Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques

http://www.math-fastef.org/
fastef.departement-maths@ucad.edu.sn

2017-2018

Durée : 04 heures

CONCOURS D'ENTREE A LA SECTION F1A ET A LA SECTION F1B

Nota bene : *Les quatre parties seront traitées sur des feuilles différentes et chaque partie sera notée sur 20 points.*

Partie 1 : Probabilités et statistique (20 points)

Exercice 1 : *On rappelle que pour toute suite croissante ou décroissante d'événements E_n, la limite de la probabilité de E_n est égale à la probabilité de la limite de E_n.*

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω, c'est-à-dire telle que $X(\Omega)$ est dénombrable. Soit F sa fonction de répartition.

1) Vérifier que F est croissante.

2) Démontrer que F est continue à droite en tout réel. (*On rappelle qu'une fonction f est continue au point x, si pour toute suite x_n qui converge vers x alors $f(x_n)$ converge vers f(x)*)

3) Justifier que la limite de F en plus l'infini est égale à 1.

Exercice 2 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne $\boldsymbol{m}$ et de variance $\boldsymbol{s}$

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable U définie par : $U = \dfrac{X-m}{s}$

2) Démontrer que la variable Y définie par $Y= U^2$, suit une loi $\gamma(a;b)$ dont on précisera les valeurs de a et b.

3) Soit Z la variable aléatoire définie par : $Z= logY$. Quelle est la loi de Z ?

4) Soient X_1 et X_2, deux variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi que Y. Déterminer la densité de probabilité de la variable $T =X_1 + X_2$.

5) On admet que T suit une loi $\gamma(1;b)$, où b est le réel défini à la question 2). Quelle est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi que Y ? Justifier.

Partie 2 : Géométrie (20 points)

On rappelle que la fonction scalaire de Leibniz est l'application $\varphi: E \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} aiMA_i{}^2$ et on pose $m = \sum_{i=1}^{n} ai$.

1. Démontrer que :
   a. Si $m = 0$ alors $\varphi(M) = \varphi(M') + 2\overrightarrow{MM'}.\vec{V}$ avec $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{cte}$.
   b. Si $m \neq 0$ alors $\varphi(M) = \varphi(G) + mMG^2$ avec G le barycentre du système de points pondérés $\{(A_{i,}a_i)\ 1 \leq i \leq n\}$.
2. Applications :
   a. I est le milieu de $[AB]$, démontrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MB^2 = \frac{AB^2}{2} + 2IM^2$ (Formule de la médiane).
   b. $ABCD$ est un quadrilatère convexe, J est le milieu de $[AC]$ et K le milieu de $[BD]$. Montrer que $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4JK^2$.
   c. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Partie 3 : Analyse (20 points)

On considère la fonction L définie par : $L(x) = \int_1^x \frac{lnt}{1-t}dt$

1. Déterminez le domaine de définition de la fonction L.
2. Justifiez que la fonction est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ puis donnez l'expression de sa dérivée.
3. La fonction L est elle continue en 0 ? Justifiez.
4. Dans cette question, on se propose de calculer $L(0)$.
   a) Démontrez que $L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$
   b) Justifiez que, pour tout entier $k \geq 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-kx}\,dx$ est convergente et calculez sa valeur.
   c) Soit (S_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} xe^{-kx}\,dx$.
   Démontrez que : $L(0) - S_n = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x-1}dx$.
   d) Déduisez en que : $0 \leq L(0) - S_n \leq \frac{1}{n}$.
   e) En admettant que $\sum_{k\geq1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, démontrez que $L(0) = \frac{\pi^2}{6}$.
   f) Démontrez que $L(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Partie 4 : Algèbre et Logique (20 points)

Exercice 1 (8 points)

Exercice 1 (8 points)

On pose G = IR / { $\sqrt{2}$ }.

On suppose que la loi T définie dans G par : x T y = xy – (x + y-1) $\sqrt{2}$ +2 est associative.

1°/ Montrer que (G,T) est un groupe.

2°/ Les ensembles H_1= Q / { $\sqrt{2}$ } ; H_2 =Z / { $\sqrt{2}$ }, sont-ils des sous-groupes de G ?

3°/ G/H_1 est-il un sous-groupe distingué de G ?

4°/ Soit f l'application de G dans G qui, à tout x, on associe : $f(x) = \dfrac{x\sqrt{2}-1}{x-\sqrt{2}}$, f est-il un automorphisme de groupe, si oui déterminer f^{-1}.

Exercice 2 (4 points)

Mbaye DIOP a offert des mangues à ses enfants. Il a 7 enfants avec Yama THIAM sa première épouse, 5 avec sa deuxième Sira BA et 3 avec sa troisième épouse Félicité NGOM. Il a donc 15 enfants. Néné DIOP, sa fille ainée, a mangé 13 mangues, et chacun des autres enfants en a mangé moins.

Trouve, si possible, parmi les énoncés suivants, ceux qui s'ensuivent logiquement de l'information ci-dessus.

A. Il reste 2 mangues pour les autres enfants.

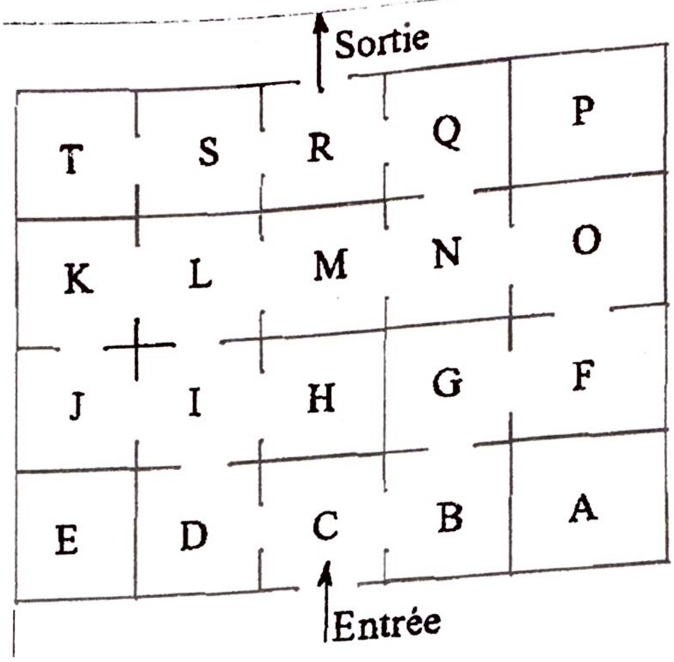
B. Au moins deux enfants ont mangé chacun au moins deux mangues.

C. Au moins deux enfants ont mangé le même nombre de mangues.

D. Au moins un enfant n'a pas mangé de mangues.

Exercice 3 (8 points)

Soit le labyrinthe ci-dessous, les pièces sont nommées A, B, C ...



Pour toute personne, si elle a traversé le labyrinthe de l'entrée à la sortie, elle n'est pas *passée* par la même porte deux fois.

Pour chacune des six phrases ci-dessus, dire si elle est VRAIE ou si elle est FAUSSE et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Pour toute personne X qui l'a traversé :

Phrase n°1 : « X est passée par P »

Phrase n°2 : «X est passée par N »

Phrase n°3 : «X est passée par M »

Phrase n°4 : «Si X est passée par O, alors X est passée par F »

Phrase n°5 :«Si X est passée par K, alors X est passée par L »

Phrase n°6 : «Si X est passée par L, alors X est passée par K »

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques
http://www.math-fastef.org/
fastef.departement-maths@ucad.edu.sn

Durée : 4 heures

Concours d'entrée

Sections : F1A et F1B$_1$

Nota bene : *Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation et de la clarté des solutions proposées ainsi que de la rigueur dans les démarches entreprises.*

Partie 1 : Algèbre et Logique *(20 points)*

1°/ L'ensemble des translations muni de la loi o est-il un sous-groupe distingué du groupe des déplacements du plan ? (Justifier votre réponse). (4 pts)

2°/ L'ensemble des rotations du plan muni de la loi o est-il un sous-groupe du groupe des déplacements du plan ? (Justifier votre réponse). (4 pts)

3°/ P et Q étant deux assertions, dites si la proposition ci-après est vraie « Pour que $\neg(P \wedge Q)$ soit fausse il faut que l'une au plus des deux assertions P ou Q soit fausse ». (Justifier votre réponse). (2 pts)

4°/ La fonction ln (logarithme népérien) est-elle un isomorphisme de groupes ; un isomorphisme d'anneaux ? (Justifier votre réponse). (2 pts)

5°/ Dans le programme de seconde S le produit scalaire est définie comme suit :

« A, B et C sont trois points du plan, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le réel noté de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, tel que :

- si A=B alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.
- si A≠B alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) ».

Rappeler la définition d'une forme bilinéaire et dites si le produit scalaire est une forme bilinéaire (Justifier votre réponse). (4 pts)

6°/ Deux étudiants Ngom et Touré discutent sur le sens de l'implication. On vous demande de préciser, parmi les affirmations qu'ils ont faites, celles qui sont correctes et de corriger les erreurs qu'ils auraient éventuellement commises. (4 pts)

-Ngom : « Pour que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ soit vraie il suffit que l'une au moins des deux assertions soit vraie ».

-Touré : « Non, je ne suis pas d'accord. Vous pensez que la condition est suffisante mais cela n'est pas le cas. Elle est quand même nécessaire. »

Soit F la fonction numérique à variable réelle définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt$.

1. Montrez que la fonction F est définie sur IR tout entier et est paire. **(2 pts)**
2. Montrez que F est dérivable sur IR puis calculez F(1) et F'(x). **(3 pts)**
3. Etudiez le sens de variation de F sur l'intervalle $]0; +\infty[$. **(2 pts)**
4. a) Donnez le développement limité à l'ordre 4 de F en 0 **(2 pts)**

   b) Montrez que le développement limité de F à l'ordre 2 en 1 est : **(2 pts)**

$$F(x) = ln2 \cdot (x-1) + \left(\frac{3 - ln2}{2}\right)(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1.

5. Montrez que si x>0, on a : $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 3(lnx)^2 = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t^2)}{t} dt$ **(2 pts)**
6. a) Démontrez que pour tout réel x >1, on a l'égalité suivante : **(2 pts)**

$$F(x) - 3(lnx)^2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

   b) Déduisez en, pour tout réel x >1, l'encadrement suivant : **(2 pts)**

$$3(lnx)^2 \leq F(x) \leq 3(lnx)^2 + \frac{1}{2x^2}$$

   c) Que représente alors dire de la courbe de $f : x \to 3(lnx)^2$ pour la courbe de F ? **(1 pt)**

7. Tracez la courbe de $x \to 3(lnx)^2$ puis celle de F dans un même repère. **(2 pts)**

Exercice 1

On considère une série double (X, Y). On effectue un ajustement linéaire de Y en X par la méthode des moindres carrés. Soit Z la série des valeurs estimées de y à partir de la droite de régression de Y en X. On considère E la série des erreurs issues de l'estimation de Y par Z. On appelle R le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

1) Montrer que : Var (E) = Var (Y) - Var (Z).
2) **En déduire que R appartient à [-1 ; 1].**
3) *On estime que la corrélation entre X et Y est forte si la série des erreurs est au moins deux fois moins dispersée que celle de Y.*

En déduire un critère de décision pour une corrélation forte.

Exercice 2

1) De combien de façons différentes peut-on répartir équitablement 15 boules numérotées de 1 à 15 dans 5 urnes discernables ?
2) De combien façons peut-on les répartir de telle sorte que les boules numérotées 1 et 2 soient dans la même urne ?
3) De combien de façons différentes peut-on ranger p objets indiscernables dans n tiroirs numérotés de 1 à n. Chaque tiroir pouvant contenir de 0 à p objets ?

Partie 4 : Géométrie *(20 points)*

Soit ABC un triangle non plat dans un plan affine euclidien, A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]. On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC.

1) Démontrer qu'il existe un unique cercle ($\mathcal{C}$) passant par les points A, B et C (*cercle circonscrit*). On désigne par O le centre de ce cercle. **(4pts)**
2) Démontrer que le triangle A'B'C' se déduit du triangle ABC par une homothétie h que l'on précisera. Quel est le centre de gravité du triangle A'B'C' ? **(5pts)**
3) Quelles sont les hauteurs du triangle A'B'C'? **(3pts)**
4) Démontrer que les hauteurs du triangle ABC sont sécantes au point H = h^{-1} (O). **(5pts)**
5) Que peut-on dire des points H, G et O ? (3pts)

Université Cheikh Anta Diop

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

2014-2015

Département de mathématiques

http://www.math-fastef.org/

fastef.departement-maths@ucad.edu.sn

Durée : 04 heures

TEST D'ENTREE A LA SECTION F1A ET A LA SECTION F1B

Nota bene : *Les quatre parties seront traitées sur des feuilles différentes et chaque partie sera notée sur 20 points.*

Partie 1 : Algèbre et Logique

Exercice 1

(1) Montrer que la fonction Ln est un isomorphisme du groupe $(IR_+^*, \cdot)$ vers le groupe $(IR, +)$.

(2) Monter que l'ensemble des translations muni de la loi o est un sous-groupe distingue du groupe des déplacements du plan.

(3) On pose $H_1 = 48Z + 36Z$ et $H_2 = 48Z \cap 36Z$ (Z étant l'ensemble des entiers relatifs). montrer qu'ils existent deux entiers naturels n et m tels que $H_1 = nZ$ et $H_2 = mZ$

(4) Résoudre dans Z/7Z l'équation $3x+5 = 0$

(5) Un étudiant dit à son camarade « *L'ensemble $\{(x, y, z) \in IR^3 / y = 3x\}$ est un sous espace vectoriel de IR^3 et il est de dimension 1 car $y = 3x$ est une équation de droite. Or une droite est un sous espace de IR^3 de dimension 1.* »

Justifiez cette affirmation si vous estimez qu'elle est vraie et corrigez-la si vous pensez qu'elle est fausse.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dites si la phrase est vraie ou si elle fausse et donner sa négation.

(1) Certaines fonctions numériques à variable réelle sont dérivables en 0 et ne sont pas définie 0.

(2) Toutes les applications du plan sont des transformations ou sont injectives.

(3) Si un nombre entier est divisible par p, alors il se termine par p ($p \in IN$)

(4) Si un nombre entier se termine par p alors il est divisible par p ($p \in IN$).

(5) Soient A, B et C trois points du plan, C1 le cercle de diamètre [AB] et C2 un cercle de diamètre A C. C1 et C2 sont sécants.

Partie 2 : Géométrie

On se place dans le plan affine euclidien P. Étant donné un repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $I(1, 0)$, $J(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $K(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ et une ellipse de centre 0 et d'équation $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$.

1) Montrer que $d = e = 0$

2) Montrer que le cercle circonscrit au triangle IJK est l'unique ellipse de centre 0 contenant les points I, J et K

Partie3 : Analyse

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée

1) Montrez que la fonction $F : x \to \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$ est bien définie pour $x > 0$
2) Montrez que F est de classe C^0 sur $]0, +\infty[$
3) On suppose que f admet une limite $l \neq 0$ en $+\infty$ et soit ε un reel strictement positif
   a) Montrez que $\exists B > 0 / \forall x \geq B, \left|F(x) - \frac{l}{x}\right| \leq \frac{1}{x}((M + |l|)(1 - e^{-xB}) + \varepsilon)$ ou M est un majorant quelconque de f
   b) Déduisez-en un équivalent un équivalent de F en 0 à droite
4) On suppose que f est T-periodique et $\int_0^T f(u)du \neq 0$.
   a) Montrez que $F(x) = \frac{1}{1-e^{-xT}} \int_0^T e^{-xu} f(u)du$.
   b) Déduisez en que, en 0^+, $F(x) \sim \frac{1}{xT} \int_0^T f(u)du$

Partie4 : Statistique

Une entreprise est composée de 2 établissements qui mènent des activités différentes centralisées au niveau d'un même service qui aide souvent le chef d'entreprise dans ses prises de décision se déclinant en termes financiers.

1) L'établissement A fabrique des logiciels de gestion destinés aux PME

La demande X de logiciels suit la loi de probabilité suivante (on admet que les seules valeurs possibles de X sont celles qui sont indiquées)

valeur possible de X	100	200	300	400	500	600
Probabilité	0.10	0.25	0.35	0.15	0.10	0.05

Les coûts fixes sont estimés à 15000 euros. Pour chaque logiciel vendu, le coût marginal (gravure et emballage du cédérom) est de 5 euros. Le prix de vente auquel peut être vendu le logiciel est estimé à 100 euros.

Quel est le calcul à faire pour savoir si l'opération est bénéficiaire ?

2) L'établissement B édite une revue sur les jeux vidéo et la micro informatique. Une enquête effectuée a permis d'évaluer que le nombre d'abonnements X suit la loi de probabilité suivante :

valeur possible de X	4000	8000	12000	16000	20000
Probabilité	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

a). Quel est le nombre moyen espéré d'abonnements et son écart type ?

b) La direction de l'entreprise commande une prévision de la situation financière qui résulterait du lancement de la revue en fixant un prix de l'abonnement annuel au prix du marché, soit 29.5 euros. La personne chargée de la prévision remet au PDG deux résultats : la recette moyenne m et son écart type s. Quels sont ces résultats ?

c) Montrer que au moins 75% des abonnements sont entre m-2s et m+2s.

d) Le PDG situe le coût de production et de distribution à 240000 euros et demande à la personne chargée du dossier d'évaluer la probabilité que la recette des abonnements couvre le coût. Quelle est cette probabilité ?

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques
http://www.math-fastef.org/
fastef.departement-maths@ucad.edu.sn

Année académique 2013-20

Durée : 4 heur

Test d'entrée

Sections : F1A et F1B$_1$

Nota bene : *Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation et de la clarté des solutions proposées ai que de la rigueur dans les démarches entreprises.*

Partie 1 : Algèbre et Logique

Exercice 1 (12 points)

Soient O un point fixé d'un plan P et G l'ensemble des rotations de centre O et d'angle $n\frac{2\pi}{13}$, $n \in Z$.

a) Montrer que $G = \{ r(O, n\frac{2\pi}{13}), n \in \{0,1,...,12\} \}$.

b) Montrer que G muni de la loi o est un groupe abélien.

c) Soit f l'application de Z dans G définie par : $n \rightarrow f(n) = r(O, n\frac{2\pi}{13})$, montrer que f est un homomorphisme de groupe surjectif. En déduire que G est isomorphe à Z / 13Z.

Exercice 2 (8 points)

Dans chacun des cas suivants, dites si la proposition est vraie, justifiez votre réponse et donnez la négation.

1) Soit C_1 l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $y = \frac{\sin(x)}{x}$, la propositio quelque soit le réel a positif, il existe un point M_0 (x_0, y_0) de C_1 tel que, quelque soit le point M(x, y) de C si $x > x0$ alors $|y| \leq a$.

2) Soit C_2 l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $y = e^x$, la proposition : quelque soit la droite (L) parallèle à l'axe des abscisses, il existe un point M_0 (x_0, y_0) de C_2 tel que, quelq soit $x > x0$, le point M(x, y) de C_2 est au dessus de (L)

3) Soit (D_1) la droite d'équation $x = -2$; on pose $E = F = IR$ et $R(x, y) : M(x, y) \in (D_1)$. La proposition : $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$;

4) Soit (D_2) la droite d'équation : $y = -2$; on pose $E = F = IR$ et $R(x, y) : M(x, y) \notin (D_2)$. La proposition : $(\forall y)(\exists x)R(x, y)$;

Partie 2 : Analyse (20 points)

On considère la fonction F définie par $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que $F(x)$ existe pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis calculer sa dérivée $F'(x)$ sur cet intervalle
3. Calculer la limite en 0^+ puis la limite en $+\infty$ de F.
4. On cherche un équivalent ~~un équivalent~~ de $F(x)$ lorsque x tend vers 0^+

a) Montrer qu'il existe une constante C ($C > 0$) tel que : $\forall x \in]0; 1]$, $\left|\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x\right| \leq C$. (On pourra écrire $\ln x$ sous la forme d'une intégrale.)

b) En déduire que $F(x)$ est équivalent à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0^+.

5. On cherche un équivalent un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ est convergente

b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{F(x)}{x}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, déduire que F(x) est équivalent à $\frac{e^{-x}}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$

Partie 3 : Statistique (20 points)

Exercice 1 :

On dispose d'une machine qui emplit automatiquement des paquets de chips dont le poids X varie entre 38 et 48 grammes. On prélève un échantillon de la production ; après pesée, on obtient le tableau suivant :

X en gramme	Moins de 39	Moins de 40.5	Moins de 41	Moins de 41.5	Moins de 42	Moins de 43	Moins de 45	Moins de 48
Nombre de paquets	6	56	82	122	158	186	198	200

Tracer un histogramme, calculer le poids médian et étudier la dispersion autour du poids moyen

Exercice 2 :

On lance un dé cubique rouge et un dé cubique noir : tous deux équilibrés, chacun a ses faces numérotées de 1 à 6. Lorsqu'ils retombent on observe les chiffres inscrits sur les deux faces supérieures des dés.

Calculer les probabilités que l'on obtienne :

1) un 3 avec le dé rouge sachant que la somme des points est 6 .
2) un nombre pair avec le dé rouge sachant que la somme des points est 6 .
3) un nombre pair avec le dé rouge sachant que la somme des points est au plus 6 .
4) au moins un nombre pair sachant que la somme des points est au plus 10.

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques
http://www.math-fastef.org/
departement.maths.fastef@gmail.com

Année académique 2012-20

Test d'entrée

Durée : 4 heure

Sections : F1A et F1B$_1$

Nota bene : *Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation et de la clarté des solutions proposées ainsi que de la rigueur dans les démarches entreprises.*

Partie 1 : Logique et algèbre

Exercice1 (13 points)

n°	*y étant une variable réelle. L'égalité ou l'inégalité i) est-elle*	REPONSE A *vraies pour au moins une valeur x de IR ?*	REPONSE B *vraies pour toutes les valeurs x de IR ?*	REPONSE C *fausse pour au moins une valeur x de IR ?*	REPONSE D *fausse pour toutes les valeurs x de IR ?*
1)	$xy+5x+5y+20=y$,	X			X
2)	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$,			X	X
3)	$x=x+y$,	X		X	
4)	$(x-y)-7=x-y$,		X	X	
5)	$xy=x$,		X		X
6)	$2x+y-5<0$,	X	X		

Les propositions de solutions ci-dessus sont faites par un étudiant.

1) Pour chacune des réponses proposées par l'étudiant dites si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse?
2) Pour un n° donné, les réponses proposées par l'étudiant sont parfois incohérentes, quelles sont ces réponses et pourquoi sont elles incohérentes?
3) Certaines réponses, bien que fausses sont cohérentes, quelles sont ces réponses et pourquoi sont elles cohérentes?

Exercice 2 (7 points)

Soit $(G, .)$ un groupe et H un sous-groupe de G, la relation R définie par : $\forall a, b \in G$, $a R b \Leftrightarrow a^{-1} b \in H$.

1) Montrer que R est une relation d'équivalence ;
2) Montrer que la relation R est compatible avec la loi de G si et seulement si H est distingué.

1/2

Partie 2 : Analyse (20 points)

On considère la fonction F définie par $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que $F(x)$ existe pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0\,;\,+\infty[$ puis calculer sa dérivée F'(x) sur cet intervalle
3. Calculer la limite en 0^+ puis la limite en $+\infty$ de F.
4. On cherche un équivalent ~~un équi valent~~ de $F(x)$ lorsque x tend vers 0^+

   a) Montrer qu'il existe une constante C (C > 0) tel que : $\forall x \in]0;1]$, $\left|\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x\right| \le C$. (On pourra écrire $\ln x$ sous la forme d'une intégrale.)

   b) En déduire que $F(x)$ est équivalent à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0^+.

5. On cherche un équivalent un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ est convergente

   b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \le \frac{F(x)}{x}$.

   c) A l'aide d'une intégration par parties, déduire que F(x) est équivalent à $\frac{e^{-x}}{x}$ lorsque x tend vers +

Partie 3 : Statistique (20 points)

Exercice 1 :

On dispose d'une machine qui emplit automatiquement des paquets de chips dont le poids X varie entre 38 et 48 grammes. On prélève un échantillon de la production ; après pesée, on obtient le tableau suivant

X en gramme	Moins de 39	Moins de 40.5	Moins de 41	Moins de 41.5	Moins de 42	Moins de 43	Moins de 45	Moins de 48
Nombre de paquets	6	56	82	122	158	186	198	200

Tracer un histogramme, calculer le poids médian et étudier la dispersion autour du poids moyen

Exercice 2 :

On lance un dé cubique rouge et un dé cubique noir ; tous deux équilibrés, chacun a ses faces numérotées de 1 à 6. Lorsqu'ils retombent on observe les chiffres inscrits sur les deux faces supérieures des dés.

Calculer les probabilités que l'on obtienne :

1) un 3 avec le dé rouge sachant que la somme des points est 6 .
2) un nombre pair avec le dé rouge sachant que la somme des points est 6 .
3) un nombre pair avec le dé rouge sachant que la somme des points est au plus 6 .
4) au moins un nombre pair sachant que la somme des points est au plus 10.

Partie 4: Géométrie (20 points)

Exercice 1 :

Les isométries planes s'écrivent, en nombres complexes, comme indiqué dans le tableau suivant

	1	2	3	4
écriture en nombres complexes	$z \longmapsto z+b$	$z \longmapsto az+b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a \neq 1$	$z \longmapsto a\bar{z}+b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a\bar{b}+b=0$	$z \longmapsto a\bar{z}+b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a\bar{b}+b \neq 0$

Dire dans chaque cas quelle est la nature de l'isométrie en donnant ses éléments caractéristiques.

Exercice 2 :

(La « fonction scalaire » de Leibniz). C'est le nom traditionnel de la fonction F, définie par le système de points pondérés $((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k))$ et qui, au point M de l'espace affine euclidien E, associe le scalaire $F(M) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i MA_i^{\,2}$

1) On suppose que la somme $\sum \alpha_i$ est nulle. Montrer qu'il existe un vecteur fixe $\vec{v}$ tel que, pour tout point M' de E,

$F(M') = F(M) + 2\overrightarrow{MM'}.\vec{v}$

2) Si la somme $\sum \alpha_i$ n'est pas nulle, on appelle G le barycentre du système. Vérifier que : $F(M) = F(G) + (\sum \alpha_i)\, MG^2$.
3) *Applications*. On se donne un nombre réel k. Déterminer, selon les valeurs de k,

- l'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 + MB^2 = k$,
- l'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 - MB^2 = k$,
- l'ensemble des points M vérifiant l'équation $\frac{MA}{MB} = k$.

Université Cheikh Anta DIOP de Dakar
École Normale Supérieure.
Département de Mathématiques.

Concours 2000 d'entrée en F_1 A
Mathématiques (durée : 4 heures)

Nota Bene *: les candidats sont informés que, pour l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.*

Exercice 1 (3 points)

Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles n+1, n+3, n+7, n+9, n+13 et n+15 sont tous premiers. (On pourra utiliser la congruence modulo 5)

• Si n est impaire, • Si n est paire, • Si n = 4, • Si n ≥ 5

Exercice 2 (2 points)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur IR et f une application de E sur F qui vérifie : $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$.
Montrer que si f est continue à l'origine 0_E alors f est linéaire.

Exercice 3 (3 points)

Pour tout réel t on note E(t) la partie entière de t. On considère la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par : $f(x) = \sin[xE(\frac{\pi}{x})]$ si $x \in]0, 2\pi]$ et $f(0) = 0$.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $E(\frac{\pi}{x}) = 0$ puis l'équation $E(\frac{\pi}{x}) = k$ où k est un entier naturel non nul. Expliciter f sur les intervalles $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ et $]\frac{\pi}{2}, \pi]$

Exercice 4 (3 points)

1) Pour tout entier naturel n non nul on pose $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

   a) déterminer la limite de U_n en $+\infty$.
   b) Trouver un équivalent de U_n.

2) Quelle est la nature de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

Université Cheikh Anta DIOP
Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques

Concours 1999 d'entrée en F_1 A
Mathématiques (durée : 4 heures)

<u>Nota Bene</u> : Les candidats sont informés que, pour l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.

<u>Barème</u> : **Exercices n°2, 4, 5 et 7 : 2 points chacun ;**
3 points pour chacun des autres.

<u>Exercice 1:</u>

Enoncer les négations des assertions suivantes:

A/

1°/ Dans toutes les sociétés, toutes les personnes respectent les enseignants.

2°/ Pour tout rectangle, tous les angles sont droits.

3°/ Pour tous réels a, b, c, $\left[(a > b \text{ et } b > c) \text{ implique } a > c \right]$.

4°/ Il existe des hommes immortels.

5°/ $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in D_f \cap D_g) \Leftrightarrow (x \in D_{(f+g)})$.

B/

p, q, r sont des propositions. Sans dresser de table de vérité, donnez, en explicitant votre raisonnement, la valeur de vérité des propositions suivantes:

1°/ $(p \Rightarrow q) \vee (\overline{p} \Rightarrow q)$.

2°/ $(\overline{p \wedge \overline{(q \wedge r)}}) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$.

N.B. $\overline{p}$ désigne la négation de p.

<u>Exercice 2 :</u>

Soit ABC un triangle, on pose AB = 5, AC = 6, BC = 7, A' l'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et de (BC) et G le barycentre de $\{(A,7), (B,6), (C,5)\}$.

a) Montrer que $\overline{A'C} = -\dfrac{6}{5}\overline{A'B}$.

b) Montrer que A', A et G sont alignés.

c) En déduire que G est le centre du cercle inscrit au triangle ABC

<u>Exercice 3 :</u>

On donne $f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x^2 + 2kx + 1} \right) - \sqrt{n^2x^2 + 1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Université Cheikh Anta DIOP de Dakar
École Normale Supérieure
Dép. de Mathématiques

Concours 1998 d'entrée en F_1 A
Mathématiques (durée : 4 heures)

<u>Nota Bene</u> : les candidats sont informés que, pour l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.

<u>Barème</u> : Exercices n°2, 4, 5 et 7 : 2 points chacun ; 3 points pour chacun des autres.

Exercice 1 :

ABC est un triangle. On définit la suite des points $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$G_0 = A$; G_{n+1} est l'isobarycentre de G_n, B et C

1. montrer que les points G_n sont alignés ;
2. montrer qu'il existe une homothétie h dont on précisera le centre et le rapport telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $h(G_n) = G_{n+1}$;
3. donner une relation entre $\overrightarrow{IG_n}$ et $\overrightarrow{IG_0}$; en déduire la position limite de G_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 :

Les diagonales d'un quadrilatère convexe ABCD se coupent en I formant quatre angles ; α étant une des mesures de l'un de ces angles, démontrer que l'aire S de ABCD est $S = \frac{1}{2} AC.BD.\sin\alpha$.

Exercice 3 :

Étant donnés deux réels a et b tels que $a < b$, on considère les segments $I = [a, b]$ et $J = [1 - b, 1 - a]$:

1. à quelles conditions a-t-on $I \cap J = \varnothing$?
2. à quelles conditions a-t-on $I \cap J \neq \varnothing$?
3. déterminer $I \cap J$.

Exercice 4 : Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\,dx$.

Exercice 5 :

1. Prouver que le point de contact d'une tangente à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ est le milieu du segment de tangente compris entre les axes de coordonnées ;
2. Le côté d'un carré croît à une vitesse constante [illegible]. Trouver la vitesse de variation du périmètre et de l'aire de ce carré à l'instant où le côté est égal à a.

T.S.V.P. ⟶

l'École Normale Supérieure
Département de Mathématiques
DAKAR

Concours d'entrée à l'École Normale Supérieure de Dakar

Section F1A : MATHÉMATIQUES

Octobre 1994

Durée : 4 heures

NB : Les candidats sont informés qu'il sera tenu le plus grand compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur dans la rédaction des solutions.

EXERCICE N°1 : (1,5 point)

On considère une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan.

On considère, dans le même repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les courbes suivantes :

C_1 d'éq° : $y = f(|x|)$

C_2 d'éq° : $y = f(-x)$

C_3 d'éq° : $y = |f(x)|$

Expliquer comment obtenir C_1, C_2 et C_3 à partir de C.

EXERCICE N°2 (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'éq° $8(n-5)^5 - n^2 + 14n - 24 \equiv 0[5]$ $\quad n \equiv 1[5]$ ou $n \equiv 3[5]$ tableau

EXERCICE N°3 (1,5 point)

Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est périodique de période T alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°4 (2 points)

Soit x un réel, trouver dans chacun des cas l'ensemble des valeurs des expressions suivantes :

$A(x) = (x-3)(x+1)$ pour $|x| < 2$

$B(x) = (1-x)(2+x)$ pour $x \in]-2, -1[\cup]2, 3[$

$C(x) = \dfrac{3-x}{x+1}$ pour $x \in]-1, 3[$

EXERCICE N°5 (2,5 points)

Étant donné les réels a et b tq a soit non nul, on considère l'ensemble $E_{a,b}$ des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ tq : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = a f(x+b)$

1°/ Établir par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f^{(n)}$ (dérivée n-ième de f) existe et exprimer $f^{(n)}(x)$ à l'aide de a, n et $f(x+nb)$

2°/ Mq pour une valeur de b que l'on précisera en fonction de a, les fonctions g et h déf par $g(x) = \cos(ax)$ et $h(x) = \sin(ax)$ sont des élmts de $E_{a,b}$.

3°/ Soit $f \in E_{a,\frac{\pi}{2a}}$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - f(\frac{\pi}{2a})\sin(ax) - f(0)\cos(ax)$.

Mq $\varphi \in E_{a,\frac{\pi}{2a}}$ et que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$

TSVP

On donne quatre points A, B, C, D non coplanaires de l'espace, on associe les distances des pts A, B, C et D à ce plan. Combien y a-t-il de plan pour l'espace vectoriel. A tout plan P et lesquels ces quatre distances sont égales ? Justifier la réponse.

EXERCICE N°7 (2pts)

1°/ Suivant que l'ensemble E représente $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ donner, en la justifiant, la valeur de vérité de chacune des expressions suivantes :

a) $\forall x \in E, \exists y \in E, (x > 0 \Rightarrow x = y^2)$

b) $\forall x \in E, \forall y \in E, (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$

c) $\exists x \in E((x^2 \leq 2)$ et $\forall y \in E, (y^2 \leq 2 \Rightarrow y \leq x))$

2°/ Enoncer ces résultats en langage non formalisé.

EXERCICE N°8 (1,5 points)

Soient A, B et C trois points distincts du plan orienté et :

S_A la similitude directe de centre A qui transforme B en C

S_B la similitude directe de centre B qui transforme C en A

S_C la similitude directe de centre C qui transforme A en B et soit $S = S_C \circ S_B \circ S_A$.

1°/ a) Déterminer l'image de B par S

b) Mtq S est la symétrie centrale de centre B.

2°/ Soit $C' = S_B \circ S_A(C)$ et $C'' = S_C(C')$

Quelle est la position relative des pts B, C et C'' ?

En déduire que A est le milieu de [CC'] et placer les pts A, B, C, C' et C'' sur une figure.

EXERCICE N°9 (2pts)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ déf par : $f(x) = ax + b + \sqrt{x^2 + x - 1}$

1°/ Démontrer que f est définie au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

2°/ Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer a et b telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{5}{2}$

b) En déduire que (C) admet deux asymptotes que l'on déterminera.

EXERCICE N°10 (2,5 points)

n étant un entier naturel, on note E l'espace vectoriel des polynômes en X à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2n. On considère l'application linéaire f de E dans E définie par : si $P \in E$, $f(P) = Q$ avec $Q(X) = (X^2 - 1) P'(X) - 2(nX + a) P(X)$ où P' est le polynôme dérivé de P et $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.