Funciones Trigonométricas

IRM – Grupo 3 – Teórica 3

TRIGONOMETRÍA

“trigonon” → triángulo

“metron” → medida

En términos generales, la trigonometría es el estudio de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

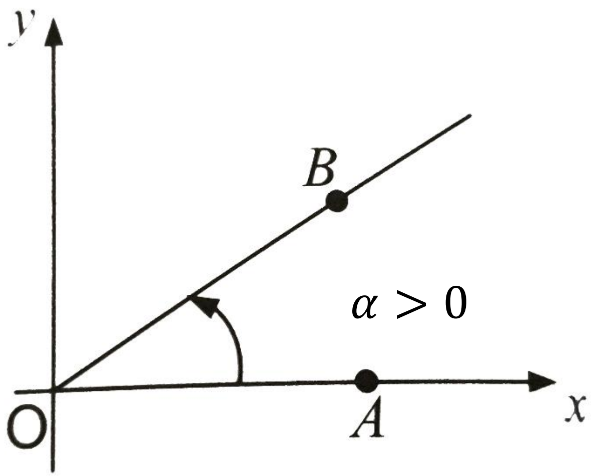
El interés por estas funciones surge cuando se llega a la conclusión que, bajo ciertas condiciones, cualquier función periódica puede – salvo una constante aditiva y otras multiplicativas – ser expresada como una suma de senos y cosenos.

Estas funciones tienen una propiedad importante conocida como “periodicidad” (fenómenos que se repiten con regularidad).

Su aplicación en la práctica es diversa: en la radio, el radar, la televisión, instrumentos que exploran el cuerpo humano, el espacio, el átomo, etc. En física, ingeniería, biología y economía muchos problemas se relacionan con “fenómenos periódicos”, entre ellos el ritmo cardíaco, los ciclos comerciales, etc.

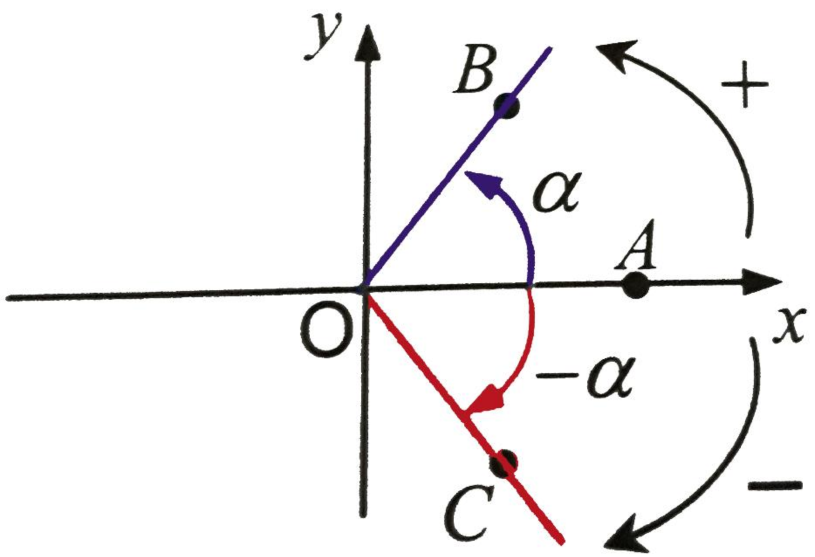
ÁNGULOS

En trigonometría se considera que un ángulo en el plano se genera por el giro de una semirrecta alrededor de su origen considerado fijo.



Un ángulo $A\hat{O}B$ tiene medida ***positiva (mayor a cero)*** cuando lo genera girando la semirrecta $\overline{OA}$ desde el eje x en sentido ***antihorario*** hacia $\overline{OB}$.

En cambio, un ángulo $A\hat{O}B$ tiene medida ***negativa (menor a cero)*** cuando lo genera girando la semirrecta $\overline{OA}$ desde el eje x en sentido ***horario*** hacia $\overline{OB}$.

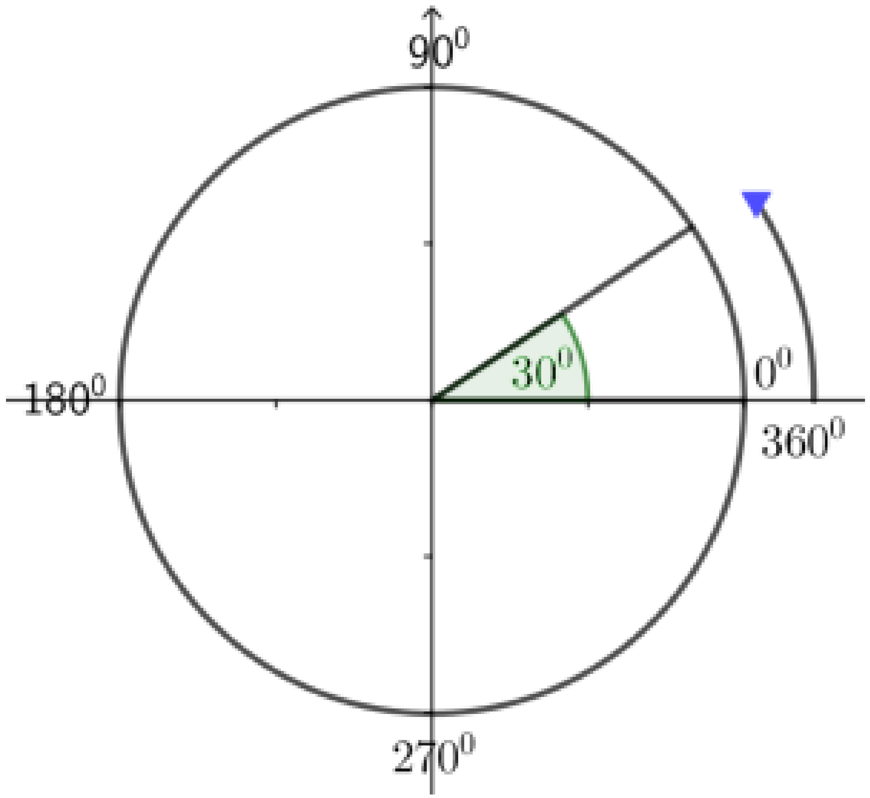


En la figura, suponiendo $\alpha > 0$, el ángulo $A\hat{O}B$ generado en sentido antihorario tiene medida α, mientras que el $A\hat{O}C$ generado en sentido horario tiene medida – α.

Es importante notar que al generarse un ángulo la amplitud del giro de la semirrecta no tiene limitación alguna, es decir, el giro puede ser mayor que una vuelta completa (un ciclo).

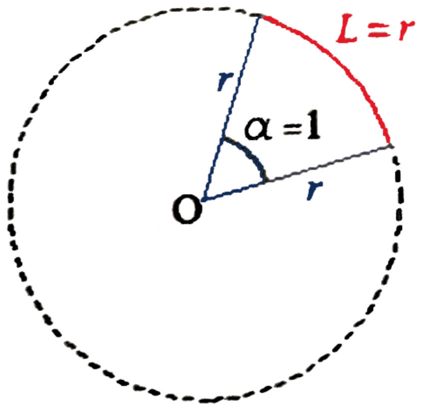
SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

GRADOS



RADIANES

Definición: Se denomina *radián* a la medida del ángulo que subtiende un arco de igual longitud que el radio de circunferencia.



$$\boxed{\alpha = \frac{L}{r}}$$

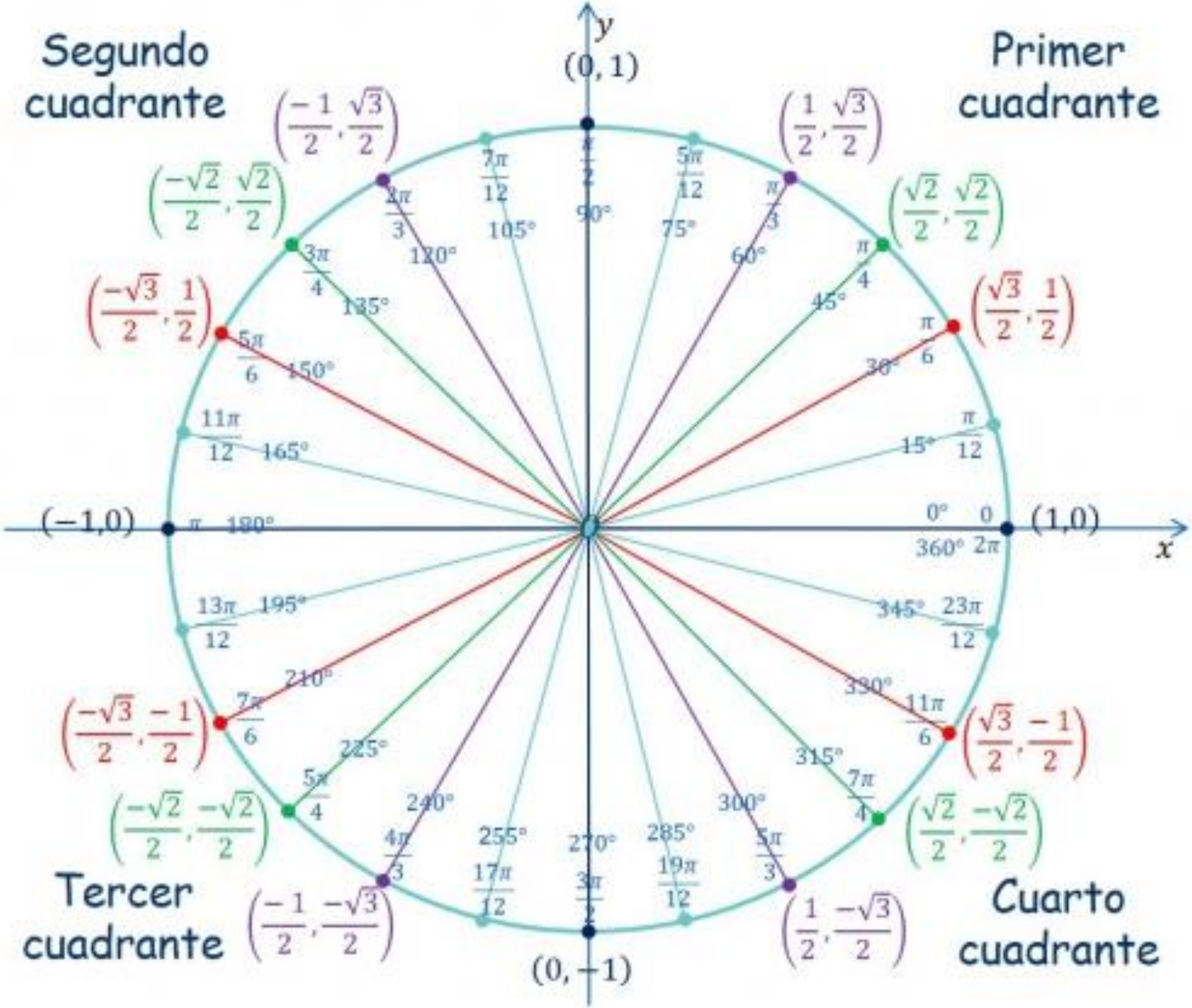
Sea una circunferencia de radio *r* y un ángulo $A\hat{O}B$ con vértice en su centro, la longitud L del arco de circunferencia que subtiende $A\hat{O}B$ es directamente proporcional a la medida α del ángulo y a la longitud r del radio.

Ejemplo: Un ángulo $\boldsymbol{5\ rad}$ tiene una medida 5 en el sistema circular (es decir, la longitud de arco que abarca es 5 veces el radio).

Dado que $L = 2\pi r$ es la longitud de una circunferencia de radio r, si denotamos α_{comp} a la medida de un ángulo completo (1 giro antihorario), sabiendo que $\alpha = \frac{L}{r}$ obtenemos que:

$$\alpha_{comp} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

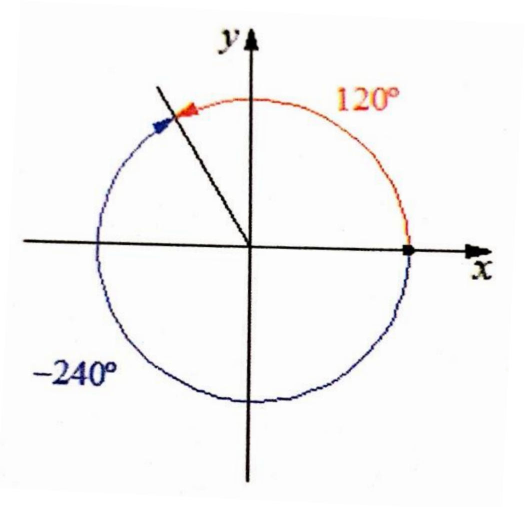

Segundo cuadrante
Primer cuadrante
Tercer cuadrante
Cuarto cuadrante
y
x
(0, 1)
(1,0)
(−1,0)
(0, −1)
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
0° 0
360° 2π
15° $\frac{\pi}{12}$
30° $\frac{\pi}{6}$
45° $\frac{\pi}{4}$
60° $\frac{\pi}{3}$
75° $\frac{5\pi}{12}$
90° $\frac{\pi}{2}$
105° $\frac{7\pi}{12}$
120° $\frac{2\pi}{3}$
135° $\frac{3\pi}{4}$
150° $\frac{5\pi}{6}$
165° $\frac{11\pi}{12}$
180° π
195° $\frac{13\pi}{12}$
210° $\frac{7\pi}{6}$
225° $\frac{5\pi}{4}$
240° $\frac{4\pi}{3}$
255° $\frac{17\pi}{12}$
270° $\frac{3\pi}{2}$
285° $\frac{19\pi}{12}$
300° $\frac{5\pi}{3}$
315° $\frac{7\pi}{4}$
330° $\frac{11\pi}{6}$
345° $\frac{23\pi}{12}$

ÁNGULOS COTERMINALES

Definición: Dos ángulos en un mismo plano se denominan *coterminales* cuando teniendo el mismo vértice y lado inicial, sus lados terminales son coincidentes.

Es decir, sus medidas difieren en un número entero de giros.

$$\beta = \alpha + k \cdot 360°, \text{ con } k \text{ entero}$$



Ejemplo: Suponiendo una medida de 120°, son ángulos coterminales los que tienen medida de:

$$120° + k \cdot 360° \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\dots, -960°, -600°, -240°, 120°, 480°, 840°, 1200°, \dots.$$

$k = -1 \to 120° - 360° = -240°$ $\quad k = 0 \quad$ $k = 1 \to 120° + 360° = 480°$

Definición: El *ángulo nulo* es el que tiene $0° = 0\,rad$.

Definición: Dos ángulos son *congruentes* cuando tienen igual medida.

Definición: Dos ángulos con medidas α y β son *complementarios* cuando

$$\alpha + \beta = 90° = \frac{\pi}{2} rad$$

Definición: Dos ángulos con medidas α y β son *suplementarios* cuando

$$\alpha + \beta = 180° = \pi\, rad$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Seno

$$sen(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{h}$$

Coseno

$$cos(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{h}$$

Tangente

$$tg(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{b}$$

Cosecante

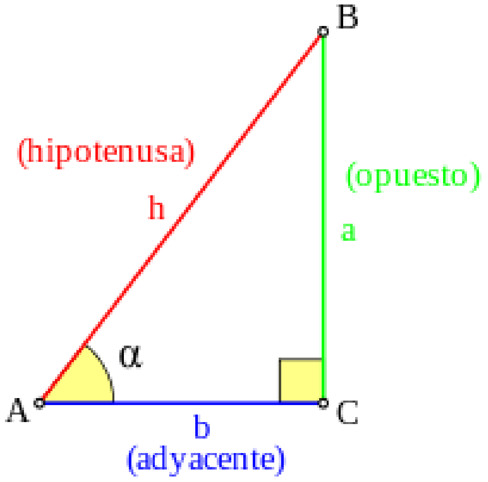
$$\mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$$

Secante

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$$

Cotangente

$$\mathrm{cotg}(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)}$$

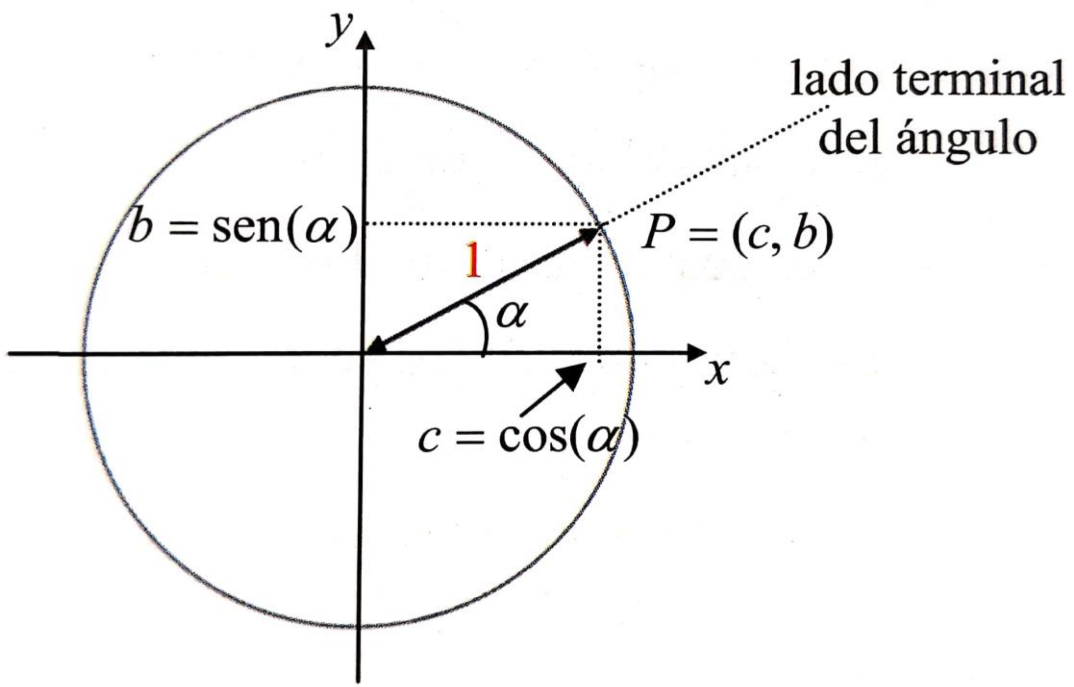


Considerando la circunferencia de radio $r = 1$ y siendo α la medida de un ángulo, la intersección de la circunferencia con el lado terminal del ángulo determina un punto P cuyas coordenadas son $\cos(\alpha)$ y $sen(\alpha)$.

Si el punto $P = (c, b)$ está a distancia $r = 1$ del origen, de acuerdo a las definiciones, resulta:

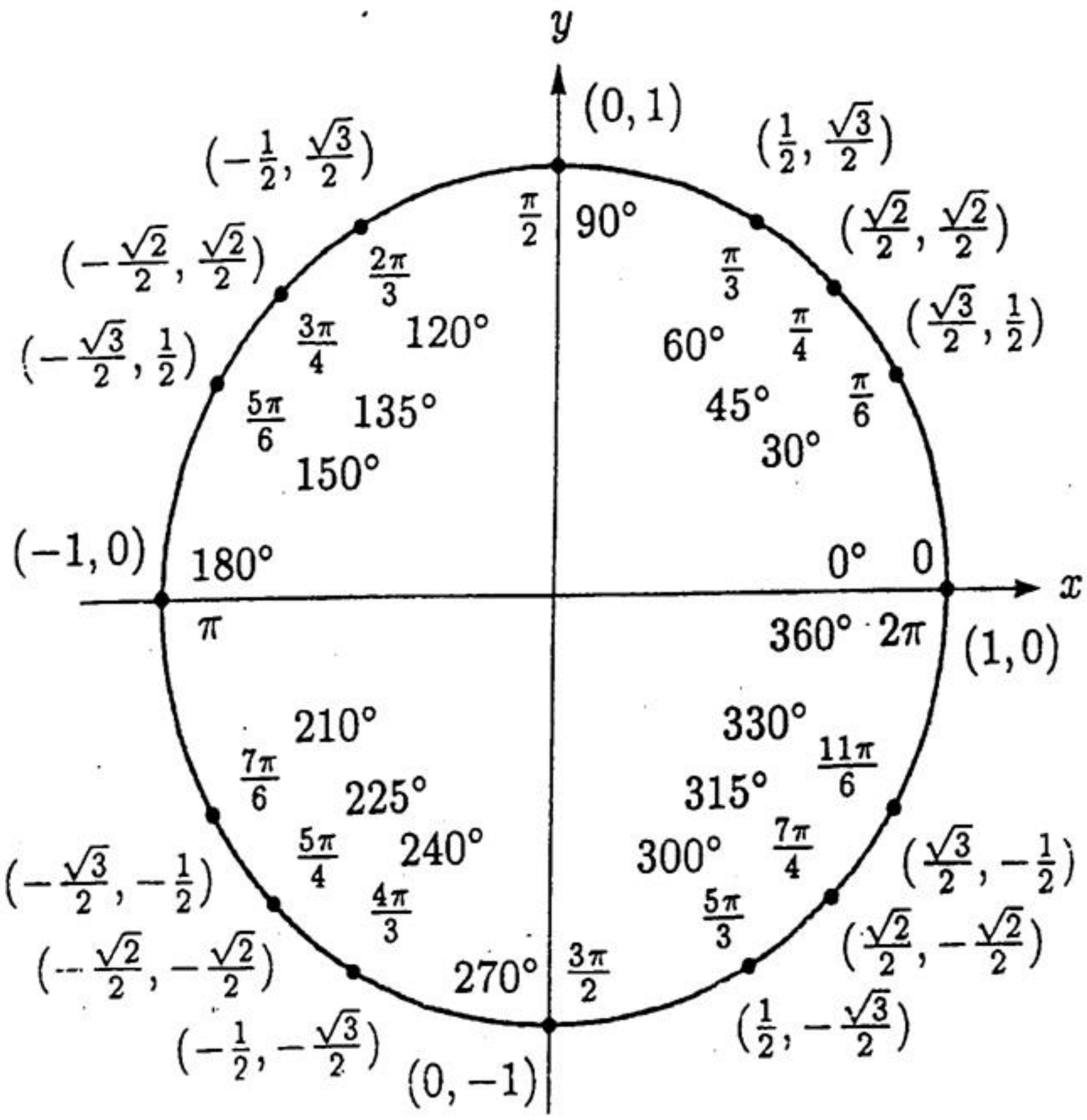
$$\cos(\alpha) = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{r} = \frac{c}{1} = c$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = b$$



La posición del punto P dependerá del ángulo considerado, pero siempre estará sobre la circunferencia de radio $r = 1$; por lo tanto el opuesto y el adyacente siempre estarán entre -1 y 1.

$$\boxed{-1 \leq sen(\alpha) \leq 1 \quad y \quad -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1 \ \text{ para todo } \alpha}$$


y
x
(0, 1)
$\frac{\pi}{2}$ 90°
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$ 60°
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$ 45°
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{6}$ 30°
0° 0
(1, 0)
360° 2π
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{2\pi}{3}$ 120°
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$ 135°
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{5\pi}{6}$ 150°
(−1, 0)
180° π
$\frac{7\pi}{6}$ 210°
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{5\pi}{4}$ 225°
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{4\pi}{3}$ 240°
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
270° $\frac{3\pi}{2}$
(0, −1)
$\frac{5\pi}{3}$ 300°
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{7\pi}{4}$ 315°
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{11\pi}{6}$ 330°
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

La recta tangente a la circunferencia (perpendicular al lado terminal del ángulo) en el punto P tiene las siguientes propiedades:

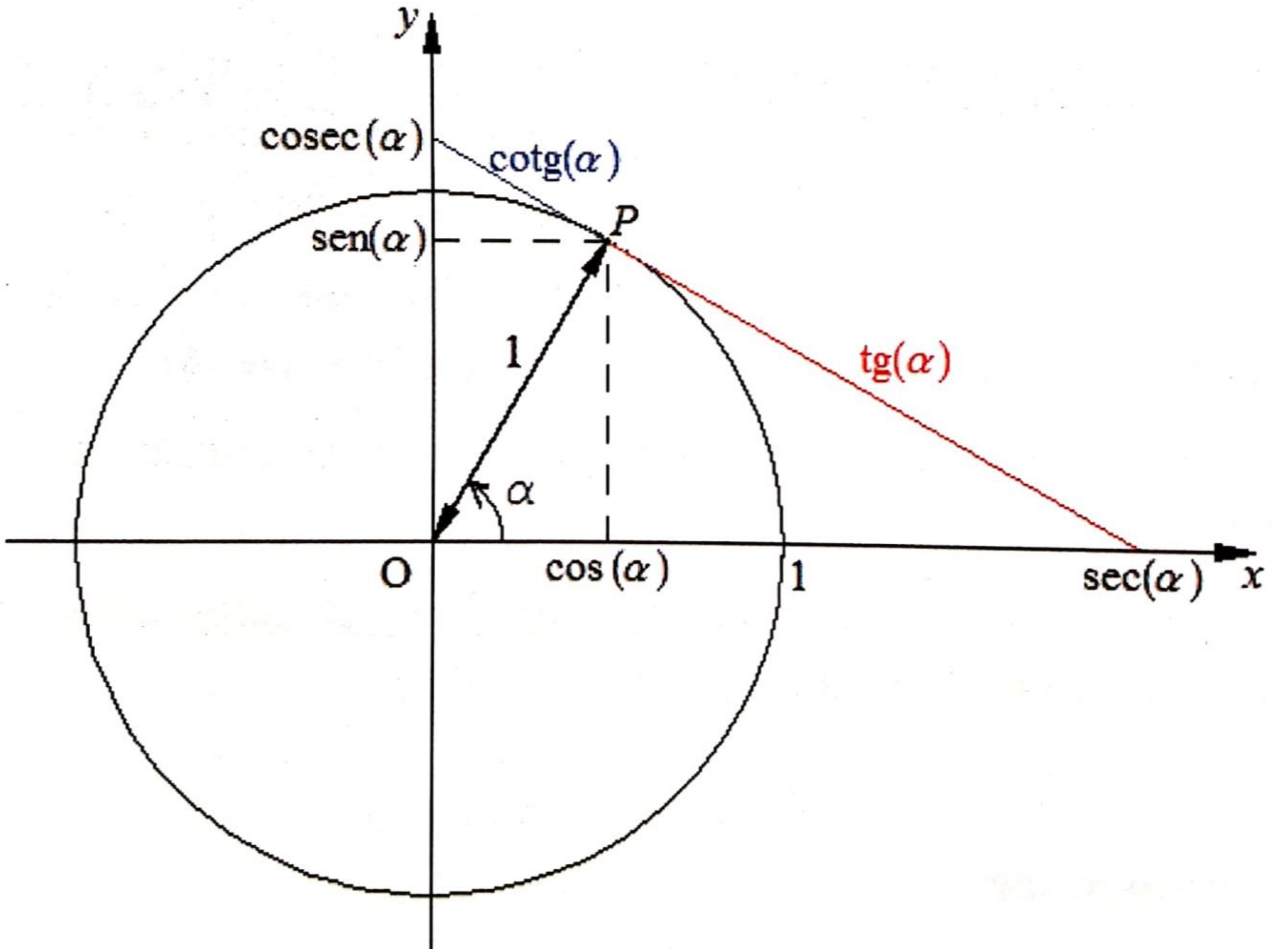
- Interseca al eje x en el punto $(\sec(\alpha), 0)$.
- Interseca al eje y en el punto $(0, cosec(\alpha))$.
- Las longitudes de los segmentos de la recta tangente indicados en el gráfico son $tg(\alpha)$ y $cotg(\alpha)$.

Para ángulos con lados terminales en otros cuadrantes la representación es similar, debiendo asignarle a tg y $cotg$ signo positivo cuando sen y cos tienen igual signo y negativo en caso contrario.

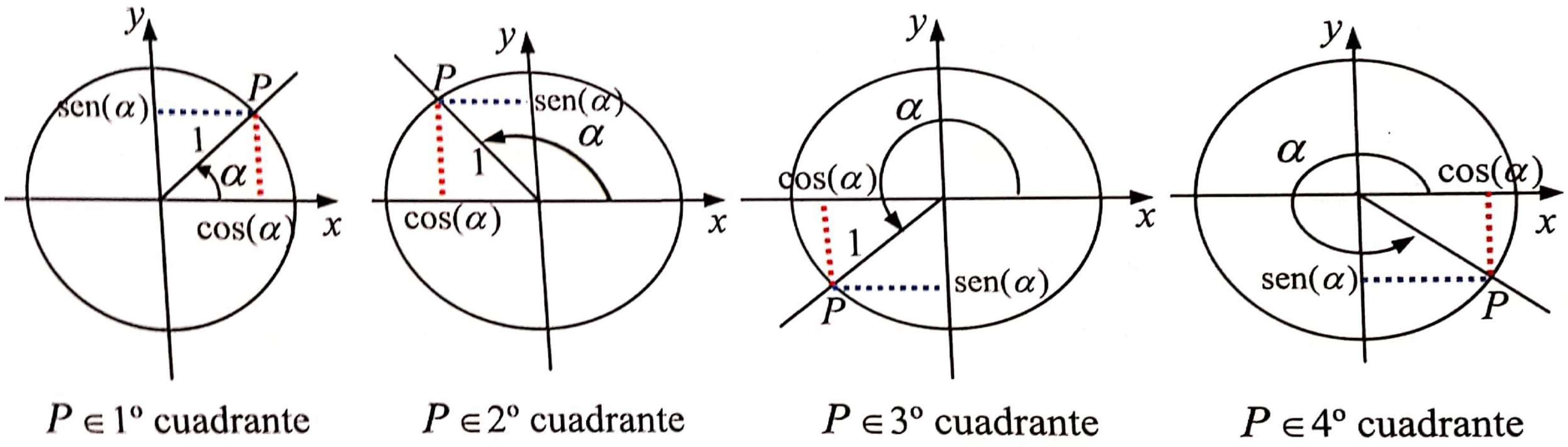
Los valores de $tg(\alpha)$, $cotg(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ y $cosec(\alpha)$ no están definidos para ángulos que no es posible determinar su valor geométricamente:

a) Si $\alpha = {}^{\pi}/_{2}$ la recta tangente es horizontal (no interseca el eje x) y por lo tanto para 0 radianes no están definidas la tangente ni la secante;

b) Si $\alpha = 0$ la recta tangente es vertical (no interseca al eje y por lo tanto para 0 radianes no están definidas la cotangente ni la la cosecante.



Signo de las funciones *seno* y *coseno* en los cuatro cuadrantes



- El $seno$ es positivo para ángulos del primero y segundo cuadrante y negativo para ángulos del tercer y cuarto cuadrante. Y es nulo para $\alpha = 0$ *ó* $\alpha = \pi$.

- El $coseno$ es positivo para ángulos del primero y cuarto cuadrante y negativo para ángulos del segundo y tercer cuadrante. Y es nulo cuando $\alpha = \pi/2$ *ó* $\alpha = 3\pi/2$.

- Los signos de la tangente y de las otras funciones trigonométricas son consecuencia de los signos del seno y del coseno.

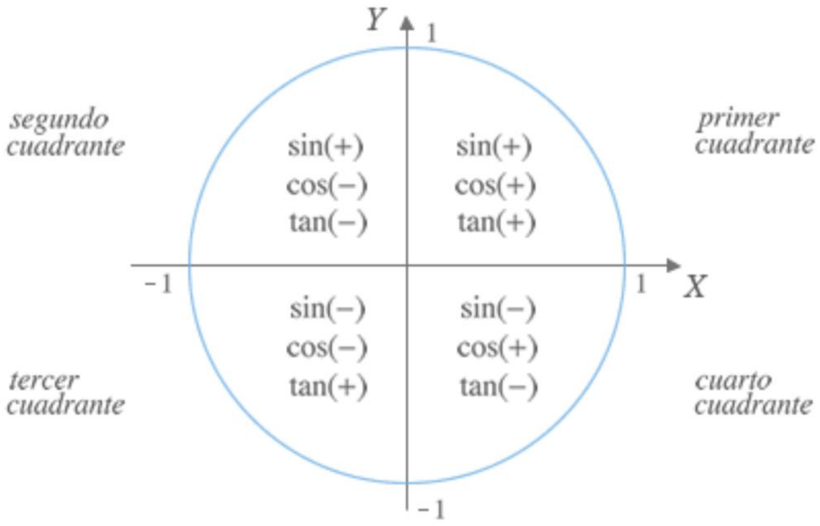
Esto es válido para ángulos de más de un giro $\alpha > 2\pi$.

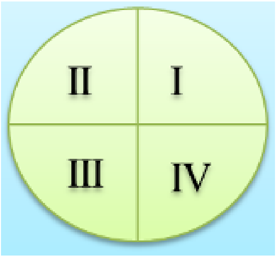
Regla para recordar los signos

El Seno es mayor a 0 en el primero y Segundo cuadrante.

El Coseno es mayor a 0 en el primero y Cuarto cuadrante.

La Tangente es mayor a 0 en el primero y Tercer cuadrante.





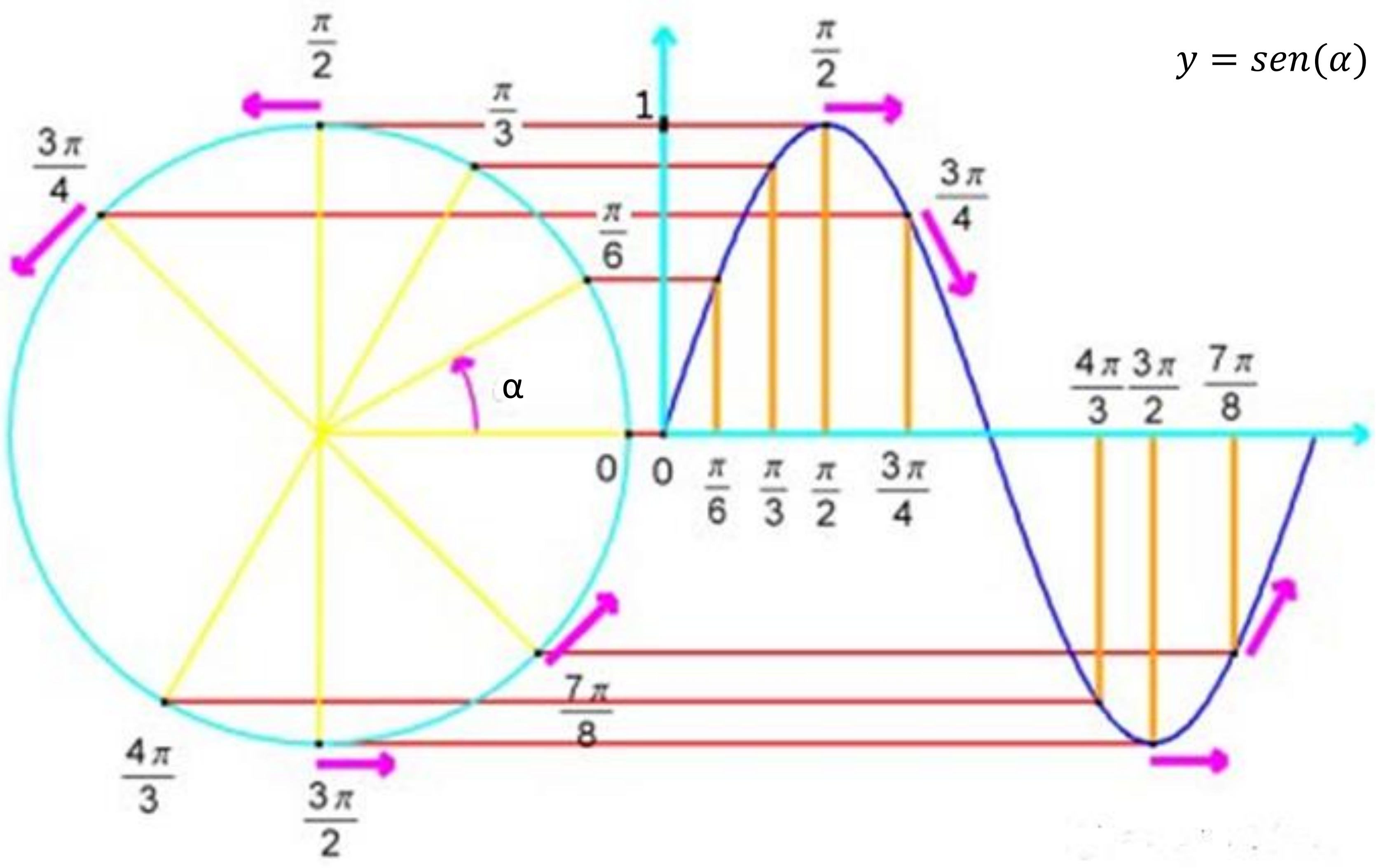
Cuadrante	sen	cos	tan	cot	sec	csc
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

Algunos valores de las funciones trigonométricas para ángulos característicos

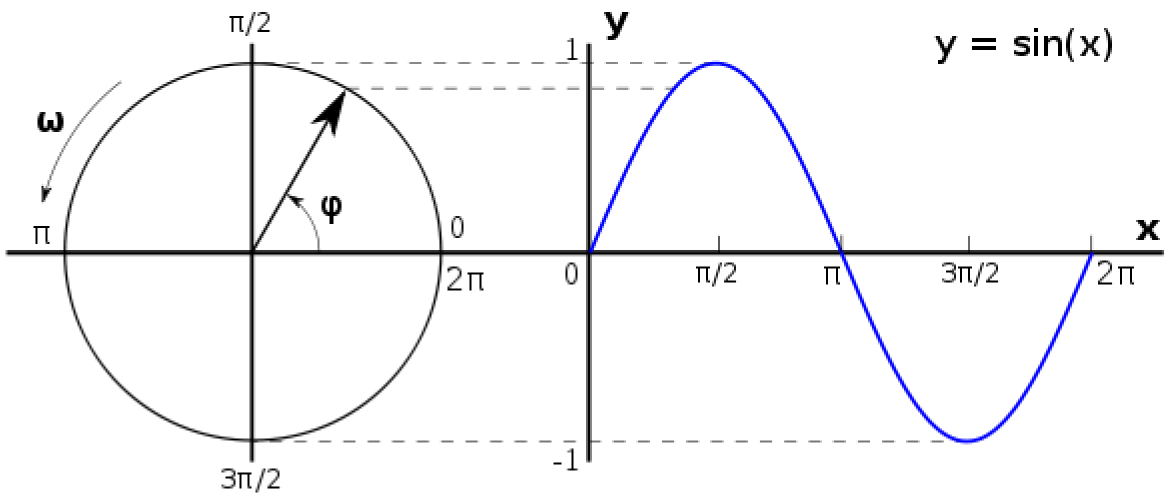
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$sin(\boldsymbol{\alpha})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(\boldsymbol{\alpha})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg(\boldsymbol{\alpha})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind
$csc(\boldsymbol{\alpha})$	ind	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$sec(\boldsymbol{\alpha})$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ind
$cot(\boldsymbol{\alpha})$	ind	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

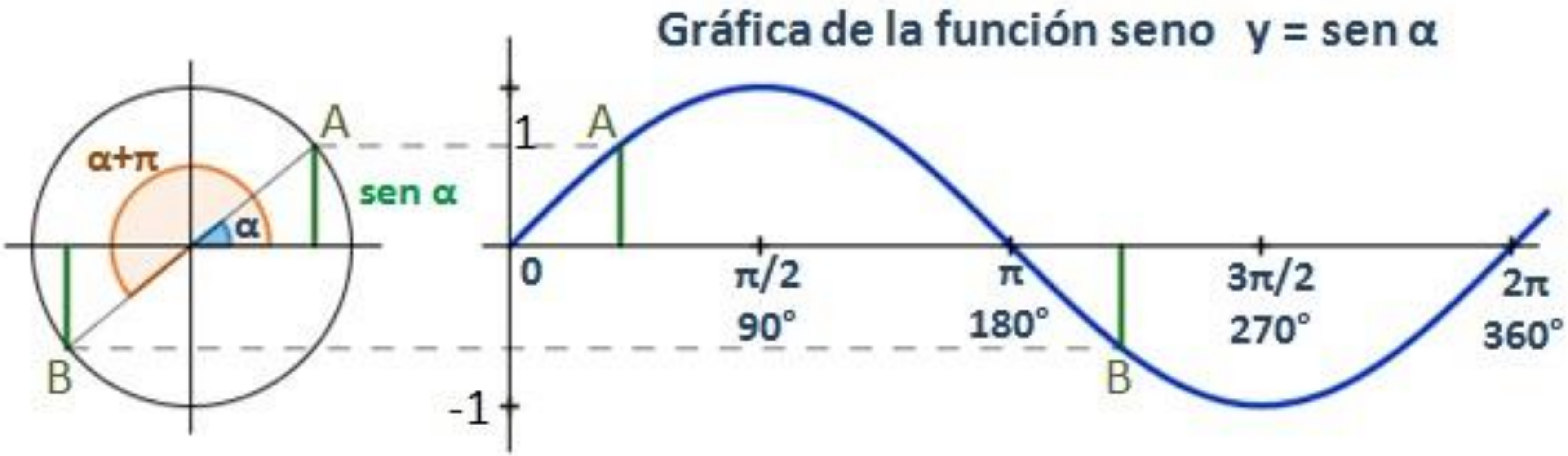
Para cada ángulo se obtuvo: $tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, no quedando definida la tangente de $90°$ ya que $\cos(90°) = 0$.

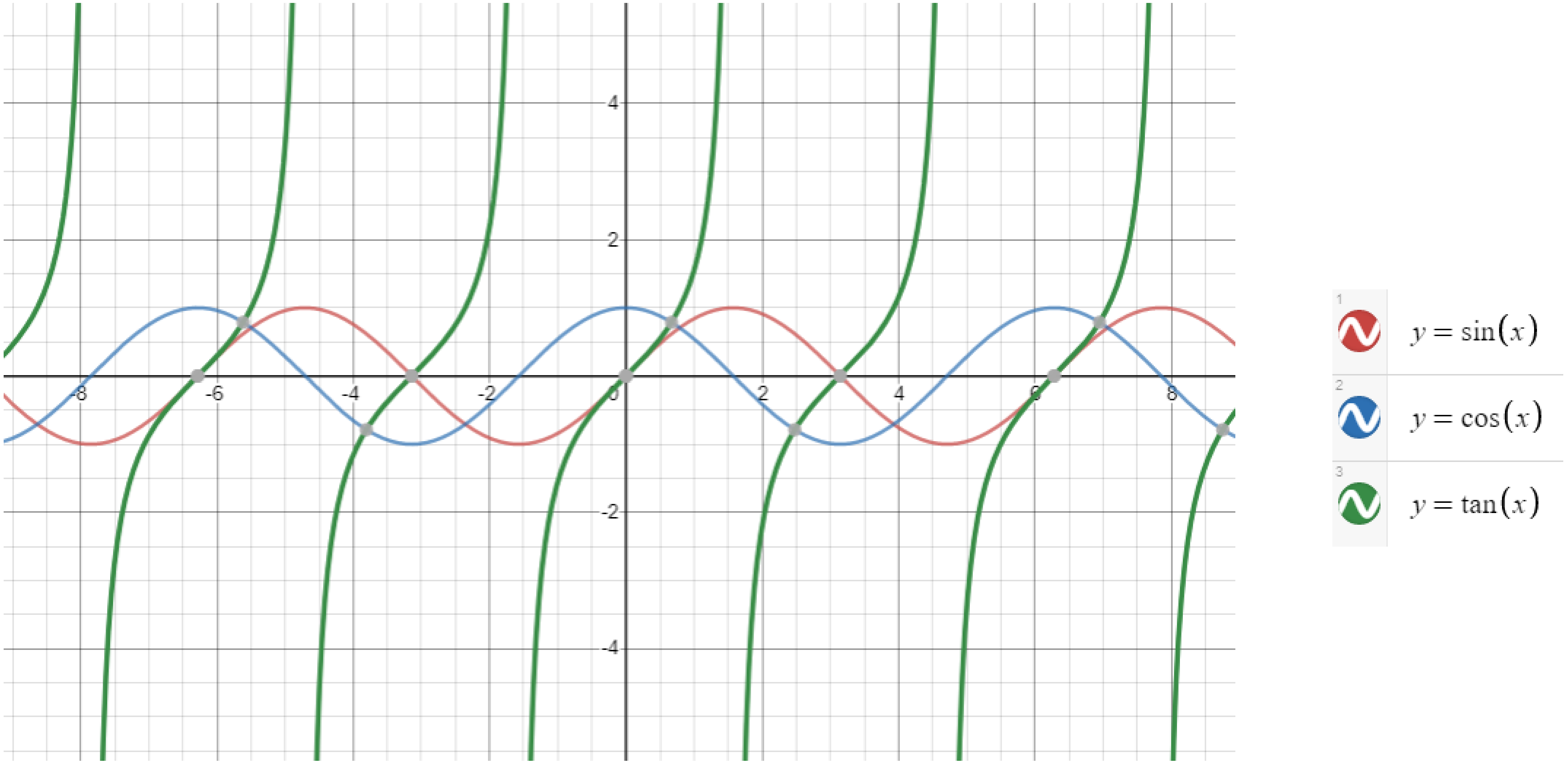
Gráficos de las funciones trigonométricas

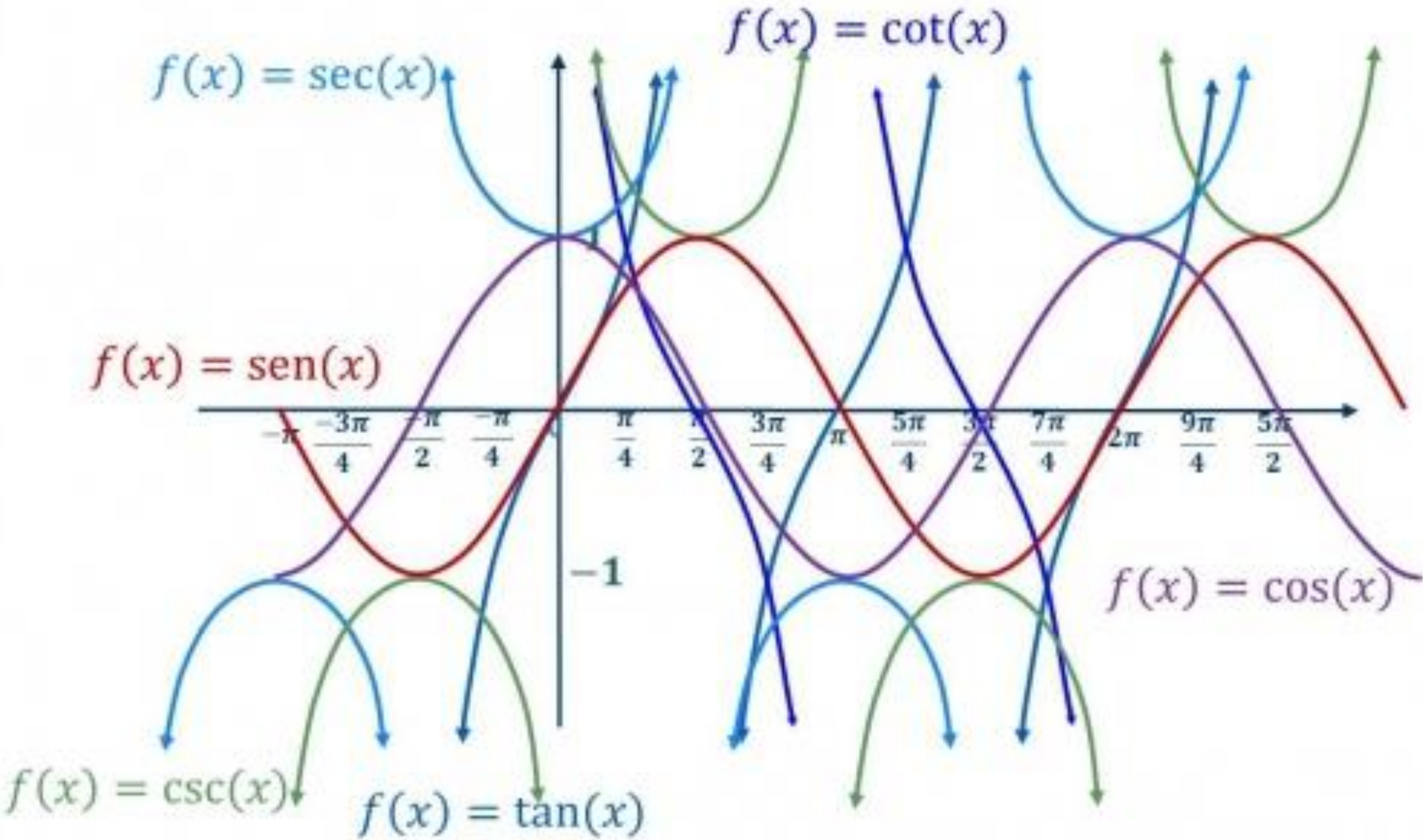


$y = sen(\alpha)$

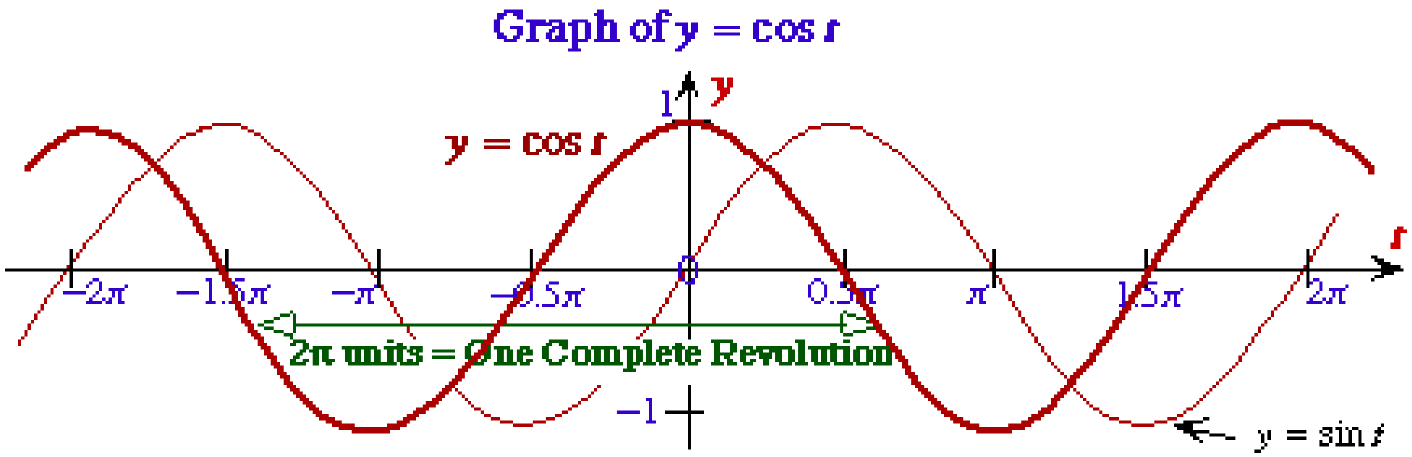

y = sin(x)
y
x
ω
φ
π/2
π
0
2π
3π/2
1
-1
0
π/2
π
3π/2
2π


Gráfica de la función seno y = sen α
α+π
α
A
B
sen α
1
-1
A
B
0
π/2
90°
π
180°
3π/2
270°
2π
360°


4
2
-2
-4
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
1
$y = \sin(x)$
2
$y = \cos(x)$
3
$y = \tan(x)$


$f(x) = \sec(x)$
$f(x) = \cot(x)$
$f(x) = \text{sen}(x)$
$f(x) = \cos(x)$
$f(x) = \csc(x)$
$f(x) = \tan(x)$
1
-1
$-\pi$
$\frac{-3\pi}{4}$
$\frac{-\pi}{2}$
$\frac{-\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$
2π
$\frac{9\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{2}$

Propiedades



1. $Dom(sen) = Dom(\cos) = \mathbb{R}$

2. sen y cos son funciones periódicas de período 2π para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $k \in \mathbb{Z}$
$$sen(x + 2k\pi) = sen(x) \quad \text{y} \quad cos(x + 2k\pi) = cos(x)$$

3. $sen: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar. O sea, $sen(-x) = -sen(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

4. $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es par. O sea, $cos(-x) = cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

5. $sen^2(x) + cos^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

6. $sen(A \pm B) = sen(A) \cdot cos(B) \pm sen(B) \cdot cos(A)\,;\ \forall x \in \mathbb{R}$.

7. $cos(\mathrm{A} \pm \mathrm{B}) = cos(A) \cdot cos(B) \mp sen(A) \cdot \mathrm{sen}(B)$.

8. $\forall x \in \mathbb{R}: sen(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x)$ y $cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sen(x)$.

Propiedades (cont)

9. sen es positiva en el primer y segundo cuadrantes y negativa en el tercer y cuarto cuadrantes.

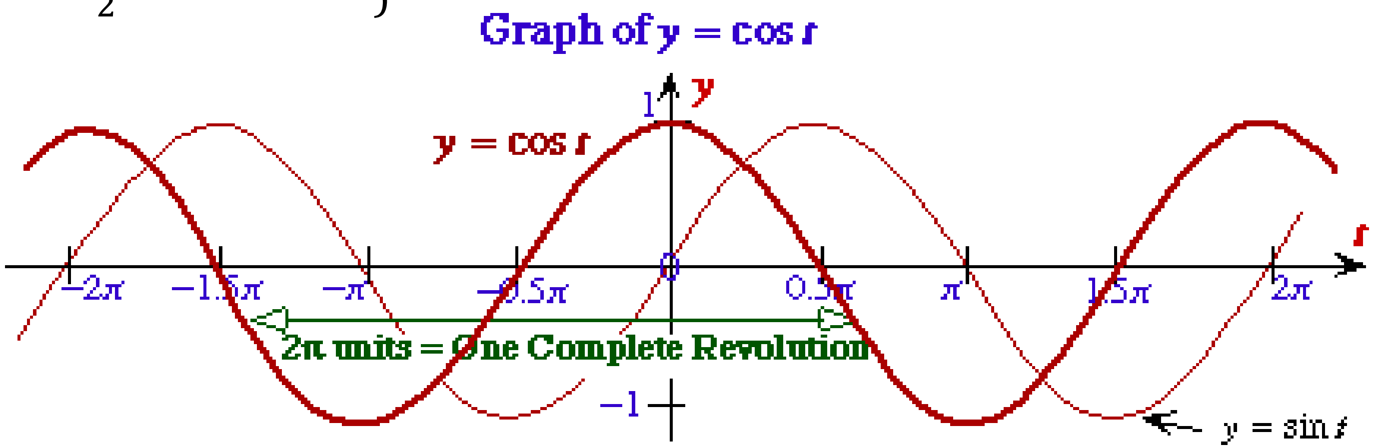
10. cos es positiva en el primer y cuarto cuadrantes y negativa en el segundo y tercer cuadrantes.

11. $\forall x \in \mathbb{R}: sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos(x) \quad y \quad cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sen(x).$

12. $\forall x \in \mathbb{R}: |sen(x)| \leq 1 \quad y \quad |\cos(x)| \leq 1.$

13. $C_0(sen) = \{x \in \mathbb{R}: sen(\mathrm{x}) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

14. $C_0(cos) = \{x \in \mathbb{R}: cos(\mathrm{x}) = 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$



A partir de las funciones *sen* y cos se definen las otras funciones trigonométricas:

$$tg: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (tangente), tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

$$Dom(tg) = \{x \in \mathbb{R}: \cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$cosec: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (cosecante), cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$$

$$Dom(cosec) = \{x \in \mathbb{R}: \mathrm{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$sec: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (secante), sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$Dom(sec) = \{x \in \mathbb{R}: \cos(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$cotg: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (cotangente), cotg(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$$

$$Dom(cotg) = \{x \in \mathbb{R}: \mathrm{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$