EXEMPLES D'ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DE SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1

Soient α et β deux réels.

Le but de cet exercice est l'étude des séries $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. (Séries de Bertrand)

1) Étude du cas $\alpha > 1$. On pose $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$.

   Démontrer : $$u_n = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

   En déduire la nature de la série de Bertrand dans ce cas.

2) Étude du cas $\alpha < 1$.

   Démontrer : $$\exists B \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant \frac{B}{n})$$

   En déduire la nature de la série de Bertrand dans ce cas.

3) Étude du cas $\alpha = 1$.

   a) On considère l'application $f_\beta : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ sur $]1\,;+\infty[$.

      Démontrer : $$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ f_\beta \text{ décroissante sur } [n_0, +\infty[$$

   b) On suppose $\beta = 1$. En comparant avec une intégrale, démontrer que la série de Bertrand diverge.

   c) On suppose $\beta > 1$. En comparant avec une intégrale, démontrer que la série de Bertrand converge.

   d) Étudier le cas $\beta < 1$.

Commentaire :

Cet exercice classique traite des séries de Bertrand. Il a l'avantage, d'utiliser diverses méthodes pour étudier une série (comparaison, avec une série de Riemann, comparaison avec une intégrale)

Exercice 2

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$ (Utilisation du TSCSA et des séries géométriques)

2. En déduire : $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

Commentaire : cet exercice a pour but l'étude d'une série alternée. Grâce à une expression de sa somme, on retrouve quelques résultats classiques.

Exercice 3

Soit $\theta \in \,]0, 2\pi[$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta}}{n}$ est convergente. (Séries à termes complexes - Utilisation de la règle d'Abel)

2. Étudier de deux manières différentes la limite de la suite $\left(I_n(\theta)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$I_n(\theta) = \int_\pi^\theta \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}kt}\,\mathrm{d}t$$

(Utilisation du lemme de Lebesgue)

3. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Commentaire : cet exercice a pour but l'étude d'une série à termes complexes. On utilise la règle d'Abel.

Exercice 4

Démontrer les équivalents suivants :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{pour } 0 \leqslant \alpha < 1$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \quad \text{pour } \alpha > 1$$

Commentaire : deux méthodes possibles, soit comparer à une intégrale, soit utiliser des séries télescopiques.

Exercice 5

Démontrer la règle de Raabe-Duhamel :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **strictement positifs** telle que :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]1 \,;+\infty[\text{ tels que : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

1. Si $\alpha \leqslant 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.
2. Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Application : étude de la convergence de la série de terme général : $u_n = \dfrac{2\times 4\times \ldots\times(2n)}{3\times 5\times\ldots\times(2n+1)}$

Exercice 6 *Formule de Stirling*

1) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$. (Intégrales de Wallis)

   a) Calculer explicitement I_{2p} et I_{2p+1}.

   b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$.

   c) Démontrer que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$.

   d) Démontrer que la suite $((n+1)I_nI_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{\mathbf{e}}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) On pose $v_n = \ln(u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. En étudiant $v_{n+1} - v_n$, démontrer que la série de terme général v_n converge. En déduire que la suite (u_n) converge vers une certaine limite ℓ.

   b) À l'aide de la question 1)d), démontrer que : $\ell = \sqrt{2\pi}$.

   c) En déduire la formule de Stirling : $n\,! \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

Exercice 1

1) On a, pour tout $n \geqslant 2$: $$n^\gamma u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln n)^{-\beta} = 0$ puisque $\dfrac{1-\alpha}{2} < 0$. C'est à dire :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow n^\gamma u_n \leqslant \varepsilon)$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant \frac{1}{n^\gamma})$$

Comme $\gamma > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\gamma}$ converge.

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série de terme général u_n.

Remarque : dans le cas où β est positif, du fait de la décroissance de l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^\beta}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut faire le raisonnement plus rapide suivant :

On a, pour tout $n \geqslant 2$: $$n^\alpha u_n = \frac{1}{(\ln n)^\beta} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^\beta}$$

En posant $M = \dfrac{1}{(\ln 2)^\beta}$: $$u_n \leqslant \frac{M}{n^\alpha}$$

Or, la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge (car $\alpha > 1$).

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série de terme général u_n.

Conclusion : la série de Bertrand converge.

2) On a, pour tout $n \geqslant 2$: $$n\, u_n = \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta}$$

Or, $1 - \alpha > 0$, donc : $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty$$

Par conséquent, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $$n \geqslant N \Rightarrow n\, u_n \geqslant M$$

C'est-à-dire : $$n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant \frac{M}{n}$$

Or, la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Du test de comparaison des séries à termes positifs, on déduit la divergence de la série de terme général u_n.

Conclusion : la série de Bertrand diverge.

3) a) Étudions le sens de variation de l'application $f_\beta : t \longmapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ sur $]1, +\infty[$:

f_β est dérivable et $$f'_\beta(t) = -\frac{(\ln t)^\beta + \beta(\ln t)^{\beta-1}}{t^2(\ln t)^{2\beta}} = -\frac{\ln t + \beta}{t^2(\ln t)^{\beta+1}}$$

On a : $$f'_\beta(t) \leqslant 0 \iff \ln t + \beta \geqslant 0 \iff t \geqslant \mathbf{e}^{-\beta}$$

Par conséquent, f_β est décroissante sur $]\mathbf{e}^{-\beta}, +\infty[$.

Posons $n_0 = \max(3, E(\mathbf{e}^{-\beta}) + 2)$.

Ainsi, f_β est décroissante sur $[n_0 - 1, +\infty[$.

Et pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$$

D'où, par sommation, pour n allant de n_0 à N :

$$\int_{n_0}^{N+1} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leqslant \int_{n_0-1}^{N} \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$$

Par changement de variable $u = \ln t$ (et donc $t = \mathbf{e}^u$, $\mathrm{d}t = \mathbf{e}^u\,\mathrm{d}u$) dans les intégrales :

$$\int_{\ln(n_0)}^{\ln(N+1)} \frac{1}{u^\beta}\,\mathrm{d}u \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leqslant \int_{\ln(n_0-1)}^{\ln(N)} \frac{1}{u^\beta}\,\mathrm{d}u \qquad (*)$$

Nous pouvons maintenant répondre aux questions b), c) et d) :

b) $\beta = 1$. Dans ce cas, on obtient :

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(n_0)) \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leqslant \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(n_0 - 1))$$

Or, la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n_0))$ diverge.

Il en va donc de même de la série de Bertrand.

c) $\beta > 1$. Dans ce cas, on obtient :

$$\sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leqslant \left[\frac{1}{(1-\beta)u^{\beta-1}}\right]_{\ln(n_0-1)}^{\ln(N)}$$

$$\sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \leqslant \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1}{(\ln(n_0-1))^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln(N))^{\beta-1}}\right)$$

Or, comme $\beta > 1$, $\dfrac{1}{(\ln(N))^{\beta-1}}$ tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Les sommes partielles sont donc majorées donc la série de Bertrand converge.

d) $\beta < 1$. Dans ce cas, on peut procéder comme ci-dessus en utilisant l'autre inégalité de $(*)$ pour prouver que les sommes partielles divergent. Mais il y a plus simple !

$$\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geqslant \frac{1}{n\ln n}$$

Et d'après le cas $\beta = 1$, la série de Bertrand diverge.

RÉSUMÉ

La série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$

- converge si et seulement si ($\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$))
- diverge si et seulement si ($\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 1$))

Exercice 2

1. On a :
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = (-1)^n\, u_n$
   - la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   - la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0

   D'après le théorème sur les séries alternées, on en déduit la convergence de la série de terme général u_n.

   Calculons, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{\alpha n+1} = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-t^{\alpha})^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{1-(-t^{\alpha})^{N+1}}{1+t^{\alpha}}\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^{\alpha}} - (-1)^{N+1}\int_0^1\frac{t^{\alpha(N+1)}}{1+t^{\alpha}}\mathrm{d}t$$

   On a donc :

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{\alpha n+1} - \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^{\alpha}}\right| \leqslant \int_0^1\frac{t^{\alpha(N+1)}}{1+t^{\alpha}}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\alpha(N+1)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\alpha(N+1)+1}$$

   D'où, par passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^{\alpha}}$$

2. Pour $\alpha = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

   Pour $\alpha = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \text{Arctan } 1 - \text{Arctan } 0 = \frac{\pi}{4}$$

   Pour $\alpha = 3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

   Considérons la fraction rationnelle :

$$F(t) = \frac{1}{1+t^3}$$

   On décompose F en éléments simples :

$$F(t) = \frac{1}{1+t^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1-t+t^2}$$

   En multipliant par $(1+t)$ et en spécialisant $t = -1$, on obtient A :

$$A = F(t)(1+t)\,|\,(t=-1) = \frac{1}{3}$$

De plus : $$\lim_{t\to\infty} tF(t) = A + B = 0 \text{ donc } B = -\frac{1}{3}$$

$$F(0) = A + C = 1 \text{ donc } C = \frac{2}{3}$$

D'où : $$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{1-t+t^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-\frac{1}{2}}{1-t+t^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right)$$

En posant $u = t - \frac{1}{2}$ dans le troisième terme, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\ln\left|t^2 - t + 1\right|\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln 2 - 0 + \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}$$

D'où : $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

Les amateurs pourront encore étudier le cas $\alpha = 4$.

Exercice 3

Rappelons la règle d'Abel pour les séries :

Soit (ε_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0.

Soit (a_n) une suite de complexes telle que :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{p=0}^{n} a_p\right| \leqslant M$$

(Majoration des sommes partielles)

Cette règle existe aussi pour les intégrales.

Alors la série de terme général $\varepsilon_n a_n$ est convergente.

Démonstration de la règle d'Abel :

Posons : $$A_n = \sum_{p=0}^{n} a_p$$

Ainsi : $$A_0 = a_0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_p = A_p - A_{p-1}$$

Posons également : $$S_n = \sum_{p=0}^{n} \varepsilon_p a_p$$

Nous allons montrer que la suite (S_n) converge :

$$S_n = \varepsilon_0 a_0 + \sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p (A_p - A_{p-1})$$

$$S_n = \varepsilon_0 a_0 + \sum_{p=1}^{n} \varepsilon_p A_p - \sum_{p=0}^{n-1} \varepsilon_{p+1} A_p$$

$$S_n = \varepsilon_n A_n + \sum_{p=0}^{n-1} (\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}) A_p$$

Cette dernière écriture est souvent appelée "transformation d'Abel". On notera l'analogie avec une intégration par parties.

- La suite (A_n) est bornée et la suite (ε_n) converge vers 0 donc la suite $(\varepsilon_n A_n)$ converge aussi vers 0.
- De plus : $$\sum_{p=0}^{n-1} |\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1}||A_p| \leqslant M(\varepsilon_0 - \varepsilon_n) \leqslant M\varepsilon_0$$

La série de terme général $(\varepsilon_p - \varepsilon_{p+1})A_p$ est donc absolument convergente, donc convergente (car $\mathbb{C}$ est complet)

On en déduit la convergence de la suite (S_n), c'est-à-dire la convergence de la série de terme général $\varepsilon_n a_n$.

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $$a_n = \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \frac{1}{n}$$

   Il est clair que la suite (ε_n) est strictement positive, décroissante et tendant vers 0.

   Montrons que les sommes $\left|\sum_{p=1}^{n} a_p\right|$ sont majorées :

$$\sum_{p=1}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}p\theta} = \sum_{p=1}^{n} \left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^p \overset{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \neq 1}{=} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta} - 1)}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - 1} = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}n\theta}{2}}\left(\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}n\theta}{2}} - \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}n\theta}{2}}\right)}{\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\theta}{2}}\left(\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\theta}{2}} - \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\theta}{2}}\right)} = \frac{\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}(n+1)\theta}{2}} \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

   D'où : $$\left|\sum_{p=1}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}p\theta}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

   D'après la règle d'Abel, on déduit la convergence de la série de terme général $\dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta}}{n}$.

2. Rappelons le lemme de Lebesgue pour une fonction f de classe C^1.

> Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit λ un réel.
>
> Alors $$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   Démonstration du lemme de Lebesgue :

   Les applications f et $t \mapsto \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}$ étant de classe C^1 sur $[a, b]$, on a, par une intégration par parties :

$$\int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t}}{\mathbf{i}\lambda}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t}}{\mathbf{i}\lambda} f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathbf{i}\lambda}\left[f(b)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda b} - f(a)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda a} - \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f'(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

   D'où :

$$\left|\int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]$$

   Notons $M = \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)|$ (existe car, par hypothèse, f' est continue sur le compact $[a, b]$)

Ainsi :

$$0 \leqslant \left| \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \left[|f(b)| + |f(a)| + (b-a) M \right]$$

D'où :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \mathbf{e}^{\mathbf{i}\lambda t} f(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Fin de la démonstration du lemme de Lebesgue.

Appliquons maintenant ce lemme. On a vu que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}kt} = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}nt} - 1)}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1} = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)t}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1} - \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1}$$

Or, l'application $t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1}$ est de classe C^1 sur $[\pi, \theta]$ (ou $[\theta, \pi]$) puisque $\theta \in \,]0, 2\pi[$.

Donc, d'après le lemme de Lebesgue :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\pi^\theta \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)t}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1} \mathrm{d}t = 0$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(\theta) = \int_\theta^\pi \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1} \mathrm{d}t$$

Et comme :

$$\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}t} - 1} = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{t}{2}}}{2\mathbf{i}\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2\mathbf{i}} \operatorname{cotan}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

On obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(\theta) = \frac{1}{\mathbf{i}} \left[\ln\left(\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right) \right]_\theta^\pi + \frac{\pi - \theta}{2} = \mathbf{i} \ln\left(\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{\pi - \theta}{2} \qquad (1)$$

D'autre part,

$$I_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \int_\pi^\theta \mathbf{e}^{\mathbf{i}kt}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}kt}}{\mathbf{i}k} \right]_\pi^\theta = \frac{1}{\mathbf{i}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta}}{k} - \frac{1}{\mathbf{i}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Par passage à la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(\theta) = \frac{1}{\mathbf{i}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta}}{k} + \frac{1}{\mathbf{i}} \ln 2 \qquad (2)$$

3. De (1) et (2), on déduit :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta}}{k} = -\ln\left(\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right) + \mathbf{i}\,\frac{\pi - \theta}{2} - \ln 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta}}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right) + \mathbf{i}\,\frac{\pi - \theta}{2}$$

En séparant parties réelles et parties imaginaires :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

Exercice 4

① **Équivalent de la somme partielle de la série harmonique.**

Comme $f :]0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t}$ est décroissante, on peut écrire :

$\forall k \in [\![2, +\infty[\![, \forall t \in [k, k+1],$ $$\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t-1}$$

En intégrant pour t allant de k à $k + 1$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

En sommant pour k allant de 2 à n :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\ln(n+1) - \ln 2 \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n$$

D'où : $$\ln(n+1) + 1 - \ln 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$$

Or, $\ln n \leqslant \ln(n+1)$ et $0 \leqslant 1 - \ln 2$, d'où :

$$\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$$

Remarque : on peut retrouver ce résultat grâce à la série télescopique de terme général $u_n = \ln(n+1) - \ln n$.

En effet, on a : $$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc : $$u_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$$

Or, la série de terme général $\dfrac{1}{k}$ est divergente.

Du théorème de sommation partielle des équivalents pour les séries divergentes, on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Et comme, $$\sum_{k=1}^{n} u_k = \ln(n+1)$$

On a bien : $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

② **Équivalent de la somme partielle de la série de Riemann dans le cas $0 \leqslant \alpha < 1$.**

Avec $f :]0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$, on obtient, comme ci-dessus (f étant décroissante car $0 \leqslant \alpha$) :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{2^{1-\alpha}}{\alpha-1} - \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} - \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

En divisant par $\dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$:

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{1-\alpha} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}{\dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}} \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1$$

Comme $1 - \alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{1-\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = 1$

Du théorème des gendarmes, on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}{\dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}} = -1$

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ (0 \leqslant \alpha < 1)\end{gathered}}$$

<u>Remarque</u> : on peut retrouver ce résultat grâce à la série télescopique de terme général $u_n = n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}$.

En effet, on a :

$$u_n = n^{1-\alpha}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right) = n^{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Donc :

$$u_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$$

Or, la série de terme général $\dfrac{1-\alpha}{k^\alpha}$ est divergente.

Du théorème de sommation partielle des équivalents pour les séries divergentes, on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = (1-\alpha) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Et comme,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = n^{1-\alpha}$$

On a bien :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

③ **Équivalent du reste d'ordre *n* de la série de Riemann dans le cas $\alpha > 1$.**

Dans ce cas, on sait que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ converge.

Notons : $$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$$

Toujours par décroissance de f : $]0\,;+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t)=\frac{1}{t^{\alpha}}$, on obtient :

$\forall k\in [\![2,+\infty[\![,\ \forall t\in [k, k+1],$ $$\frac{1}{t^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{(t-1)^{\alpha}}$$

En intégrant pour t allant de k à $k+1$:

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

En sommant pour k allant de $n+1$ à N :

$$\int_{n+1}^{N+1}\frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant \int_{n}^{N}\frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

En faisant tendre N vers l'infini (toutes les sommes étant convergentes) :

$$\int_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

D'où : $$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Et comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha-1}=1$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\\ (\alpha>1,\ n\geqslant 1)\end{array}}$$

<u>Remarque</u> : on peut retrouver ce résultat grâce à la série télescopique de terme général $u_n=\frac{1}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}$.

En effet, on a : $$u_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1-\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Donc : $$u_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{k^{\alpha}}$$

Or, la série de terme général $\frac{1-\alpha}{k^{\alpha}}$ est convergente.

Du théorème de sommation des équivalents (pour les restes de séries convergentes), on déduit :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k = (1-\alpha)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$$

Et comme, $$\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k = -\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On a bien : $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

<u>Interprétation</u> : prenons $\alpha = 1$ et $n = 100$

Lorsqu'on calcule la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2} \simeq 1{,}63498$ pour approximer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ $\left(= \dfrac{\pi^2}{6}\right)$, l'erreur commise sera voisine de $\dfrac{1}{100}$. (Et même inférieure d'après un encadrement vu plus haut)

Exercice 5

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $$v_n = n^\alpha u_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\right)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right) \text{ où } \gamma = \min(2, \beta)$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

C'est-à-dire : $$\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geqslant N \Rightarrow \left|\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)\right| \leqslant \frac{C}{n^\gamma}\right)$$

Or, $\gamma \in\,]1 ; +\infty[$, donc la série de terme général $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge absolument donc converge.

Mais, par télescopage : $$\sum_{p=1}^{n} \ln\left(\frac{v_{p+1}}{v_p}\right) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_1)$$

Donc la suite $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\mathbf{e}^\ell$.

Par conséquent : $$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha} \quad (\text{où } K = \mathbf{e}^\ell)$$

D'où le résultat cherché. (En utilisant le critère de l'équivalent avec une série de Riemann)

<u>Remarque</u> : si $\alpha \leqslant 0$ alors, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, donc (u_n) croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc la suite (u_n) ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

<u>Application</u>

On a : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} \to 1$$

Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure.

Mais : $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{2n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le critère de Raabe-Duhamel avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on déduit que la série diverge.

Exercice 6 *Formule de Stirling*

1. a) On a immédiatement : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = 1$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a par IPP : $(u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t)$

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \cos t \,\mathrm{d}t = \Big[(\cos t)^{n+1} \sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\sin t)^2 \,\mathrm{d}t$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$$\text{(Variante : } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ pour tout } n \geqslant 2\text{)}$$

On en déduit immédiatement : $I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}$; $I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$; $I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{16}$

Formule générale :

Si n pair $(n = 2p)$ $$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} I_0$$

$$I_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} = \frac{C_{2p}^{p}\pi}{2^{2p+1}}$$

Si n impair $(n = 2p+1)$ $$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{2}{3} I_1$$

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$

En intégrant pour t allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$: $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$

En conséquence, la suite (I_n) est décroissante.

On a donc : $0 \leqslant I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$

Et comme $I_{n+2} > 0$: $1 \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+2}}$

c) On a vu que : $$\frac{I_n}{I_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1} \qquad (1)$$

D'où : $$1 \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \frac{n+2}{n+1}$$

Par encadrement, on en déduit que $\dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$ admet une limite égale à 1 en $+\infty$.

Autrement dit : $$I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1} \qquad (2)$$

d) Montrons enfin que la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)I_n\, I_{n+1}$ est constante :

$$u_{n+1} = (n+2)\, I_{n+1}\, I_{n+2} \overset{(1)}{=} (n+1)\, I_n\, I_{n+1} = u_n.$$

La suite (u_n) est donc bien constante. Et comme $u_0 = I_0\, I_1 = \dfrac{\pi}{2}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

En multipliant l'équivalent (2) par $(n+1)I_n$:

$$(n+1)\, I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

D'où : $$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

On retiendra ce résultat très utile :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

2. a) Il est clair que : $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)\,!}{n\,!} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} \times \mathbf{e} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) = \ln\left(\mathbf{e} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or, on sait que : $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

D'où :

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge. Donc la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ également.

Il en va donc donc de même de la suite (v_n) et donc de la suite (u_n).

Et comme $u_n = \mathbf{e}^{v_n}$, la suite (u_n) converge vers un certain réel $\ell > 0$. (Puisque (v_n) converge)

b) On a donc : $$u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$$

C'est-à-dire : $$n! \underset{+\infty}{\sim} \ell \left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \sqrt{n}$$

On détermine ℓ à l'aide d'un équivalent connu dans lequel intervient des factorielles, comme par exemple l'équivalent des intégrales de Stirling :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$$

On a vu les deux résultats suivants :

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

En conséquence : $$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell\,(2n)^{2n}\mathbf{e}^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}(\ell\, n^n\mathbf{e}^{-n}\sqrt{n})^2}\frac{\pi}{2}$$

D'où $$\ell \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$$

Et par passage à la limite lorsque *n* tend vers l'infini :

$$\ell = \sqrt{2\pi}$$

Conclusion : $$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathbf{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$