Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2016

Trabajo Práctico N° 2: Oscilaciones de una membrana cuadrada.

El problema de la oscilación de una membrana cuadrada fija por sus bordes puede ser descripto, al menos para pequeñas elongaciones, por la ecuación de ondas con condición de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u \quad (x,y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Donde $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Los datos iniciales adecuados son, por ejemplo, la posición inicial de la membrana y su velocidad inicial. Sin pérdida de generalidad supondremos que $c = 1$.

Para resolver este problema numéricamente, se discretiza el dominio con una malla $(x_i, y_j) = (i/N, j/N), 0 \leq i, j \leq N$, y el tiempo $t_n = nk$ hasta un T máximo.

Considerando $u_{i,j}^n$, la aproximación de $u(x_i, y_j, t_n)$ (el valor de la función en el nodo (x_i, y_j, t_n) de la malla), se propone el siguiente esquema, que proviene de la discretización usual de la derivada segunda.

$$u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1} = \frac{k^2}{h^2}[u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}] \tag{1}$$

donde $h = 1/N$. Por lo tanto, suponiendo conocidos la posición de la membrana a tiempo 0 y a tiempo $-k$, se puede calcular la posición para cualquier t_n posterior. La solución a tiempo cero se conoce por el dato inicial. La condición inicial en la derivada respecto del tiempo permite plantear una ecuación adicional

$$u_{i,j}^0 - u_{i,j}^{-1} = k\, u_t(x_i, y_j, t_0)$$

de la cual despejar el valor de $u_{i,j}^{-1}$. Reemplazando este valor en la ecuación (1), para $n = 0$, se obtiene el valor de u^1.

Ejercicio 1 Escribir un programa que resuelva el problema de la membrana, con dato de contorno 0, posición inicial

$$u_0(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y) \qquad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$$

y velocidad inicial cero.

Ejercicio 2 Comparando con la solución exacta

$$u(x,y,t) = \cos(\sqrt{2}\pi ct)\sin(\pi x)\sin(\pi y),$$

graficar el error cometido al aproximar $u(x,y,1)$ en función de h y k, para algún (x,y) en el interior de la malla.

Ejercicio 3 Usando los comandos `drawnow` y `pause(·)` obtener una *película* mostrando la evolución de la solución.