

# PRÁCTICA COMPUTACIONAL: PÉNDULOS DE NEWTON

SAMANTHA KUCHER

## Modelo

El objetivo de esta práctica es estudiar un sistema de cinco péndulos que se mueven en un plano, como se ve en la Fig. 1. Para modelar los choques supuse que entre los péndulos hay resortes, con una constante  $k \rightarrow \infty$ .

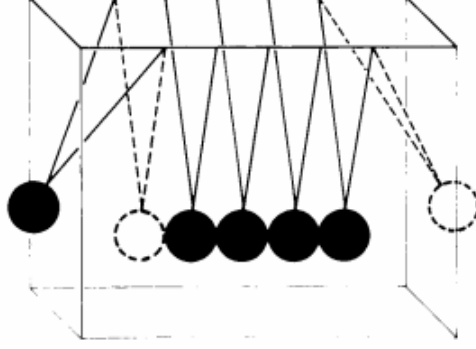


Figura 1: Esquema del dispositivo experimental.

Tomando como coordenadas generalizadas los ángulos  $\psi_i$  medidos respecto de la posición de equilibrio de cada masa y considerando la aproximación de pequeñas oscilaciones, la posición en  $x$  de cada una es  $x_i = l \sin \psi_i \approx l \psi_i$ . Llamo  $\psi_1$  a la masa de la izquierda,  $\psi_2$  la siguiente, y así sucesivamente. Entonces, la energía cinética del sistema se escribe como

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \sum_{i=1}^5 \dot{\psi}_i^2 \quad (1)$$

De la misma manera, para la energía potencial gravitatoria se aproxima como  $\cos \psi \approx 1 - \frac{1}{2} \psi^2$ :

$$U_g = \sum_{i=1}^5 m g l (1 - \cos \psi_i) \approx m g l \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2} \psi_i^2 \quad (2)$$

Finalmente, escribo la energía potencial elástica:

$$U_k = \frac{k}{2} \sum_{i=2}^5 (\psi_{i-1} - \psi_i)^2 + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^4 (\psi_i - \psi_{i+1})^2 \quad (3)$$

Entonces el Lagrangiano del sistema queda

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \sum_{i=1}^5 \dot{\psi}_i^2 + m g l \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2} \psi_i^2 + \frac{k}{2} \sum_{i=2}^5 (\psi_{i-1} - \psi_i)^2 + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^4 (\psi_i - \psi_{i+1})^2 \quad (4)$$

Al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtengo el sistema

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_1 = -\frac{k}{m}(\psi_1 - \psi_2) - \frac{g}{l}\psi_1 \\ \ddot{\psi}_2 = \frac{k}{m}(\psi_1 - \psi_2) - \frac{k}{m}(\psi_2 - \psi_3) - \frac{g}{l}\psi_2 \\ \ddot{\psi}_3 = \frac{k}{m}(\psi_2 - \psi_3) - \frac{k}{m}(\psi_3 - \psi_4) - \frac{g}{l}\psi_3 \\ \ddot{\psi}_4 = \frac{k}{m}(\psi_3 - \psi_4) - \frac{k}{m}(\psi_4 - \psi_5) - \frac{g}{l}\psi_4 \\ \ddot{\psi}_5 = \frac{k}{m}(\psi_4 - \psi_5) - \frac{g}{l}\psi_5 \end{cases}$$

Agregando un factor de atenuación de la forma  $-b\dot{\psi}_i$ , el sistema queda

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_1 = -\frac{k}{m}(\psi_1 - \psi_2) - \frac{g}{l}\psi_1 - b\dot{\psi}_1 \\ \ddot{\psi}_2 = \frac{k}{m}(\psi_1 - \psi_2) - \frac{k}{m}(\psi_2 - \psi_3) - \frac{g}{l}\psi_2 - b\dot{\psi}_2 \\ \ddot{\psi}_3 = \frac{k}{m}(\psi_2 - \psi_3) - \frac{k}{m}(\psi_3 - \psi_4) - \frac{g}{l}\psi_3 - b\dot{\psi}_3 \\ \ddot{\psi}_4 = \frac{k}{m}(\psi_3 - \psi_4) - \frac{k}{m}(\psi_4 - \psi_5) - \frac{g}{l}\psi_4 - b\dot{\psi}_4 \\ \ddot{\psi}_5 = \frac{k}{m}(\psi_4 - \psi_5) - \frac{g}{l}\psi_5 - b\dot{\psi}_5 \end{cases}$$

## Parte experimental

Medí la longitud del hilo, el diámetro de las bolitas, y su masa, obteniendo respectivamente  $l = (10,0 \pm 0,1)$  cm,  $d = (1,6 \pm 0,1)$  cm, y  $m = (21,1 \pm 0,4)$  g.

Es necesario aclarar que más allá de que realmente las bolitas cuelgan de dos hilos, esta disposición es solamente para restringir el movimiento a un plano, entonces es lo mismo considerar que cuelgan de un solo hilo, cuya longitud fue la que medí.

Dándole una posición inicial distinta de cero a alguna de las masas, filmé y trackeeé las posiciones en función del tiempo para cada masa, para tres condiciones iniciales distintas.

## Parte computacional

El sistema planteado es un sistema de cinco péndulos acoplados por resortes, pero en realidad no existen tales resortes. Sólo quiero usar los resortes para modelar los choques; cuando un péndulo se separa no vuelve por la fuerza restitutiva del resorte sino por efecto de la gravedad. Para explicitar eso, planteé la siguiente condición: Si la distancia entre dos péndulos consecutivos es mayor al diámetro de las bolitas, el resorte deja de existir.

Programando estas ecuaciones diferenciales en python, obtuve gráficos de posición en función del tiempo para cada masa, y una animación, que por obvias razones no se presentan en este trabajo.

El criterio para asignar los valores de las constantes  $k$  y  $b$  fue el siguiente: Para cada video grafiqué una  $\psi$  en función del tiempo y ajusté los máximos por una exponencial, a partir de la cual obtuve el parámetro  $b$ . Para la constante  $k$  de los resortes tomé un valor "grande", pero que permita correr el programa (con el intervalo temporal que corresponda para poder observar resultados).

### Video 1

Tomando  $k = 2000$  N/m,  $b = 1,42 \times 10^{-10}$  kg/s y  $\psi_5 \neq 0$ , se obtienen los siguientes gráficos:

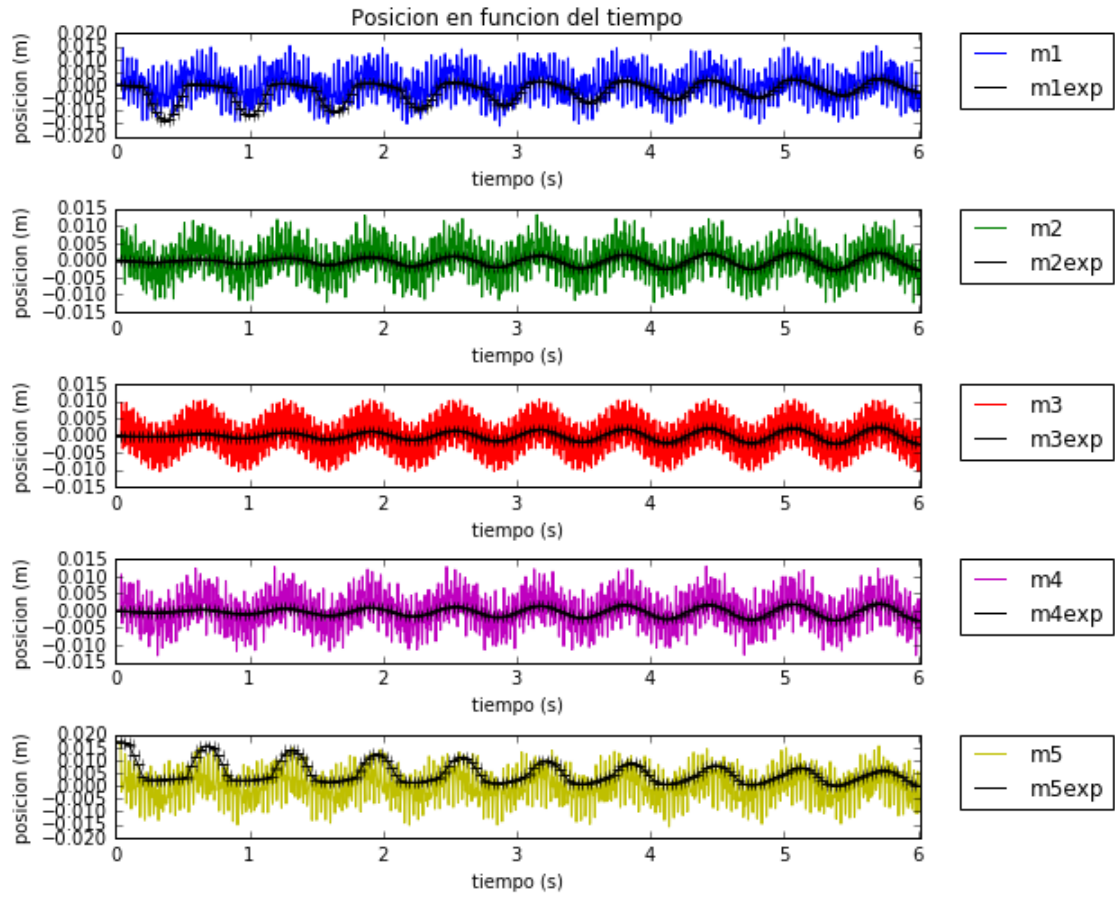


Figura 2: Posición en función del tiempo de cada masa obtenida a partir de la simulación (colores), y a partir del tracker (negro).

Se puede ver que los máximos y mínimos de la simulación coinciden con los del tracker. Sin embargo, en la simulación se observan oscilaciones que en la realidad no aparecen. Este es un error asociado al método, ya que tomé  $k = 2000$  N/m, y este valor va a aumentar la frecuencia de oscilación.

## Video 2

Tomando  $k = 2000$  N/m,  $b = 5,6 \times 10^{-11}$  kg/s y  $\psi_1 \neq 0$ , se obtienen los siguientes gráficos:

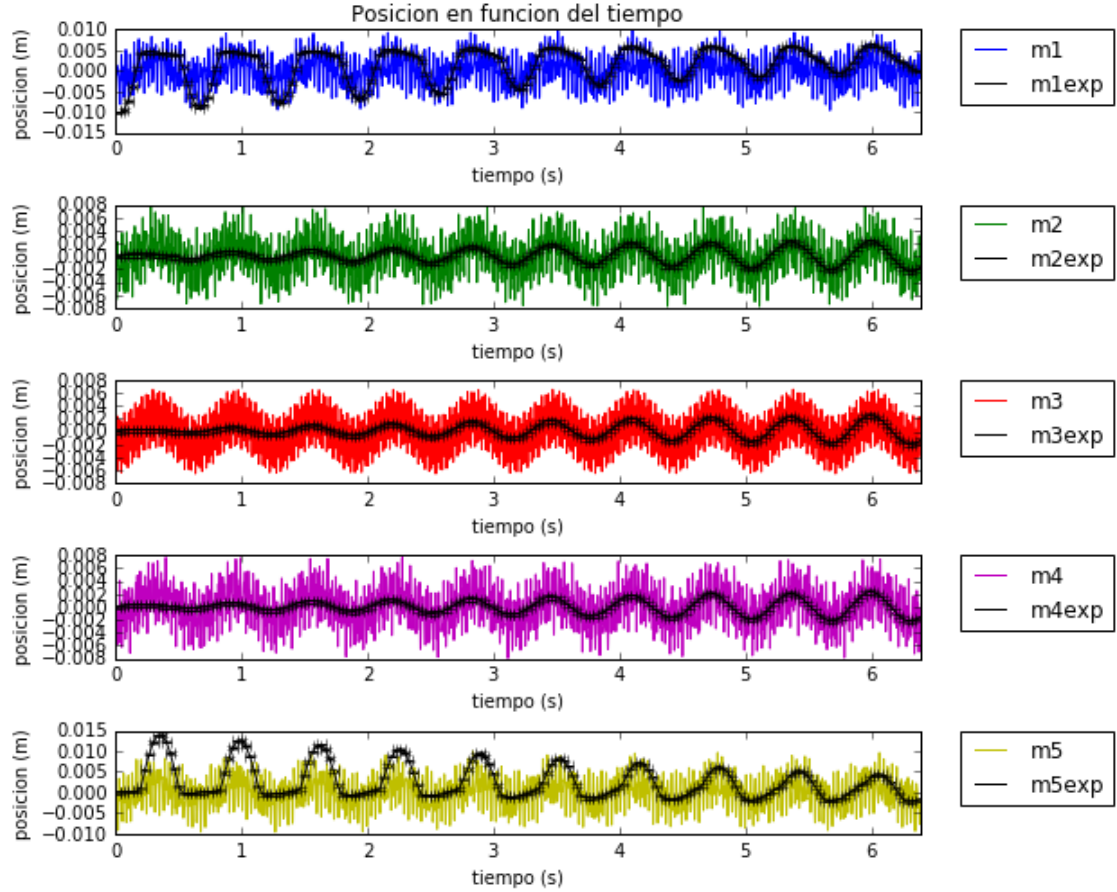


Figura 3: Posición en función del tiempo de cada masa obtenida a partir de la simulación (colores), y a partir del tracker (negro).

En este caso, al igual que en el anterior, se observa la coincidencia de los máximos y mínimos y la presencia de oscilaciones debidas al valor de  $k$ . Además, en los gráficos para  $\psi_1$  y  $\psi_5$ , se ve que mientras el tracker tiene ciertos intervalos casi constantes, la simulación sigue de manera suave. Esto ocurre porque al suponer que existen resortes entre las masas, los choques simulados siempre van a ser suaves.

### Video 3

En este caso traté de recrear un modo normal del sistema, dejando caer  $\psi_1$  y  $\psi_5$  desde la misma altura. En vez de usar la condición de que si la distancia es mayor al diámetro, el resorte desaparece, tomé  $k = 20000$  N/m para los resortes intermedios, y  $k = 200$  N/m para los de los extremos, dos órdenes de magnitud menor. Tomando  $b = 0,18543$  kg/s, se obtienen los siguientes gráficos:

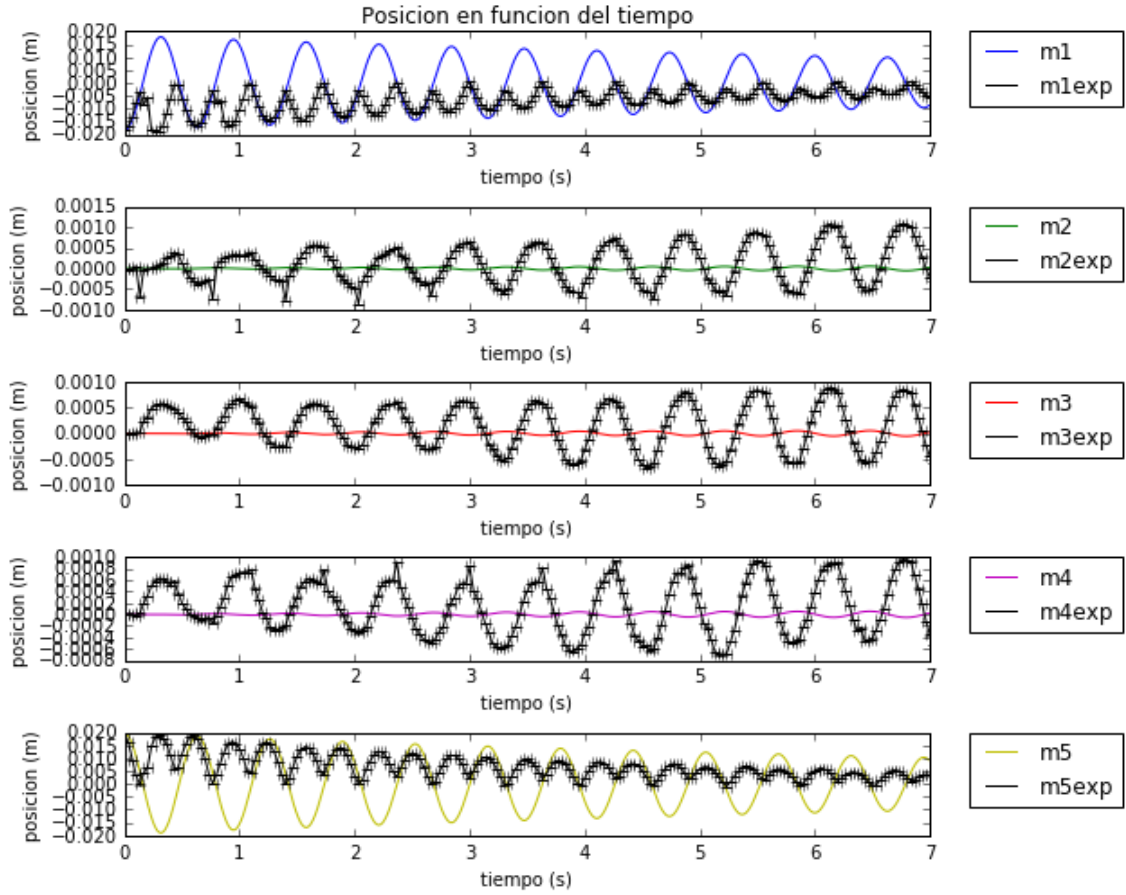


Figura 4: Posición en función del tiempo de cada masa obtenida a partir de la simulación (colores), y a partir del tracker (negro).

Como el sistema se encuentra en un modo normal, no se observan las oscilaciones debidas al valor de  $k$ . En los gráficos de  $\psi_1$  y  $\psi_5$ , la simulación coincide con el tracker en la mitad de los ciclos. El motivo de esta diferencia se observa claramente en la animación. En la simulación, cuando debería producirse un choque, lo que pasa es que se comprime el resorte, entonces las masas 1 y 5 ocupan parte del espacio de las masas 2 y 4, lo cual en la realidad es imposible. Esta superposición de los péndulos es lo que da lugar a la continuación de la oscilación hacia las tres masas centrales. También éste es el motivo por el cual en la simulación las masas centrales prácticamente no se mueven, mientras que en la realidad oscilan alrededor de sus posiciones de equilibrio (con órdenes de magnitud mucho menores a la oscilación de las masas 1 y 5).

#### Video 4

En este caso traté de recrear otro modo normal del sistema, dejando caer todos los péndulos desde la misma altura, es decir, el modo con  $\omega = 0$ . Tomando  $k = 20000 \text{ N/m}$  y  $b = 3,66791 \times 10^{-10} \text{ kg/s}$ , se obtienen los siguientes gráficos:

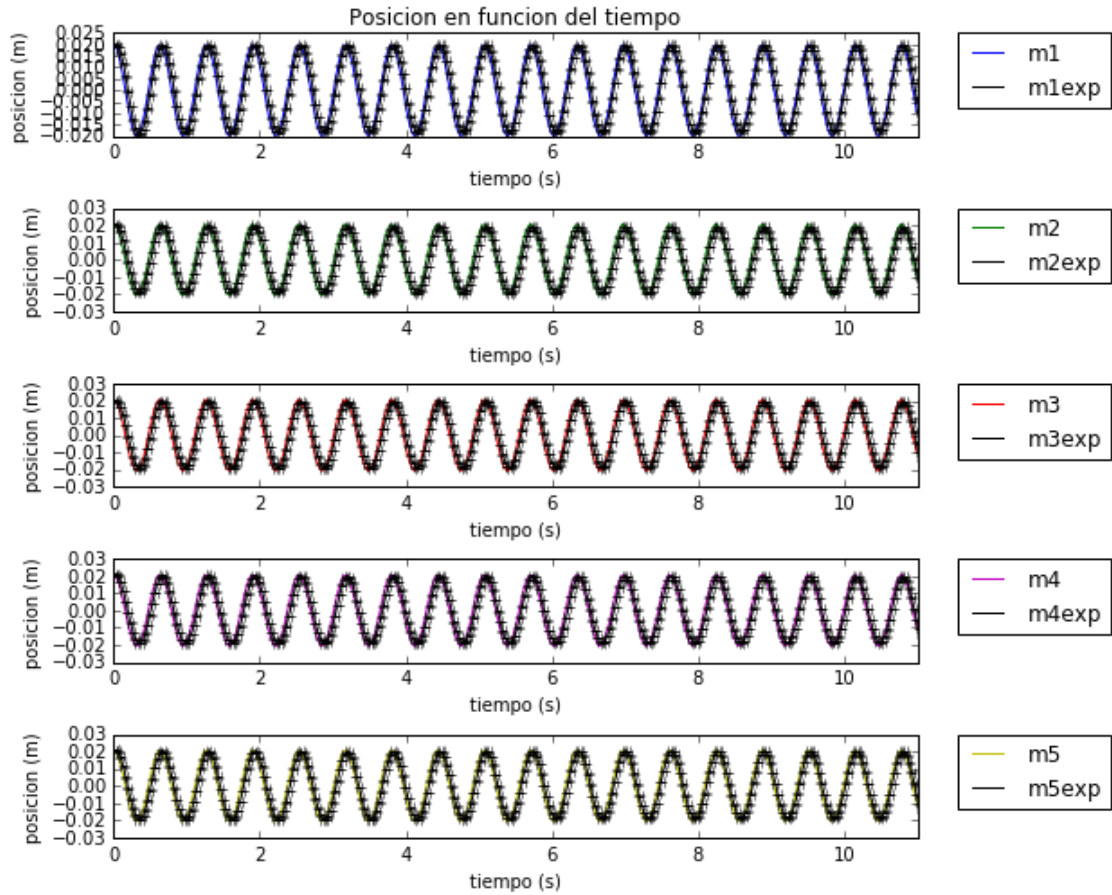


Figura 5: Posición en función del tiempo de cada masa obtenida a partir de la simulación (colores), y a partir del tracker (negro).

Se observa que la simulación coincide perfectamente con el tracker. Al poner directamente en las ecuaciones diferenciales la condición  $k = 0$ , se obtienen los mismos gráficos.

## Referencias

- [1] F. Herrmann and P. Schmalzle, *Simple explanation of a well-known collision experiment*, Institut fur Didaktik der Physik der Universitat Karlsruhe, Germany, 1980.
- [2] F. Herrmann y M. Seitz, *How does the ball-chain work?*, Institut fur Didaktik der Physik der Universitat Karlsruhe, Germany, 1982.
- [3] D. R. Lovett, K. M. Moulding and Anketell-Jones, *Collisions between elastic bodies: Newton's Cradle*, Department of Physics, University of Essex, UK, 1988.
- [4] E. J. Hinch and S. Saint-Jean, *The fragmentation of a line of balls by an impact*, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, UK, 1999.
- [5] S. Hutzler, G. Delaney, D. Weaire, and F. MacLeod, *Rocking Newton's cradle*, Physics Department, Trinity College Dublin, Ireland, 2004.