Exercices - Probabilités conditionnelles et indépendance : corrigé

Probabilités conditionnelles

Exercice 1 - CD-Rom - *Deuxième année* - ⋆

1. L'énoncé donne directement $P(A) = 0,05$, d'où $P(\bar{A}) = 0,95$, $P(D|A) = 0,6$ et $P(\bar{D}|\bar{A}) = 0,98$. On en déduit :
$$P(\bar{D}|A) = 1 - P(D|A) = 0,4$$
$$P(D|\bar{A}) = 1 - P(\bar{D}|\bar{A}) = 0,02.$$
D'après la formule des probabilités totales :
$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(\bar{A})P(D|\bar{A}) = \frac{49}{1000}.$$
2. On obtient $P(A|D)$ grâce à la formule de Bayes :
$$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{30}{49}.$$

Exercice 2 - Probabilités composées - *L1/L2* - ⋆

On note B_i (resp. N_i) l'événement : "La i-ème boule tirée est blanche (resp. noire)". On cherche à calculer $P(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$, ce que l'on va faire en utilisant la formule des probabilités composées :
$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(N_3|B_1 \cap B_2).$$
Chacune des probabilités qui apparaît est facile à calculer, car $P(B_1) = 4/7$, $P(B_2|B_1) = 3/6$ (il reste 6 boules dont 3 blanches) et $P(N_3|B_1\cap B_2) = 3/5$. Finalement, on obtient $P(B_1\cap B_2\cap N_3) = \frac{6}{35}$.

Exercice 3 - QCM - *L2* - ⋆

On note :
$$B = \{\text{L'étudiant donne la bonne réponse}\}$$
$$C = \{\text{L'étudiant connait la bonne réponse}\}.$$
On cherche $P_B(C) = P(C|B)$, et l'énoncé donne :
$$P(C) = p,\ P(B|C) = 1,\ P(B|\bar{C}) = \frac{1}{m}.$$
D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$P(B) = P(B)P(B|C) + P(\bar{C})P(B|\bar{B}) = \frac{(m-1)p+1}{m}.$$
D'après la formule de Bayes :
$$P(C|B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)} = \frac{mp}{1+(m-1)p}.$$

Exercice 4 - Dé pipé - *Deuxième année* - $\star$

On note D l'événement : "le dé est pipé", et S l'événement : "on obtient 6". L'énoncé donne $P(D)=25/100$ et $P(S|D)=1/2$? La formule de Bayes nous permet de calculer $P(D|S)$:

$$P(D|S)=\frac{P(D)P(S|D)}{P(D)P(S|D)+P(\overline{D})P(S|\overline{D})}.$$

Comme on a $P(\overline{D})=1-P(D)=3/4$ et $P(S|\overline{D})=1/6$, on obtient finalement :

$$P(D|S)=\frac{1}{2}.$$

Exercice 5 - Pièces défectueuses - *Deuxième année* - $\star$

1. On note A l'événement "la pièce est acceptée par le contrôle", et B l'événement "la pièce est bonne". L'événement E "Il y a une erreur au contrôle" se décompose en $A\cap\overline{B}$ et $\overline{A}\cap B$. Ces deux derniers événements sont incompatibles, on a donc :

$$P(E)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B).$$

   Maintenant, $P(A\cap\overline{B})=P(A|\overline{B})P(\overline{B})$. Or, $P(\overline{B})=0,05$, et $P(A|\overline{B})=1-P(\overline{A}|\overline{B})=0,02$. De même, on a $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A}|B)P(B)$ et on a $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=0,04$. On obtient finalement :

$$P(E)=0,95\times 0,04+0,05\times 0,02.$$

2. Dans cette question, on cherche $P(\overline{B}|A)$ alors que l'on connait les probabilités conditionnelles sachant B. Ceci nous invite à utiliser la formule de Bayes.

$$\begin{aligned}P(\overline{B}|A)&=\frac{P(\overline{B})P(A|\overline{B})}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}\\&=\frac{0,05\times 0,02}{0,95\times 0,96+0,05\times 0,02}=\frac{1}{913}\simeq 0,001.\end{aligned}$$

Exercice 6 - Compagnie d'assurance - *Deuxième année* - $\star$

1. On note A l'événement "avoir un accident dans l'année". Comme les trois classes R_1, R_2 et R_3 réalisent une partition de la population. On peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|R_1)P(R_1)+P(A|R_2)P(R_2)+P(A|R_3)P(R_3)\\&=0,05\times 0,2+0,15\times 0,5+0,3\times 0,3\\&=0,175.\end{aligned}$$

2. On cherche la probabilité d'être dans R_1 sachant qu'on n'a pas eu d'accident, c'est-à-dire la probabilité $P(R_1|\overline{A})$. La formule de Bayes donne :

$$P(R_1|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}|R_1)P(R_1)}{P(\overline{A})}.$$

La probabilité $P(\overline{A})$ se calcule par la formule $P(\overline{A})=1-P(A)$, tandis que l'énoncé donne $P(\overline{A}|R_1)=0,95$. On obtient finalement :

$$P(R_1|\overline{A})=\frac{0,95\times 0,2}{1-P(A)}=0,23.$$

Exercice 7 - La rumeur - *L2* - ⋆⋆

1. On note I_n l'événement : "l'information après n transmissions est correcte". D'après la formule des probabilités totales, on sait que

$$P(I_{n+1})=P(I_{n+1}|I_n)P(I_n)+P(I_{n+1}|\overline{I_n})P(\overline{I_n}).$$

Mais, $P(I_{n+1}|I_n)=p$ (l'information doit être transmise correctement) et $P(I_{n+1}|\overline{I_n})=1-p$ (l'information doit être mal transmise). On en déduit que

$$p_{n+1}=p\times p_n+(1-p)\times(1-p_n)=(2p-1)p_n+(1-p).$$

2. On a une suite arithmético-géométrique. Sa limite possible l vérifie

$$l=(2p-1)\times l+(1-p)\iff l=1/2.$$

On pose alors $u_n=p_n-\frac{1}{2}$ et on vérifie que (u_n) est géométrique de raison $(2p-1)$. En effet,

$$u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{1}{2}=(2p-1)p_n+(1-p)-\frac{1}{2}=(2p-1)\left(p_n-\frac{1}{2}\right).$$

On en déduit $u_n=(2p-1)^n u_0$ avec $u_0=p_0-1/2=1/2$. On conclut que

$$p_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n.$$

3. On distingue alors trois cas :
   - Si $p=1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n=1$ pour tout entier n.
   - Si $p=0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n}=1$, $p_{2n+1}=0$ pour tout entier n.
   - Si $p\in]0,1[$, alors $|2p-1|<1$ et donc (p_n) converge vers $1/2$. On n'a plus de traces de l'information initiale !

Exercice 8 - Sauts de puce - *L2/ECS* - ⋆⋆

1. Voici un exemple d'algorithme.

```
Demander N.
Demander a.
Si (a<0) ou (a>N) ou (N<0) alors afficher "Valeurs entrées incorrectes"
Sinon
      0->pas
      a->position
```

```
Tant que ( (position>0) et (position<N)) faire
     pas+1->pas
     Si (alea()<p)
          alors position+1->position
          sinon position-1->position
Fin Tant que.
Si (position==0)
     alors Afficher "Fin du processus en 0"
     sinon Afficher "Fin du processus en N"
Afficher "Nombre d'étapes :"
Afficher pas;
```

2. (a) Par définition, on a $u_0 = 1$ (le processus commence en 0, il s'arrête immédiatement, en 0), et $u_N = 0$ (le processus commence en N, il s'arrête aussitôt, en N).

   (b) On note A l'événement : "Partant de a, le processus s'arrête en 0", B l'événement : "Partant de a à l'instant 0, à l'instant 1, la particule est en $a+1$", et C l'événement : "Partant de a à l'instant 0, à l'instant 1, la particule est en $a-1$", de sorte que $C = \bar{B}$. Par la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C).$$

   Maintenant, puisqu'on part à l'instant $t = 0$ de a, on a $P(B) = p$ et $P(C) = q$. D'autre part, si la particule est à l'instant 1 en $a+1$, la probabilité que le processus s'arrête en 0 vaut u_{a+1}. On a donc : $P(A|B) = u_{a+1}$, et de même $P(A|C) = u_{a-1}$. On en déduit la formule de récurrence :

$$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}.$$

   (c) Pour a allant de 1 à $N-1$, la suite (u_a) vérifie la formule de récurrence :

$$u_{a+1} = \frac{1}{p}u_a - \frac{q}{p}u_{a-1}.$$

   L'équation caractéristique de cette récurrence est :

$$r^2 - \frac{1}{p}r + \frac{q}{p} = 0.$$

   Cette équation du second degré admet deux solutions distinctes,

$$r_1 = 1 \text{ et } r_2 = \frac{q}{p}$$

   (remarquer ici l'utilisation de l'hypothèse $p \neq 1/2$ qui permet d'affirmer que les deux racines sont distinctes). Il existe donc des réels λ et μ tels que, pour tout a dans $\{0, \dots, N\}$, on ait :

$$u_a = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

   Utilisant que $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, on obtient :

$$u_a = \frac{q^N}{q^N - p^N} + \frac{p^N}{p^N - q^N}\left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

3. Le même raisonnement prouve que :

$$v_a = pv_{a+1} + qv_{a-1}.$$

La résolution de cette récurrence donne :

$$v_a = \frac{p^N}{p^N - q^N} + \frac{p^N}{q^N - p^N}\left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

4. On vérifie aisément que $u_a + v_a = 1$. Ceci signifie que, presque sûrement, le processus va s'arrêter.

Indépendance d'événements

Exercice 9 - Circuit électrique - *Deuxième année* - $\star$

1. On procède en deux temps. D'une part :

$$P\left((A\cup B)\cup C\right) = P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)\cap C).$$

Mais,

$$P((A\cup B)\cap C) = P((A\cap C)\cup(B\cap C)) = P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C),$$

et

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B).$$

On appelle aussi ceci la formule du crible de Poincaré, elle se généralise avec plusieurs événements par récurrence.

2. On note F_i l'événement : "le circuit C_i fonctionne". Par hypothèse, les événements F_i sont mutuellement indépendants. Il faut calculer pour le premier cas $P(F_1\cap F_2\cap F_3)$, pour le second $P(F_1\cup F_2\cup F_3)$, et pour le troisième $P(F_1\cap(F_2\cup F_3))$. On a :
   (a) Par indépendance des événements :

   $$P(F_1\cap F_2\cap F_3) = p_1p_2p_3.$$

   (b) D'après la formule précédente, et par indépendance des événements :

   $$P(F_1\cup F_2\cup F_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1p_2 - p_1p_3 - p_2p_3 + p_1p_2p_3.$$

   (c) L'événement $F_1\cup F_2$ est indépendant de C_1. On a donc :

   $$P(C_1\cap(C_2\cup C_3)) = P(C_1)P(C_2\cup C_3) = P(C_1)\big(P(C_2) + P(C_3) - P(C_2\cap C_3)\big)$$

   soit

   $$P(C_1\cap(C_2\cup C_3)) = p_1\left(p_2 + p_3 - p_2p_3\right).$$

Exercice 10 - Indépendance et contexte - *Deuxième année* - $\star$

1. On a :
$$A = \{2,4,6,8,10,12\}$$
$$B = \{3,6,9,12\}$$
$$A \cap B = \{6,12\}.$$
On a donc $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ et $P(A \cap B) = 1/6 = P(A)P(B)$. Les événements A et B sont indépendants.
2. Les événements A, B et $A \cap B$ s'écrivent encore exactement de la même façon. Mais cette fois, on a : $P(A) = 6/13$, $P(B) = 4/13$ et $P(A \cap B) = 2/13 \neq 24/169$. Les événements A et B ne sont pas indépendants. C'est conforme à l'intuition. Il n'y a plus la même répartition de boules paires et de boules impaires, et dans les multiples de 3 compris entre 1 et 13, la répartition des nombres pairs et impairs est restée inchangée.

Exercice 11 - Indépendance impossible - *Deuxième année* - ⋆⋆

Supposons qu'il existe A et B deux événements non triviaux indépendants. On note m le cardinal de A et n le cardinal de B. On a donc $P(A) = m/p$ et $P(B) = n/p$. Puisque A et B sont supposés indépendants, et toujours parce que le modèle adopté est celui de l'équiprobabilité, on a :
$$\mathrm{card}(A \cap B) = p \times P(A \cap B) = \frac{mn}{p}.$$
Puisque le cardinal est un entier, p divise le produit mn, et par le théorème de Gauss, il divise l'un des deux, disons n. D'autre part, puisque $n \leq p$, ceci n'est possible que si $n = 0$ ou $n = p$. Autrement dit, seulement si A est ou l'événement certain, ou l'événement impossible, c'est-à-dire un événement trivial.

Exercice 12 - Indicatrice d'Euler - *L2/L3/Master Enseignement* - ⋆⋆⋆

1. On sait que x est premier avec n si et seulement si aucun des diviseurs premiers de n ne divise x. On a donc :
$$B = \overline{A_{p_1}} \cap \dots \cap \overline{A_{p_r}}.$$
2. Il suffit de calculer le cardinal de A_m. Mais si $n = km$, alors les multiples de m qui sont inférieurs ou égaux à n sont m, $2m, \dots, km$. On a donc
$$P(A_m) = \frac{k}{n} = \frac{1}{m}.$$
3. Soit $i_1 < \dots < i_m$ des entiers distincts choisis dans $\{1, \dots, r\}$. On doit prouver que
$$P(A_{p_{i_1}}) \dots P(A_{p_{i_m}}) = P(A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}}).$$
Mais,
$$P(A_{p_{i_1}}) \dots P(A_{p_{i_m}}) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{p_{i_j}}.$$
D'autre part, puisque $p_{i_1}, \dots, p_{i_m}$ sont premiers entre eux deux à deux, un entier est multiple de $p_{i_1} \dots p_{i_m}$ si et seulement s'il est multiple de chaque p_{i_j}, $j = 1, \dots, m$. On en déduit que
$$A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}} = A_{p_{i_1} \dots p_{i_m}},$$

soit

$$P(A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}}) = \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_m}},$$

ce qui prouve le résultat voulu.

4. Les événements $\overline{A_{p_1}}, \dots, \overline{A_{p_r}}$ sont également indépendants. On en déduit que

$$P(B) = \prod_{j=1}^{r} P(\overline{A_{p_j}}) = \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

5. Un élément $\bar{x}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x = 1, \dots, n$, est inversible si et seulement s'il est premier avec n. On a donc

$$P(B) = \frac{\phi(n)}{n}$$

ce qui, grâce à la question précédente, donne le résultat voulu.

Exercice 13 - Deuxième lemme de Borel-Cantelli - *L2/L3* - ⋆⋆

1. La fonction ln est concave. Sa courbe représentative est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1. L'inégalité demandée est juste la traduction analytique de cette propriété géométrique.
2. (a) Les événements A_k étant indépendants, il en est de même des événements $\overline{A_k}$, et donc

$$P(E_{n,N}) = \prod_{k=n}^{N} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{N} (1 - P(A_k)).$$

En utilisant l'inégalité précédente, on a

$$\ln\left(P(E_{n,N})\right) \leq -\sum_{k=n}^{N} P(A_k).$$

Puisque $\sum_{k \geq n} P(A_k) = +\infty$, on en déduit le résultat.

(b) Par composition par la fonction exponentielle, $\left(P(E_{n,N})\right)$ tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini (et n reste fixé). Mais, la suite $(E_{n,N})_N$ est décroissante et

$$E_n = \bigcap_{N \geq n} E_{n,N}.$$

Ainsi,

$$P(E_n) = \lim_N P(E_{n,N}) = 0.$$

(c) A s'écrit $A = \bigcap_n \overline{E_n}$. La suite $(\overline{E_n})$ est décroissante et $P(\overline{E_n}) = 1$. Ainsi, on trouve que

$$P(A) = \lim_n P(E_n) = 1.$$

Indépendance de variables aléatoires

Exercice 14 - Déterminant - *L3* - ⋆⋆

Développons le déterminant de M par rapport à la première ligne. On note Δ_j le cofacteur correspondant au terme de la première ligne et de la j-ième colonne. On a donc

$$\det(M)=\sum_{j=1}^n X_{1,j}\Delta_j.$$

On va prendre l'espérance. Remarquons que Δ_j s'obtient à partir de sommes et de produits des $X_{i,k}$, avec $i\geq 2$. En particulier, puisque $X_{1,j}$ est indépendant de ces $X_{i,k}$ (car le couple $(1,j)$ n'est jamais égal au couple $(1,k)$), il est aussi indépendant du cofacteur Δ_j. On a donc

$$\mathbb{E}(\det(M))=\sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_{1,j})\mathbb{E}(\Delta_j).$$

Or, $\mathbb{E}(X_{1,j})=0$. L'espérance du déterminant de M est donc nulle.
Une autre façon de prouver ce résultat aurait été d'écrire la formule donnant le déterminant, et de calculer l'espérance directement à partir de cette formule.

Problèmes ouverts

Exercice 15 - Tests de dépistage - *Deuxième année* - ⋆⋆

Les chiffres donnés ont l'air excellent, mais ils donnent l'inverse de ce que l'on souhaite. Le problème est plutôt le suivant : si une personne a une réponse positive au test, est-elle malade ? C'est la formule de Bayes qui permet de remonter le chemin. Précisément, on note M l'événement "La personne est malade", et T l'événement "le test est positif". Les données dont on dispose sont $P(M)=10^{-4}$, $P(T|M)=0,99$ et $P(T|\bar{M})=0,001$. On cherche $P(M|T)$. La formule de Bayes donne :

$$\begin{aligned}P(M|T)&=\frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M)+P(T|\bar{M})P(\bar{M})}\\&=\frac{10^{-4}\times 0,99}{10^{-4}\times 0,99+10^{-3}\times 0,9999}\\&\simeq 0,09.\end{aligned}$$

C'est catastrophique ! La probabilité pour qu'une personne positive au test soit effectivement malade est inférieure à 10%. Le test engendre donc beaucoup de faux-positifs (personnes positives au test, mais non malades). C'est tout le problème des maladies assez rares : les test de dépistage doivent être extrêmement fiables. Remarquons par ailleurs ici une bonne illustration du vieil adage des statisticiens : on peut faire dire n'importe quoi aux chiffres, cf le laboratoire pharmaceutique !

Exercice 16 - Menteur ! - *Deuxième année* - ⋆⋆⋆

Soit x la proportion de tricheurs dans la population. On note respectivement P,F,H,T les événements "le joueur obtient pile", "le joueur obtient face", "Le joueur est honnête", "le joueur est un tricheur". Il semble raisonnable de convenir que $P(P|H)=1/2$ et $P(F|H)=1/2$ et $P(P|T)=1$ (un tricheur fait vraiment ce qu'il veut !). On cherche donc $P(T|P)$. De la formule de Bayes, on déduit :

$$P(T|P)=\frac{P(P|T)P(T)}{P(P|T)P(T)+P(P|H)P(H)}=\frac{x}{x+1/2(1-x)}=\frac{2x}{x+1}.$$