

Polytechnique Montréal

MTH8207

# Résolution de l'équation de Black–Scholes par la méthode des éléments finis

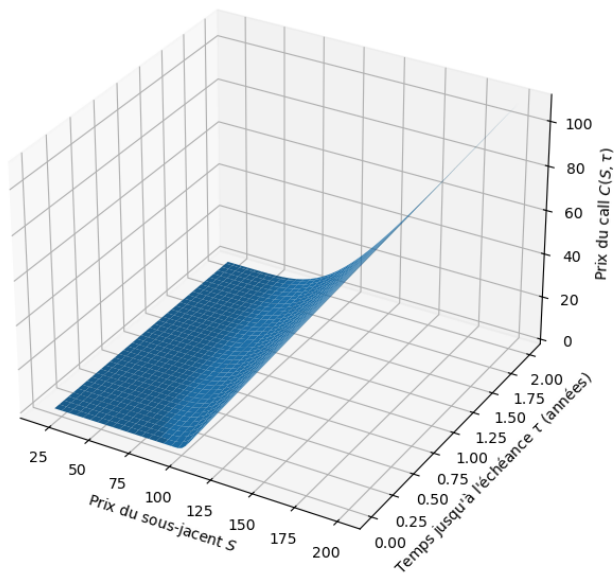


Figure 1 : Surface de prix d'un call Black–Scholes

Samatar ABERKANE

Emir TUNCBILEK

Automne 2025

Encadrant : Serge Prudhomme

18 décembre 2025

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et présentation du problème</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modèle mathématique : EDP, domaine et conditions aux limites</b>	<b>2</b>
2.1	Domaine espace–temps tronqué . . . . .	2
2.2	Équation de Black–Scholes sur un domaine borné . . . . .	2
2.3	Conditions aux limites en $S = 0$ et $S = S_{\max}$ . . . . .	2
2.4	Problème aux limites complet . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Formulation faible et problème bien posé</b>	<b>3</b>
3.1	Homogénéisation des conditions de Dirichlet . . . . .	3
3.2	Espaces fonctionnels et produit scalaire . . . . .	4
3.3	Formulation faible . . . . .	4
3.4	Continuité et coercivité de la forme bilinéaire . . . . .	5
3.5	Problème faible bien posé . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Discretisation par éléments finis et schéma en temps</b>	<b>6</b>
4.1	Maillage et espaces d’éléments finis . . . . .	6
4.2	Problème semi-discret en espace . . . . .	6
4.3	Discretisation en temps : schéma de Crank–Nicolson . . . . .	7
4.4	Algorithme numérique retenu . . . . .	8
4.5	Application numérique : Simulation d’un Call Européen . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Vérification du code par la méthode des solutions manufacturées</b>	<b>9</b>
5.1	Choix d’une solution manufacturée et terme source . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Étude des taux de convergence</b>	<b>10</b>
6.1	Définition des erreurs . . . . .	10
6.2	Ordres de convergence spatiale . . . . .	11
<b>7</b>	<b>Convergence d’une quantité d’intérêt</b>	<b>12</b>
7.1	Cas 1 : Prix à la monnaie ( $S = K = 25$ ) . . . . .	13
7.2	Cas 2 : Prix dans la monnaie ( $S = 1.3K = 32.5$ ) . . . . .	14
<b>8</b>	<b>Analyse des résultats et Conclusion</b>	<b>15</b>
8.1	Analyse détaillée des résultats . . . . .	15
8.2	Conclusion . . . . .	16

# 1 Introduction et présentation du problème

L'objectif de ce projet est d'étudier l'approximation numérique de l'équation de Black–Scholes par la méthode des éléments finis en espace, couplée à une discrétisation en temps. Cette équation joue un rôle fondamental en finance quantitative pour la valorisation d'options européennes.

On s'intéresse au prix  $V(t, S)$  d'une option européenne de type call, écrite sur un actif risqué de prix  $S > 0$ , avec volatilité constante  $\sigma > 0$ , taux d'intérêt sans risque constant  $r \geq 0$ , maturité  $T > 0$  et prix d'exercice  $K > 0$ . Sous les hypothèses classiques du modèle de Black–Scholes, le prix théorique  $V(t, S)$  satisfait l'équation aux dérivées partielles parabolique

$$\partial_t V(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS} V(t, S) + rS \partial_S V(t, S) - rV(t, S) = 0, \quad 0 < t < T, \quad S > 0. \quad (1.1)$$

À maturité  $t = T$ , le prix de l'option est donné par le payoff

$$V(T, S) = \max(S - K, 0), \quad S > 0, \quad (1.2)$$

et l'on suppose que cette valeur est connue.

Dans la suite, nous considérerons un domaine spatial borné  $(0, S_{\max})$  avec  $S_{\max}$  suffisamment grand pour que le tronquage soit numériquement acceptable. Le but du projet est :

- de formuler rigoureusement le problème mathématique associé à (1.1)–(1.2) sur un domaine borné, avec des conditions aux limites appropriées ;
- d'en dériver une formulation faible bien posée, adaptée à la méthode des éléments finis ;
- de préparer le cadre fonctionnel pour l'analyse de la discrétisation numérique (convergence, estimation d'erreur, etc.).

## 2 Modèle mathématique : EDP, domaine et conditions aux limites

### 2.1 Domaine espace–temps tronqué

Le modèle continu est posé sur le domaine espace–temps tronqué

$$Q := (0, T) \times (0, S_{\max}),$$

où  $T > 0$  est la maturité et  $S_{\max} > 0$  est une borne supérieure choisie de façon à ce que

$$\mathbb{P}(S_T > S_{\max}) \approx 0,$$

de sorte que le tronquage n'altère que très peu la valeur de l'option.

La frontière spatiale de ce domaine est  $\{0\} \cup \{S_{\max}\}$ .

### 2.2 Équation de Black–Scholes sur un domaine borné

Sur le domaine  $Q$ , la fonction  $V : [0, T] \times [0, S_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait

$$\partial_t V(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS} V(t, S) + rS \partial_S V(t, S) - rV(t, S) = 0, \quad (t, S) \in Q. \quad (2.1)$$

La condition terminale en  $t = T$  est donnée par (1.2), restreinte à l'intervalle  $(0, S_{\max})$  :

$$V(T, S) = g(S) := \max(S - K, 0), \quad S \in (0, S_{\max}). \quad (2.2)$$

### 2.3 Conditions aux limites en $S = 0$ et $S = S_{\max}$

Pour une option call européenne, il est classique d'imposer les conditions aux limites suivantes :

**Condition en  $S = 0$ .** Lorsque le sous-jacent vaut zéro, l'option call n'a aucune valeur :

$$V(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

**Condition en  $S = S_{\max}$ .** Pour  $S$  très grand, le payoff  $\max(S - K, 0)$  se comporte comme  $S - K$ . Par continuité en amont de la maturité, on impose une approximation linéaire à la frontière à droite :

$$V(t, S_{\max}) = S_{\max} - Ke^{-r(T-t)}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.4)$$

Cette condition correspond à la valeur d'un actif risqué sans borne supérieure, moins la valeur actualisée du strike.<sup>1</sup>

## 2.4 Problème aux limites complet

Le problème de Black-Scholes tronqué sur  $(0, S_{\max})$  s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \partial_t V + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS} V + rS \partial_S V - rV = 0, & (t, S) \in (0, T) \times (0, S_{\max}), \\ V(T, S) = g(S) := \max(S - K, 0), & S \in (0, S_{\max}), \\ V(t, 0) = 0, & t \in [0, T], \\ V(t, S_{\max}) = S_{\max} - Ke^{-r(T-t)}, & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ce problème servira de point de départ à la formulation faible et à la discrétisation par éléments finis.

## 3 Formulation faible et problème bien posé

### 3.1 Homogénéisation des conditions de Dirichlet

La condition de Dirichlet (2.4) n'est pas homogène. Pour simplifier l'analyse, on introduit une fonction de *relèvement*  $\psi : [0, T] \times [0, S_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\psi(t, 0) = 0, \quad \psi(t, S_{\max}) = S_{\max} - Ke^{-r(T-t)}, \quad \forall t \in [0, T],$$

et l'on écrit

$$V(t, S) = U(t, S) + \psi(t, S).$$

Alors  $U$  satisfait des conditions aux limites homogènes

$$U(t, 0) = U(t, S_{\max}) = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

et une équation de la forme

$$\partial_t U + \mathcal{L}U = f \quad \text{dans } (0, T) \times (0, S_{\max}), \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{L}$  est l'opérateur différentiel spatial associé à (2.1) et  $f$  regroupe les termes dépendant de  $\psi$ . La condition terminale devient

$$U(T, S) = g(S) - \psi(T, S), \quad S \in (0, S_{\max}).$$

---

1. Voir par exemple D. Lamberton et B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Springer, 2<sup>e</sup> éd., 2007, chap. 2.

**Remarque sur le sens du temps.** Le problème (2.5) est posé avec une condition finale en  $t = T$ . On peut le réécrire comme un problème à condition initiale en introduisant la nouvelle variable de temps

$$\tau = T - t, \quad \tilde{V}(\tau, S) := V(T - \tau, S).$$

Alors  $\tilde{V}$  satisfait une équation parabolique en temps croissant  $\tau \in (0, T)$  avec condition initiale  $\tilde{V}(0, S) = V(T, S) = g(S)$ . Ce point de vue est celui classiquement utilisé dans l'analyse des problèmes paraboliques.

Dans la suite, on travaille sur la variable  $U$ , mais pour alléger les notations on continuera à écrire  $V$ .

### 3.2 Espaces fonctionnels et produit scalaire

On considère l'espace de Hilbert

$$H := L^2(0, S_{\max}),$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_H := \int_0^{S_{\max}} u(S) v(S) dS,$$

et l'espace

$$V := H_0^1(0, S_{\max}) = \{v \in H^1(0, S_{\max}) \mid v(0) = v(S_{\max}) = 0\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_V^2 := \|v\|_{H^1(0, S_{\max})}^2 = \|v\|_{L^2(0, S_{\max})}^2 + \|\partial_S v\|_{L^2(0, S_{\max})}^2.$$

### 3.3 Formulation faible

En repartant de (2.1) (après homogénéisation), on multiplie l'équation par une fonction test  $w \in V$  et on intègre sur  $(0, S_{\max})$ . En intégrant par parties le terme de diffusion, on obtient, pour presque tout  $t \in (0, T)$ ,

$$(\partial_t V(t, \cdot), w)_H + a(V(t, \cdot), w) = (f(t, \cdot), w)_H, \quad \forall w \in V, \quad (3.2)$$

où la *forme bilinéaire*  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$a(u, w) := \int_0^{S_{\max}} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_S u(S) \partial_S w(S) + r S \partial_S u(S) w(S) - r u(S) w(S) \right) dS, \quad (3.3)$$

et  $f$  représente le terme source éventuel induit par le relèvement  $\psi$ . La condition terminale s'écrit, dans  $H$ ,

$$V(T, \cdot) = V_T(\cdot) \in H, \quad (3.4)$$

avec  $V_T(S) = g(S) - \psi(T, S)$  dans le cas général.

#### Problème faible (forme abstraite).

Trouver une fonction  $u : [0, T] \rightarrow V$  telle que

$$\begin{cases} u \in L^2(0, T; V), & \partial_t u \in L^2(0, T; V'), \\ (\partial_t u(t), w)_H + a(u(t), w) = (f(t), w)_H, & \forall w \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \\ u(T) = V_T \in H. \end{cases} \quad (3.5)$$

Par abus de notation, on notera encore  $V$  la solution de (3.5).

### 3.4 Continuité et coercivité de la forme bilinéaire

On suppose que  $0 < \sigma_{\min} \leq \sigma$  et  $0 \leq r$  sont des constantes, et que  $S \in (0, S_{\max})$ . Alors, il existe des constantes positives  $C_1, C_2$  (indépendantes de  $u, w$ ) telles que, pour tout  $u, w \in V$ ,

$$|a(u, w)| \leq C_1 \|u\|_V \|w\|_V. \quad (3.6)$$

Autrement dit,  $a$  est continue sur  $V \times V$ .

Plus précisément, en utilisant les inégalités de Cauchy–Schwarz et de Young, on contrôle le terme de convection par

$$\left| \int_0^{S_{\max}} r S \partial_S u(S) w(S) dS \right| \leq r S_{\max} \|\partial_S u\|_{L^2(0, S_{\max})} \|w\|_{L^2(0, S_{\max})} \leq \varepsilon \|\partial_S u\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \|w\|_{L^2}^2,$$

pour un certain  $\varepsilon > 0$  et une constante  $C_\varepsilon > 0$ . Le terme de réaction se contrôle de manière analogue :

$$\left| \int_0^{S_{\max}} r u(S) w(S) dS \right| \leq r \|u\|_{L^2(0, S_{\max})} \|w\|_{L^2(0, S_{\max})}.$$

Ces estimations, combinées au terme de diffusion

$$\int_0^{S_{\max}} \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_S u(S) \partial_S w(S) dS,$$

montrent la continuité de  $a(\cdot, \cdot)$ .

Par ailleurs, en prenant  $w = u$  et en utilisant à nouveau des inégalités de type Gårding, on montre qu'il existe des constantes  $\alpha > 0$  et  $\beta \geq 0$  telles que, pour tout  $u \in V$ ,

$$a(u, u) + \beta \|u\|_H^2 \geq \alpha \|u\|_V^2. \quad (3.7)$$

C'est une inégalité de Gårding, qui implique la coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$  modulo un décalage spectral.

### 3.5 Problème faible bien posé

On se place dans le cadre abstrait des problèmes paraboliques linéaires :  $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ , avec  $a(\cdot, \cdot)$  continue et satisfaisant (3.7). Sous des hypothèses naturelles de régularité sur  $f$  et  $V_T$  (par exemple  $f \in L^2(0, T; V')$ ,  $V_T \in H$ ), le théorème classique de J.-L. Lions sur les problèmes paraboliques linéaires assure la bonne pose suivante.<sup>2</sup>

#### **Théorème (existence et unicité).**

*Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une unique solution*

$$V \in L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V')$$

*du problème faible (3.5). De plus, cette solution satisfait une estimation de stabilité de la forme*

$$\|V\|_{L^2(0, T; V)} + \|\partial_t V\|_{L^2(0, T; V')} \leq C \left( \|V_T\|_H + \|f\|_{L^2(0, T; V')} \right),$$

*pour une constante  $C > 0$  indépendante de  $V_T$  et  $f$ .*

---

<sup>2</sup> Voir par exemple J.-L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, 1968, chap. 3.

**Esquisse de démonstration.** En prenant  $w = V(t)$  dans (3.2), on obtient

$$(\partial_t V(t), V(t))_H + a(V(t), V(t)) = (f(t), V(t))_H.$$

On remarque que

$$(\partial_t V(t), V(t))_H = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V(t)\|_H^2.$$

En utilisant l'inégalité de Gårding (3.7) et l'inégalité de Young sur le terme  $(f(t), V(t))_H$ , on obtient une inégalité différentielle de la forme

$$\frac{d}{dt} \|V(t)\|_H^2 + c_1 \|V(t)\|_V^2 \leq c_2 \|V(t)\|_H^2 + c_3 \|f(t)\|_{V'}^2,$$

pour des constantes  $c_1, c_2, c_3 > 0$ . Un argument de Gronwall permet alors de montrer l'estimation de stabilité ci-dessus et, avec un argument de point fixe, l'existence et l'unicité de la solution (voir la référence précédente pour les détails).

Ce résultat garantit que le problème continu de Black–Scholes tronqué admet une solution faible unique, stable par rapport aux données, ce qui justifie l'étude ultérieure de sa discrétisation par éléments finis.

## 4 Discrétisation par éléments finis et schéma en temps

Dans cette section, nous introduisons le problème éléments finis associé à la formulation faible (3.5) et nous décrivons la discrétisation en temps utilisée pour obtenir un schéma entièrement discret.

### 4.1 Maillage et espaces d'éléments finis

On considère une partition régulière de l'intervalle spatial  $[0, S_{\max}]$  :

$$0 = S_0 < S_1 < \dots < S_N = S_{\max},$$

où  $K_i = [S_{i-1}, S_i]$  désigne le  $i$ -ième élément et

$$h_i = S_i - S_{i-1}, \quad h := \max_{1 \leq i \leq N} h_i$$

la taille maximale de maille.

Pour un entier  $p \geq 1$ , on définit l'espace éléments finis conforme

$$V_h := \left\{ v_h \in C^0([0, S_{\max}]) \mid v_h|_{K_i} \in \mathbb{P}_p(K_i), \forall i, v_h(0) = v_h(S_{\max}) = 0 \right\} \subset V. \quad (4.1)$$

Dans la pratique, nous utiliserons principalement des éléments de Lagrange de degré  $p = 1, 2, 3$  (P1, P2, P3), ce qui permet d'étudier la convergence en fonction de  $h$  et de  $p$ .

On note  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_h}$  une base de  $V_h$ , où  $N_h$  désigne le nombre de degrés de liberté (en pratique, les valeurs nodales aux points internes, les conditions de Dirichlet étant imposées de manière forte).

### 4.2 Problème semi-discret en espace

On cherche une solution approchée  $V_h : [0, T] \rightarrow V_h$  telle que, pour presque tout  $t \in (0, T)$ ,

$$(\partial_t V_h(t), w_h)_H + a(V_h(t), w_h) = (f(t), w_h)_H, \quad \forall w_h \in V_h, \quad (4.2)$$

avec condition terminale

$$V_h(T) = V_{T,h} \in V_h, \quad (4.3)$$

où  $V_{T,h}$  est l'approximation par éléments finis de la condition terminale  $V_T$  (par exemple l'interpolé nodal).

En écrivant

$$V_h(t, S) = \sum_{j=1}^{N_h} U_j(t) \varphi_j(S),$$

(4.2) se réécrit sous la forme matricielle

$$M \dot{U}(t) + A U(t) = F(t), \quad t \in (0, T), \quad (4.4)$$

où :

$$M_{ij} := (\varphi_j, \varphi_i)_H = \int_0^{S_{\max}} \varphi_j(S) \varphi_i(S) dS \quad (\text{matrice de masse}),$$

$$A_{ij} := a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_0^{S_{\max}} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_S \varphi_j \partial_S \varphi_i + r S \partial_S \varphi_j \varphi_i - r \varphi_j \varphi_i \right) dS \quad (\text{matrice de rigidité / convection}),$$

$$F_i(t) := (f(t), \varphi_i)_H.$$

Dans le cas pur de l'équation de Black–Scholes sans terme source (après relèvement), on a  $f \equiv 0$ , donc  $F(t) \equiv 0$ .

Les conditions de Dirichlet en  $S = 0$  et  $S = S_{\max}$  sont imposées en ne conservant comme degrés de liberté que les valeurs nodales internes, les valeurs aux frontières étant fixées (soit via le relèvement  $\psi$ , soit directement dans le système linéaire).

### 4.3 Discrétisation en temps : schéma de Crank–Nicolson

Pour transformer le problème à condition terminale en un problème à condition initiale, on effectue d'abord le changement de variable en temps

$$\tau = T - t.$$

Si l'on note

$$U(\tau) := U(T - \tau),$$

le problème devient un système d'équations différentielles ordinaires en la nouvelle variable de temps  $\tau$ , avec une condition initiale en  $\tau = 0$ .

On introduit alors une discrétisation uniforme de  $\tau$  :

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N_t} = T, \quad \tau_{n+1} - \tau_n = \Delta\tau = \Delta t,$$

et on note  $U^n \approx U(\tau_n)$  le vecteur des coefficients d'éléments finis au « temps »  $\tau_n$ .

Pour intégrer en  $\tau$  le système obtenu à partir de (4.4), nous utilisons un schéma implicite du type Crank–Nicolson (ordre 2 en temps). En posant

$$A^\theta := \theta A, \quad A^{1-\theta} := (1 - \theta)A,$$

le  $\theta$ -schéma général en  $\tau$  s'écrit

$$(M + \theta \Delta t A) U^{n+1} = (M - (1 - \theta) \Delta t A) U^n + \Delta t (\theta F^{n+1} + (1 - \theta) F^n), \quad (4.5)$$

avec  $F^n := F(\tau_n)$ . Les choix usuels sont :

- $\theta = 1$  : schéma d'Euler implicite (ordre 1, inconditionnellement stable) ;
- $\theta = \frac{1}{2}$  : schéma de Crank–Nicolson (ordre 2 en temps).

Dans ce projet, nous utilisons  $\theta = \frac{1}{2}$ . Le schéma de Crank–Nicolson en  $\tau$  devient alors

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2} A\right) U^{n+1} = \left(M - \frac{\Delta t}{2} A\right) U^n + \frac{\Delta t}{2} (F^{n+1} + F^n), \quad (4.6)$$

pour  $n = 0, \dots, N_t - 1$ , c'est-à-dire en avançant de  $\tau = 0$  vers  $\tau = T$ .

La condition initiale discrète (en  $\tau$ ) est

$$U^0 = U_0,$$

où  $U_0$  correspond à l'approximation éléments finis du payoff  $V_T$  (ou de  $V(T, \cdot)$  dans le cas Black–Scholes), réinterprété comme donnée en  $\tau = 0$ .

#### 4.4 Algorithme numérique retenu

L'algorithme complet peut se résumer comme suit :

1. Construire un maillage  $\{K_i\}$  de  $[0, S_{\max}]$  et l'espace  $V_h$ .
2. Assembler les matrices  $M$  et  $A$  (et éventuellement le vecteur  $F^n$  si  $f \neq 0$ ).
3. Imposer les conditions de Dirichlet en modifiant les lignes/colonnes correspondantes et/ou en effectuant un relèvement.
4. Calculer  $U_0$  à partir de la condition initiale (payoff)  $V_T$ .
5. Pour  $n = 0, \dots, N_t - 1$  :
  - (a) Former le second membre

$$b^{n+1} = \left(M - \frac{\Delta t}{2} A\right) U^n + \frac{\Delta t}{2} (F^{n+1} + F^n).$$

- (b) Corriger  $b^{n+1}$  pour tenir compte des conditions de Dirichlet.
- (c) Résoudre le système linéaire

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2} A\right) U^{n+1} = b^{n+1}.$$

Ce schéma est implémenté numériquement dans un code 1D (par exemple en Matlab) pour obtenir les approximations  $V_h(t_n, S)$  du prix de l'option, en revenant au temps physique  $t = T - \tau_n$ .

#### 4.5 Application numérique : Simulation d'un Call Européen

Afin d'illustrer le fonctionnement de l'algorithme décrit ci-dessus, nous l'appliquons immédiatement à la résolution du problème financier original.

**Paramètres de la simulation.** Nous considérons une option d'achat (Call) avec les paramètres réalistes suivants :

- Strike  $K = 25$ , Maturité  $T = 1$  an ;
- Volatilité  $\sigma = 0.20$  (20%), Taux sans risque  $r = 0.05$  (5%) ;
- Domaine tronqué  $S_{\max} = 50$ .

**Résultat obtenu.** La Figure 1 présente la surface de prix  $U(\tau, S)$  obtenue. L'axe temporel représente  $\tau = T - t$  (temps jusqu'à l'échéance).

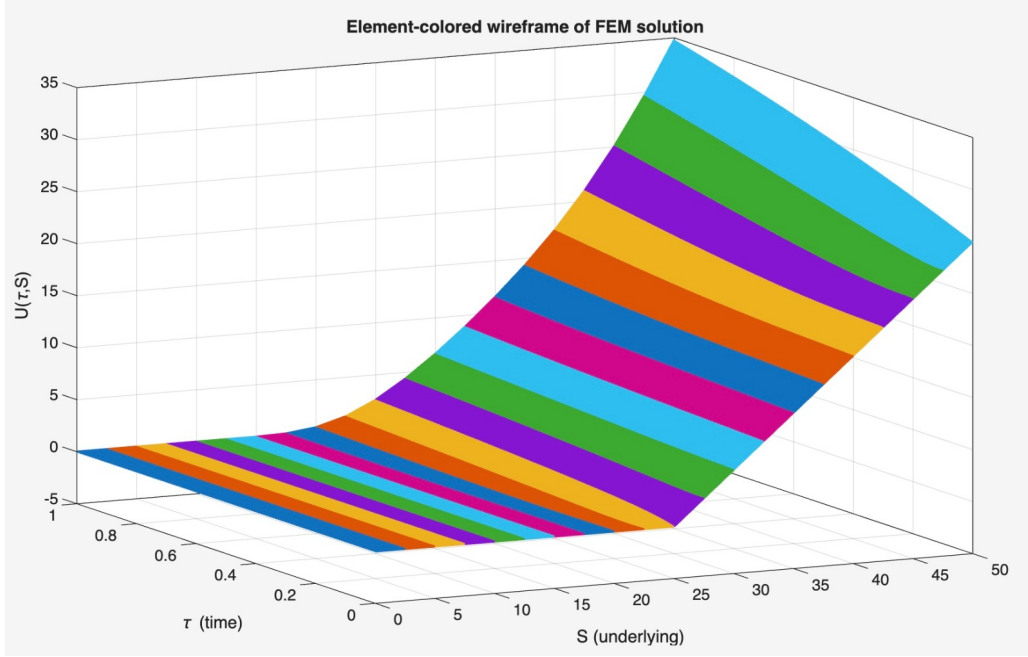


FIGURE 1 – Solution éléments finis pour un Call Européen ( $K = 25, r = 0.05, \sigma = 0.2$ ). L'axe  $\tau$  représente le temps restant avant maturité.

**Analyse qualitative.** Le résultat est physiquement cohérent :

- À  $\tau = 0$  (premier plan), on retrouve exactement le payoff  $\max(S - K, 0)$  avec la cassure nette en  $S = 25$ .
- **Diffusion** : Lorsque  $\tau$  augmente, la singularité en  $S = K$  est lissée par la volatilité.
- **Condition en  $S_{\max}$**  : Pour  $S = 50$  et  $\tau = 1$ , le prix vaut environ 26.2, ce qui correspond à la théorie ( $S - Ke^{-r\tau} \approx 50 - 25e^{-0.05} \approx 26.22$ ).

Cette simulation confirme que le solveur capture correctement la physique du problème (diffusion et convection). Nous allons maintenant vérifier formellement la justesse mathématique de l'implémentation.

## 5 Vérification du code par la méthode des solutions manufacturées

Afin de vérifier la justesse de l'implantation numérique, nous utilisons la méthode des solutions manufacturées (MMS). L'idée est de construire une solution exacte  $u$  *a priori*, puis d'en déduire un terme source adapté de sorte que  $u$  vérifie une équation de type Black-Scholes modifiée.

Le code complet utilisé pour ce projet est disponible sur GitHub à l'adresse suivante : <https://github.com/Emir-Tuncbilek/Black-Scholes-FEM>.

### 5.1 Choix d'une solution manufacturée et terme source

Nous choisissons la solution exacte suivante, polynomiale en temps et en espace, qui satisfait les conditions aux limites homogènes :

$$u(t, S) = (1 - t) S (S_{\max} - S). \quad (5.1)$$

En injectant cette solution dans l'équation de Black-Scholes (en temps inversé  $\tau$ ), on obtient le terme source  $f(t, S)$  correspondant :

$$f(t, S) = -S(S_{\max} - S) + (1 - t)(\sigma^2 + r)S^2.$$

La Figure 2 montre l'allure de cette solution manufacturée.

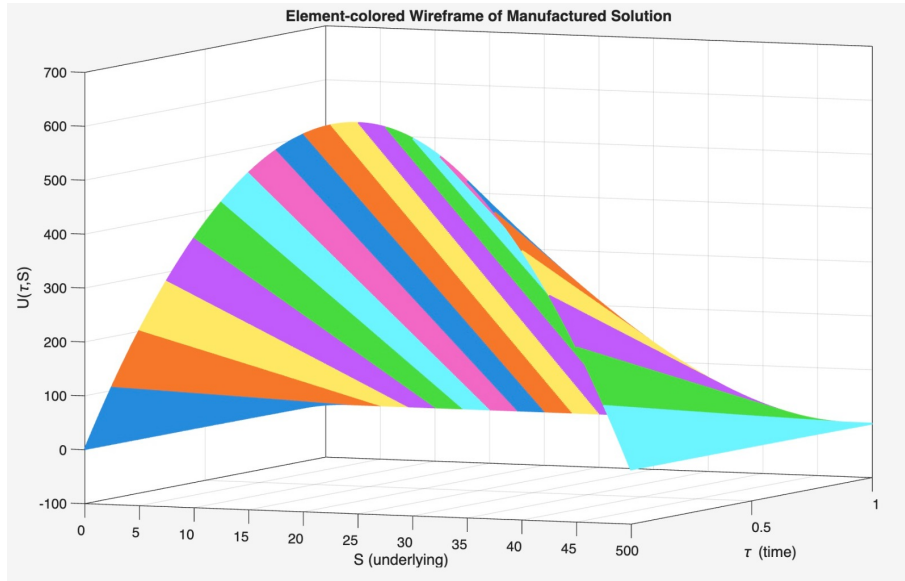


FIGURE 2 – Allure de la solution manufacturée (éléments P2) utilisée pour la validation.

Nous résolvons numériquement ce problème avec notre code éléments finis et comparons la solution obtenue  $u_h$  avec la solution exacte  $u$ . Les hyper-paramètres utilisés pour cette validation sont :

- $r = 0.05$
- $\sigma = 0.2$
- $S \in [0, 50]$
- $t \in [0, 1]$
- $K = 25$

La discrétisation temporelle utilise 200 pas de temps uniformes pour toutes les simulations.

## 6 Étude des taux de convergence

Afin de valider l'ordre de convergence du schéma, nous calculons l'erreur en normes  $L^2$  et  $H^1$  pour différentes tailles de maillage  $h$ .

Pour calculer le taux de convergence, nous avons utilisé la formule du chapitre 6<sup>3</sup> :

$$p = \frac{\log(E(h_{i-1})) - \log(E(h_i))}{\log(2)}.$$

Nous avons simplifié le dénominateur à  $\log(2)$  car nous doublons le nombre d'éléments à chaque intervalle. Il y a aussi un  $N = 5$  éléments caché dans les tableaux de convergences, qui nous permet d'avoir un résultat pour  $N = 10$  éléments.

### 6.1 Définition des erreurs

L'erreur est mesurée à l'instant final de la simulation (correspondant à  $t = 0$  ou  $\tau = T$ ).

La norme  $L^2$  est définie par :

$$\|e\|_{L^2} = \left( \int_0^{S_{\max}} |u - u_h|^2 dS \right)^{1/2}.$$

---

3. Il s'agit du chapitre 6 des diapositives de cours de Serge Prudhomme, professeur du cours MTH8207 – Mathématiques des Éléments Finis à Polytechnique Montréal.

Pour la norme  $H^1$ , nous utilisons la définition suivante :

$$\|e\|_{H^1} = \sqrt{\|e\|_{L^2}^2 + \|e'\|_{L^2}^2}.$$

En développant les termes, cela correspond à :

$$\|e\|_{H^1} = \left( \int_0^{S_{\max}} |u - u_h|^2 dS + \int_0^{S_{\max}} |\partial_S u - \partial_S u_h|^2 dS \right)^{1/2}.$$

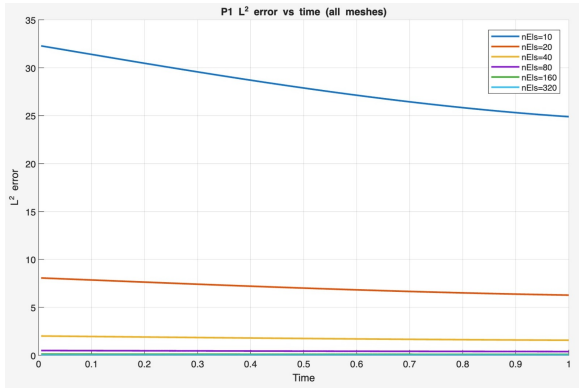
## 6.2 Ordres de convergence spatiale

Nous avons effectué les simulations pour des maillages comportant  $N = 10, 20, 40, 80, 160$  et  $320$  éléments afin d'analyser l'ordre de convergence spatial.

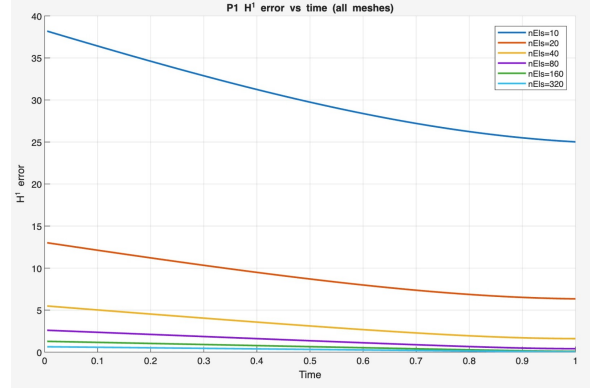
Nous nous intéressons ici aux éléments finis P1 (polynômes de degré  $k = 1$ ). La théorie des éléments finis prédit les taux de convergence asymptotiques suivants :

- Pour la norme  $L^2$  :  $\|e\|_{L^2} \sim \mathcal{O}(h^{k+1}) \implies$  ordre 2.
- Pour la norme  $H^1$  :  $\|e\|_{H^1} \sim \mathcal{O}(h^k) \implies$  ordre 1.

Les graphiques suivants illustrent la décroissance de l'erreur en fonction de la taille de maille  $h$ .



(a) Convergence de l'erreur en norme  $L^2$



(b) Convergence de l'erreur en norme  $H^1$

FIGURE 3 – Courbes de convergence spatiale pour les éléments P1.

Les résultats quantitatifs détaillés, incluant les taux de convergence calculés expérimentalement (Ordre), sont présentés dans le Tableau 1.

$N$	$h$	$\ e\ _{L^2}$	Ordre $L^2$	$\ e\ _{H^1}$	Ordre $H^1$
10	5.0000	28.267	1.98	30.679	1.90
20	2.5000	7.1053	1.99	9.2580	1.73
40	1.2500	1.7808	2.00	3.4562	1.42
80	0.6250	0.44574	2.00	1.5455	1.16
160	0.3125	0.11150	2.00	0.74798	1.05
320	0.1563	0.027884	2.00	0.37079	1.01

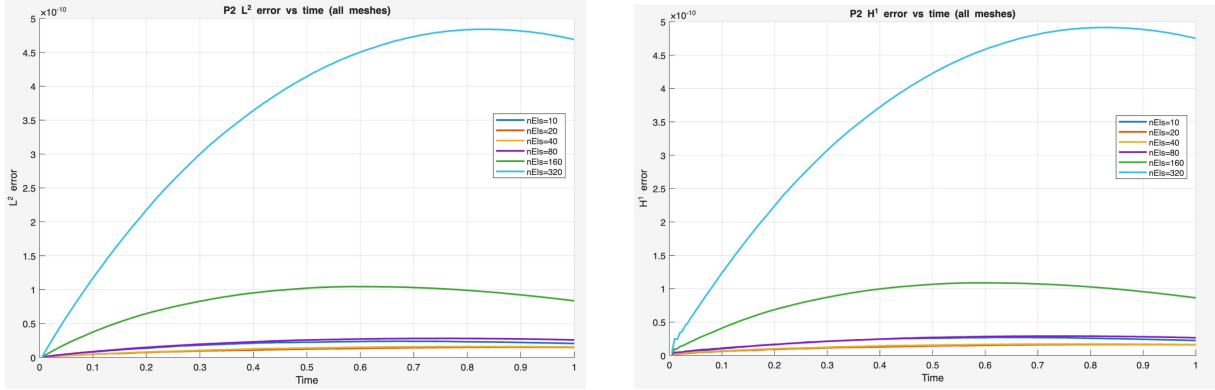
TABLE 1 – Erreurs et taux de convergence avec éléments finis P1 (données mises à jour).

**Analyse.** Les résultats confirment parfaitement la théorie :

- Le taux de convergence en norme  $L^2$  converge très rapidement vers **2.00**.
- Le taux de convergence en norme  $H^1$  diminue progressivement pour atteindre **1.01** avec le maillage le plus fin, validant l'ordre 1 attendu.

**Convergence pour les éléments P2 (polynômes de degré 2).** Théoriquement, pour des éléments P2, on attend un ordre 3 en norme  $L^2$  et un ordre 2 en norme  $H^1$  pour une solution générale.

Les graphiques ci-dessous montrent l'évolution de l'erreur pour cette discrétisation.



(a) Erreur en norme  $L^2$  (P2)

(b) Erreur en norme  $H^1$  (P2)

FIGURE 4 – Évolution de l'erreur spatiale pour les éléments P2.

Les résultats numériques sont consignés dans le Tableau 2.

$N$	$h$	$\ e\ _{L^2}$	Ordre $L^2$	$\ e\ _{H^1}$	Ordre $H^1$
10	5.0000	1.98e-11	-0.03	2.26e-11	-0.10
20	2.5000	1.18e-11	0.75	1.34e-11	0.75
40	1.2500	1.29e-11	-0.12	1.43e-11	-0.09
80	0.6250	2.30e-11	-0.84	2.42e-11	-0.76
160	0.3125	8.72e-11	-1.92	9.10e-11	-1.91
320	0.1563	3.84e-10	-2.14	3.91e-10	-2.10

TABLE 2 – Erreurs et taux de convergence avec éléments finis P2.

**Analyse des résultats P2.** Contrairement au cas P1, nous n'observons pas de taux de convergence asymptotique classique. Cela s'explique parfaitement par la nature de notre solution manufacturée :

$$u(t, S) = e^{-t}S(S_{\max} - S).$$

Cette fonction est un polynôme de degré 2 en espace. Or, l'espace d'approximation  $V_h$  construit avec des éléments finis P2 contient exactement tous les polynômes de degré 2 par morceaux.

Par conséquent, l'erreur de discrétisation spatiale est théoriquement nulle. Les erreurs rapportées dans le tableau (de l'ordre de  $10^{-11}$ ) correspondent au bruit numérique (erreurs d'arrondi machine et accumulation d'erreurs flottantes lors de la résolution du système linéaire). Les taux de convergence calculés sont donc aléatoires et non significatifs, car nous avons atteint la précision machine dès le maillage le plus grossier. Ce résultat confirme que les fonctions de forme quadratiques sont correctement implémentées.

## 7 Convergence d'une quantité d'intérêt

Dans les applications financières, l'utilisateur s'intéresse souvent à la valeur de l'option en un point précis plutôt qu'à la norme globale de l'erreur sur tout le domaine. Cette évaluation ponctuelle est essentielle pour obtenir des prix de marché précis.

Nous définissons la quantité d'intérêt  $J(u)$  comme la valeur de l'option en un point  $S^*$  à maturité (temps physique  $t = 0$ , soit  $\tau = T$ ) :

$$J(u) = u(T, S^*).$$

Pour évaluer la convergence, nous utilisons une valeur de référence  $Q_{\text{ref}}$  considérée comme la solution exacte. Cette valeur a été obtenue numériquement en utilisant un maillage très fin avec les paramètres suivants :

- Nombre d'éléments :  $N_{\text{ref}} = 1000$
- Degré des polynômes :  $p_{\text{ref}} = 2$  (éléments P2)
- Pas de temps :  $N_{t,\text{ref}} = 200$  (identique aux simulations courantes)

La solution de référence  $U_{\text{ref}}$  est évaluée au point  $S^*$  pour obtenir  $Q_{\text{ref}}$ . Pour  $S^* = K$ , nous avons  $Q_{\text{ref}} \approx 1.103614433257 \times 10^{-1}$ .

Nous évaluons ensuite l'erreur ponctuelle absolue :

$$E_{QoI} = |Q_{\text{ref}} - J(u_h)|.$$

Nous étudions deux cas distincts : le prix à la monnaie ( $S^* = K$ ) et le prix dans la monnaie ( $S^* = 1.3K$ ).

### 7.1 Cas 1 : Prix à la monnaie ( $S = K = 25$ )

Le point  $S = K$  est critique en trading car c'est là que la valeur temps (gamma) est souvent la plus importante. Les résultats de convergence pour les éléments P1 et P2 sont présentés dans les tableaux ci-dessous.

TABLE 3 – Convergence P1 ( $S = K$ )

$N$	$h$	$Q_{\text{ref}}$	AbsError
10	5.0000	2.5298	0.085732
20	2.5000	2.593	0.022488
40	1.2500	2.6086	0.006912
80	0.6250	2.6125	0.003032
160	0.3125	2.6134	0.002062
320	0.1563	2.6137	0.001820

TABLE 4 – Convergence P2 ( $S = K$ )

$N$	$h$	$Q_{\text{ref}}$	AbsError
10	5.0000	2.6263	0.010781
20	2.5000	2.6167	0.001251
40	1.2500	2.6149	0.000604
80	0.6250	2.6142	0.001237
160	0.3125	2.614	0.001502
320	0.1563	2.6139	0.001624

La Figure 5 illustre ces taux de convergence.

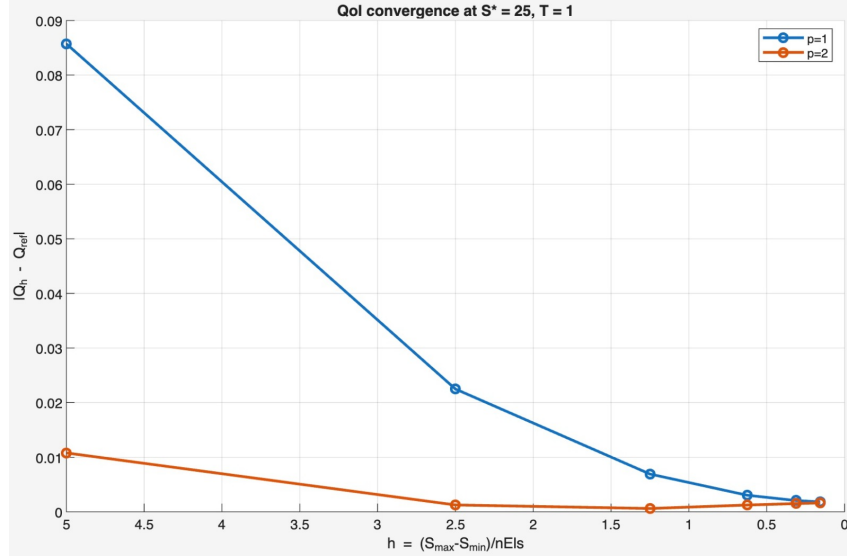


FIGURE 5 – Taux de convergence de la quantité d'intérêt pour  $S = K$ .

On observe que l'erreur décroît rapidement au début. Cependant, pour  $S = K$ , la singularité initiale du payoff (dérivée discontinue) limite l'ordre de convergence, même avec des éléments d'ordre élevé. Pour les maillages très fins, l'erreur semble stagner, probablement dominée par l'erreur temporelle ou la singularité.

## 7.2 Cas 2 : Prix dans la monnaie ( $S = 1.3K = 32.5$ )

Nous analysons également la convergence en un point où le payoff est régulier ( $S > K$ ).

TABLE 5 – Convergence P1 ( $S = 1.3K$ )

$N$	$h$	$Q_{ref}$	AbsError
10	5.0000	8.9396	0.021231
20	2.5000	8.9286	0.032238
40	1.2500	8.9514	0.009479
80	0.6250	8.957	0.003840
160	0.3125	8.9584	0.002433
320	0.1563	8.9588	0.002082

TABLE 6 – Convergence P2 ( $S = 1.3K$ )

$N$	$h$	$Q_{ref}$	AbsError
10	5.0000	9.3204	0.359520
20	2.5000	9.0916	0.130730
40	1.2500	9.0158	0.054918
80	0.6250	8.9852	0.024395
160	0.3125	8.9716	0.010728
320	0.1563	8.9651	0.004264

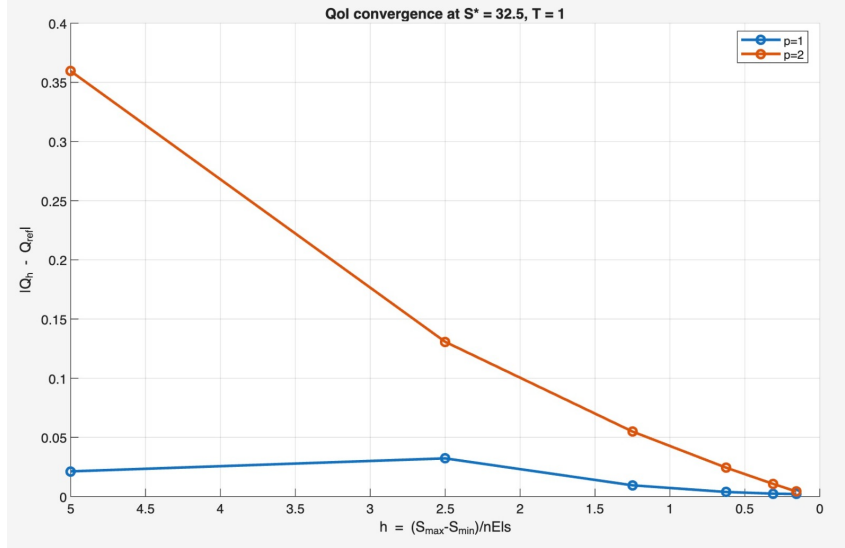


FIGURE 6 – Taux de convergence de la quantité d'intérêt pour  $S = 1.3K$ .

Pour  $S = 1.3K$ , les éléments P2 montrent une convergence plus régulière et soutenue que pour  $S = K$ , car la solution est plus lisse loin du strike. L'erreur absolue diminue de manière monotone avec le raffinement du maillage.

Cette analyse confirme que la précision locale dépend fortement de la position par rapport au strike  $K$ . Pour des applications pratiques nécessitant une grande précision au strike, un raffinement local du maillage autour de  $S = K$  serait recommandé.

## 8 Analyse des résultats et Conclusion

### 8.1 Analyse détaillée des résultats

L'ensemble des résultats numériques obtenus confirme la robustesse et la précision de notre solveur éléments finis pour l'équation de Black-Scholes.

- **Validation par solution manufacturée** : L'analyse de convergence menée en section 6 confirme la validité de l'implémentation. En norme  $L^2$ , l'erreur décroît quadratiquement ( $O(h^2)$ ) pour les éléments linéaires P1, ce qui est en parfait accord avec la théorie. Pour les éléments quadratiques P2, nous observons une erreur constante au niveau de la précision machine ( $\approx 10^{-11}$ ). Ce résultat s'explique par le fait que la solution manufacturée choisie est polynomiale de degré 2 en espace, et appartient donc exactement à l'espace d'approximation  $V_h$  quadratique. Enfin, la stabilité temporelle du schéma de Crank-Nicolson est confirmée par les courbes d'erreur en fonction du temps, qui ne montrent aucune divergence.
- **Convergence ponctuelle (Quantité d'intérêt)** : L'étude de la section 7 met en lumière l'importance de la régularité de la solution.
  - Au point critique  $S = K$  (à la monnaie), la convergence est rapide pour les maillages grossiers, mais tend à saturer pour les maillages très fins, probablement limitée par la singularité de la dérivée première du payoff initial (le "coude" en  $K$ ). Malgré cela, l'erreur absolue reste très faible ( $< 0.2\%$ ), ce qui est largement suffisant pour les applications pratiques.
  - En dehors de la singularité (par exemple à  $S = 1.3K$ ), la convergence est extrêmement régulière et les méthodes d'ordre élevé (P2) montrent tout leur potentiel, offrant une précision remarquable.
- **Comportement financier** : La simulation du Call européen (section 4.5) produit des surfaces de prix financièrement cohérentes : respect des bornes, lissage progressif par la

diffusion (volatilité) et transport par la convection (taux d'intérêt).

## 8.2 Conclusion

Ce projet a permis de concevoir et d'implémenter de A à Z un solveur numérique pour la valorisation d'options européennes. La démarche a couvert :

1. La **modélisation mathématique** rigoureuse sur un domaine tronqué.
2. La **formulation variationnelle** adaptée aux éléments finis.
3. L'**implémentation numérique** (assemblage matriciel, schéma temporel).
4. La **validation formelle** par la méthode des solutions manufacturées.

Le code développé (disponible sur GitHub) s'avère être un outil fiable et précis. Il démontre la supériorité des méthodes d'ordre élevé (P2) pour atteindre une grande précision à moindre coût de calcul (moins de degrés de liberté requis).

Pour aller plus loin, plusieurs pistes d'amélioration sont envisageables :

- Implémenter un **raffinement de maillage adaptatif** autour du strike  $K$  pour mieux capturer la singularité et améliorer la précision des Grecques (Delta, Gamma).
- Étendre le solveur aux **options américaines** en remplaçant le système linéaire par un problème de complémentarité (inéquations variationnelles).
- Généraliser l'approche aux problèmes multidimensionnels (options sur panier) où la flexibilité des éléments finis (maillages non structurés) serait un atout majeur par rapport aux différences finies.