Estadística en Física Experimental (1er cuatrimestre de 2017)

Guía de Problemas N° 3 | Variables aleatorias contínuas – Cambio de variables

Distribución Normal, Exponencial, Cauchy

1. La altura de la población masculina tiene distribución normal N(175 cm, 8 cm). Sabiendo que los colectivos tienen una altura de 1.95 m, ¿qué fracción puede viajar parada sin necesidad de reclinarse? [Rta: 0.9938]

2. Se mide una magnitud A con un detector bien calibrado cuya resolución es gaussiana con ancho σ, obteniéndose el resultado x.
   (a) ¿Qué rango $x \pm a$ debe informarse si se desea que haya 90% de probabilidad de que éste incluya el verdadero valor de A? [Rta: $x \pm 1.645\sigma$]
   (b) Si el detector tuviera una respuesta no gaussiana y desconocida, pero se sabe que tiene una resolución σ, ¿qué rango puede informar en este caso? [Rta: $x \pm 3.162\sigma$]

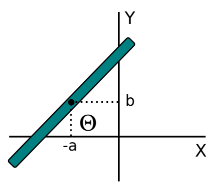
3. *Distribución exponencial.* Una fuente radiactiva de constante λ (decaimientos por unidad de tiempo) se ubica frente a un detector, de modo que en promedio, el número de partículas que no decayeron es $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$
   (a) Muestre que X, el tiempo transcurrido hasta la detección de la primera partícula, tiene distribución exponencial $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Proceda de dos maneras alternativas, discutiendo la validez de cada paso:
      i. Obtenga primero $F_X(t) = P(X \leq t)$ como el complemento del suceso "el primer decaimiento ocurre a tiempo mayor que t", y luego por derivación, la densidad de probabilidad $f_X(t)$.
      ii. Escriba directamente $f_X(t)$ como el producto de la probabilidad de que no haya ningún decaimiento entre 0 y t, y que haya un decaimiento justo en el dt siguiente.
   (b) Se define que una distribución no tiene memoria si cumple $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$.
      i. ¿Por qué se llama a ésto "no tener memoria"?
      ii. Convénzase que la exponencial es la única distribución de variable contínua que posee esta propiedad (intente usando otras distribuciones). Relaciónelo con las hipótesis que llevan a la distribución de Poisson.

   Nota: para variables aleatorias discretas se define la condición como: $P(X > n+m | X \geq n) = P(X > m)$
   (c) Se tiene una fuente de 1 Bq (Becquerel $\equiv$ 1 decaimiento s^{-1}).
      i. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer decaimiento ocurra recién después de 5 segundos? [Rta: 0.0067]
      ii. Calcule la probabilidad de que el primer decaimiento ocurra dentro del primer segundo. Repita el cálculo para el tercer segundo (i.e. el primer decaimiento ocurre entre el 2^{do} y 3^{er} segundo). ¿Contradice ésto la "falta de memoria"? [Rta: 0.6321 y 0.0855]
      iii. ¿Cuánto tiempo debe esperarse para que haya al menos un decaimiento, con una probabilidad del 99%? [Rta: 4.61 s]
   (d) En realidad, el detector cubre un ángulo sólido Ω visto desde la fuente, ¿como se modifica $f_X(t)$ si las partículas son emitidas en todas direcciones con igual probabilidad?
   Nota: relacionarlo con el ejercicio 19b de la guía 2.
   (e) Mencione otros tres ejemplos de procesos que tengan distribución exponencial.

Cambio de variables

4. Si X tiene distribución normal estándar,
   (a) ¿qué distribución tiene $Y = aX + b$?
   (b) ¿cómo implementaría un generador de números al azar N(μ,σ) a partir de uno N(0,1)?

5. Una barra gira alrededor del punto (-a, b), hasta detenerse al azar formando un ángulo Θ con el eje x, ($\Theta \in [-\pi/2, \pi/2]$), como muestra la figura. La recta que contiene a la barra corta al eje de ordenadas en un punto Y. Encuentre la función de distribución $F_\Theta(t)$, y a partir de ésta muestre que Y tiene densidad de probabilidad de Cauchy, $f_Y(t) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{a}{a^2 + (t-b)^2}$. Encuentre su esperanza.
   Notar que la esperanza de una variable con distribución de Cauchy es cero por simetría (su *valor principal* está definido), pero la primitiva de $x/(1+x^2)$ es divergente.

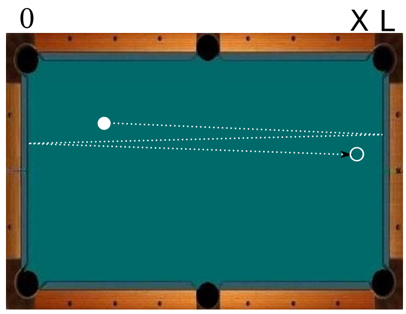


6. Muestre que la densidad de probabilidad de $Y{=}X^2$ se obtiene a partir de la de X como $f_Y(t) = [f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})]/2\sqrt{t}$. Halle $f_Y(t)$ si
   (a) X es uniforme en [0,1] [Rta: $f_Y = (2\sqrt{y})^{-1}(0 < t < 1)$]
   (b) X es normal N(0,1) (esta f_Y se denomina χ^2_1, chi^2 con un grado de libertad). [Rta: $f_Y = (1/\sqrt{2\pi t})\exp(-t/2)$, con $t > 0$]

Valores extremos

7. Se realiza una serie de mediciones *independientes* $\{x_1, \ldots, x_n\}$, de una variable aleatoria X con distribución acumulativa $F_X(x)$ y densidad de probabilidad $F'_X(x) = f_X(x)$.
   (a) Demuestre que la densidad de probabilidad del máximo de todas las mediciones U=max$\{x_1, \ldots, x_n\}$ es $f_{\mathrm{U}}(x) = nf_X(x)\,[F_X(x)]^{n-1}$.
   (b) Probar que la densidad de probabilidad del mínimo de todas las mediciones V=min$\{x_1, \ldots, x_n\}$ es $f_{\mathrm{V}}(x) = nf_X(x)\,[1 - F_X(x)]^{n-1}$.

8. Un jugador muy inexperto juega al pool y quiere dejar la bola blanca lo más cerca posible de la banda opuesta luego de dos rebotes, como se muestra en la figura. Si la posición final de la bola blanca en la dirección x, es una variable aleatoria X que tiene distribución uniforme en $[0, L]$, donde L=200 cm es el largo de la mesa. ¿Cuántos tiros debería hacer para que haya alguno en el que la bola quede a menos de 10 cm con probabilidad igual o mayor que p=0.9. [Rta: más de 44]



Problemas computacionales

9. Las distribuciones de Cauchy y Gauss tienen ambas forma de campana invertida.
   (a) Usando la computadora dibuje conjuntamente la distribución de Cauchy estándar con densidad de probabilidad $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$, y la $N(0, 0.75)$, normalizada de modo que ambas curvas coincidan en $x = 0$. Note que en la zona central ambas tienen la misma forma pero que difieren notablemente en el comportamiento en las colas ("colas no gausianas").
   (b) Es común representar colas no gausianas usando la suma de dos gaussianas, $f(x) = aN(0, \sigma_1) + bN(0, \sigma_2)$ (con $a + b = 1$, ¿por qué?). Represente sobre el gráfico anterior, normalizado en $x = 0$ a la de Cauchy, la densidad $f(x)$ para $-6 < x < 6$, con $a = 1/2$, $\sigma_1 = 0.75$ y $\sigma_2 = 3$. Note cómo la suma de dos gausianas ha logrado representar colas marcadamente no gausianas que, para los parámetros y rango elegidos, corresponden con bastante precisión a la forma de la distribución de Cauchy. ¿Qué ocurre si se incrementa el rango del gráfico mucho más allá de $|x| = 6$?

10. Utilice el resultado del problema 5 para generar con la computadora 10000 números al azar que sigan la distribución de Cauchy, a partir de una uniforme [0,1]. Presente los datos en un histograma y grafique sobre éstos la predicción teórica.

11. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en [0,1].
    (a) Muestre que $Y = e^X$ tiene distribución $f_Y(t) = 1/t, 1 \leq t \leq e$. Note que ésto permite escribir una rutina que genere números con distribución $1/x$.
    (b) ¿Cómo haría para generar números al azar con distribución exponencial? Impleméntelo en la computadora, construya un histograma con 500 números generados y dibuje sobre éste la distribución teórica. Use $\lambda = 0.25$. Hacer esto para dos 2 histogramas: uno con bines de igual ancho en todo el rango (un ancho apropiado para resolver la forma de la distribución) y otro con bines más gruesos a partir de $Y \geq 15$. ¿Cómo debe escalear la altura de los bines para que se superponga con la distribución?