UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS – IRM
Respuestas

Práctica 4: Funciones trigonométricas

1. Se pueden verificar los gráficos con la aplicación GeoGebra.
   - (a) Para $f(x) = \text{sen}(x)$: $Dom(f) = \mathbb{R}$, $C_0(f) = \{x \in \mathbb{R}/x = k\pi$ tal que $k \in \mathbb{Z}\}$
   - (b) $f(x) = \cos(x)$: $Dom(f) = \mathbb{R}$, $C_0(f) = \{x \in \mathbb{R}/x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ tal que $k \in \mathbb{Z}\}$
   - (c) $f(x) = \text{tg}(x)$: $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}/x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ tal que $k \in \mathbb{Z}\}$,$C_0(f) = \{x \in \mathbb{R}/x = k\pi$ tal que $k \in \mathbb{Z}\}$
2. (a) $\cos(\frac{7}{6}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   - (b) $\text{sen}(-\frac{1}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   - (c) $\text{tg}(7\pi) = 0$
3. Sea $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\cos(t) = \frac{1}{10}$. Sin hallar t, usando propiedades, calcular:
   - (a) $\text{sen}(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{100}}$
   - (b) $\text{sen}(\frac{\pi}{2} - t) = \frac{1}{10}$.
   - (c) $\cos(\pi + t) = -\cos(\pi + t - \pi) = -\cos(t) = -\frac{1}{10}$
   - (d) $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + t) = \frac{1}{10}$.
   - (e) $\cos(3\pi - t) = \cos(\pi - t) = -\cos(-t) = -\frac{1}{10}$
   - (f) $\cos(t + \frac{3}{2}\pi) = \sqrt{1 - \frac{1}{100}}$.
4. Sea $t \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ tal que $\cos(t) = -\frac{4}{5}$. Sin hallar t, usando propiedades, calcular:
   - (a) $\text{sen}(t) = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}}$.
   - (b) $\cos(\frac{11}{2}\pi - t) = \frac{4}{5}$.
   - (c) $\text{tg}(\pi - t) = -\frac{5}{4}\sqrt{1 - \frac{16}{25}}$.
5. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ que verifican

(a) $\text{sen}(x) = 0$.	(g) $\text{sen}(x) = \frac{1}{2}$.	(m) $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.	(s) $\text{tg}(x) = -1$.
(b) $\cos(x) = 0$.	(h) $\cos(x) = \frac{1}{2}$.	(n) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.	(t) $\text{tg}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
(c) $\text{sen}(x) = 1$.	(i) $\text{sen}(x) = -\frac{1}{2}$.	(o) $\text{sen}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.	(u) $\text{tg}(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
(d) $\cos(x) = 1$.	(j) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.	(p) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.	(v) $\text{tg}(x) = \sqrt{3}$.
(e) $\text{sen}(x) = -1$.	(k) $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	(q) $\text{tg}(x) = 0$.	(w) $\text{tg}(x) = -\sqrt{3}$.
(f) $\cos(x) = -1$.	(l) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	(r) $\text{tg}(x) = 1$.	

   - (a) $\{x \in \mathbb{R}/x = k\pi$ tal que $k \in \mathbb{Z}\}$.
   - (b) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ tal que $k \in \mathbb{Z}\}$.
   - (c) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ tal que $k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) $\{x \in \mathbb{R}/x = 0 + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(e) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(f) $\{x \in \mathbb{R}/x = \pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(g) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(h) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(i) $\{x \in \mathbb{R}/x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(j) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(k) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(l) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(m) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(n) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(o) $\{x \in \mathbb{R}/x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(p) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(q) $\{x \in \mathbb{R}/x = k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(r) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}/x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$..

(s) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{3}{4}\pi + k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(t) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{1}{6}\pi + k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(u) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{5}{6}\pi + k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(v) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{1}{3}\pi + k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

(w) $\{x \in \mathbb{R}/x = \frac{2}{3}\pi + k\pi \text{ tal que } k \in \mathbb{Z}\}$.

6. Para cada una de las siguientes funciones f, hallar $Im(f)$, los máximos y mínimos de f en el intervalo I indicado. I indicado:

   (a) Para $f(x) = -3\cos(x - \frac{\pi}{2}) + 2$, $Im(f) = [-1, 5]$. El valor mínimo es -1 y se alcanza en $x = \frac{5\pi}{2}$. El máximo es 5 y se alcanza en $x = \frac{3\pi}{2}$ y en $x = \frac{7\pi}{2}$.

   (b) Para $f(x) = \text{sen}(\pi x) - 2$, $Im(f) = [-3, -1]$. El valor máximo es -1 y se alcanza en $x = \frac{1}{2}$. El valor mínimo es -3 y se alcanza en $x = -\frac{1}{2}$ y en $x = \frac{3}{2}$.

   (c) Para $f(x) = \frac{1}{4}\cos(-3x + \pi) + 1$, $Im(f) = [3/4, 5/4]$. El valor máximo es $5/4$ y se alcanza en $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$ y en $x = \frac{5\pi}{3}$.
   El valor mínimo es $3/4$ y se alcanza en $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$ y $x = 2\pi$.

7. (a) Las raíces de $f(x) = 2\text{sen}(3x - \pi) + 1$, en $I = \mathbb{R}$ son $x = \frac{\pi}{3} + \frac{7}{18}\pi + \frac{2k}{3}\pi$ y $x = \frac{\pi}{3} + \frac{11}{18}\pi + \frac{2k}{3}\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

   (b) Las raíces de $f(x) = 3\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}) + 3$, en $I = [\pi, 8\pi]$ son $x = \frac{8}{3}\pi$ y $x = \frac{20}{3}\pi$.

   (c) Las raíces de $f(x) = 2 - 6\text{tg}^2(4x)$, en $I = [-\pi/2, \pi/2]$ son $x = \pm\frac{\pi}{24}$, $x = \pm\frac{7}{24}\pi$, $x = \pm\frac{5}{24}\pi$ y $x = \pm\frac{11}{24}\pi$.

   (d) Las raíces de $f(x) = 12\cos^2(2x) - 6$, en $I = [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}]$ son $x = -\frac{7}{8}\pi$, $x = -\frac{9\pi}{8}$ y $x = \frac{-11\pi}{8}$.

   (e) Las raíces de $f(x) = \cos^2(\pi x - \pi/2) - 3\cos(\pi x - \pi/2) + 2$, en $I = [-2, 3]$ son $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{2}$ y $x = \frac{-3}{2}$.

8. Sea $f(x) = 3\cos(t\,x + \pi) + 2$.

   (a) $Im(f) = [-1, 5]$.

   (b) Todos los $t \in [-7, 7]$ para los cuales $x = 1$ es un mínimo de f son $t = 0$, $t = -2\pi$ y $t = 2\pi$.

9. (a) Los $x \in [0, 2\pi]$ de la ecuación $2\text{sen}(2x) + 1 = 0$ son $x = \frac{7}{12}\pi$, $x = \frac{11}{12}\pi$, $x = \frac{19}{12}\pi$, $x = \frac{23}{12}\pi$
   (b) Los $x \in [0, 2\pi]$ de la ecuación $2\cos^2(x) + 3\text{sen}(x) - 3 = 0$ son $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{5}{6}\pi$.
   (c) Los $x \in [0, 2\pi]$ de la ecuación $\text{tg}(\frac{x}{2}) + 1 = 0$ es $x = \frac{3}{2}\pi$.
   (d) Los $x \in [0, 2\pi]$ de la ecuación $\cos(x) \cdot \text{sen}(2x) - \cos(2x) \cdot \text{sen}(x) = \frac{1}{2}$ son $x = \frac{5}{6}\pi$ y $x = \frac{\pi}{6}$.
   (e) Los $x \in [0, 2\pi]$ de la ecuación $\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\text{sen}^2(x)} = 4$ son $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$ y $x = \frac{7}{4}\pi$.

10. Sea $f(x) = a\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}x - \pi) + b$.
   (a) $a = 10$, $b = 5$.
   (b) Tomando $a = 10, b = 5$, $f(x) = 10\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}x - \pi) + 5$. El mínimo de f en $[-2, 4]$ es $x = \frac{3}{2}$.
   (c) Los ceros de f en $[-2, 4]$ son $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{5}{2}$.