UADY
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
"Luz, Ciencia y Verdad"

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Diseños experimentales

Proyecto 3. Unidades IV y V.

"Variabilidad en la duración de las baterías"

Por:
-Samantha Álvarez Herrera
-Abigail Ciau Puga
-Samantha Sobrino Bermejo

Equipo 8

LM. en C. Salvador Medina Peralta

Licenciatura en Actuaría – Especialización en Estadística.

Fecha: Miércoles 20 de noviembre de 2019

TABLA DE CONTENIDOS

Página

1. INTRODUCCIÓN: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Origen de los datos *(Tomado de "Experimentos factoriales con factores aleatorios". http://aulavirtual.agro.unlp.edu.ar/pluginfile.php/4875/mod_resource/content/1/Teoria_-_Experimentos_Factoriales_2_de_2.pdf).*

Se quiere saber si la variabilidad en la duración de baterías elaboradas con diferentes materiales y operadas a diferentes temperaturas están dentro de los estándares aceptables para su comercialización. Para ello se seleccionan aleatoriamente 3 temperaturas de funcionamiento y 3 tipos de materiales. Se cuenta con 4 repeticiones seleccionadas en forma aleatoria por cada tratamiento.

Tabla 1. Datos de la duración de las baterías según el material y la temperatura de operación.

Variable Duración en Horas		Temperaturas					
		A		B		C	
Material	1	130	155	34	40	20	70
		74	180	80	75	82	58
	2	150	188	136	122	25	70
		159	126	106	115	58	45
	3	138	110	174	120	96	104
		168	160	150	139	82	60

Utilice un nivel de significancia del 5%.

2. OBJETIVOS

General:

Específicos:

- Realizar un análisis completo de los datos e identificar correctamente la prueba estadística necesaria para resolver el problema.
- Con base a los resultados obtenidos, decidir qué baterías están dentro de los estándares aceptables para su comercialización.

3. METODOLOGÍA

Los datos recolectados para este análisis se tratan de una sola muestra aleatoria con la cual se busca estudiar la variable "duración de la vida de las baterías" bajo los efectos de dos factores, A: Material y B: Temperatura, ambos con un gran número de niveles, por lo que fueron seleccionados, de manera azarosa, 3 niveles para cada uno de estos. Además, el experimento se hace con 4 réplicas.

Modelo

Según las características del problema de estudio, es adecuado un **diseño factorial de dos factores aleatorios**. Según lo mencionado con anterioridad, las observaciones pueden representarse con el modelo lineal:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \\ k = 1,2,3,4 \end{cases}$$

Donde:

- $\tau_i,\ \beta_j,\ (\tau\beta)_{ij}\ y\ \varepsilon_{ijk}$ son variables aleatorias *independientes*.
- μ es la media general.
- τ_i es el efecto del i-ésimo nivel del factor renglón A: Material.
- β_j es el efecto del j-ésimo nivel del factor columna B: Temperatura.
- $(\tau\beta)_{ij}$ efecto de la interacción entre τ_i y β_j.
- ε_{ijk} es el error aleatorio.
- y_{ijk} es la observación correspondiente al i-ésimo nivel del factor renglón A en el nivel j-ésimo del factor columna B, y k-ésima repetición o réplica.

Además, se supondrá que:

- $\tau_i \sim NI(0, \sigma_\tau^2)$
- $\beta_j \sim NI\left(0, \sigma_\beta^2\right)$
- $(\tau\beta)_{ij} \sim NI\left(0, \sigma_{\tau\beta}^2\right)$
- $\varepsilon_{ijk} \sim NI(0, \sigma^2)$

Por lo que es válida la identidad del componente de la varianza, es decir, la varianza de cualquier observación es

$$Var\left(y_{ijk}\right) = \sigma_y^2 = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2$$

Donde,

σ_y^2: es la variabilidad total (que incluye la variabilidad debida a las diferentes temperaturas y la variabilidad debida a los diferentes materiales)
σ_τ^2: es el componente de la varianza de los materiales.
σ_β^2: es el componente de la varianza de las temperaturas.
$\sigma_{\tau\beta}^2$: es el componente de la varianza que representa la interacción entre los materiales y las temperaturas; y
σ^2: es el error experimental operatorio.

Para saber si la variabilidad en la duración de baterías elaboradas con diferentes materiales y operadas a diferentes temperaturas están dentro de los estándares aceptables para su comercialización, nos interesa probar las siguientes *hipótesis*:

Para el efecto de tratamientos del factor renglón A, Material:

$$H_0^1: \sigma_\tau^2 = 0 \quad vs \quad H_1^1: \sigma_\tau^2 > 0$$

Coloquialmente

$H_0^1: No\ existe\ variabilidad\ entre\ la\ duración\ de\ las\ baterias\ fabricadas\ de\ distinto\ material,$
$es\ decir, el\ tipo\ de\ material\ no\ tiene\ efecto\ sobre\ la\ duración.$

$$vs$$

$H_1^1: Existe\ variabilidad\ entre\ la\ duración\ de\ las\ baterias\ fabricadas\ de\ distinto\ material$

Para el efecto de tratamientos del factor columna B, Temperatura:

$$H_0^2: \sigma_\beta^2 = 0 \quad vs \quad H_1^2: \sigma_\beta^2 > 0$$

Coloquialmente

H_0^2: *No existe variabilidad entre la duración de las baterias operadas bajo distintas temperaturas, es decir, la temperatura de operación no tiene efecto sobre la duración de las baterías.*

vs

H_1^2: *Existe variabilidad entre la duración de las baterias operadas en distintas temperaturas*

Para el efecto de la interacción del factor A y B:

$$H_0^3: \sigma_{\tau\beta}^2 = 0 \quad vs \quad H_1^3: \sigma_{\tau\beta}^2 > 0$$

Coloquialmente

H_0^3: *No existe variabilidad en la duración de las baterias para los distintos materiales cuando son sometidos a diferentes temperaturas.*

vs

H_1^3: *Existe variabilidad en la duración de las baterias para los distintos materiales cuando son sometidos a diferentes temperaturas.*

Los cálculos de las sumas de cuadrados se calculan como sigue:

$$SC_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SC_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SC_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SC_{AB} = \left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn} \right) - SC_A - SC_B$$

$$SC_E = SC_T - SC_A - SC_B - SC_{AB}$$

Para formar los estadísticos de prueba, deben examinarse los *cuadrados medios esperados*, dados por:

$$\begin{aligned} E(CM_A) &= \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + bn\sigma_\tau^2 \\ E(CM_B) &= \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + an\sigma_\beta^2 \\ E(CM_{AB}) &= \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 \\ E(CM_E) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Para probar la hipótesis de que <u>no hay interacción</u>, $H_0^1: \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$, el estadístico es:

$$F_0 = \frac{CM_{AB}}{CM_E} \sim F_{(3-1),(3)(3)(4-1)}$$

De manera similar, para probar $H_0^2 \colon \sigma_\tau^2 = 0$ se usaría:

$$F_0 = \frac{CM_A}{CM_{AB}} \sim F_{(3-1),(3-1)(3-1)}$$

Finalmente, para probar $H_0^3 \colon \sigma_\beta^2 = 0$ el estadístico es:

$$F_0 = \frac{CM_B}{CM_{AB}} \sim F_{(3-1),(3-1)(3-1)}$$

Además de las pruebas de hipótesis, nos interesa la estimación de los componentes de varianza debido a que se quiere determinar la variabilidad en la duración de baterías para así decidir qué baterías están dentro de los estándares aceptables para su comercialización.

Los componentes de la varianza pueden estimarse con el *método del análisis de varianza*, es decir, igualando los cuadrados medios observados de las líneas de la tabla del análisis de varianza con sus valores esperados y resolviendo para los componentes de varianza, esto es:

$$\hat{\sigma}^2 = CM_E$$

$$\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2 = \frac{CM_{AB} - CM_E}{n} = \frac{CM_{AB} - CM_E}{4}$$

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{CM_B - CM_{AB}}{an} = \frac{CM_B - CM_{AB}}{(3)(4)}$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{CM_A - CM_{AB}}{bn} = \frac{CM_A - CM_{AB}}{(3)(4)}$$

4. RESULTADOS

Del Anexo B se obtiene que los supuestos de independencia, homocedasticidad y normalidad de los residuos se cumplen (S-W=0.9761, Valor-P=0.686085).

De la tabla ANOVA en el Anexo A, vemos que el Material de las baterías no tiene un efecto significativo individualmente en la duración de las baterías (Valor-P=0.2243). Por otro lado, la Temperatura (Valor-P=0.0389) y la interacción de está con el Material (Valor-P=0.0186) influyen significativamente a la duración de las baterías. La interacción significativa implica que la duración de las baterías no varia de manera congruente para los distintos materiales cuando son sometidas a diferentes temperaturas.

Adicionalmente, las estimaciones de la variabilidad para el material, temperatura y su interacción resultaron ser de 244.87, 1439.66 y 432.06 respectivamente, dando como variabilidad total 2781.80.

5. CONCLUSIONES

Con el propósito de decidir si la variabilidad en la duración de las baterías está dentro de los estándares para su comercialización, se analizaron dos factores que influyen en su elaboración: Material y Temperatura. El primer factor resulto no ser significativo mientras que la Temperatura y su interacción con el material sí resultaron ser significativos.

La interacción significativa implica que la duración de las baterías no varía de manera congruente para distintos materiales cuando son sometidas a diferentes temperaturas. Sin embargo, de la variabilidad total, la mayor parte de sebe a la variabilidad del componente temperatura con un 51.4%.

De esta manera, los ingenieros de la fábrica deberán decidir si alguno de los componentes que contribuyen a la variabilidad, en forma significativa, excede un nivel aceptable y, de ser necesario, deberán modificar la composición de los materiales con el fin de disminuir la variabilidad total.

6. REFERENCIAS

Montgomery, D.C. (2004). Diseño y análisis de experimentos. 2ª Ed. Limusa Wiley, México, D.F.

"Experimentos factoriales con factores aleatorios" Recuperado de: http://aulavirtual.agro.unlp.edu.ar/pluginfile.php/4875/mod_resource/content/1/Teoria_-_Experimentos_Factoriales_2_de_2.pdf

ANEXO A: Resultados con el paquete estadístico

Resultados con el paquete estadístico:

Type III Sums of Squares

Source	*Sum of Squares*	*Df*	*Mean Square*	*F-Ratio*	*P-Value*
Material	10683.7	2	5341.86	2.22	0.2243
Temperatura	39118.7	2	19559.4	8.14	0.0389
Material*Temperatura	9613.78	4	2403.44	3.56	0.0186
Residual	18230.8	27	675.213		
Total (corrected)	77647.0	35			

Las estimaciones de las componentes de varianza son:

$$\hat{\sigma}^2 = CM_E = 675.213$$

$$\hat{\sigma}^2_{\tau\beta} = \frac{CM_{AB} - CM_E}{n} = \frac{2403.44 - 675.213}{4} = 432.06$$

$$\hat{\sigma}^2_{\beta} = \frac{CM_B - CM_{AB}}{an} = \frac{19559.36 - 2403.44}{12} = 1429.66$$

$$\hat{\sigma}^2_{\tau} = \frac{CM_A - CM_{AB}}{bn} = \frac{5341.86 - 2403.44}{12} = 244.87$$

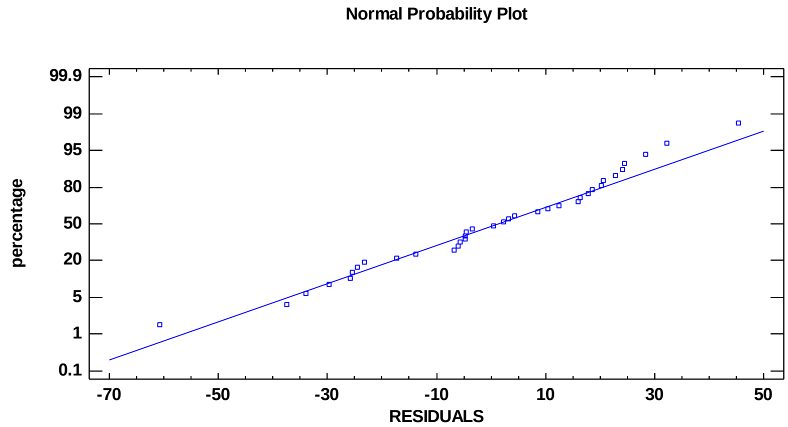
La estimación de la varianza total de una observación es:

$$\sigma^2_y = \sigma^2_\tau + \sigma^2_\beta + \sigma^2_{\tau\beta} + \sigma^2 = 675.213 + 244.87 + 1429.66 + 432.06 = 2781.80$$

La interacción significativa implica que la duración de las baterías no varía de manera congruente para los distintos materiales cuando son sometidas a diferentes temperaturas. Sin embargo, la mayor parte de la variabilidad se debe a la componente temperatura con un 51.4 % de la variabilidad total. Los ingenieros de la fábrica deberán decidir si alguna de los componentes que contribuyen a la variabilidad, en forma significativa, excede un nivel aceptable y, de ser necesario, deberán modificar la composición de los materiales con el fin de disminuir la variabilidad total.

ANEXO B: Verificación de supuestos.

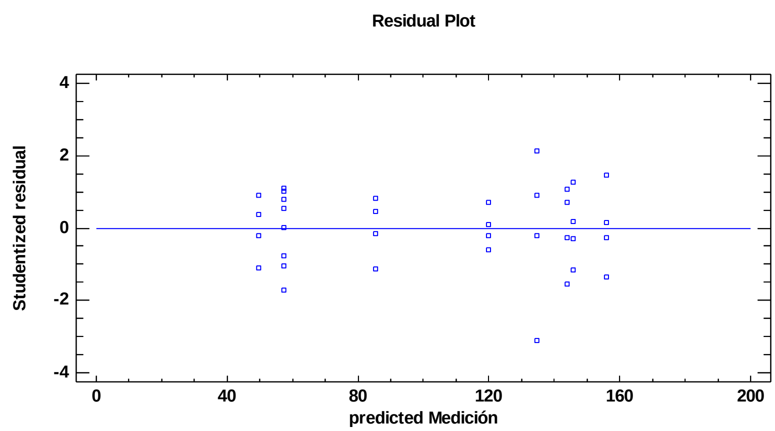
Normalidad: En el gráfico de *probabilidad Normal*, se observa que los puntos se encuentran casi sobre la recta. Además, la prueba de Shapiro-Wilk resulto significativa (S-W=0.9761, Valor-P=0.686085). Por lo que podemos concluir que los residuos si se ajustan a la distribución Normal.



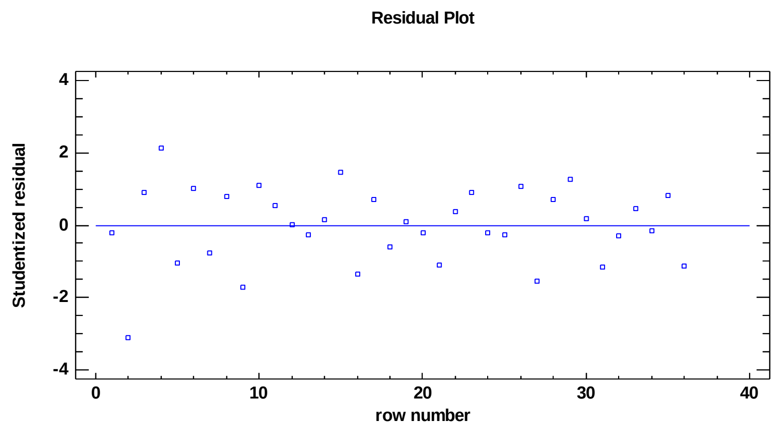
Tests for Normality for RESIDUALS

Test	*Statistic*	*P-Value*
Shapiro-Wilk W	0.976131	0.696085

Homocedasticidad: En la gráfica de *Residuos vs. Valor predicho*, no se observa ningún patrón, y los puntos se encuentran dispersos en una banda horizontal, por lo que se cumple el supuesto de igualdad de varianzas.



Independencia: En la gráfica de *Tiempo contra Residuos*, no se observa ningún patrón por lo que se cumple el supuesto de independencia.



Dado que se cumplen los supuestos, se puede interpretar el ANOVA.