# Estadística en Física Experimental (1er cuatrimestre de 2017)

Guía de Problemas N° 5 | Propagación de Errores

1. En un experimento se mide un observable que está descripto por la variable aleatoria $X$, cuya distribución de probabilidad tiene esperanza $\mu$ y varianza $\sigma^2$. Se realizan $N$ repeticiones del mismo experimento, obteniendo $N$ mediciones $\{x_i\}$.
   (a) Muestre que el error del promedio $\bar{X} = \sum_i X_i/N$ es: $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N}$, si las mediciones son independientes.
   (b) Discuta la diferencia entre el error de cada medición $\sigma$ y el error del promedio $\sigma_{\bar{X}}$.
   (c) Ahora las $N$ mediciones están completamente correlacionadas, es decir: $\rho = 1$, o lo que es lo mismo $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}\sqrt{\mathrm{Var}(X_j)}$, para todo $1 \leq i,j \leq N$. ¿Cuánto vale el error del promedio? [Rta: $\sigma_{\bar{X}} = \sigma$]

2. (a) Muestre que si una magnitud $Y$ se obtiene como:
      i. sumas y restas de magnitudes independientes $X_i$, entonces el *error absoluto* de $Y$ es la suma en cuadratura de los errores de los $X_i$.
      ii. productos y divisiones de magnitudes independientes $X_i$, entonces el *error relativo* de $Y$ es la suma en cuadratura de los errores relativos de $X_i$.

   Aclaración: la *suma en cuadratura* de $a$ y $b$ es: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, que suele notarse como: $c = a \oplus b$.
   Comentario: si en lugar de sumar en cuadratura se hace la *suma aritmética* el error queda *sobreestimado*.
   (b) Una ley establece que la variable y depende de otras variables $x_i$ según una ley $y = (x_1)^{\alpha_1} \times \ldots \times (x_N)^{\alpha_N}$.
      i. Si las N variables se miden independientemente obteniendo para cada una de ellas: $x_i' \pm \sigma_i$, mostrar que: $\sigma_y/|y| \geq \max\{\alpha_1\sigma_1/|x_1'|, \ldots, \alpha_N\sigma_N/|x_N'|\}$.
      Nota: esta regla permite chequear fácilmente en muchos casos si una propagación tiene valores subestimados.
      ii. ¿Vale en general la desigualdad anterior si las variables $x_i$ no son independientes o si la ley tiene una forma genérica $y = f(x_1, \ldots, x_N)$?

3. Se hace girar la varilla del ejercicio 5 de la guía 3 y se mide el ángulo obteniendo $\Theta$=1.10 $\pm$ 0.03 rad.
   (a) ¿Cuánto vale el error de $Y$=tan $\Theta$ según la fórmula de propagación?
   (b) Alguien a ojímetro dice que $\Theta$=1.1 $\pm$ 0.5 rad. ¿Vale usar la fórmula usual de propagación del error para la variable $Y$ en este caso? Si tiene dudas dibuje Y vs $\Theta$ y mire cuánto vale $Y(1.1 + 0.5)$. ¿Qué límites tiene la ley de propagación?

4. Considere el ejercicio 2 de la guía 4. Encuentre el error de X e Y y a partir de estos el error de $U = X + Y$.

5. Considere el ejercicio 4 de la guía 4. ¿Puede utilizar la fórmula de propagación para encontrar el error de $Z = X/Y$, con X e Y, normales $N(0,1)$ independientes? ¿Por qué? ¿Cuánto vale la varianza de la distribución de Cauchy?

6. Un experimento se propone determinar los brillos máximo y mínimo, $B_{max}$ y $B_{min}$, de una estrella variable con un detector que cuenta fotones. El procedimiento consiste en medir el brillo de la estrella más el cielo, $F$, y luego el de una región del cielo libre de estrellas, $C$, para descontar la contribución del mismo. El brillo $B$ de la estrella se obtiene entonces como

$$B = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{F}{t_F} - \frac{C}{t_C}\right)$$

   donde $t_F$ y $t_C$ son los tiempos de medición en segundos para la estrella más cielo y para el cielo, respectivamente, y $\epsilon$ es la eficiencia del detector.
   (a) Un astrónomo realiza las tres mediciones, brillo mínimo y máximo de la estrella y brillo del cielo, cada una durante un tiempo de $t = 10\,min$, resultando $F_{max} = 2384$, $F_{min} = 992$ y $C = 69$. El detector utilizado tiene una eficiencia de $\epsilon = 0.1$, con un error sistemático de 6%. Calcule los resultados de $B_{max}$ y $B_{min}$ a publicar, con su matriz de error. [Rta: $B_{max} = 38.58$, $B_{min} = 15.38$, $\mathrm{Var}(B_{max}) = 6.0406$, $\mathrm{Var}(B_{min}) = 1.1467$, $\mathrm{Cov}(B_{max}, B_{min}) = 2.1559$ ]
   (b) Obtenga el factor de correlación entre $B_{max}$ y $B_{min}$ y dibuje la correspondiente elipse de covarianza, utilizando los resultados de los ejercicios 8 y 9 de la guía 4. [Rta: 0.8192]

(c) Un astrofísico teórico ha desarrollado un modelo estelar, el cual predice una relación de la forma $B_{max}=(B_{min})^{\alpha}$, con $\alpha^{\text{modelo}} = 1.4$. Determine si dicha teoría es consistente con las observaciones experimentales publicadas por el astrónomo en el ítem a. Muestre que sus conclusiones respecto al acuerdo teoría-experimento ($\Delta\alpha \equiv |\alpha^{\text{modelo}} - \alpha^{\text{exp}}|$) son distintas si en la propagación de errores se olvida de incluir el término de correlación. [Rta: $\Delta\alpha = 3.2\,\sigma_\alpha^{(\text{con correlación})}$ y $\Delta\alpha = 1.5\,\sigma_\alpha^{(\text{sin correlación})}$]

7. *Reportando un resultado.* La constante de Planck según NIST es $h = (6.62606957 \pm 0.00000029) \times 10^{-34}$ J s, o escrito en una notación más concisa $h = 6.62606957(29) \times 10^{-34}$ J s.

(a) ¿Por qué en general se reporta la medición usando una o dos cifras significativas del error?

(b) Un regla aparentemente críptica se describe en el Particle Data Group :

> "... if the three highest order digits of the error lie between 100 and 354, we round to two significant digits. If they lie between 355 and 949, we round to one significant digit. Finally, if they lie between 950 and 999, we round up to 1000 and keep two significant digits. In all cases, the central value is given with a precision that matches that of the error."

Discutir la motivación de esta receta.

***Incertezas sistemáticas***

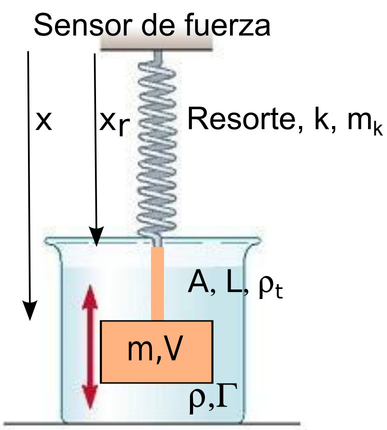
8. En un artículo se reporta que el promedio de un observable $A$ tiene este valor: $\bar{A} \pm \sigma_A^{\text{est}} \pm \sigma_A^{\text{sist}}$, donde $\sigma_A^{\text{est}}$ y $\sigma_A^{\text{sist}}$ son los errores estadístico y sistemático.

(a) ¿Cuánto debería valer la incerteza total: $\sigma_A$?

(b) ¿Qué resultado esperaría leer si el experimento se repite en el futuro realizando el doble de mediciones? Expresarlo en función de $\bar{A}$, $\sigma_A^{\text{est}}$ y de $\sigma_A^{\text{sist}}$.

(c) ¿Podría haber hecho el cálculo anterior si originalmente se hubiera publicado solo la incerteza total: $\bar{A} \pm \sigma_A$?

9. Una práctica de Laboratorio 1 consiste en estudiar el movimiento amortigüado de un cuerpo (de masa $m$=120.30 ± 0.01 g y volumen $V$=50.0 ± 0.2 cm$^3$) sumergido en un fluido (de densidad de masa $\rho$=0.803 ± 0.012 g cm$^{-3}$, y viscosidad $\Gamma$=25 ± 11 g s$^{-1}$) en presencia de gravedad ($g$ = 9.80665 m s$^{-2}$). El resorte (de constante $k$=1500 ± 200 dina cm$^{-1}$, masa $m_k$ despreciable, y longitud en reposo $l_0$=0 cm) y el cuerpo están unidos a través de un tubito (de largo $L$=10.00±0.01 cm, sección $A$=1.04±0.02 cm$^2$ y densidad de masa $\rho_t$=7.700±0.001 g cm$^{-3}$). Un grupo modela la dinámica del cuerpo según:




$$\underbrace{-kx_r}_{F_{\text{el}}} \underbrace{-\Gamma\dot{x}}_{F_{\text{viscosidad}}} \underbrace{+(m+\rho_t AL)g}_{F_{\text{gravedad}}} \underbrace{-V\rho g}_{F_{Arq}} = (m+\rho_t AL)\ddot{x}$$

cuya solución es $x(t) = A\,\exp(-\gamma t)\cos(\omega t + \delta) + x_0$, con $\omega = \sqrt{k/M - \gamma^2}$, $M = (m + \rho_t AL)$, y $\gamma = \Gamma/2M$.

(a) ¿Cumple el error de $\gamma$ con la cota del ejercicio 2(b)i? ¿Y los errores de $M$ y de $\omega$?

(b) Al hacer el ajuste de la curva $x(t)$ se obtuvo: $\gamma^{fit} = (43 \pm 2)$ ms$^{-1}$, y $\omega^{fit} = (3.28 \pm 0.06)$ rad s$^{-1}$. ¿Son estos valores compatibles con el modelo? [Rta: Es poco probable, pues $|\gamma^{fit} - \gamma^{pred}| \leq \sigma_{\gamma^{pred}}$, pero $|\omega^{fit} - \omega^{pred}| \approx 3\,\sigma_{\omega^{pred}}$]

(c) Curiosos por entender la discrepancia, luego de mucho observar notan que al subir o bajar la masa, el tubito queda más o menos sumergido en el agua. Por lo tanto agregan un término de Arquímedes dependiente de cuán sumergido está el tubito:

$$-kx_r - \Gamma\dot{x} + (m+\rho_t AL)g - Ax\rho g - V\rho g + cte = (m+\rho_t AL)\ddot{x}$$

¿Son compatibles ahora los valores ajustados y la predicción? [Rta: Sí, ahora $|\omega^{fit} - \omega^{pred}| \approx 1\,\sigma_{\omega^{pred}}$]

Nota: un mal modelo no debe entenderse como un *error sistemático*. Es en realidad una *equivocación* o un *efecto sistemático*. Es decir, ante un desacuerdo, y una vez contempladas todas las incertezas sistemáticas identificadas, no se puede atribuir la diferencia a una "incerteza sistemática desconocida".

***Problemas computacionales***

10. Considere $N$ mediciones $(x_i, y_i)$, donde los $y_i$ son independientes y todos con el mismo error $\sigma$, ésto es, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}\sigma^2$, donde $\delta_{ij}$ es la delta de Kronecker. En este caso los $x_i$ son números sin error (no son variables aleatorias). Los parámetros de la recta $y{=}a_1 + a_2 x$ que mejor ajusta los datos surgen de minimizar la suma $S_N{=}\sum_i^N [y_i - (a_1 + a_2 x_i)]^2$, obteniéndose la conocida fórmula de cuadrados mínimos

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \left(\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i\right)/\Delta \\ \hat{a}_2 = \left(N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i\right)/\Delta \qquad \text{con} \quad \Delta = N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Usando la fórmula de propagación de errores muestre que la matriz de covarianza de los parámetros de la recta es

$$\mathrm{Cov}(\hat{a}_1, \hat{a}_2) = \frac{\sigma^2}{\Delta}\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & N \end{pmatrix} \tag{2}$$

   (b) Analice intuitivamente por qué la correlación es negativa si el promedio de los datos está del lado positivo de la abscisa, positiva en el caso contrario, y por qué la pendiente y la ordenada al origen no están correlacionadas si $\sum x_i = 0$.
   Ayuda: puede ser útil usar que la recta ajustada $y = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 x$, pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

   (c) Encuentre, con su error, los parámetros de la recta que mejor ajusta los siguientes datos, con $\sigma = 0.3$. Grafique los datos, con su error, y la recta obtenida para $0 \le x \le 5$. [Rta: $\hat{a}_1$=1.452 $\pm$ 0.721 y $\hat{a}_2$=0.799 $\pm$ 0.286]

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 2.00 | 2.10 | 2.20 | 2.30 | 2.40 | 2.50 | 2.60 | 2.70 | 2.80 | 2.90 | 3.00 |
| Y | 2.78 | 3.29 | 3.29 | 3.33 | 3.23 | 3.69 | 3.46 | 3.87 | 3.62 | 3.40 | 3.99 |

   (d) A partir de esta recta prediga, con su error, el valor esperado $y_a$ para un cierto $x_a$. No olvide usar la matriz de covarianza completa. Grafique $y_a(x_a)$, y agréguelo al gráfico anterior en forma de banda de error. Encuentre qué valor de $x_a$ minimiza el error de $y_a$, e interprete la magnitud de este valor mínimo. Discuta por qué el error aumenta para valores de $x_a$ alejados de la región donde se hicieron las mediciones.

   (e) Grafique la banda de error que obtiene si ignora el término de correlación en la propagación de errores y discuta por qué ésta es claramente errónea.

11. Verifique los resultados analíticos obtenidos en el ítem 10d escribiendo un programa que realice la siguiente simulación numérica:

   I. para cada $x_i$ genere al azar un $y_i$ de la distribución gaussiana N($\hat{a}_1$+$\hat{a}_2 x_i$, $\sigma$).

   II. ajuste una recta a los $(x_i, y_i)$ generados, y prediga el valor $y_a$ para $x_a = 0.5$.

   Repita 1000 veces los pasos I.–II., construyendo un histograma con los valores de $y_a$, y dibuje sobre éste la gaussiana con el valor esperado y el error de $y_a$ calculado teoricamente en 10d.

12. Para cada uno de los cuatro pares de datos de Anscombe del problema 10 de la guía 4:

   (a) Haga un ajuste lineal de cada par de datos y encuentre los valores de los parámetros ajustados con sus errores.

   (b) Grafique cada par de puntos, junto con la recta ajustada y las bandas de error. ¿Qué concluye, alcanza con mirar solo los parámetros ajustados, o hacer el ajuste ‘a ciegas’? ¿Qué está faltando?