Exercice 1 - Écriture ensembliste - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Seul A se réalise : $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;
2. A et B se réalisent, mais pas C : $(A \cap B)\backslash C = (A \cap B) \cap \bar{C}$;
3. les trois événements se réalisent : $A \cap B \cap C$;
4. au moins l'un des trois événements se réalise : $A \cup B \cup C$;
5. au moins deux des trois événements se réalisent : $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
6. aucun ne se réalise : $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;
7. au plus l'un des trois se réalise : c'est le contraire de “au moins deux se réalisent”, donc
$$\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)};$$
8. exactement deux des trois se réalisent : on peut le reformuler en “au moins deux se réalisent, mais pas trois”, d'où
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cap \overline{A \cap B \cap C}.$$

Exercice 2 - Lancer infini - *L1* - ⋆

B signifie qu'à partir du cinquième lancer, on n'obtient que des piles. C signifie qu'un lancer au moins à partir du cinquième lancer donne pile. On peut décrire D par la formule
$$D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{i \geq n} A_i.$$

Exercice 3 - Inégalité de Bonferroni - *L1* - ⋆⋆

On va procéder par récurrence sur n, le point clé étant la formule
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$
La propriété est vraie si $n = 1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n. On pose $A = A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ et $B = A_n$. Alors, d'après la formule précédente
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$
Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A)$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$, et on obtient
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1$$
ce qui est exactement le résultat voulu.

Exercice 4 - Racines de polynômes - *L2* - ⋆⋆

On associe à l'expérience aléatoire l'univers des possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$, muni de l'équiprobabilité. Ainsi, la probabilité d'un événement A vaut $\mathrm{card}(A)/6^3$. On s'intéresse d'abord à l'événement $A=\{(a,b,c)\in\Omega;\ b^2-4ac>0\}$. Il suffit de dénombrer A. On commence par établir un petit tableau avec les valeurs de $4ac$:

$c\backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	4	8	12	16	20	24
2	8	16	24	32	40	48
3	12	24	36	48	60	72
4	16	32	48	64	80	96
5	20	40	60	80	100	120
6	24	48	72	96	120	144

On calcule le cardinal de A en regardant dans le tableau le nombre de valeurs de a et c pour lesquelles $b^2>4ac$, pour les 6 valeurs que peut prendre b. On trouve :

$$\mathrm{card}(A)=0+0+3+5+14+16=38.$$

On en déduit :

$$P(A)=\frac{38}{216}=\frac{19}{108}.$$

On note pareillement $B=\{(a,b,c)\in\Omega;\ b^2-4ac=0\}$ et $C=\{(a,b,c)\in\Omega;\ b^2-4ac<0\}$. Le même dénombrement prouve que :

$$P(B)=\frac{5}{216}.$$

On peut calculer $P(C)$ de la même façon, ou remarquer que les 3 événement A,B,C forment un système complet d'événements. On déduit alors :

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=\frac{173}{216}.$$

Exercice 5 - Les footballeurs - *L1/Math Sup* - ⋆

Notons A_n l'événement : "Émile et Paulin ratent leurs $n-1$ premiers tirs, Paulin rate son n-ième tir, et Émile réussit son n-ième tir". Alors les événements A_n sont disjoints et leur réunion est l'événement "Émile gagne" que l'on note désormais A. On a donc

$$P(A)=\sum_{n\geq 1}P(A_n).$$

Mais on a

$$P(A_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times\frac{2}{3}.$$

Il vient

$$P(A)=\sum_{n\geq 1}2\left(\frac{1}{6}\right)^n=2\frac{1/6}{1-1/6}=\frac{2}{5},$$

où on a utilisé la somme d'une série géométrique.

Exercice 6 - Limites supérieures et inférieures d'ensembles - *L1* - ⋆⋆

1. (a) Dans ce cas, $\liminf A_n = \limsup A_n = \mathbb{R}$, car n'importe quel réel appartient à tous les A_n à partir d'un certain rang.
   (b) Dans ce cas, $\liminf A_n = \limsup A_n = \varnothing$, car n'importe quel réel n'appartient qu'à un nombre fini de A_n.
   (c) Si $x \in \limsup A_n$, ceci signifie qu'il est membre d'une infinité d'éléments de la suite (A_n). Comme cette suite ne comporte que les ensembles A et B, on a $\limsup A_n \subset A \cup B$. Réciproquement, si on est dans A, on est dans tous les A_{2n}, et donc on est dans $\limsup A_n$. De même si on est dans B. Ainsi, $\limsup_n A_n = A \cup B$.
   De même, si $x \in \liminf A_n$, ceci signifie que x appartient à tous les ensembles A_n à partir d'un certain rang. Comme ceux-ci sont alternativement A et B, on a $x \in A \cap B$. Réciproquement, si $x \in A \cap B$, il est dans tous les ensembles A_n, ce qui achève la preuve de $\liminf_n A_n = A \cap B$.
   (d) D'après la question précédente, avec $A =]-\infty, 1]$ et $B =]-\infty, -1]$,
   $$\liminf_n A_n =]-\infty, -1] \text{ et } \limsup_n A_n =]-\infty, 1].$$
2. On a
$$\liminf_n A_n = \{x \in \Omega;\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq p,\ x \in \Omega\} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq p} A_n$$
$$\limsup_n A_n = \{x \in \Omega;\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \geq p,\ x \in \Omega\} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n$$

Exercice 7 - Limite sup ou limite sup ? - *L3/M1/Prépa Agreg* - ⋆

On commence par supposer que $a = b$. Si $\omega \in E_a$, alors $X_n(\omega) \geq a$ pour une infinité de valeurs de n. Ainsi, $\limsup X_n(\omega) \geq a$ et donc $E_a \subset F_a$. La réciproque est fausse. Prenons une suite (X_n) définie sur Ω par $X_n = a - \frac{1}{n}$. Alors $E_a = \varnothing$ tandis que $F_a = \Omega$. Si maintenant $a > b$, alors $E_a \subset F_a \subset F_b$, et là aussi l'inclusion peut être stricte. Enfin, si $a < b$ et $\omega \in F_b$, on a $\limsup_n X_n(\omega) \geq b > a$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une infinité de valeurs de n de sorte que $X_n(\omega) > b - \varepsilon$. Si on choisit $\varepsilon > 0$ avec $b - \varepsilon \geq a$, on trouve que $\omega \in E_a$, et donc $F_b \subset E_a$. L'inclusion peut-être stricte. Il suffit de prendre $X_n = a$, de sorte que $F_b = \varnothing$ et $E_a = \Omega$.

Exercice 8 - Premier lemme de Borel-Cantelli - *L2/L3* - ⋆⋆

1. Par la sous-additivité d'une probabilité,
$$0 \leq P(D_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$
La dernière somme tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini car c'est le reste d'une série convergente. Par le théorème d'encadrement, $(P(D_n))$ tend vers 0.
2. On écrit que $A = \bigcap_n D_n$. On va démontrer que la suite (D_n) est décroissante. En effet,
$$D_n = D_{n+1} \cup A_n.$$
On peut donc utiliser la continuité monotone décroissante de P pour en déduire
$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(D_n) = 0.$$

Presque sûrement, seul un nombre fini des événements A_n peuvent se produire simultanément.

Exercice 9 - Foot ! - *L2* - ⋆⋆⋆

1. On va dénombrer les tirages au sort en tenant compte de l'ordre des matchs dans le tirage (c'est-à-dire que si l'on a 4 équipes A,B,C et D, les tirages (A-B,C-D) et (C-D,A-B) sont comptés comme deux tirages différents car ils n'ont pas le même premier match). On pourrait faire sans cette convention, on obtiendrait les mêmes résultats mais cela changerait un peu la façon de faire. Un tirage au sort se présente donc comme une $n-$liste de matchs, c'est-à-dire une $n-$liste de combinaisons 2 à 2 disjointes. Il y a $\binom{2n}{2}$ façons de choisir la première combinaison. Puis, cette combinaison choisie, il y a encore $\binom{2n-2}{2}$ façons de choisir la combinaison suivante. Et ainsi de suite... Ainsi, le nombre total de tirages au sort est :
$$\binom{2n}{2}\times\binom{2n-2}{2}\times\dots\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{(2n)!}{2^n}.$$
Parmi ces tirages, comptons ceux qui ne font s'opposer que des équipes de division distinctes. Pour le premier match, il y a n façons de choisir l'équipe de première division, et n façons de choisir l'équipe de deuxième division, soit n^2 choix. Pour le second match, il reste à choisir parmi $n-1$ équipes, et donc on a $(n-1)^2$ choix. Finalement, on obtient :
$$p_n=\frac{(n!)^2}{\frac{(2n)!}{2^n}}=\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$
2. D'abord, si n est impair, un tel tirage au sort est clairement impossible, et $q_n=0$. On suppose donc que n est pair et s'écrit $2k$. On choisit d'abord les k matchs parmi $2k$ qui opposent les matchs de 1ère division entre eux : cela fait $\binom{2k}{k}$ choix. Une fois ce choix réalisé, il faut compter le nombre de tirages à l'intérieur entre équipes de 1ère division. De la même façon que lorsqu'on a compté le nombre total de tirages au sort, on trouve $\frac{(2k)!}{2^k}$. De même pour les tirages au sort entre équipes de 2è division. On a donc :
$$q_{2k}=\frac{\binom{2k}{k}}{\binom{4k}{2k}}.$$
3. Ecrivons que :
$$(2n)!=2^n(2n-1)(2n-3)\dots3\times1\times n!.$$
On a donc :
$$\binom{2n}{n}=2^n\frac{(2n-1)(2n-3)\dots3\times}{n!}.$$
Maintenant, en utilisant l'encadrement $2n-k-1\leq 2n-k\leq 2n-k+1$, on obtient
$$2^n\frac{(2n-2)(2n-4)\dots4\times2}{n!}\leq\binom{2n}{n}\leq 2^n\frac{2n(2n-4)\dots4\times2}{n!}$$
qui donne finalement le résultat demandé.

4. On a donc :
$$0 \leq p_n \leq \frac{n}{2^{n-1}},$$
qui prouve que p_n tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. De même pour q_n...