Dia da Matemática

Oficina 1 - Uma senhora toma chá, mas eu tomo Coca-Cola!

Profa. Samara F. Kiihl

Introdução

Uma senhora toma chá

R. A. Fisher foi um dos fundadores da Estatística moderna.

Em um de seus famosos experimentos, ele testou a capacidade de uma senhora em distinguir se a xícara estava servida com o leite colocado antes ou depois do chá.

Vídeo

Uma senhora toma chá

Como planejar um experimento para testar a capacidade da pessoa distinguir se o chá foi preparado com leite primeiro ou por último?

- Como lidar com variações na temperatura do chá, quantidade de açúcar, entre outras?
- Quantas xícaras devem ser usadas no teste? Qual a ordem de apresentação dessas xícaras?
- Qual conclusão iremos tirar caso a pessoa erre somente uma vez? Ou duas vezes?

Experimento

- 8 xícaras: 4 com chá colocado antes do leite e 4 com leite antes do chá.
- As oito xícaras foram apresentadas em ordem aleatória para a senhora, mas a informação de que eram 4 de cada tipo foi passada a ela.
- A senhora deveria provar a bebida das oito xícaras e escolher as 4 xícaras que acreditava estar com chá primeiro.
- Verificou-se quantas dentre as 4 xícaras ela escolheu corretamente.
- Quais os resultados possíveis do experimento?

Resultados possíveis

- Tarefa da senhora: escolher as 4 xícaras com chá primeiro.
- São 8 xícaras: 4 com leite primeiro e 4 com chá primeiro.
- A senhora escolhe 4 dentre 8, sem reposição.
- De quantas formas ela pode fazer isso, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{8}{4} = 70$$

Resultados possíveis

- É possível que ela escolha as 4 corretamente: 4 com chá primeiro.
- De quantas formas ela pode escolher 4 corretas?
- Para escolher 4 corretas, duas coisas devem ocorrer: escolher 4 com chá primeiro (dentre 4 com chá primeiro) e não escolher nenhuma dentre as 4 com leite primeiro.
- De quantas formas é possível fazer isso, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{4}{4}\binom{4}{0} = 1$$

Resultados possíveis

- É possível que ela escolha 3 corretamente: 3 com chá primeiro e 1 com leite primeiro.
- De quantas formas ela pode escolher 3 corretas, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{4}{3}\binom{4}{1} = 16$$

Resultados possíveis

- É possível que ela escolha 2 corretamente: 2 com chá primeiro e 2 com leite primeiro.
- De quantas formas ela pode escolher 2 corretas, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36$$

Resultados possíveis

- É possível que ela escolha 1 corretamente: 1 com chá primeiro e 3 com leite primeiro.
- De quantas formas ela pode escolher 1 correta, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

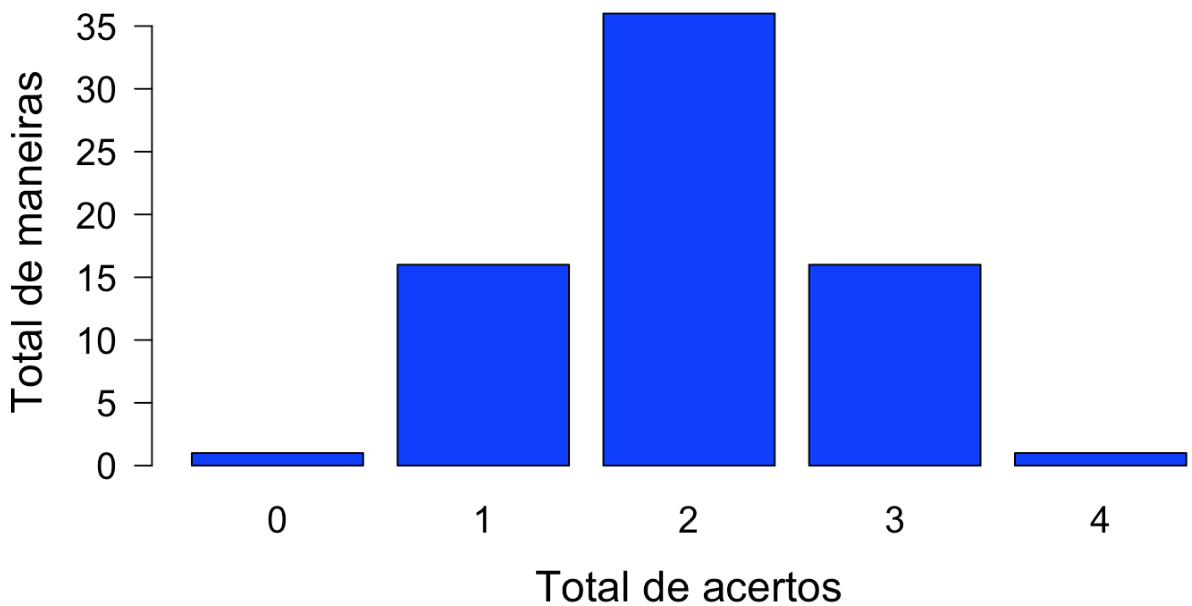
$$\binom{4}{1}\binom{4}{3} = 16$$

Resultados possíveis

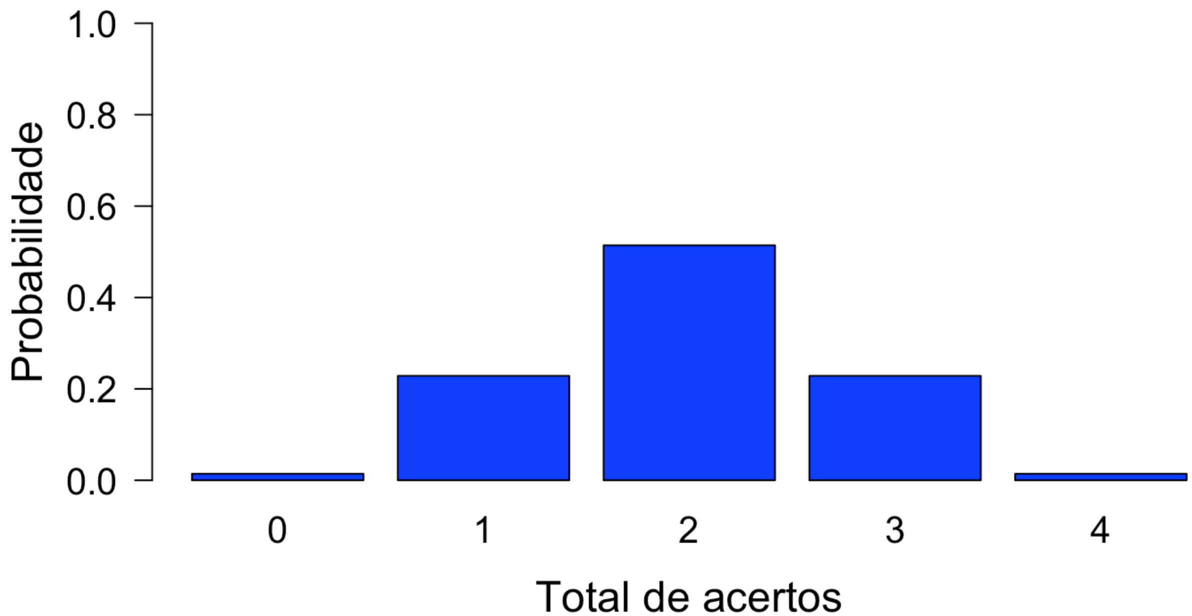
- É possível que ela erre todas: 0 com chá primeiro e 4 com leite primeiro.
- De quantas formas ela pode errar todas, caso ela de fato não saiba distinguir e esteja fazendo tudo ao acaso?

$$\binom{4}{0}\binom{4}{4} = 1$$

Resultados possíveis



Resultados possíveis



Teste de hipótese

- H_0: A senhora não consegue distinguir entre chá ou leite primeiro e escolhe ao acaso durante o experimento.
- H_a: A senhora consegue distinguir.
- Usaremos o total de acertos (x) como resumo do resultado do experimento (estatística do teste).
- Para decidir, precisamos avaliar como a estatística do teste se comporta quando H_0 é verdadeira (resultados possíveis e respectivas probabilidades).

Teste de hipótese

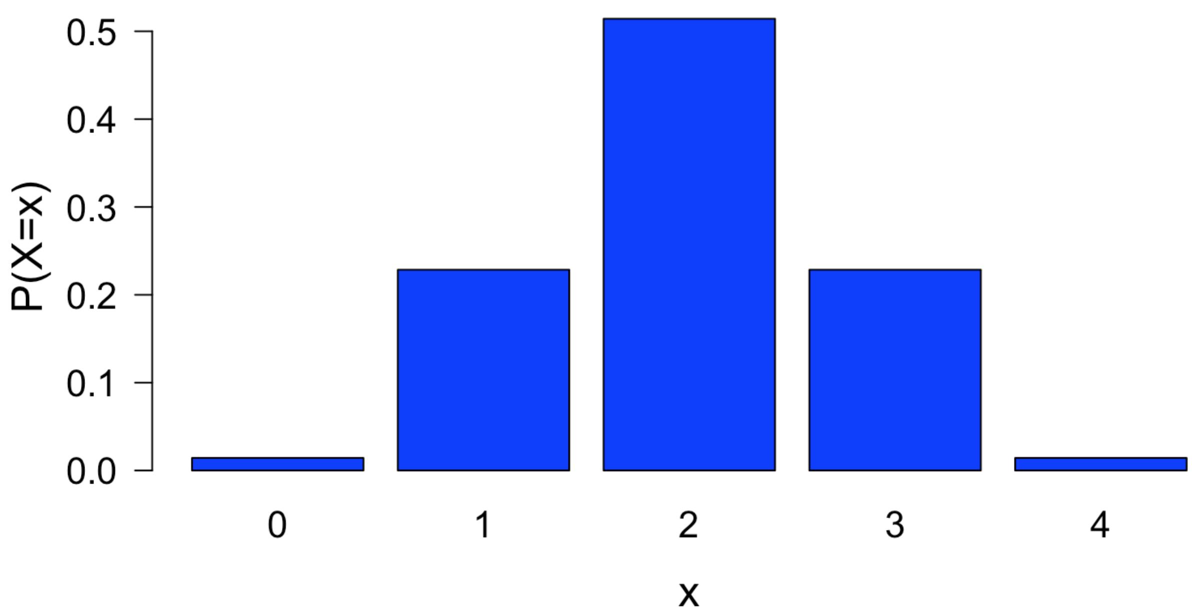
Queremos calcular a probabilidade de que dentre as 4 xícaras escolhidas ao acaso (sob H_0) x tenham de fato o chá colocado primeiro.

A probabilidade de se observar x nessas condições (sob H_0) é dada por:

$$\frac{\binom{4}{x}\binom{4}{n-x}}{\binom{8}{4}}, \qquad 0 \leq x \leq 4$$

Teste de Hipótese

Distribuição da Estatística do Teste sob H_0



Teste de Hipótese

Como decidir se rejeitamos ou não H_0 de acordo com a estatística do teste observada?

Como decidir se rejeitamos a hipótese de que a senhora não consegue distinguir os chás, sendo que ela acertou, por exemplo, 3? Se ela tivesse acertado todas as 4 xícaras? Seria por pura sorte? Ou ela tem algum conhecimento?

Calculamos a probabilidade de um valor igual ou mais extremo ao da estatística do teste observada (**valor-de-p**). Mais extremo: mais evidência contra H_0.

Se o valor-de-p obtido é bem pequeno, por exemplo, 0.01, isto quer dizer que se H_0 é verdadeira, então seria incomum obter uma amostra com os resultados como o observado.

Um valor-de-p muito baixo traz fortes evidências contra H_0.

Conclusão

Se a senhora acertou 3 xícaras:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{1}}{\binom{8}{4}} = 8/35$$

Calculamos a probabilidade de um valor igual ou mais extremo ao da estatística do teste observada (**valor-de-p**). Mais extremo: mais evidência contra H_0.

Se a senhora tivesse acertado 4, seria ainda mais evidência contra H_0, de forma que o valor de p é calculado como:

$$P(X = 3) + P(X = 4) = 8/35 + 1/70 = 17/70$$

Se este valor for considerado alto, não temos evidências, baseando-se no experimento realizado, para rejeitar H_0.

Experimento com Coca-Cola

Resposta	Copo tem Coca-cola	Copo tem Coca Zero	Total
Aluno diz coca-cola	x	$n - x$	n
Aluno diz coca zero			
Total	n	$N - n$	N

- N copos foram preparados
- n com Coca-Cola
- $N - n$ com Coca Zero

Experimento com Coca-Cola

- O aluno é informado do total de copos com Coca-Cola e do total de copos com Coca Zero.
- Os copos são apresentados em ordem aleatória para o aluno provar e escolher n que ele acha que tem Coca-Cola.
- O experimento é planejado de maneira que as margens da tabela são fixas, pois o aluno é informado do total de copos preparados de cada maneira.
- Portanto, se soubermos x, sabemos todas as outras caselas da tabela.
- Desta forma, usaremos x para avaliar se o experimento trás evidências contra ou a favor da hipótese nula.

Teste de hipótese

- H_0: A senhora não consegue distinguir entre chá ou leite primeiro e escolhe ao acaso durante o experimento.
- H_a: A senhora consegue distinguir.
- Usaremos o total de acertos (x) como resumo do resultado do experimento (estatística do teste).
- Para decidir, precisamos avaliar como a estatística do teste se comporta quando H_0 é verdadeira (resultados possíveis e respectivas probabilidades).

Teste de hipótese

Queremos calcular a probabilidade de que dentre as n xícaras escolhidas ao acaso (sob H_0) x tenham de fato Coca-Cola.

A probabilidade de se observar x nessas condições (sob H_0) é dada por:

$$\frac{\binom{n}{x}\binom{N-n}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad 0 \leq x \leq n$$

Teste de hipótese

Calcula-se a probabilidade de observarmos x e as probabilidades de observarmos valos maiores do que x (até o máximo de acertos possíveis: n).

A soma dessas probabilidades é o **valor de p**, que resume a evidência contra H_0. Se o valor de p é pequeno, dizemos que encontramos evidências, através do experimento, para rejeitar H_0.

Leituras

- David Salsburg - Uma senhora toma chá: Como a estatística revolucionou a ciência no século XX
- Dama apreciadora de chá