7	8	1038	120	4,24	Não	{2}
8	3	930	90	2,92	Sim	{2,3}
9	1	980	130	3,10	Sim	{2,3,1}

Tabela C-II Resolução do problema (zonas para o carteiro 1)

Iteração	Zona candidata	Volume total	Esforço total	Carga horária	Restrições Respeitadas?	Solução
0	5	600	30	1,58	Sim	{5}
1	10	1300	90	5,26	Não	{5}
2	4	1000 (MAX)	80	3,33	Sim	{5,4}

Tabela C-III Resolução do problema (zonas para o carteiro 2)

Iteração	Zona candidata	Volume total	Esforço total	Carga horária	Restrições Respeitadas?	Solução
0	10	700	60	3,68	Sim	{10}
1	6	1290	140	7,81	Não	{10}
2	7	1000 (MAX)	130 (MAX)	5,52	Sim	{10,7}

Tabela C-IV Resolução do problema (zonas para o carteiro 3)

Iteração	Zona candidata	Volume total	Esforço total	Carga horária	Restrições Respeitadas?	Solução
0	6	590	80	4,13	Sim	{6}
1	9	901	155	6,17	Não	{6}
2	8	878	170	6,24	Não	{6}

Tabela C-V Resolução do problema (zonas para o carteiro 4)

Iteração	Zona candidata	Volume total	Esforço total	Carga horária	Restrições Respeitadas?	Solução
0	9	311	75	2,04	Sim	{9}
1	8	599	165	4,31	Não	{9}

Tabela C-VI Resolução do problema (zonas para o carteiro 5)

Iteração	Zona candidata	Volume total	Esforço total	Carga horária	Restrições Respeitadas?	Solução
0	8	288	90	2,27	Sim	{8}

Tabela C-VII Resolução do problema (zonas para o carteiro 6)

Finda a aplicação do algoritmo, obtém-se uma solução que passa por atribuir a cada funcionário as zonas indicadas no conjunto solução final da respetiva tabela. Por exemplo, o empregado 3 é incumbido de distribuir a correspondência das zonas 10 e 7.

Como se verifica, a solução obtida não constitui obrigatoriamente a solução ótima, mas uma solução possível e satisfatória, obtida de forma breve e sem exigir elevado esforço e complexidade matemática.