MATEMÁTICAS

Las matemáticas desempeñan un papel indispensable en nuestra sociedad y están presentes en cualquier actividad humana. Constituyen una herencia cultural y poseen un valor propio, siendo un conjunto de ideas y formas de actuar que permiten conocer y estructurar la realidad, analizarla y obtener información nueva y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas. Las matemáticas integran aspectos como el dominio del espacio, el tiempo, la proporción, la optimización de recursos, el análisis de la incertidumbre o el manejo de las Tecnologías digitales; y promueven el razonamiento, la argumentación, la comunicación, la perseverancia, la toma de decisiones o la creatividad. Además, tienen una dimensión instrumental que las vincula con la mayoría de las áreas de conocimiento: las Ciencias de la Naturaleza, la Ingeniería, la Tecnología, las Ciencias sociales e incluso el Arte o la Música. Por otra parte, en el momento actual, cobran especial interés elementos relacionados con el manejo de datos e información y el pensamiento computacional que proporcionan instrumentos eficaces para afrontar este nuevo escenario. En este sentido, las matemáticas juegan un papel esencial ante los actuales desafíos sociales y medioambientales a los que el alumnado tendrá que enfrentarse en su futuro, como instrumento para analizar y comprender mejor el entorno cercano y global, los problemas sociales, económicos, científicos y ambientales y para evaluar vías de solución viables. Así, las matemáticas se erigen como un saber instrumental indispensable en el marco del desarrollo de los Objetivos de Desarrollo Sostenible de las Naciones Unidas.

En consecuencia con todo lo anterior, el currículo del área de matemáticas en Educación Primaria establece unas enseñanzas con las que se persigue alcanzar, por una parte, el desarrollo máximo de las potencialidades en todo el alumnado desde una perspectiva inclusiva, independientemente de sus circunstancias personales y sociales; y, por otra parte, la alfabetización matemática, es decir, la adquisición de los conocimientos, las habilidades y las herramientas necesarios para aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos en la formulación de una situación-problema en términos matemáticos, seleccionar las herramientas adecuadas para su resolución, interpretar las soluciones en el contexto y tomar decisiones estratégicas. Esta comprensión de las matemáticas ayudará al alumnado a emitir juicios fundamentados y a tomar decisiones, destrezas imprescindibles en su formación como ciudadanos o ciudadanas comprometidos y reflexivos capaces de enfrentar los desafíos del siglo XXI.

El desarrollo curricular del área de Matemáticas se orienta a la consecución en los Objetivos Generales de la Etapa, prestando una especial atención al desarrollo y la adquisición de las competencias clave conceptualizadas en el Perfil competencial que el alumnado debe conseguir al finalizar la etapa de Educación Primaria, y cuyos descriptores han constituido el marco de referencia para la definición de las competencias específicas del área. Las competencias específicas, objetivo esencial del área, se relacionan entre sí, constituyendo un todo interconectado. Se organizan en cinco ejes: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación, y destrezas socioemocionales. Estas orientan los procesos y principios metodológicos que deben dirigir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y favorecen el enfoque multidisciplinar y la innovación.

La resolución de problemas constituye uno de los ejes fundamentales tanto de las matemáticas como de su enseñanza y aprendizaje y va mucho más allá de ser un importante objetivo de aprendizaje. Debe ser el medio a través del cual se construyen los saberes de cada uno de los sentidos. No se trata de un método o una metodología, sino más bien de un enfoque de enseñanza que afecta a la naturaleza de las matemáticas. El presente currículo, mediante las orientaciones, hará especial hincapié en esto. Además, la resolución de problemas entronca con los demás ejes de la competencia matemática: el razonamiento y el pensamiento computacional, la representación de objetos matemáticos, el manejo y la comunicación empleando lenguaje matemático y las destrezas socioafectivas. Dejar la resolución de problemas en la periferia, como una actividad ajena al proceso de construcción de las matemáticas, influye en las creencias que se forma el alumnado, tanto hacia las matemáticas como hacia su aprendizaje, fomentando una visión mecanicista, poco creativa y pasiva de estas. En realidad, las matemáticas son todo lo contrario. En definitiva, si se pretende que el alumnado consiga ser competente resolviendo problemas (lo cual es un objetivo), estos deben formar parte intrínseca de las situaciones de aprendizaje a lo largo de todos los ciclos. En efecto, también desde el primer ciclo, ya que lo único que varía son los saberes que se ponen en juego.

Las situaciones de aprendizaje deben centrarse en el desarrollo de las competencias, de manera que los criterios de evaluación y los saberes básicos se vertebran alrededor de las competencias específicas. Los criterios de evaluación que se proporcionan para cada una de las competencias específicas son necesariamente generales. Cuando ha sido

csv: BOA20220727001

posible, se han graduado a lo largo de los ciclos. No obstante, será necesario interpretarlos a partir de los saberes que se ponen en juego. En otras palabras, los procesos son los mismos esencialmente, pero el lenguaje que se utiliza, las representaciones, las conexiones que se establecen, cambian. De esta manera, la progresión de lo concreto a lo pictórico y lo abstracto se identifica dentro de cada curso con cada saber y también a lo largo de los ciclos.

La adquisición de las competencias específicas constituye la base para la evaluación competencial del alumnado y se valorará a través de los criterios de evaluación. No existe una vinculación unívoca y directa entre criterios de evaluación y saberes básicos, las competencias específicas se evaluarán a través de la puesta en acción de diferentes saberes, proporcionando la flexibilidad necesaria para establecer conexiones entre ellos.

Los saberes básicos se estructuran en seis sentidos en torno al concepto de «sentido matemático» e integran un conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes diseñados de acuerdo con el desarrollo evolutivo del alumnado.

El sentido numérico se caracteriza por el desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de números y operaciones para, por ejemplo, orientar la toma de decisiones.

El sentido de la medida se caracteriza por la comprensión y comparación de atributos de los objetos del mundo natural. Entender y elegir las unidades adecuadas para estimar, medir y comparar; utilizar instrumentos adecuados para realizar mediciones; y comprender las relaciones entre magnitudes utilizando la experimentación son los ejes centrales de este sentido. Es también el sustrato sobre el que tienen lugar abstracciones de las que emergen importantes conceptos matemáticos, como el número racional a partir de sus diferentes representaciones (fracciones y decimales).

El sentido espacial es fundamental para comprender y apreciar los aspectos geométricos del mundo. Identificar, representar y clasificar formas, descubrir sus propiedades y relaciones, describir sus movimientos y razonar con ellas constituyen sus elementos clave.

El sentido algebraico y pensamiento computacional enfatiza los procesos de generalización y el establecimiento de relaciones que entroncan con una visión más amplia de las matemáticas. Reconocer patrones y relaciones entre variables, expresar regularidades o modelizar situaciones con expresiones verbales y simbólicas son sus características fundamentales. El pensamiento computacional ofrece un acercamiento distinto a la resolución de problemas que encuentra puntos en común con el proceso clásico dentro de las matemáticas. Permite revisitar conceptos matemáticos desde otra perspectiva al mismo tiempo que se erige como una de las habilidades esenciales en el siglo XXI, no solo en el ámbito profesional, sino para apreciar el papel de la tecnología y su impacto en la sociedad.

El sentido estocástico se orienta hacia el razonamiento y la interpretación de datos y la valoración crítica y la toma de decisiones a partir de información estadística, además de la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios en situaciones cercanas y significativas para el alumnado.

El sentido socioafectivo integra conocimientos y destrezas esenciales para desarrollar actitudes y creencias positivas hacia las matemáticas y hacia su enseñanza y aprendizaje. Para ello, el alumnado debe experimentar situaciones emocionalmente adecuadas. Manejar correctamente estas habilidades mejora el aprendizaje del alumnado, combate actitudes negativas hacia las matemáticas, contribuye a erradicar ideas preconcebidas relacionadas con el género o el mito del talento innato indispensable y promueve un aprendizaje activo fomentando la motivación intrínseca. De nuevo, un ambiente que desarrolle una cultura de aula propicia para el aprendizaje a través de la resolución de problemas será el punto de partida para el trabajo en el dominio socioafectivo. La gestión de interacciones, el trabajo en pequeño y gran grupo, será esencial. Así mismo, resultará importante complementar la cuestión de género dando a conocer al alumnado las contribuciones de las mujeres a las matemáticas a lo largo de la historia.

El área debe abordarse de forma experiencial, concediendo especial relevancia a la manipulación (a la reflexión compartida sobre las acciones que se realizan con ella) e impulsando progresivamente la utilización continua de recursos digitales, proponiendo al alumnado situaciones de aprendizaje que propicien la reflexión, el razonamiento, el establecimiento de conexiones, la comunicación y la representación.

Del mismo modo, se recomienda combinar diferentes metodologías didácticas, que favorezcan la motivación por aprender y generen en el alumnado la curiosidad y la necesidad por adquirir los conocimientos, destrezas y actitudes para el desarrollo de las competencias. Las metodologías activas son especialmente adecuadas en un enfoque competencial, ya que permiten construir el conocimiento y dinamizar la actividad de aula mediante el intercambio de ideas. Eventualmente, el trabajo por proyectos posibilita la interdisciplinariedad y favorece la reflexión, la crítica, la elaboración de hipótesis y la tarea investigadora. En este sentido, cabe destacar de nuevo que, independientemente de las metodologías concretas empleadas en diferentes partes del curso, o para diferentes actividades, un adecuado desarrollo del área de matemáticas requiere de un enfoque global de enseñanza a través de la resolución de problemas. En este enfoque los saberes no se presentan al alumnado como un producto cerrado, sino que es el propio alumnado el que, a través de su actividad en la resolución de problemas estructurados y con el andamiaje adecuado se acercan a los diferentes conceptos matemáticos.

I. Competencias específicas

Competencia específica del área de Matemáticas 1:

CE.M.1. Interpretar problemas de la vida cotidiana proporcionando una representación matemática de los mismos mediante conceptos, herramientas y estrategias para analizar la información más relevante.

Descripción

La interpretación juega un papel fundamental en los procesos matemáticos de modelización y de representación en la resolución de problemas. La comprensión de una situación o problema es siempre el primer paso hacia su exploración o resolución. Una buena representación o visualización del problema ayuda a su interpretación, así como a la identificación de los datos y las relaciones más relevantes. Las personas que son buenos resolutores de problemas adoptan una actitud matemática que les lleva a analizar la situación en profundidad, a extraer toda la información posible de esta y a elegir una representación adecuada. El profesorado puede ayudar a desarrollar esta competencia haciendo buenas preguntas que sirvan de andamiaje, sin anticiparse, que ayuden al alumnado a establecer relaciones y a modelizar la situación en términos matemáticos, utilizando desde representaciones concretas hasta simbólico-numéricas, pasando por gráficos y diagramas con mayor o menor grado de abstracción. Estas situaciones y problemas no son únicamente enunciados verbales escritos, sino que engloban un abanico más amplio: mensajes orales, situaciones presentadas a partir de dibujos, imágenes o fotografías, situaciones cotidianas, juegos o tareas a realizar con materiales manipulativos concretos que supongan un reto. Esta competencia persigue que el alumnado comprenda el entorno cercano y tenga herramientas para poder interpretar y comprender aquellas situaciones en las que se ponen en juego las matemáticas. Se dice que vivimos en la era de los datos, y es verdad que es necesario saber interpretar y manejar esa información, en términos tanto cuantitativos como cualitativos, pero las matemáticas permean muchísimas otras situaciones cercanas al alumnado. El tratamiento de las magnitudes y su medida, la organización del espacio y, en definitiva, todos los sentidos matemáticos que se describen en este currículo, son fundamentales para interpretar y comprender los más diversos fenómenos y desenvolverse en la vida cotidiana.

Los contextos, en la resolución de problemas, proporcionan un amplio abanico de posibilidades para la integración de las distintas experiencias y aprendizajes del alumnado, así como de las diferentes competencias con una perspectiva global, fomentando el respeto mutuo y la cooperación entre iguales, con especial atención a la igualdad de género, la inclusión y la diversidad personal y cultural. Estos contextos deberán ser variados incluyendo al menos, el personal, el escolar, el social, el científico y el humanístico. Ofrecen una oportunidad para integrar las ocho competencias clave e incluir el planteamiento de los grandes problemas medioambientales y sociales de nuestro mundo o problemas de consumo responsable en su realidad cercana, fomentando que el alumnado se haga partícipe de los mismos y desarrolle la actitud necesaria para implicarse activamente en su futuro. La vida cotidiana del alumnado no debe restringirse únicamente a sus experiencias diarias, sino a contextos que le resulten significativos porque conecten con sus conocimientos previos.

Vinculación con otras competencias

Las competencias específicas CE.M.1 y CE.M.2 se relacionan con los procesos de modelización matemática y resolución de problemas en contextos diversos. En la interpretación de situaciones y problemas, especialmente cuando suponen un reto, se ponen de manifiesto conexiones entre las diferentes competencias y sentidos. Se ha de tener presente que hay ideas transversales que están presentes en los diferentes saberes, como la idea de cantidad, los patrones, la noción de equivalencia, conceptos en torno a la medida, etc. en los que el razonamiento y la representación juegan un papel

csv: BOA20220727001

fundamental en la resolución de problemas. El alumnado debe apreciar que las matemáticas son algo más que una serie de temas aislados y que las pueden usar en multitud de ocasiones en los contextos más diversos, y llegar a considerarlas útiles y relevantes para su vida más allá de la escuela. El profesorado debería desplegar estrategias para hacer posible que se adquiera el conocimiento de forma integrada y no fragmentado. Ser capaz de interpretar el mundo real en términos matemáticos permite comprenderlo mejor, identificar relaciones de causa y efecto y, como herencia cultural, nos hace partícipes del momento histórico y apreciar expresiones de las más diversas disciplinas artísticas. El desarrollo de esta competencia también tiene, por tanto, una íntima relación con la CE. M.5, que lleva a relacionar los saberes del área de Matemáticas entre sí y con los de las otras áreas, desde un enfoque globalizador.

Sin ánimo de exhaustividad, se identifican vínculos con competencias del área de Ciencias de la Naturaleza, como la CE.CN.2 (dar respuesta a cuestiones científicas sencillas, utilizando diferentes técnicas, instrumentos y modelos propios del pensamiento científico, para interpretar y explicar hechos…); del área de la Música y danza, como la CE.MD.3 y la Educación plástica y visual, como la CE.EPV.3 (Experimentar con las posibilidades del sonido, la imagen, el cuerpo…); o, muy especialmente en este caso, con el área de Lengua Castellana y Literatura, como la CE.LCL.2 (Comprender e interpretar textos orales y multimodales), la CE.LCL.3 (Producir textos orales y multimodales con coherencia…), la CE.LCL.4 (Comprender e interpretar textos escritos y multimodales…) o la CE.LCL.5 (Producir textos escritos y multimodales,…). En las orientaciones para la enseñanza se mencionan posibles puntos de conexión entre áreas.

Vinculación con el Perfil de salida

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM4, STEM5, CPSAA1, CPSAA3, CE2.

Competencia específica del área de Matemáticas 2:

CE.M.2. Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones, reflexionar sobre estas y el proceso seguido para incorporar nuevos saberes a la red de conocimientos y competencias del alumnado, y asegurar su validez e implicaciones desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.

Descripción

La resolución de problemas es una parte fundamental del aprendizaje de las matemáticas y consiste en enfrentarse a una tarea en la que el método para resolverla no es conocido de antemano. No es solo un fin en sí misma, sino que ha de ser el medio principal sobre el que se construyen y aprenden las matemáticas. La definición de lo que es un problema admite diferentes matices, pero siempre comparte esa posible duda o bloqueo inicial y un objetivo que exige asumir ese reto como propio, y que pasa por usar conceptos y procesos matemáticos. Un problema no es un ejercicio.

Existen heurísticas de resolución que incluyen estrategias generales como la búsqueda de analogías, prueba por ensayo y error, tanteo, descomposición en problemas más sencillos, etc. Sin embargo, solamente se llega a ser un buen resolutor o resolutora de problemas cuando se resuelven. Y, para ello, la enseñanza explícita de estas estrategias es insuficiente. Por un lado, resulta más enriquecedor y versátil desplegar estrategias metacognitivas en las que se facilite la toma de consciencia de uno mismo como resolutor o de una misma como resolutora, implicados en la toma de decisiones, asumiendo riesgos y apreciando los errores como una oportunidad de aprendizaje. ¿Qué estoy haciendo exactamente? ¿Por qué lo hago? ¿Cómo me ayuda? Por otro lado, se trata de que la actividad de resolución de problemas no sea algo periférico, sino que sea el trabajo habitual en el aula, en el que se proporcionan nuevas conexiones entre los conocimientos del alumnado, construyendo nuevos significados y conocimientos matemáticos. Los distintos saberes, de esta manera, no se presentan al alumnado como un producto acabado y cerrado, sino que son los propios estudiantes los que a través de su actividad en la resolución guiada y estructurada de problemas se acercan a los diferentes conceptos matemáticos. Posteriormente, también se aplicará ese conocimiento matemático a otros problemas.

No debe caerse en una «aritmetización» de los sentidos, reduciendo todos los problemas a un mero cálculo numérico. Es más, el propio desarrollo del sentido numérico exige situaciones de aprendizaje en donde se progresa en el

csv: BOA20220727001

razonamiento aritmético y se llevan a cabo profundas conexiones con otros sentidos, como el de la medida, a partir de la idea de magnitud. Existen problemas abiertos y/o de solución no numérica y para un adecuado tratamiento de esta competencia es esencial que la muestra de problemas sea variada en ese sentido y, en consonancia con la CE.M.1, no se trate solo de problemas de enunciado verbal.

El proceso de resolución es importante y debe ser evaluado, de manera que el alumnado sea consciente de sus progresos y cómo mejorar, al mismo tiempo que el profesorado recoge información para adaptar secuencias didácticas posteriores. En la resolución de problemas se enmarcan otros procesos, como los de representación, modelización y generalización, porque se deberá prestar especial atención a la reflexión a partir de la manipulación de materiales, el uso de representaciones gráficas que se alineen con el discurso y pensamiento del alumnado, expresiones verbales adecuadas, etc. No se trata solo de llegar a la solución eligiendo al azar una técnica concreta. Y, cuando se llega a la solución, se debe reflexionar sobre el proceso seguido, de forma crítica. Cuando la enseñanza es a través de la resolución de problemas, el aprendizaje comienza cuando se le da sentido a la solución obtenida y se incorpora ese saber a la red de conocimientos que ya posee el alumnado, haciéndolo significativo. Además, en función del contexto del problema es conveniente extender esta crítica de la solución obtenida hacia las implicaciones que puede tener desde diferentes perspectivas. Así, se pueden establecer algunas conexiones con otras áreas y con importantes aspectos transversales importantes (consumo responsable, salud, medioambiente, etc.).

Vinculación con otras competencias

El desarrollo de esta competencia tiene una estrecha relación con todas las competencias específicas de Matemáticas, y de forma muy directa con la CE.M.1 y la CE.M.3 y debe ponerse en juego en situaciones de aprendizaje de todos los sentidos matemáticos, prestando especial atención a aquellas diseñadas para el aprendizaje de nuevos saberes para el alumnado. Aunque esta competencia encuentra vínculos importantes con las de otras áreas, que también contribuyen a su desarrollo y repercuten en una mejora de la capacidad general para la resolución de problemas, hay que tener en cuenta las diferencias en el papel que juega la modelización en unas áreas y otras. Así, las conexiones con las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Ciencias Sociales son claras, pero en ella la modelización, por ejemplo, emplea un objeto matemático ya construido con el fin de obtener más información o nuevo conocimiento sobre cierto fenómeno del mundo de lo sensible y hacer predicciones. En cambio, en Matemáticas, la modelización de una situación puede perseguir también la construcción de un nuevo saber matemático para el alumnado. Esto es muy claro en el uso de los manipulativos.

Sin ánimo de exhaustividad, hay vínculos evidentes, por tanto, con competencias del área de Ciencias de la Naturaleza como la CE.CN.3 (Resolver problemas a través de proyectos interdisciplinares, utilizando el pensamiento de diseño…); con el área de la Música y Danza, como la CE.MD.4 y de Educación Plástica y Visual, como la CE.EPV.4 (Participar del diseño, elaboración y difusión de producciones culturales y artísticas…); con el área de Educación Física, como la CE.EF.5 (Valorar diferentes medios naturales y urbanos como contextos de práctica motriz, interactuando en ellos y comprendiendo…); con el área de Educación en Valores Cívicos y Éticos, como la CE.EVCE.1 (Deliberar y argumentar sobre problemas de carácter ético referidos a sí mismo y su entorno…) o la CE.EVCE.3 (Comprender las relaciones sistémicas entre el individuo, la sociedad y la naturaleza, a través del conocimiento y la reflexión sobre los problemas ecosociales, …).

Vinculación con el Perfil de salida

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, CPSAA5, CE2, CE3, CEC2, CEC4.

Competencia específica del área de matemáticas 3:

CE.M.3. Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones cercanas y significativas para el alumnado, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para contrastar su validez, integrar y comprender nuevo conocimiento.

Descripción

Mientras que el desarrollo de la competencia CE.M.1 se orienta hacia la interpretación de situaciones y problemas, y el desarrollo de la CE.M.2 enfatiza el proceso de resolución en sí mismo, la CE.M.3 se enmarca en el eje de razonamiento y prueba. El razonamiento y la argumentación (que es como se inicia el alumnado de Educación Primaria a la idea de prueba en matemáticas) es inherente a la construcción de los saberes matemáticos y, por tanto, debe estar presente de forma continua en el aprendizaje de las matemáticas. Al hablar de desarrollo del pensamiento crítico se ha de tener en cuenta que no surge por el mero hecho de aprender matemáticas (o la materia que sea). Es imprescindible plantear situaciones de aprendizaje donde el alumnado tenga que formular preguntas, reflexionar sobre lo que ha hecho, identificar regularidades, admitir que la solución de un problema quizás no existe o que no es única, cómo se conecta lo aprendido en la resolución de un problema con los conocimientos previos, admitir que el error forma parte del proceso, etc. Además, si se pretende que este pensamiento crítico se transfiera a otros contextos y se enriquezca con diferentes modos de pensamiento, hay que aprovechar las oportunidades de conexión entre las distintas áreas.

El razonamiento, en matemáticas, implica realizar conjeturas adaptadas a cada situación, comprobar, validar o refutar conjeturas (que puede y debe realizarse a diferentes niveles, lo importante es la argumentación), generalizar a partir de modelos y patrones y comunicar, validar y reflexionar sobre los procesos seguidos y los resultados o las conclusiones obtenidas. En particular, la reflexión sobre el proceso de resolución de un problema o la exploración de una situación conduce a la construcción de nuevo conocimiento y a adoptar una actitud proactiva hacia el aprendizaje, lo cual repercutirá en la motivación que verdaderamente importa, la intrínseca.

La invención de problemas abarca la generación de nuevos problemas y la reformulación de problemas dados de antemano. Es algo que también puede surgir ante problemas poco estructurados, como los que suelen plantearse alrededor de contextos realistas o complejos. Es una actividad muy importante que, al igual que los procesos de exploración, representación y razonamiento, ejemplifica de forma excelente el aspecto creativo de las matemáticas. Tiene un gran valor desde el constructivismo y el aprendizaje significativo porque las tareas de invención de problemas exigen que el alumnado reinterprete la red de conocimientos y competencias procedentes de situaciones de aprendizaje anteriores. Las situaciones de invención de problemas pueden ser completamente libres, derivadas, quizá, de problemas de la vida cotidiana o contextos cercanos para el alumnado; estar semi estructuradas, de forma que se explore de forma creativa una situación abierta usando el conocimiento de experiencias matemáticas previas; o estar estructuradas, centrándose en un problema específico que requiere ser completado o reformulado.

Vinculación con otras competencias

Las conexiones de esta competencia con la CE.M.1 y CE.M.2 son obvias. Por otro lado, el desarrollo de esta competencia matemática en razonamiento y argumentación debería tener como objetivo adicional que el alumnado la ponga en juego en el ámbito de su vida cotidiana y en otras áreas de conocimiento. Los vínculos que establezcan con competencias de otras áreas deberían facilitar la transferencia a otros contextos y modos de razonamiento.

Sin ánimo de exhaustividad, hay vínculos evidentes, por tanto, con competencias del área de Ciencias de la Naturaleza , como la CE.CN.2 (Plantear y dar respuesta a cuestiones científicas sencillas, utilizando diferentes técnicas…), como la CE.CM.3 (Resolver problemas a través de proyectos interdisciplinares, utilizando el pensamiento de diseño…”), como la CE.CM.5 (Identificar las características de los diferentes elementos o sistemas del medio natural, social y cultural…), como la CE.CM.6 (Analizar críticamente las causas y consecuencias de la intervención humana en el entorno…), o como la CE.CM.7 (Observar, comprender e interpretar continuidades y cambios del medio social y cultural, analizando relaciones de causalidad…); del área Música y danza, como la CE.MD.4 y el área de Educación plástica y visual CE.EPV.4 (Participar del diseño, elaboración y difusión de producciones culturales y artísticas…); del área de Lengua Castellana y Literatura, como la CE.LCL.4 (Comprender e interpretar textos escritos y multimodales…), la CE.LCL.6 (Buscar, seleccionar y contrastar información procedente de dos o más fuentes, de forma planificada y con el debido acompañamiento, evaluando su fiabilidad…), o la CE.LCL.9 (Reflexionar de forma guiada sobre el lenguaje a partir de procesos de producción y comprensión de textos…); del área de Educación Física, como la CE.EF.5 (Valorar diferentes medios naturales y urbanos como contextos de práctica motriz, interactuando en ellos y comprendiendo…); o del área de Educación en Valores Cívicos y Éticos, como la CE.EVCE.1 (Deliberar y argumentar sobre problemas de carácter ético referidos a sí mismo y su entorno…), o la CE.EVCE.3 (Comprender las relaciones sistémicas entre el individuo, la sociedad y la naturaleza, a través del conocimiento y la reflexión sobre los problemas ecosociales).

Vinculación con el Perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, STEM1, STEM2, CD3, CD5, CE1.

csv: BOA20220727001

Competencia específica del área de Matemáticas 4:

CE.M.4. Utilizar el pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos, en situaciones de aprendizaje con el andamiaje adecuado, para modelizar y automatizar situaciones cercanas y significativas para el alumnado.

Descripción

El pensamiento computacional está fuertemente presente en muchos campos profesionales relacionados con las matemáticas y, en general, con la ciencia y su importancia ha sido señalada tanto por comunidades de educadores o educadoras de estas áreas como por organizaciones específicas de educación informática. La naturaleza cambiante y en constante evolución de estas disciplinas y su impacto social exige plantear situaciones de aprendizaje en la etapa de la Educación Primaria para ofrecer al alumnado una visión más realista de estos campos.

Se puede definir el pensamiento computacional como el modo en que piensa un científico de datos, siendo esto una habilidad básica de la que se puede beneficiar todo el mundo, al mismo nivel que la lectura, la escritura y la aritmética. Además, el pensamiento computacional involucra una serie de prácticas relacionadas con los datos, el modelizado y la simulación, la resolución computacional de problemas y el análisis de sistemas. La relación de las matemáticas con la computación es histórica, profunda y de doble sentido. Por un lado, el pensamiento computacional permite abordar problemas propios de las matemáticas y, por otro lado, abre una puerta a revisitar ciertos conceptos matemáticos desde otro punto de vista para establecer relaciones entre ellos.

Hay que tener en cuenta que el proceso de resolución de problemas en matemáticas y el proceso de resolución computacional presentan ciertas semejanzas. De esta manera, el reconocimiento de patrones, la descomposición del problema en otros más simples, la búsqueda de generalizaciones y abstracciones y la importancia de la modelización son elementos comunes a ambos, a lo que habría que añadir aspectos afectivos y de carácter metacognitivo, como una actitud de perseverancia, aprendizaje a través del ensayo y error, flexibilidad, etc. A pesar de estos puntos en común, pensamiento matemático y pensamiento computacional no son lo mismo. Este último se caracteriza por cierto diseño iterativo y por un proceso de reflexión que persigue la optimización. También tiende a confundirse la programación con el pensamiento computacional. La programación es la escritura de código que pueda ser interpretado por un ordenador para realizar una serie de acciones, mientras que el pensamiento computacional se relaciona más con la resolución de problemas, es un modo de pensamiento. De hecho, el pensamiento computacional puede desarrollarse sin necesidad de utilizar ordenadores.

El análisis, adaptación y creación de algoritmos es un ejemplo muy claro de pensamiento computacional en matemáticas. Un algoritmo es un conjunto finito de instrucciones o de reglas o acciones a realizar sin ambigüedad, ordenadas de tal forma que permiten solucionar un problema, realizar cierta tarea o efectuar un cálculo. Estas reglas pueden ser ejecutadas posteriormente por un sistema informático, un humano o una combinación de ambos. Todos los sentidos proporcionan excelentes oportunidades de conexión con el pensamiento computacional. Desde el sentido numérico, donde los objetivos de los algoritmos para las operaciones aritméticas no pasan por conseguir que el alumnado haga el mayor número de cuentas inverosímiles en el menor tiempo posible, sino por desarrollar desarrollar el pensamiento computacional y la comprensión de conceptos matemáticos (como sistema decimal posicional); hasta el sentido algebraico, donde los algoritmos pueden ir orientados a la construcción de formas y cuerpos o a resolver problemas de orientación espacial.

Vinculación con otras competencias

Esta competencia se enmarca en el eje de resolución de problemas y razonamiento y prueba y su desarrollo se vincula intensamente con las tres anteriores CE.M.1, CE.M.2 y CE.M.3 y de forma integrada con saberes de todos los sentidos. Ahora bien, su desarrollo encuentra nexos de unión con las siguientes competencias de otras áreas, por ejemplo, con Ciencias de la Naturaleza y Ciencias Sociales, como la CE.CN.3 y la CE.CS.3 (Resolver problemas a través de proyectos interdisciplinares, utilizando el pensamiento de diseño…); Música y danza, como la CE.MD.2 o Educación plástica y visual como la CE.EPV.3 (Investigar acerca de diferentes manifestaciones culturales y artísticas…) o la CE.EPV.3 (Experimentar con las posibilidades del sonido, la imagen…); con Lengua Castellana y Literatura, como la CE.LCL.4 (Comprender e interpretar textos escritos y multimodales…), la CE.LCL.6 (Buscar, seleccionar y contrastar información procedente de dos o más fuentes, de forma planificada y con el debido acompañamiento, evaluando su fiabilidad…) o la CE.LCL.9 (Reflexionar de forma guiada sobre el lenguaje a partir de procesos de producción y comprensión de textos…).

Vinculación con el Perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM2, CD1, CD3, CD5, CE3.

Competencia específica del área de Matemáticas 5:

CE.M.5. Reconocer y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, así como identificar las matemáticas implicadas en otras áreas o en la vida cotidiana, interrelacionando conceptos y procedimientos para interpretar situaciones y contextos diversos.

Descripción

Las matemáticas no son una colección de saberes aislados, aunque se suelan presentar compartimentadas por niveles y por «ramas de conocimiento», como en este currículo, que se describen por ciclos y atendiendo a diferentes sentidos matemáticos (numérico, medida, espacial, algebraico y computacional y estocástico). El establecimiento de conexiones entre las diferentes ideas da lugar a un aprendizaje más significativo, con una comprensión profunda y duradera. Además, un énfasis en unas matemáticas integradas, llenas de conexiones, enfatiza su valor como herencia cultural y su utilidad en diferentes ámbitos de la vida cotidiana, la ciencia y el arte.

En este currículo, a lo largo de la descripción de los sentidos se indican posibles puntos de conexión entre los sentidos. Esto quiere decir que se puede diseñar perfectamente una situación de aprendizaje que englobe elementos de dos o más sentidos. Un ejemplo muy claro lo encontramos en las fracciones, que emergen de tareas de exploración en el sentido de la medida pero que se conectan con el sentido numérico, a lo que habría que añadir los componentes socioafectivos que se desarrollan a través de la interacción y la resolución de problemas. Este tipo de conexión es intra-matemática y horizontal. Sin embargo, no es este el único tipo de conexión. Enlazar con los conocimientos previos del alumnado resulta fundamental y constituye una conexión vertical, también intra-matemática. Por este motivo, en las orientaciones didácticas se hace hincapié en que las situaciones de aprendizaje construyan el nuevo conocimiento a partir de las intuiciones y experiencias del alumnado. Al mismo tiempo, se pueden hacer guiños que impliquen conexiones verticales hacia saberes de etapas posteriores. En este sentido, tanto la divulgación matemática como el techo alto de las situaciones de aprendizaje puede facilitar este tipo de conexiones. Todas estas conexiones no deben darse por implícitas, el profesorado debe enfatizarlas y ayudar a dar cuerpo de unidad a las matemáticas para que el conocimiento se construya de forma integrada y no fragmentado. Finalmente, también surgen conexiones extra-matemáticas con otras áreas de conocimiento que ayudan a dar sentido al aprendizaje. En particular, es importante que el alumnado tenga la oportunidad de experimentar y apreciar el papel que juegan las matemáticas en diferentes contextos (personales, escolares, sociales, científicos y humanísticos).

Vinculación con otras competencias

Esta competencia se enmarca claramente en el eje de conexiones y, por tanto, se va a relacionar con todas las competencias matemáticas. Puede decirse que tiene una gran relación con el proceso de resolución de problemas, ya que resulta esencial identificar las conexiones entre los diferentes saberes y la experiencia previa tanto para resolver el problema como para reflexionar sobre el proceso seguido y construir nuevo conocimiento. Por lo tanto, el desarrollo de esta competencia se vincula claramente con CE.M.1, CE.M.2, CE.M.3 y CE.M.4. Ahora bien, mientras que las conexiones de esta competencia son entre saberes y otras áreas, se han de tener en cuenta otro tipo de conexiones, entre representaciones de un mismo objeto matemático, aspecto del que se ocupa la CE.M.6. El desarrollo de la CE.M.6, como veremos, implica realizar cambios de representaciones de un mismo concepto u objeto matemático. De esta manera, el vínculo entre estas dos competencias, la CE.M.5 y la CE.M.6 es sumamente estrecho, debido especialmente a que en muchas ocasiones se emplea el mismo tipo de representación para saberes de diferentes sentidos y a que resulta fácilmente identificable el nexo que tiene lugar entre la capacidad de establecer conexiones y comunicar y representar de forma adecuada.

csv: BOA20220727001

Sin ánimo de exhaustividad, hay vínculos evidentes con competencias de las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Ciencias Sociales, como la CE.CN.2 y la CE.CS.2 (Plantear y dar respuesta a cuestiones científicas sencillas, utilizando diferentes técnicas…), la CE.CN.5 (Identificar las características de los diferentes elementos o sistemas del medio natural, social…), la CE.CS.6 (Analizar críticamente las causas y consecuencias de la intervención humana en el entorno, integrando los planos social, económico, cultural…) o la CE.CS.7 (Observar, comprender e interpretar continuidades y cambios del medio social…). Un vínculo muy claro es la relación entre el desarrollo de la visualización y de la comprensión de la proporcionalidad (escalas) en la mejora de la capacidad del alumnado para el empleo de mapas. Otros vínculos los encontramos en la Música y danza, con la CE.MD.2 y con la Educación plástica y visual CE.EPV.2 (Investigar acerca de diferentes manifestaciones culturales y artísticas…) y la CE.EPV.4 (Participar del diseño, elaboración y difusión de producciones culturales y artísticas individuales y colaborativas, poniendo en valor el proceso…), en Lengua Castellana y Literatura, con la CE.LCL.4 (Comprender e interpretar textos escritos y multimodales…), la CE.LCL.6 (Buscar, seleccionar y contrastar información procedente de dos o más fuentes, de forma planificada y con el debido acompañamiento, evaluando su fiabilidad…), la CE.LCL.9 (Reflexionar de forma guiada sobre el lenguaje a partir de procesos de producción y comprensión de textos…), con Educación Física, con la CE.EF.4 (Reconocer y practicar diferentes manifestaciones lúdicas, físico-deportivas y artístico-expresivas propias de la cultura motriz, valorando…) y con la Educación en Valores Cívicos y Éticos, con la CE.EVCE.1 (Deliberar y argumentar sobre problemas de carácter ético referidos a sí mismo y su entorno, buscando y analizando información fiable…) o la CE.EVCE.3 (Comprender las relaciones sistémicas entre el individuo, la sociedad y la naturaleza, a través del conocimiento…).

Vinculación con el Perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM1, STEM3, CD3, CD5, CC4, CEC1.

Competencia específica del área de Matemáticas 6:

CE.M.6. Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.

Descripción

Para comprender las implicaciones de esta competencia, la cual se enmarca en el eje de comunicación y representación y está muy relacionada con la CE.M.5 de conexiones, es esencial distinguir entre un objeto matemático y sus representaciones. Las representaciones matemáticas son producciones visibles o tangibles que codifican, simbolizan (están en el lugar de) o encarnan ideas o relaciones matemáticas. Por ejemplo, son representaciones los diagramas, rectas numéricas, gráficos, disposiciones de objetos concretos o manipulables, modelos físicos, expresiones matemáticas, símbolos, fórmulas y ecuaciones, o representaciones en la pantalla de una computadora o calculadora. Cuando llamamos representación a una de tales producciones es porque estamos haciendo referencia a un significado que se supone que tiene. De lo contrario, serían inscripciones vacías de referencias significativas. Un «4» dibujado en la pizarra no es el número cuatro, es una representación del número cuatro. De hecho, el alumnado tiene (debe tener) su primer contacto con el número cuatro de forma previa a su representación simbólica. Los ejemplos anteriores son representaciones externas. Es decir, alguien las hizo visibles de forma externa para que fueran accesibles a otras personas para su observación, discusión, interpretación y/o manipulación. Sin embargo, también son representaciones, internas, las construcciones, conceptos o configuraciones mentales o cognitivas de una persona. Son las imágenes mentales de objetos geométricos o patrones, formas y movimientos, ideas matemáticas, estrategias y estados afectivos ante la resolución de problemas y exploración de situaciones, etc. La representación también es el proceso de representar, algo que hacen las personas. Este proceso, a su vez, implica los procesos de producción física, en el caso de las representaciones externas, como los procesos mentales involucrados en la construcción de representaciones externas e internas (las cuales, a su vez, están relacionadas). Por último, también se utiliza el término representación matemática cuando se codifican, en términos matemáticos, situaciones propias de la física, la química, la biología, etc.

Las representaciones pueden ser convencionales (sistema de numeración posicional decimal, ábacos, expresiones aritméticas, etc.) o personales (dibujos, diagramas, gestos, etc.). Todas estas representaciones pueden ser compartidas, dando lugar a procesos de negociación de significados, a través de discusiones, interacciones y charlas de aula en torno a la resolución de problemas. El desarrollo de esta competencia exige que las situaciones de aprendizaje contemplen los procesos de comunicación y representación. Específicamente, es muy importante que el alumnado externalice sus representaciones internas, dando lugar a representaciones externas tanto convencionales como personales, y que efectúe cambios de representación para un mismo objeto matemático.

La comunicación es una parte esencial, tanto de las matemáticas como de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Es una forma de compartir significados, ideas y, en definitiva, de ganar comprensión de los objetos matemáticos. A través de la comunicación, las ideas se convierten en objetos de reflexión, exploración, discusión y reconstrucción. Por lo tanto, el alumnado debería poder organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación. En ese sentido, es indispensable que las situaciones de aprendizaje faciliten esta interacción y el alumnado desarrolle formas de expresión coherentes con su pensamiento, de manera que pueda comunicar sus ideas, al mismo tiempo que analizar y evaluar el pensamiento de sus compañeros o compañeras. La conversación sobre objetos matemáticos es la mejor vía para desarrollar el lenguaje, partiendo del lenguaje verbal natural y, de forma progresiva, ir introduciendo términos más precisos. Conviene, por lo tanto, que el profesorado procure que el alumnado hable de matemáticas, escuche reflexiones y propuestas matemáticas, escriba matemáticas, aproveche el potencial de las diversas formas de representación para expresar su pensamiento, de las más informales a las más estructuradas, hasta llegar, paulatinamente, al lenguaje simbólico. Además, es necesario considerar que el lenguaje propio de las matemáticas va mucho más allá que el mero uso de signos y símbolos, por lo que las situaciones de aprendizaje para el desarrollo adecuado de esta competencia deben considerar todos los registros (y su articulación) en que se pueden comunicar las ideas y conceptos matemáticos.

Vinculación con otras competencias

Como se ha mencionado anteriormente, esta CE.M.5 y CE.M.6 están estrechamente vinculadas entre ellas y, por extensión a través del proceso de resolución de problemas, con todas las demás. Como se ha dicho anteriormente, también es pertinente hablar de representaciones cuando se expresan situaciones de otras áreas en términos matemáticos, por lo que los vínculos evidentes con competencias de otras áreas son múltiples y variados. Así, se dan conexiones, por ejemplo, con competencias de las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Ciencias Sociales, como la CE.CN.1 y CE.CS.1 (Utilizar dispositivos y recursos digitales de forma segura, responsable y eficiente, para buscar información, comunicarse…), la CE.CN.2 (Plantear y dar respuesta a cuestiones científicas sencillas, utilizando diferentes técnicas…), la CE.CN.5 (Identificar las características de los diferentes elementos o sistemas del medio natural, social…), o la CE.CS.7 (Observar, comprender e interpretar continuidades y cambios del medio social…); de las áreas de Música y danza, como la CE.MD.4 y de Educación plástica y visual, como la CE.EPV.4 (Participar del diseño, elaboración y difusión de producciones culturales y artísticas individuales y colaborativas, poniendo en valor el proceso…); del área de Lengua Castellana y Literatura, como la CE.LCL.2 (Comprender e interpretar textos orales…), la CE.LCL.3 (Producir textos orales…), la CE.LCL.4 (Comprender e interpretar textos escritos y multimodales…), la CE.LCL.5 (Producir textos escritos), la CE.LCL.9 (Reflexionar de forma guiada sobre el lenguaje a partir de procesos de producción y comprensión de textos…) o la CE.LCL.10 (Poner las propias prácticas comunicativas al servicio de la convivencia…); y del área de Educación en Valores Cívicos y Éticos, como la CE.EVCE.1 (Deliberar y argumentar sobre problemas de carácter ético referidos a sí mismo y su entorno, buscando y analizando información fiable…).

Vinculación con el Perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CCL1, CCL2, CCL5, STEM2, STEM4, CD1, CEC4.

Competencia específica del área de Matemáticas 7:

CE.M.7. Desarrollar destrezas personales que ayuden a identificar y gestionar emociones al enfrentarse a retos matemáticos, fomentando la confianza en las propias posibilidades, apreciando el error y aceptando el bloqueo como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para desarrollar actitudes como la perseverancia y disfrutar en el aprendizaje de las matemáticas.

csv: BOA20220727001

Descripción

La relación del dominio socioafectivo con el dominio cognitivo es profunda y ha sido ampliamente estudiada en la investigación en educación matemática. Es clásica la categorización de lo afectivo en emociones, actitudes y creencias. Las emociones son descritas como los estados afectivos menos estables y más intensos, que integran procesos fisiológicos, la experiencia subjetiva y procesos expresivos que modulan la interacción social; las creencias, como afectos muy estables y menos intensos, que se estructuran en sistemas; las actitudes, como un tipo de afecto intermedio, que se manifiestan como la disposición de una persona ante una tarea o un tipo de acción determinado. Estos estados afectivos, a los que otros autores añaden también los valores, motivaciones, normas sociales e identidad, no son entidades aisladas. De esta manera, las creencias influyen en las emociones que se originan ante la resolución de problemas, por ejemplo, y reacciones emocionales similares, reiteradas, dan lugar a la formación de actitudes. La relación es cíclica y compleja, lo cual no quiere decir que no haya que considerar aspectos afectivos en el planteamiento de situaciones de aprendizaje. Al contrario, es esencial planificar estas situaciones para comunicar qué está pasando a ese nivel y tomar consciencia de nuestro propio papel como resolutores de problemas y aprendices de matemáticas. La idea general es que el alumnado que tiene una disposición positiva hacia las matemáticas tiende a experimentar emociones positivas en mayor medida que el alumnado con una disposición negativa. Esto quiere decir que todo el alumnado tiene que experimentar situaciones de éxito en la resolución de problemas. Ahora bien, no se ha de confundir con que no haya que ponerles en situación de bloquearse. Es importante que todo el alumnado tenga también la oportunidad de bloquearse en las situaciones de aprendizaje. Sin embargo, esto debe tener lugar en un ambiente adecuado, de confianza, respeto mutuo y cuidando las interacciones.

Los sistemas de creencias se conforman a partir de las experiencias vividas que, en este caso y en lo que compete al profesorado, son las situaciones de aprendizaje. A partir de esta experiencia, el alumnado adquiere, refuerza o modifica sus creencias acerca de las matemáticas como cuerpo de conocimiento (si son interesantes, aburridas, mecánicas, creativas, etc.), acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (si el docente o la docente deben explicar al alumnado de forma clara cómo hacer los ejercicios para luego repetirlos de forma mecánica, o si, por el contrario, el docente o la docente plantean situaciones a explorar, problemas que debe tratar de resolver el alumnado sin instrucción específica previa, si se habla en clase de matemáticas y se trabaja en grupo, etc.), acerca de uno mismo como aprendiz de matemáticas (no valgo para esto, se me dan mal), y creencias suscitadas por el contexto social (si a mi familia y amigos se le dan mal las matemáticas, a mí también). Estas creencias, como se ha mencionado, conforman sistemas. Por ejemplo, si el alumnado cree que la clase de matemáticas es repetir lo que acaba de explicar el docente o la docente en la pizarra, desarrollará o reforzará su creencia de que las matemáticas no son creativas. Algunas de estas creencias se relacionan entre sí con cuestiones de género. Es habitual que en actividades como las Olimpiadas Matemáticas el número de alumnos o alumnas supere al número de alumnas que las realizan. Reconocer estos estereotipos ayudará a tener una visión más certera y a actuar en consecuencia.

El desarrollo de esta competencia exige un clima de aula favorable para que el aprendizaje, la construcción de conocimiento, tenga lugar a través de la resolución de problemas. La confianza en las capacidades de uno mismo se facilita en un clima de respeto y escucha a través de los procesos de comunicación y argumentación, en los que el error aparece de forma natural y puede ser una fuente de aprendizaje. Para entrenar la resiliencia es necesario proporcionar el tiempo necesario que permita perseverar en la resolución de problemas.

Esta competencia constituye un reto en los procesos de enseñanza y aprendizaje debido a que la formación de actitudes y creencias lleva tiempo. El profesorado debe ser consciente del impacto de su práctica de aula en ese sentido y debe planificar su impacto socioafectivo desde la elaboración de la programación, reflexionando acerca de las actitudes y creencias que está fomentando en el alumnado. Para evaluar esta competencia será clave la evaluación formativa, al igual que en el resto de las competencias. Es fundamental que el alumnado reciba información que le permita gestionar sus emociones en la resolución de problemas, asumir bloqueos, apreciar el error como una oportunidad para el aprendizaje, perseverar, reconocer fuentes de ansiedad, etc. En ese sentido, además de la evaluación continua a lo largo del curso, se debe aprovechar el período de la evaluación inicial para identificar las actitudes y creencias con las que inicia el curso el alumnado, bien con actividades específicas o integradas en la práctica de resolución de problemas. Con todo ello, se contribuye a desarrollar una disposición positiva ante el aprendizaje, con una motivación intrínseca, que facilita la transferencia de las destrezas adquiridas a otros ámbitos de la vida, favoreciendo el aprendizaje y el bienestar personal como parte integral del proceso vital del individuo.

csv: BOA20220727001

Vinculación con otras competencias

Esta competencia se enmarca en el eje socioafectivo y se refiere especialmente a la importancia que los factores afectivos tienen en el éxito o fracaso del aprendizaje matemático, así como la necesidad de crear un clima afectivo de seguridad en el aula. Se vincula directamente con la CE.M.8, pero realmente, con todas, a través de los procesos de resolución de problemas. Sin ánimo de exhaustividad, se relaciona también con competencias de otras áreas, como en Ciencias de la Naturaleza y Ciencias Sociales, con la CE.CN.4 y la CE.CS.4 (Conocer y tomar conciencia del propio cuerpo, de las emociones…), o la CE.CS.8 (Reconocer y valorar la diversidad y la igualdad de género,…); como la Música y danza, con la CE.MD.3 y la Educación plástica y visual con la CE.EPV.3 (Experimentar con las posibilidades del sonido, la imagen, el cuerpo y los medios digitales y multimodales, a través de actividades y experiencias, para expresar y comunicar de manera creativa ideas, sentimientos y emociones); en Educación Física, con la CE.EF.1 (Desarrollar un estilo de vida activo y saludable, practicando regularmente actividades físicas, lúdicas y deportivas, adoptando comportamientos que potencien la salud física, emocional y social,…); en Lengua Castellana y Literatura, con la CE.LCL.3 (Producir textos orales y multimodales con coherencia, claridad y registro adecuados para expresar ideas, sentimientos y conceptos; construir conocimiento; establecer vínculos personales…), la CE.LCL.7 (Leer de manera autónoma obras diversas seleccionadas atendiendo a sus gustos e intereses, compartiendo las experiencias de lectura, para iniciar la construcción de la identidad lectora, fomentar el gusto por la lectura como fuente de placer y disfrutar de su dimensión social), o la CE.LCL.10 (Poner las propias prácticas comunicativas al servicio de la convivencia democrática utilizando un lenguaje no discriminatorio …); en Educación en Valores Cívicos y Éticos, con la CE.EVCE.1 (Deliberar y argumentar sobre problemas de carácter ético referidos a sí mismo y su entorno, buscando y analizando información fiable y generando una actitud reflexiva al respecto, para promover el autoconocimiento y la autonomía moral.), o con la CE.EVCE.4 (Desarrollar la autoestima y la empatía con el entorno, identificando, gestionando y expresando emociones y sentimientos propios, y reconociendo y valorando los de los otros,…)

Vinculación con el Perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: STEM5, CPSAA1, CPSAA4, CE2, CE3.

Competencia específica del área de Matemáticas 8:

CE.M.8. Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones, las experiencias de los demás y el valor de la diversidad, participando activamente en equipos de trabajo heterogéneos que promuevan la interacción y la implicación de todos para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.

Descripción

El desarrollo de esta competencia implica trabajar los valores de respeto, tolerancia, igualdad y resolución pacífica de conflictos, para construir una cultura de aula en la que se aprende matemáticas a través de la resolución de problemas, en un ambiente sano de interacción donde se hacen visibles los procesos de pensamiento. Esta competencia se enmarca en el dominio de lo socioafectivo, muy relacionada con la CE.M.7, y enfatiza la importancia de mejorar las destrezas y habilidades sociales, valorando la diversidad, por medio de las estrategias puestas en juego en la comunicación y el razonamiento, en diferentes tipos de agrupamiento, parejas, pequeño grupo y gran grupo. La razón de ser de esta competencia se encuentra en el marco de una escuela inclusiva, donde las situaciones de aprendizaje están diseñadas de tal manera que se asumen las diferencias de aprendizaje y la diversidad, proporcionando un punto de entrada accesible para todo el alumnado y donde todo el alumnado puede progresar y profundizar, experimentando sensaciones de éxito al superar los bloqueos.

La cultura de aula tiene un impacto fundamental en la conformación de creencias del alumnado, tanto hacia las matemáticas, como hacia su enseñanza y aprendizaje. La formación de los pequeños grupos de trabajo en el aula es un aspecto clave a tener en cuenta. Se debe tratar que sean heterogéneos, puesto que, cuando se divide al alumnado en grupos homogéneos, se constata que esto frena el aprendizaje de aquellos con un ritmo más lento y, en cambio, no supone mejora para los que tienen un ritmo mayor. Por otro lado, cuando la formación de pequeños grupos de trabajo se deja al arbitrio del alumnado, lo único que se consigue es reproducir el *statu quo* de las agrupaciones que tienen lugar fuera del aula. Por estas razones, la formación de grupos visiblemente aleatorios de trabajo, con una alta movilidad, una vez se vence la resistencia inicial del alumnado, desemboca en un clima de trabajo participativo, inclusivo y que atiende a la perspectiva de género.

Un adecuado desarrollo de esta competencia repercute en la convivencia fuera del aula y dota al alumnado con herramientas y estrategias de comunicación efectiva y con las habilidades sociales necesarias para trabajar en grupo. La escucha activa, la comunicación asertiva, situaciones en donde se colabora de manera creativa, crítica y responsable y se aborda la resolución de conflictos de manera positiva, empleando un lenguaje inclusivo y no violento, resultan esenciales en una formación integral del alumnado.

Vinculación con otras competencias

El desarrollo de esta competencia es paralelo al de la CE.M.7, con la que guarda una evidente relación. No obstante, los vínculos con el resto de competencias matemáticas son muy intensos, a través del proceso de resolución de problemas y su influencia (mutua) en el dominio socioafectivo.

En lo que respecta al resto de áreas, es sencillo identificar oportunidades de conexión. A continuación, se nombran algunas posibilidades: con el área de Ciencias de la Naturaleza y con el área de Ciencias Sociales, en la CE.CN.1 y CE.CS.1 (Utilizar dispositivos y recursos digitales de forma segura, responsable y eficiente, para buscar información, comunicarse, trabajar de manera individual, en equipo y en red y crear contenido digital…), en la CE.CN.3 (Resolver problemas a través de proyectos interdisciplinares, utilizando el pensamiento de diseño y el pensamiento computacional, para generar cooperativamente un producto creativo e innovador…), y en la CE.CS.8 (Reconocer y valorar la diversidad y la igualdad de género,… y al logro de los valores de la integración europea); con el área de Educación Física, en la CE.EF.1 (Desarrollar un estilo de vida activo y saludable, practicando regularmente actividades físicas, lúdicas y deportivas, adoptando comportamientos que potencien la salud física, emocional y social,…), con el área de Música y danza en la CE.MD.4 y con el área de Educación plástica y visual en la CE.EPV.4 (Participar del diseño, elaboración y difusión de producciones culturales y artísticas individuales y colaborativas, poniendo en valor el proceso y asumiendo diferentes roles en la consecución de un resultado final, para desarrollar la creatividad,…); con el área de Educación Física, en la CE.EF.3 (Desarrollar procesos de autorregulación e interacción en el marco de la práctica motriz, con actitud empática e inclusiva, haciendo uso de habilidades sociales y actitudes de cooperación, respeto, trabajo en equipo y deportividad,…); con el área de Lengua Castellana y Literatura, en la CE.LCL.1 (Reconocer la diversidad lingüística del mundo a partir de la identificación de las lenguas del alumnado y de la realidad plurilingüe y multicultural de España para favorecer la reflexión interlingüística, identificar y rechazar estereotipos y prejuicios lingüísticos, y valorar dicha diversidad como fuente de riqueza personal", en la CE.LCL.3 (Producir textos orales y multimodales con coherencia, claridad y registro adecuados para expresar ideas, sentimientos y conceptos; construir conocimiento; establecer vínculos personales…), en la CE.LCL.10 (Poner las propias prácticas comunicativas al servicio de la convivencia democrática utilizando un lenguaje no discriminatorio y detectando y rechazando los abusos de poder a través de la palabra para favorecer un uso no solo eficaz sino también ético del lenguaje); con el área de Educación en Valores Cívicos y Éticos, en la CE.EVCE.1 (Deliberar y argumentar sobre problemas de carácter ético referidos a sí mismo y su entorno, buscando y analizando información fiable y generando una actitud reflexiva al respecto, para promover el autoconocimiento y la autonomía moral), en la CE.EVCE.2 (Actuar e interactuar de acuerdo con normas y valores cívicos y éticos, reconociendo su importancia para la vida individual y colectiva, y aplicándolos de manera efectiva y argumentada en distintos contextos, para promover una convivencia democrática, justa, respetuosa y pacífica), en la CE.EVCE.4 (Desarrollar la autoestima y la empatía con el entorno, identificando, gestionando y expresando emociones y sentimientos propios, y reconociendo y valorando los de los otros,…); con el área de Lengua Extranjera, en la CE.LEI.3 (Interactuar con otras personas usando expresiones cotidianas, recurriendo a estrategias de cooperación y empleando recursos analógicos y digitales, para responder a necesidades inmediatas de su interés en intercambios comunicativos respetuosos con las normas de cortesía) y en la CE.LEI.6 (Apreciar y respetar la diversidad lingüística, cultural y artística a partir de la lengua extranjera identificando y valorando las diferencias y semejanzas entre lenguas y culturas, para aprender a gestionar situaciones interculturales.).

Vinculación con el Perfil de etapa

Esta competencia específica se conecta con los siguientes descriptores del Perfil de salida: CP3, STEM3, CPSAA1, CPSAA3, CC2, CC3.

csv: BOA20220727001

II. Criterios de evaluación

La evaluación del alumnado será formativa, continua, global e integradora y tendrá en cuenta su progreso en el conjunto de los procesos de aprendizaje. La evaluación debe cumplir, en primer lugar, una función de comunicación. Se trata de que el profesorado recoja evidencias del aprendizaje del alumnado y actúe en consecuencia con las estrategias didácticas y pedagógicas adecuadas, informando al alumnado de su progreso y cómo mejorar, así como a las familias y responsables legales. Los procesos de evaluación deben ser coherentes y estar alineados con la búsqueda de una cultura de aula inclusiva en la que el conocimiento se construye entre todos a través de la negociación de significados en un ambiente de resolución de problemas. Por lo tanto, otra función de la evaluación es la de empoderar esa cultura de aula y facilitar su conformación. Es decir, la evaluación no debe plantearse como algo ajeno a los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino como un elemento integrado. La observación y análisis de las producciones del alumnado, a partir de los instrumentos pertinentes, proporciona múltiples oportunidades para evaluar el desarrollo de cada competencia en relación con los diferentes saberes matemáticos. En ese sentido, conviene distinguir entre evaluación y calificación. En las orientaciones de la enseñanza se proporcionan algunas claves sobre cómo calificar, en los términos que establezca la normativa, a partir de las evidencias de aprendizaje recogidas durante el período de evaluación. Finalmente, el objetivo que nunca debería plantearse la evaluación es el de clasificar y ordenar al alumnado.

Los criterios de evaluación que se presentan a continuación son el referente para evaluar el desarrollo de las competencias específicas. Se trata de criterios amplios, que han tratado de matizarse ligeramente en cada caso en función de los ciclos, pero que, en el fondo, podrían haberse unificado, ya que los procesos que se evalúan son esencialmente los mismos. Se recomienda, por tanto, una lectura global de la evolución del criterio. En cualquier caso, los criterios deben interpretarse en conjunción con las situaciones de aprendizaje que se planteen en cada ciclo en torno a los saberes de cada uno de los sentidos matemáticos.

CE.M.1
Interpretar problemas de la vida cotidiana proporcionando una representación matemática de los mismos mediante conceptos, herramientas y estrategias para analizar la información más relevante.
Para la evaluación de esta competencia, en cada ciclo, se plantean dos criterios, vinculados entre sí. El primero de ellos está relacionado con la interpretación y comprensión de los problemas o las situaciones a explorar, mientras que el segundo de ellos está dedicado a evaluar el uso que hace el alumnado de las representaciones matemáticas en el modelizado inicial de estas situaciones y problemas. El vínculo entre los criterios es claro, ya que un buen uso de representaciones para modelizar la situación facilita la comprensión e interpretación de esta, y viceversa. Con el objetivo de evaluar la interpretación de problemas y la comprensión de situaciones que sean cercanas y significativas para el alumnado (Criterio 1.1) será necesario considerar diferentes formas de comunicación: verbal, gestual, en general, mediante representaciones de distinto tipo. Resulta evidente que en el primer ciclo ha de haber un necesario énfasis en la oralidad. Sin embargo, es importante no dejar de lado la verbalización en ciclos posteriores. Las conversaciones en pequeño y gran grupo son esenciales en la construcción de conocimiento y proporcionan excelentes oportunidades para la evaluación formativa. En lo que se refiere a la interpretación de las situaciones, mediante estas conversaciones, interviniendo con las preguntas adecuadas, el profesorado puede identificar la evolución en este aspecto. Así mismo, el criterio también se puede evaluar analizando la coherencia del discurso matemático del alumnado con la utilización que hace del material manipulativo o con el uso de gráficos y diagramas o la justificación de las acciones que realiza en juegos (si comprende las instrucciones). Se trata de identificar aquellos momentos de la situación de aprendizaje donde se puede valorar si la interpretación es adecuada o si, por el contrario, debe actuarse planteando nuevas preguntas que conduzcan a la profundización. Para evaluar adecuadamente este criterio es indispensable que las situaciones y problemas sean variados, incluyendo tareas de respuesta cerrada, abierta, con múltiples caminos posibles de resolución, etc. En ningún caso debe marcarse como referencia para la evaluación la mera identificación de los datos de un problema, sino que debe considerarse la interpretación global. El alumnado debe justificar, de forma adecuada a cada ciclo, si en una situación es necesario utilizar números, qué tipo de números y su significado, qué magnitudes están relacionadas con la situación, etc. Igualmente, debe valorar si es necesaria una solución exacta, una aproximación o basta con hacer una estimación. En lo que respecta al criterio que se enfoca en el uso de representaciones (Criterio 1.2). Cuando el alumnado interpreta una situación o un problema, el profesorado y el resto de sus compañeros o compañeras «acceden» a esa interpretación, que toma la forma de representaciones internas, por medio de las representaciones externas (espontáneas o convencionales) que produce el alumnado. Los diferentes tipos de representaciones (materiales manipulables, dibujos, imágenes, figuras geométricas, esquemas, palabras, tablas, gráficos, signos y símbolos) muestran diversas interpretaciones y niveles de abstracción de los conceptos y las relaciones matemáticas por parte del alumnado y se convierten en una fuente de información muy relevante que permite evaluar el desarrollo de esta competencia. Una situación de aprendizaje muy adecuada para aplicar estos criterios consiste en explicar un problema en lenguaje propio, usando materiales, dibujos, esquemas o expresiones aritméticas, empleando estrategias personales y herramientas matemáticas elementales. Es conveniente tener en cuenta la distinción entre representaciones espontáneas y representaciones convencionales. Estas últimas juegan un papel imprescindible en el aprendizaje de las matemáticas. Son ejemplos: signos y expresiones aritméticas, la recta numérica, tablas de doble entrada para recoger relaciones numéricas, coordenadas cartesianas, etc. Sin embargo, deben introducirse de tal forma que pueda evaluarse su conexión con representaciones espontáneas y la evolución de los significados personales del alumnado. Finalmente, en la evaluación de esta competencia también es necesario proponer un contexto conocido o de otra área e invitar a desgranar qué matemáticas hay allí. El punto de partida puede ser una fotografía, una noticia, una narración, un fragmento de una serie de dibujos animados o de una película, un meme,

<table>
<tr><td colspan="3">etc. También se puede pedir al alumnado que ponga ejemplos de situaciones en las que se usa un determinado concepto, como las fracciones, o una operación aritmética, y el porqué.</td></tr>
<tr><td>Primer Ciclo</td><td>Segundo Ciclo</td><td>Tercer ciclo</td></tr>
<tr><td>1.1. Reconocer la información contenida en problemas en situaciones cercanas y significativas para el alumnado comprendiendo las preguntas planteadas a través de diferentes estrategias o herramientas.
1.2. Proporcionar ejemplos de representaciones problematizadas sencillas con recursos manipulativos y gráficos que ayuden en la resolución de un en situaciones cercanas y significativas para el alumnado.</td><td>1.1. Interpretar, de forma verbal o gráfica, problemas cercanos y significativos para el alumnado, comprendiendo las preguntas planteadas a través de diferentes estrategias o herramientas.
1.2. Mostrar representaciones matemáticas, a través de esquemas o diagramas, que ayuden en la resolución de una situación problematizada.</td><td>1.1. Reformular, de forma verbal y gráfica, problemas cercanos y significativos para el alumnado, comprendiendo las preguntas planteadas a través de diferentes estrategias o herramientas.
1.2. Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias para la resolución de una situación problematizada.</td></tr>
<tr><td colspan="3">CE.M.2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes técnicas, estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones, reflexionar sobre estas y el proceso seguido para incorporar nuevos saberes a la red de conocimientos y competencias del alumnado, y asegurar su validez e implicaciones desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Como se ha ido mencionando, todas las competencias específicas de matemáticas están relacionadas en mayor o menor grado. Sin embargo, es tal la importancia del proceso de resolución de problemas que puede decirse que la CE.M2 es el punto de encuentro de todas ellas. Esta competencia está relacionada con todas las dimensiones de la competencia matemática: el razonamiento y la prueba, las conexiones, la comunicación y representación y las destrezas socioafectivas. Para evaluar el desarrollo de esta competencia se plantean tres criterios. Sintetizando, el Criterio 2.1 se enfoca al proceso de elección de la estrategia, el Criterio 2.2 al proceso de implementación de la estrategia y el Criterio 2.3 a la reflexión sobre la idoneidad de la solución o, en el caso de ser un problema abierto o la exploración de una situación, la pertinencia, relevancia y alcance de las conclusiones.
Conviene resaltar que el proceso de resolución de problemas es, esencialmente, el mismo a lo largo de los tres ciclos de la Educación Primaria. Se trata de considerar el lenguaje y los diferentes tipos de representaciones adecuados para cada ciclo, así como los saberes matemáticos sobre los que se articulen las situaciones de aprendizaje (sentido numérico, sentido de la medida, sentido espacial, sentido algebraico y pensamiento computacional, sentido estocástico). Ya se ha mencionado la relevancia que tiene la resolución de problemas en este currículo, pues es el proceso sobre el que se construye el conocimiento y se desarrollan las competencias. A lo largo de toda la etapa se debe proporcionar un andamiaje adecuado. Se trata de que, en efecto, el profesorado actúa de guía en ese proceso. Es preferible hablar en términos de andamiaje que de guía, para subrayar que no consiste en decirle al alumnado qué debe hacer exactamente, sino de plantear preguntas ricas y abiertas, y diseñar las actividades y tareas a realizar de manera que puedan poner en juego sus conocimientos previos. Será la evaluación formativa la que permitirá desarrollar esta competencia (todas, en realidad), proporcionando información al alumnado para la mejora, así como evidencias que permitan adaptar los procesos de enseñanza y aprendizaje.
También es indispensable tener claro que no todas las tareas con enunciado que se proponen al alumnado son situaciones-problema. El carácter de problema lo otorga, principalmente, el hecho de que la estrategia de resolución o exploración no tiene que resultar obvia de forma inmediata. Además, el alumnado tiene que implicarse personalmente en la tarea. Si no ocurre esto último, difícilmente se podrá hablar de aprendizaje activo. En este sentido, que la situación sea cercana y significativa para el alumnado facilita esta implicación. Puede ser una situación de la vida cotidiana, pero también una situación matemática sin contexto que resulte familiar para el alumnado y que conecte con experiencias matemáticas previas.
Para llevar a cabo la evaluación de esta competencia es imprescindible el dejar tiempo al alumnado, así como facilitar espacios para la comunicación, que no debe referirse solamente a la solución o conclusión, sino al proceso seguido. Es necesario empoderar desde la evaluación formativa el proceso, darle valor, frente a la solución en sí. En ocasiones, puede resultar relevante realizar una estimación de cuál o cuáles podrían ser las soluciones (o conclusiones o resultados de la exploración de una situación) antes de empezar el proceso de resolución del problema, y contrastar la solución final con la conjetura inicial. La resolución de problemas en el aula encuentra su ambiente idóneo en el trabajo en pequeño grupo y posterior puesta en común con el gran grupo, aunque también puede haber momentos de reflexión individual.
Un buen problema, muchas veces, no termina con la expresión oral o escrita de su solución, sino que abre la puerta a explorar nuevas situaciones. ¿Qué pasaría si…? Ese tipo de preguntas permite, de nuevo, evaluar los procesos de resolución y el alcance de las estrategias compartidas.</td></tr>
<tr><td>Primer Ciclo</td><td>Segundo Ciclo</td><td>Tercer ciclo</td></tr>
<tr><td>2.1. Emplear una estrategia para resolver un problema, compartirla y apreciar sugerencias en un ambiente con el andamiaje adecuado.
2.2. Obtener posibles soluciones o conclusiones de un problema siguiendo alguna estrategia conocida en un ambiente con el andamiaje adecuado.
2.3. Describir verbalmente la idoneidad de las soluciones o la repercusión de las conclusiones de un problema según las preguntas previamente planteadas.</td><td>2.1. Comparar entre diferentes estrategias, propias o de otros, para resolver un problema, compartiendo las reflexiones en torno a dichas estrategias en un ambiente con el andamiaje adecuado.
2.2. Obtener posibles soluciones o conclusiones de un problema siguiendo alguna estrategia conocida, argumentando el proceso.
2.3. Argumentar la corrección matemática de las soluciones o pertinencia de las conclusiones de un problema y su coherencia en el contexto planteado.</td><td>2.1. Seleccionar entre diferentes estrategias, para resolver un problema justificando la estrategia seleccionada y compartiendo la reflexión que justifica la elección.
2.2. Obtener posibles soluciones o conclusiones de un problema seleccionando entre varias estrategias conocidas justificando la elección.
2.3. Comprobar la corrección matemática de las soluciones o pertinencia de las conclusiones de un problema y su coherencia en el contexto planteado.</td></tr>
<tr><td colspan="3">CE.M.3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones cercanas y significativas para el alumnado, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación para contrastar su validez, integrar y comprender nuevo conocimiento.</td></tr>
</table>

Para la evaluación del progreso de esta competencia se plantean tres criterios. El Criterio 3.1 está enfocado a identificar el progreso del alumnado en la formulación de conjeturas; el Criterio 3.2, el progreso en la invención de problemas; y el Criterio 3.3, el avance en la argumentación y justificación de conjeturas, soluciones y conclusiones en torno a situaciones-problemas, siempre de acuerdo al lenguaje y objetos matemáticos propios de cada ciclo. Hacer conjeturas forma parte del proceso de abstracción que implica el descubrimiento y la expresión de relaciones, propiedades, patrones, regularidades. Conviene recordar que desde Educación Infantil, cuando el alumnado tiene el primer contacto con los números, ya se inicia el trabajo con entidades abstractas. En el caso del número, de hecho, esta abstracción se inicia antes incluso que la representación simbólica. Las conjeturas pueden surgir en actividades como seguir series de repetición y de crecimiento, tanto numéricas como geométricas; observación de patrones en tablas y gráficos; descubrimiento de estrategias de cálculo mental, propiedades de las operaciones; observación de números y operaciones (números primos, compuestos, múltiplos de…, si multiplicas por 50 es como si..., si multiplico por 0,5 es como si...); observación de patrones en figuras geométricas (relación entre el número de diagonales y los polígonos regulares…); la observación de una colección ordenada de datos en gráficos y tablas también provoca la expresión de conjeturas, recogida continua de temperaturas. La aplicación del Criterio 3.1 es sencilla en un ambiente de resolución de problemas. Es cuestión de identificar el progreso del alumnado en este aspecto, dejando tiempo para que las conjeturas sean formuladas por él y no por el profesorado. El impacto de la evaluación formativa en el aprendizaje es claro, y en esta competencia se concreta en desarrollar la actitud de hacer preguntas e inventar problemas. De esta manera, se completa el proceso de resolución de problemas, ya que estas preguntas y los argumentos que se emplean para defender y poner a prueba las conjeturas son esenciales en la construcción de los saberes, además de proporcionar un significado rico a los objetos de aprendizaje. Cualquier problema es susceptible de ser evaluado en los términos que establece esta competencia. En la discusión de un problema pueden aparecer preguntas alternativas al problema (¿qué pasaría si…?) y cuando el problema es complejo, cabe plantearse su simplificación a partir de formularse preguntas y lanzar conjeturas. Sin embargo, hay situaciones de aprendizaje donde de manera natural se hacen preguntas. Por ejemplo, en un proyecto de investigación, como los de estadística, donde la fase del planteamiento de preguntas de investigación es fundamental y constituye un resultado de aprendizaje explícito. La invención de problemas es un tipo de tarea que debe incluirse necesariamente en las secuencias didácticas de todos los saberes y que ofrece excelentes oportunidades para la evaluación formativa. Las producciones del alumnado en estas situaciones, tanto orales como escritas, pueden consistir en crear nuevos problemas a partir de otros propuestos anteriormente; diseñar nuevos problemas cambiando los números, las figuras, las operaciones; se puede dar una parte del problema y que el alumnado tenga que completar el resto; dar una o varias operaciones como resolución e inventar el problema; redactar dos problemas distintos con la misma solución; dar un gráfico a partir del cual es necesario plantear el problema; imponer un contexto determinado, unas unidades de medida específicas; etc. Para llevar a cabo la evaluación formativa aplicando estos criterios a partir de las situaciones de aprendizaje alrededor de los diferentes sentidos matemáticos, es necesario que el alumnado se sienta en un ambiente propicio, de confianza, que facilite la espontaneidad e inspire seguridad. En definitiva, se trata de empoderar que hacer preguntas, en Matemáticas (y en todas las áreas), es valioso. Cuando se evalúa la argumentación, dependiendo de la situación, será importante tener en cuenta no solo la expresión verbal, sino la coherencia de esta con el uso de materiales manipulativos, dibujos concretos, gráficos con mayor o menor grado de abstracción. Todos estos detalles permiten que el profesorado identifique el progreso en el desarrollo de la capacidad de argumentación.		
Primer Ciclo	*Segundo Ciclo*	*Tercer ciclo*
3.1. Realizar conjeturas matemáticas sencillas investigando patrones, propiedades y relaciones en situaciones de aprendizaje con el andamiaje adecuado. 3.2. Dar ejemplos e inventar problemas sobre situaciones cercanas y significativas para el alumnado que se pueden abordar matemáticamente. 3.3. Argumentar la validez de conjeturas y de soluciones de un problema en términos matemáticos y en coherencia con el contexto planteado.	3.1. Formular conjeturas matemáticas sencillas investigando patrones, propiedades y relaciones en situaciones de aprendizaje con el andamiaje adecuado. 3.2. Dar ejemplos e inventar problemas sobre situaciones cercanas y significativas para el alumnado que se pueden abordar matemáticamente. 3.3. Argumentar la validez de conjeturas y de soluciones de un problema en términos matemáticos y en coherencia con el contexto planteado.	3.1. Formular conjeturas matemáticas sencillas investigando patrones, propiedades y relaciones en situaciones de aprendizaje con el andamiaje adecuado. 3.2. Dar ejemplos e inventar problemas sobre situaciones cercanas y significativas para el alumnado que se pueden abordar matemáticamente. 3.3. Argumentar la validez de conjeturas y de soluciones de un problema en términos matemáticos y en coherencia con el contexto planteado.
CE.M.4		
Utilizar el pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, generalizando e interpretando, modificando y creando algoritmos, en situaciones de aprendizaje con el andamiaje adecuado, para modelizar y automatizar situaciones cercanas y significativas para el alumnado.		
Esta competencia puede interpretarse como la competencia «espejo» de la competencia en resolución de problemas, pero adaptada a situaciones propias del pensamiento computacional. Tal y como se indica en la descripción de la competencia y dentro de los saberes del sentido algebraico y pensamiento computacional, el proceso de resolución de problemas en matemáticas y el proceso de resolución computacional tienen muchos puntos en común, pero no son lo mismo. Los solapamientos los encontramos en el reconocimiento de patrones, la descomposición del problema en otros más simples, la búsqueda de generalizaciones y abstracciones, la importancia de la modelización son elementos comunes a ambos. Sin embargo, no son los únicos, pues también podemos considerar aspectos afectivos y de carácter metacognitivo, como el desarrollo de una actitud de perseverancia, aprendizaje a través del ensayo y error, flexibilidad, etc. Sin embargo, el pensamiento computacional implica cierto diseño iterativo y un proceso de reflexión en busca de la optimización. También tiende a confundirse la programación con el pensamiento computacional. La programación es la escritura de código que pueda ser interpretado por un ordenador para realizar una serie de acciones, mientras que el pensamiento computacional se relaciona más con la resolución de problemas, es un modo de pensamiento. De hecho, el pensamiento computacional puede desarrollarse sin necesidad de utilizar ordenadores. Para la evaluación de esta competencia se plantean dos criterios que, de nuevo, se encuentran muy relacionados. El Criterio 4.1 está más enfocado a la descripción y automatización de acciones, mientras que el Criterio 4.2 abarca la parte más creativa de modificación y diseño de nuevos algoritmos o variantes. Las situaciones de aprendizaje que permiten desplegar técnicas de evaluación formativa implican, como en el resto de competencias, mucha comunicación entre el alumnado y entre este y el profesorado. Hemos de remitirnos a las orientaciones para la enseñanza dentro del sentido algebraico y pensamiento computacional, donde se sugieren unas líneas generales. De esta manera, en el primer ciclo las situaciones para		

aplicar estos criterios pueden ser las que se realizan en conexión con el sentido espacial, de planificar un recorrido a partir de una serie de acciones determinadas. Observemos que la descripción de esas acciones, así como la automatización inicial de las mismas, sería lo que se trata de evaluar con el Criterio 4.1. Si se propone modificar dicho algoritmo o estudiar y analizar posibles variantes con eventuales condicionantes es cuando entraría en acción el Criterio 4.2. Lo mismo puede decirse de los algoritmos de las operaciones hacia el final del segundo ciclo y en el tercer ciclo.

Primer Ciclo	*Segundo Ciclo*	*Tercer ciclo*
4.1. Describir rutinas y actividades sencillas de la vida cotidiana que se realicen paso a paso, utilizando principios básicos del pensamiento computacional en situaciones de aprendizaje con el andamiaje adecuado. 4.2. Modificar algoritmos sencillos, así como crear algoritmos en situaciones cercanas y significativas para el alumnado.	4.1. Automatizar situaciones sencillas de la vida cotidiana que se realicen paso a paso o sigan una rutina utilizando principios básicos del pensamiento computacional en situaciones de aprendizaje con el andamiaje adecuado. 4.2. Modificar algoritmos dados de antemano, propios o creados por otros, así como diseñar nuevos algoritmos.	4.1. Modelizar situaciones de la vida cotidiana utilizando principios básicos del pensamiento computacional en situaciones de aprendizaje con el andamiaje adecuado. 4.2. Modificar algoritmos dados de antemano, propios o creados por otros, así como diseñar nuevos algoritmos.

CE.M.5

Reconocer y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, así como identificar las matemáticas implicadas en otras áreas o en la vida cotidiana, interrelacionando conceptos y procedimientos para interpretar situaciones y contextos diversos.

La idea de que las matemáticas son un cuerpo interconectado de sentidos y saberes debería estar presente a lo largo de toda la etapa. De hecho, cuando el alumnado comienza el primer ciclo, gran parte de sus experiencias matemáticas previas no estaban compartimentadas y más aún, tenían lugar en los más variados contextos. Conectar los diferentes objetos matemáticos entre sí y con otros campos y contextos es imprescindible para aprender y es necesario planificar tareas o subtareas específicas para ello. Para evaluar el desarrollo de esta competencia se plantean esencialmente dos criterios de evaluación. El primero de ellos (Criterio 5.1) está enfocado al reconocimiento y establecimiento de conexiones dentro de los propios saberes matemáticos, tanto del curso actual como con experiencias previas. El segundo (Criterio 5.2) tiene como objetivo evaluar las conexiones que realiza el alumnado con contextos en situaciones cercanas para el alumnado y con otras áreas. De nuevo, ambos criterios están estrechamente vinculados y será habitual que una situación de aprendizaje contemple conexiones de los dos tipos al mismo tiempo. Por ejemplo, una situación de medida para construir el significado de la notación fraccionaria del número racional, pone en juego conexiones en un plano formal, entre representaciones matemáticas y con un uso del contexto que nunca deja de ser matemático.

Como siempre, la gradación por ciclos de los criterios es simplemente una cuestión de matices. El proceso de establecer conexiones intra y extra-matemáticas es esencialmente el mismo a lo largo de toda la etapa. Lo único que cambia son los saberes correspondientes y la variedad de contextos. De esta forma, una conexión matemática esencial en el primer ciclo es la conexión de las técnicas de conteo con la resolución de situaciones aditivas concretas de una etapa y, posteriormente, con las operaciones formales de suma y resta. La observación de las producciones del alumnado junto con charlas de aula en el seno de una situación de aprendizaje sobre esta cuestión permitirá evaluar el progreso en el desarrollo de esta competencia (p. ej., afronta las situaciones aditivas «de suma» contando desde el primer sumando siempre, tiene en cuenta empezar por el mayor, efectúa conteos regresivos, argumenta por qué suma o resta a partir de si el conteo es progresivo o regresivo, etc.). Una conexión muy importante en tercer ciclo es la que empieza a tener lugar entre la notación fraccionaria y la notación decimal del número racional, que no se verá completada hasta bien avanzada la Educación Secundaria, pero que aquí establece importantes puntos de unión a través de los contextos que proporcionan el modelo de aprendizaje en las secuencias didácticas. Otros ejemplos de conexiones, por nombrar algunas, las encontramos entre la multiplicación y la división, el sistema de numeración decimal posicional y el sistema métrico decimal, las figuras planas y los cuerpos en el espacio.

Algunos ejemplos de situaciones de aprendizaje que facilitan el establecimiento de conexiones entre diferentes saberes matemáticos y su evaluación (la evaluación formativa va de la mano del aprendizaje): descubrir estrategias de cálculo teniendo en cuenta las conexiones entre las operaciones y sus propiedades (introducir la división a partir del reparto equitativo y relacionarla con restas sucesivas; divisiones sucesivas considerando los factores del divisor, p.ej. para calcular 300:15, primero hacemos 300:5=60 y luego 60:3=20); presentar la idoneidad de los números decimales para expresar cantidades de magnitud; representar los cuadrados y cubos de forma geométrica con policubos como unidad de área y de volumen -como cuadrado y como cubo-; representar sobre la recta numérica expresiones como 0,5 y 1/2, para ver que coinciden en el mismo punto; representar gráficamente las alturas de una muestra recogida en forma de tabla.

Se pueden encontrar matemáticas en la prensa, a través de noticias, infografías estadísticas; en series dibujos animados (tanto en series específicas de contenido matemático como en otras) y películas; en el deporte; en la naturaleza, como al identificar la forma hexagonal en un panal de abejas; en el arte, como las teselaciones del mudéjar propio de nuestra comunidad; la música, al reconocer los patrones rítmicos de las canciones; en sus propias vivencias en situaciones de compras, viajes y desplazamientos, salud, etc. y que favorecerá la progresiva matematización de la realidad. Las diferencias entre ciclos pueden obedecer a una mayor abstracción o complejidad de los contextos.

Primer Ciclo	*Segundo Ciclo*	*Tercer ciclo*
5.1. Reconocer conexiones entre los diferentes elementos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias propios. 5.2. Reconocer las matemáticas presentes en la vida cotidiana y en otras áreas estableciendo conexiones sencillas.	5.1. Realizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos aplicando conocimientos y experiencias propios. 5.2. Interpretar situaciones en contextos diversos reconociendo las conexiones entre las matemáticas y la vida cotidiana.	5.1. Utilizar conexiones entre diferentes elementos matemáticos movilizando conocimientos y experiencias propios. 5.2. Utilizar las conexiones entre las matemáticas, otras áreas y la vida cotidiana para resolver problemas en contextos no matemáticos.

CE.M.6

Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología matemática apropiada, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.

Para evaluar el desarrollo de esta competencia alrededor de los procesos de comunicación y representación se plantean dos criterios estrechamente interrelacionados. El Criterio 6.1 está más centrado en el proceso de representación. Se refiere al reconocimiento, interpretación y uso del lenguaje matemático (en todas sus formas de expresión, no solo simbólicas) en situaciones cercanas y significativas para el alumnado. Estas situaciones están muy vinculadas con los procesos de modelización inicial, como los que tienen lugar al representar un problema con manipulativos, con un dibujo o con una representación más abstracta. Todas estas situaciones implican el desarrollo de vocabulario específico, en consonancia con gestos y otras representaciones, por lo que se trata de evaluar el progreso en este sentido. En cuanto al Criterio 6.2, está más enfocado en el proceso de comunicación. Sin embargo, la relación con las representaciones es clara. Cuando el alumnado trata de argumentar y explicar sus razonamientos o justificar sus conjeturas, se ve obligado a jugar con sus representaciones internas de los objetos matemáticos y a expresarse a partir de ellas. Serán los saberes de cada sentido en cada ciclo los que permitirán articular situaciones de aprendizaje en las que el alumnado deba argumentar y comunicar sus razonamientos.

La evaluación formativa proporciona múltiples maneras de aplicar estos criterios. El alumnado necesita que las situaciones de aprendizaje ofrezcan oportunidades para poner a prueba sus ideas dentro de un ambiente matemático de resolución de problemas orientado a la construcción compartida del conocimiento, con el objetivo de comprobar si comprenden y si sus argumentos son suficientemente sólidos (esto último es un objetivo fundamental que debería trabajarse a lo largo de todos los ciclos). Por ello, una vía para desarrollar esta competencia es potenciar la conversación sobre las matemáticas, tanto en pequeño grupo como en el grupo-clase. Primero, mediante el lenguaje verbal natural, para luego, de forma progresiva, ir introduciendo vocabulario específico de las matemáticas y otras representaciones. La evolución de las formas externas de representación también es clara a lo largo de los ciclos e, incluso, dentro de un mismo curso. Inicialmente se parte de representaciones informales y espontáneas que conectan con las intuiciones del alumnado (dibujos, construcciones con materiales manipulable, etc.) y, posteriormente, evolucionan de manera coherente hacia modelos más convencionales o formales, que son puestos sobre la mesa por el profesorado: signos de igualdad y comparación, tablas, gráficas estándar. El profesorado, para evaluar el uso y articulación de representaciones, debe animar al alumnado a realizar todo tipo de representaciones, sin restricciones. La introducción de representaciones más convencionales corresponde al profesorado. Sin embargo, esto puede hacerse también de forma dialogante, a partir de una charla de aula. Por ejemplo, cuando se presenta un nuevo tipo de gráfico estadístico, sin haber recibido instrucción previa, y se discute cómo puede interpretarse.

La expresión escrita (verbal y simbólica) también es objeto de evaluación. En particular, las representaciones simbólicas (números, expresiones aritméticas, etc.) que emplee el alumnado deben ser coherentes con el discurso gráfico, uso del manipulativo o el lenguaje verbal. Es importante no centrar exclusivamente la evaluación en comunicación en la representación escrita, así como ser pacientes y no imponer lenguaje formal antes de tiempo. La oralidad siempre debe preceder a lo escrito.

Los matices en la evaluación de esta competencia no se limitan a los saberes de cada ciclo. Aunque la conversación en pequeño y gran grupo es algo esencial a lo largo de toda la etapa, es evidente que para el alumnado de primer ciclo será tremendamente importante, ya que parte de él se encuentra aprendiendo a leer y a escribir. Es fundamental, por ejemplo, tener claro que el número no se limita a su representación simbólica. Además, el alumnado en primer ciclo seguramente precise de un andamiaje específico para clarificar sus expresiones verbales y aprender a comprender el punto de vista de sus compañeros o compañeras.

La gestión del aula, por parte del docente o la docente, mientras se desarrolla el diálogo, es primordial y debe integrar la evaluación formativa de los procesos de comunicación y representación. Se debe ofrecer el tiempo necesario para pensar y/o describir individualmente, después en pequeño grupo y, finalmente, en gran grupo. Las preguntas que se hagan deben ser abiertas y provocadoras de conocimiento: explica cómo lo has hecho, ¿cómo lo has pensado?, ¿con qué podrías relacionarlo?, ¿por qué lo has hecho así?, ¿cómo podrías representar esto?, ¿y si…?

Conviene tener en cuenta el uso de herramientas tecnológicas en la evaluación de esta competencia, de manera complementaria al uso de materiales manipulables físicos y otros recursos visuales, ya que proporcionan nuevos tipos de representaciones y posibilidad de interconexión y son importantes para el aprendizaje matemático. Por ejemplo, la recogida y representación de datos estadísticos y elaboración de tablas y gráficos con una hoja de cálculo involucra saberes relacionados con la resolución de problemas y la representación de información. También es claro el papel de las herramientas tecnológicas digitales en la visualización de las figuras geométricas y las relaciones espaciales, con una mención especial a los programas y applets de geometría dinámica, pues posibilitan acciones que no se pueden reproducir con lápiz y papel. La calculadora, por otro lado, facilita situaciones aprendizaje en las que se exploren operaciones, algoritmos no estándar, al mismo tiempo que agiliza el proceso de cálculo y permite experimentar relaciones numéricas. En el seno de todas estas situaciones tienen lugar procesos de comunicación y representación sobre los que aplicar estos criterios. En general, puede decirse que en un ambiente de aprendizaje a través de la resolución de problemas el alumnado está constantemente comunicando y articulando representaciones.

Primer Ciclo	*Segundo Ciclo*	*Tercer ciclo*
6.1. Reconocer lenguaje matemático sencillo presente en situaciones cercanas y significativas para el alumnado, adquiriendo vocabulario específico básico. 6.2. Explicar, de forma verbal o gráfica, ideas y procesos matemáticos sencillos, los pasos seguidos en la resolución de un problema o los resultados matemáticos.	6.1. Reconocer lenguaje matemático sencillo presente en situaciones cercanas y significativas para el alumnado en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario específico básico y mostrando comprensión del mensaje. 6.2. Explicar los procesos e ideas matemáticas, los pasos seguidos en la resolución de un problema o los resultados obtenidos utilizando lenguaje matemático sencillo y diferentes registros y formas de representación.	6.1. Interpretar lenguaje matemático sencillo presente en situaciones cercanas y significativas para el alumnado en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario apropiado y mostrando la comprensión del mensaje. 6.2. Comunicar articulando diferentes registros y formas de representación las conjeturas y procesos matemáticos utilizando lenguaje matemático adecuado.

CE.M.7

Desarrollar destrezas personales que ayuden a identificar y gestionar emociones al enfrentarse a retos matemáticos, fomentando la confianza en las propias posibilidades, apreciando el error y aceptando el bloqueo como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para desarrollar actitudes como la perseverancia y disfrutar en el aprendizaje de las matemáticas.

Tanto la competencia CE.M7 como la CE.M8 se enfocan en la dimensión socioafectiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y están íntimamente relacionadas, ya que el dominio afectivo del alumnado se desarrolla en un contexto social. No obstante, puede decirse que la CE.M7 está centrada en la evolución del dominio afectivo del propio estudiante, mientras que la CE.M8 mira hacia las interacciones en el plano social. Para la evaluación de la CE.M7 se plantean dos criterios. La aplicación del Criterio 7.1 trata de evaluar el progreso del alumnado en la identificación y regulación de sus emociones, especialmente, ante el proceso de resolución de problemas, pero en cualquier otra situación relacionada con las matemáticas. El Criterio 7.2 se centra en el progreso en las actitudes del alumnado hacia las

csv: BOA20220727001

matemáticas y hacia el aprendizaje de estas. Estos criterios ponen de manifiesto, más que nunca, el carácter formativo de la evaluación. Se trata de que la evaluación del dominio afectivo permita que el alumnado reciba información sobre cómo desarrollar afectos positivos hacia las matemáticas y apreciar que los bloqueos y desesperaciones forman parte natural de la resolución de problemas. La relación de lo afectivo con lo cognitivo es clara, y un adecuado tratamiento exige la creación de un clima afectivo de seguridad en el aula. Para la aplicación del Criterio 7.1 se pueden emplear instrumentos específicos, como el mapa de humor de los problemas (Gómez-Chacón, 2000a, 2000b), de manera que el alumnado exprese con un pictograma su estado emocional. Esto permite que el alumnado tome conciencia de sí mismo como resolutor de problemas, al mismo tiempo que se recogen evidencias de aprendizaje que pueden resultar de utilidad para organizar charlas de aula y adaptar las secuencias de enseñanza y aprendizaje. En cuanto al desarrollo de actitudes, conviene tener en cuenta que se trata de un proceso complejo y que se extiende en el tiempo. Así como las emociones son afectos inestables e inmediatos (que se ven favorecidas por la actitud y las creencias), la formación de las actitudes y las creencias implica un trabajo continuo en lo emocional. Por ejemplo, si el alumnado experimenta sensaciones positivas en la resolución de problemas de forma continuada y aprende a asumir los bloqueos y a tomar la iniciativa en su superación, las actitudes que termina desarrollando son la de perseverancia, indagación, etc. En un ambiente de resolución de problemas, donde prima la interacción, se pueden emplear listas de observación para evaluar el Criterio 7.2, que resulten manejables en el entorno de aula, donde se recojan, entre otros aspectos, la perseverancia en la resolución de problemas, la aceptación del error, la capacidad de comunicar los procesos seguidos, la confianza en sus capacidades, etc.		
Primer Ciclo	*Segundo Ciclo*	*Tercer ciclo*
7.1. Reconocer las emociones básicas propias al abordar nuevos retos matemáticos, aceptando el bloqueo en la resolución de problemas y asumiendo la iniciativa de superarlos. 7.2. Expresar actitudes positivas ante nuevos retos matemáticos, valorando el error como una oportunidad de aprendizaje.	7.1. Identificar las emociones propias al abordar nuevos retos matemáticos, aceptando el bloqueo en la resolución de problemas y asumiendo la iniciativa de superarlos, desarrollando así la autoconfianza. 7.2. Expresar actitudes positivas ante nuevos retos matemáticos tales como la perseverancia y la flexibilidad, valorando el error como una oportunidad de aprendizaje.	7.1. Autorregular las emociones propias y reconocer algunas fortalezas y debilidades, desarrollando así la autoconfianza al abordar nuevos retos matemáticos. 7.2. Expresar actitudes positivas ante nuevos retos matemáticos tales como la perseverancia y la responsabilidad valorando el error como una oportunidad de aprendizaje.
CE.M.8		
Desarrollar destrezas sociales reconociendo y respetando las emociones, las experiencias de los demás y el valor de la diversidad, participando activamente en equipos de trabajo heterogéneos que promuevan la interacción y la implicación de todos para construir una identidad positiva como estudiante de matemáticas, fomentar el bienestar personal y crear relaciones saludables.		
Las competencias CE.M7 y CE.M8 se enfocan en la dimensión socioafectiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y están íntimamente relacionadas, ya que el dominio afectivo del alumnado se desarrolla en un contexto social. Mientras que la CE.M7 está centrada en la evolución del dominio afectivo del propio estudiante, la CE.M8 atiende a las interacciones en el plano social. Para comprender las implicaciones de esta competencia es necesario considerar que la resolución de problemas en matemáticas debe formar parte activa de la construcción de conocimiento. Para ello es imprescindible la creación de un clima de aula que fomente la interacción tanto en pequeño como gran grupo. Por lo tanto, se trata de hacer explícita la importancia de ejercitar destrezas y habilidades sociales, valorando la diversidad, por medio de las estrategias puestas en juego en la conversación y el razonamiento. En la evaluación de esta competencia se pueden emplear técnicas similares a las de la CE.M7, siempre en el marco de una evaluación de carácter formativo que proporcione indicaciones, tanto para el alumnado como para el profesorado. Al primero de ellos, para desarrollar la competencia en relación con los diferentes saberes que se ponen en juego en las situaciones de aprendizaje. Al segundo, con el objetivo de adaptar las secuencias didácticas y alinear los procesos de enseñanza y aprendizaje. Será conveniente la utilización de listas de observación, en el sentido que se refleja en las orientaciones para la evaluación, en las que se recoja, entre otros aspectos, la aceptación de puntos de vista ajenos.		
Primer Ciclo	*Segundo Ciclo*	*Tercer ciclo*
8.1. Participar respetuosamente en el trabajo en equipo estableciendo relaciones saludables basadas en el respeto, la tolerancia, la igualdad y la resolución pacífica de conflictos. 8.2. Aceptar la tarea e implicarse en la exploración compartida de la situación o resolución del problema, participando de la construcción del conocimiento y contribuyendo a las discusiones y puestas en común.	8.1. Colaborar activa y respetuosamente en el trabajo en equipo comunicándose adecuadamente, respetando la diversidad del grupo y estableciendo relaciones saludables basadas en la tolerancia, la igualdad y la resolución pacífica de conflictos. 8.2. Aceptar la tarea propuesta e implicarse en la exploración compartida de la situación o resolución del problema, respetando los argumentos de otros, poniéndolos a prueba, participando de la construcción del conocimiento y contribuyendo a las discusiones y puestas en común.	8.1. Colaborar activa, respetuosa y responsablemente en el trabajo en equipo mostrando iniciativa, comunicándose de forma efectiva, valorando la diversidad, mostrando empatía y estableciendo relaciones saludables basadas en la tolerancia, la igualdad y la resolución pacífica de conflictos. 8.2. Aceptar la tarea propuesta e implicarse en la exploración compartida de la situación o resolución del problema, respetando los argumentos de otros, poniéndolos a prueba, participando de la construcción del conocimiento y contribuyendo a las discusiones y puestas en común

csv: BOA20220727001

III. Saberes básicos

III.1. Descripción de los diferentes bloques en los que se estructuran los saberes básicos

A. Sentido numérico

El sentido numérico es la habilidad para descomponer números de forma natural, emplear referentes numéricos de forma apropiada y ágil, usar las relaciones entre las operaciones aritméticas de manera flexible y creativa en la resolución de problemas, comprender el sistema de numeración posicional de base 10, estimar, dar significado a los números y reconocer su magnitud (Sowder, 1992). El desarrollo del sentido numérico es algo muy personal. No se relaciona únicamente con aquellas ideas y conceptos alrededor de los números que van surgiendo en el aula, sino también con cómo se ha llegado a dichos conceptos y las conexiones que se establecen (Anghileri, 2006). El sentido numérico tiene que ver con una forma de pensar que conduce a identificar fácilmente esas conexiones. Por ejemplo, si una operación es fácilmente realizable o no (32:16 frente a 32:17), si una operación se puede acometer de diferentes maneras (45+58 se puede pensar sumando 50 y luego 8 o sumando 60 y luego quitando 2), el significado que puede tener una operación dentro de diferentes contextos, estimar un resultado, cómo utilizar representaciones coherentes con el razonamiento llevado a cabo, etc.

Las actividades que realice el alumnado determinarán en gran medida sus actitudes y creencias tanto hacia los números como a las matemáticas y a la enseñanza y aprendizaje de estas. En el caso del sentido numérico, si el alumnado termina asumiendo la creencia de que los números se usan para llevar a cabo las actividades de suma, resta, multiplicación o división que previamente les ha explicado el docente o la docente, aunque no comprendan por qué se hacen así, la actitud previsible del alumnado será pasiva. De esa manera, posteriormente apenas serán capaces de resolver problemas y utilizar los números de forma flexible, más allá de que algunos alumnos o algunas alumnas tengan éxito en ello. Además, este alumnado que tiene éxito (relativo), lo tiene siempre, a pesar de las posibles estrategias de enseñanza seguidas. En cambio, si se implementan secuencias didácticas a través de la resolución de problemas que comiencen poniendo en juego los conocimientos previos del alumnado y permitan el uso de estrategias propias al manejar los números y su conocimiento acerca de estos y las operaciones, el aprendizaje será significativo. En otras palabras, por el camino, el alumnado construye su propio conocimiento y establece conexiones, en este caso, entre las diferentes propiedades o relaciones entre los números y las operaciones.

Conviene tener muy presente que la aritmética oral es el soporte de la aritmética escrita y debe precederla. Esto resultará esencial en el primer ciclo, donde el alumnado se encuentra todavía aprendiendo a leer y a escribir. El aprendizaje del recuento, del sistema de numeración oral, los significados del número natural como cardinal y como ordinal, las técnicas orales de cálculo, la narración y escenificación de los enunciados de las situaciones y problemas, así como su resolución por métodos orales y en conexión con lo manipulativo, debe preceder la escritura de números y, por supuesto, de sus operaciones. Sin embargo, este énfasis en la oralidad no es exclusivo de estos primeros años. El diálogo y las interacciones de aula donde se compartan técnicas, estrategias y razonamientos empleados serán siempre un elemento central de las situaciones de aprendizaje.

El desarrollo del sentido numérico debe realizarse de forma sosegada, sin prisa, dando tiempo a conectar con los conocimientos previos del alumnado. Esto es fundamental tanto desde la perspectiva de la escuela inclusiva y la igualdad de oportunidades como desde un punto de vista puramente didáctico. El alumnado, desde que se instaurase la Educación Secundaria Obligatoria, está escolarizado hasta los 16 años. Esto debería ser suficiente como para permitir adecuar los tiempos de enseñanza a los tiempos reales de aprendizaje. De hecho, las tasas de fracaso escolar en matemáticas y las dificultades en aritmética sugieren que la escuela introduce con demasiada rapidez las primeras nociones aritméticas. No se trata tampoco de estancarse en repetir lo mismo una y otra vez. Las ideas fundamentales deben revisitarse mediante tareas ricas y actividades de suelo bajo y techo alto, que facilitan interconexiones, nuevas perspectivas y diferentes grados de profundización.

La estimación de cardinales, ordinales o medidas, así como la estimación del resultado de un cálculo o una valoración de este, son conocimientos matemáticos importantes que merecen la propuesta de situaciones de aprendizaje específicas. La estimación va mucho más allá de «adivinar» un resultado o una medida. Implica el uso de razonamientos y técnicas que deben desarrollarse como objeto de aprendizaje, pues la estimación contribuye de forma significativa al desarrollo del sentido numérico.

csv: BOA20220727001

En el aprendizaje de los saberes propios del sentido numérico y en el desarrollo de las competencias vinculadas nos vamos a encontrar con situaciones de aprendizaje concretas, con mayor o menor grado de contextualización y con situaciones formales (p. ej., calcula 12+5). La construcción del significado va ligado siempre a la vía de la resolución de problemas. La definición de lo que es un problema en matemáticas es compleja y admite matices, pero siempre es algo mucho más que un ejercicio con contexto. Siguiendo a Blanco y Pino (en Blanco, et al., 2015), se pueden destacar los siguientes aspectos para que una actividad pueda ser considerada como problema: la necesidad de tener un objetivo al que no podemos llegar fácilmente con un proceso inmediato; las dudas y/o bloqueos generados por la situación planteada o por el desconocimiento de ese método claro que nos lleve a la solución; el aceptar el reto consciente para llegar a él lo que puede ser considerado por el resolutor como un desafío personal y uso de conceptos y procesos matemáticos. El alumnado debe ser consciente, al resolver problemas, de que suele haber diferentes maneras de resolverlo, de que se puede llegar al mismo resultado por caminos diferentes, de que puede haber diferentes soluciones a un problema, no existir solución, o que esta no sea numérica.

Por ejemplo, en el aprendizaje de la suma y de la resta la construcción del significado va ligado a la vía de la resolución de problemas (esto es común a todos los sentidos y saberes) y exige plantear al alumnado diferentes situaciones aditivas para que se familiaricen con ellas, las resuelvan inicialmente por medio de recuentos y terminen asociándolas con las operaciones correspondientes. Estas situaciones deben modularse a partir de sus variables didácticas recorriendo las distintas categorías semánticas. Siguiendo la propuesta que recogen Cid, et al. (en Godino, 2003) para las situaciones aditivas de una etapa, se pueden distinguir los siguientes tipos de acciones: añadir o quitar, reunir o separar, o emparejar. Estas acciones se realizan sobre cada una de las cantidades que intervienen en la situación (los dos datos y la solución) y pueden ser una transformación (T) cuando la cantidad expresa la variación (aumento o disminución) que sufre una cantidad inicial en un intervalo de tiempo, comparación (C) cuando la cantidad indica la diferencia (mayor o menor que) que existe entre dos cantidades que se comparan entre sí y estado (E) cuando la cantidad no transforma ni compara otras cantidades. En primer ciclo se podrían considerar situaciones EEE, ETE y ECE, variando las diferentes posiciones de la incógnita y los sentidos de las transformaciones y comparaciones. Esto es necesario para evitar que el alumnado decida que la operación que resuelve el problema es una suma porque aparece la palabra «total» o la palabra «más» o porque en el enunciado se habla de «me dan», «me regalan», etc ; o una resta porque se pregunta «cuánto queda» o aparece la palabra «menos» o se habla de «quitar», etc. Más adelante, en segundo y tercer ciclo pueden recorrerse las categorías TTT, CTC y CCC, más complejas desde el punto de vista semántico. Otra categorización similar la encontramos en Chamorro (2003).

En cuanto al aprendizaje de las técnicas de cálculo, la vía de la técnica, supone plantear sumas y restas formales, es decir, descontextualizadas (por ejemplo, 5+9, 14+5, 25+2, etc.), para que el alumnado adquiera técnicas orales, aprenda ciertos hechos numéricos mediante la práctica rica y exploratoria y, posteriormente, desarrolle técnicas escritas de suma y resta. Una vez que el alumnado conoce estas técnicas, comienza a ser interesante para él la reflexión acerca de qué operación resuelve el problema en cuestión, porque evita realizar recuentos que pueden llegar a ser engorrosos.

Ambas vías, la de la resolución de problemas y la de la técnica formal, deben desarrollarse en paralelo. En lo referente a los problemas concretos, se trata de situaciones que el alumnado tiene que resolver de manera autónoma, buscando sus propias estrategias y recurriendo, en un principio, al uso de manipulativos para representar la situación y emplear técnicas de recuento. El objetivo consiste en que, mediante estas tareas, las estrategias iniciales de recuento evolucionen al ritmo de aprendizaje apropiado para cada niño o niña. Al final, a medida que por la vía de la técnica se consolidan las técnicas de suma y resta, la base experiencial adquirida por el alumnado en la resolución de esas situaciones le permitirá decidir qué operaciones resuelven cada problema. En la vía de la técnica también son esenciales los manipulativos, y todo centro debería estar dotado de material básico, estructurado y no estructurado. Aquí se trata de efectuar sumas y restas sin contextualizar, que inicialmente se resolverán por medio de recuentos. Como no interesa que el alumnado se estanque indefinidamente en los procesos de recuento, sino que este tiene que evolucionar, hay que trabajar con distintos materiales estructurados (dedos de la mano, plaquetas, unidades, decenas y centenas, ábaco horizontal o rekenrek, billetes de base decimal, etc.) que permitan obviar los recuentos y proporcionen, por medio del aprendizaje de distintas configuraciones numéricas, el entramado necesario para establecer las técnicas orales de suma y resta. Será la práctica rica en torno a estas situaciones las que permitan consolidar el aprendizaje de ciertos hechos numéricos, como los correspondientes a la tabla de la suma (o de la multiplicación, para las situaciones multiplicativas). En ningún caso debe proponerse el aprendizaje de estas tablas desde el canturreo repetitivo, sino desde la exploración, identificación de patrones y la práctica rica.

Dentro del sentido numérico merece una mención especial todo lo relacionado con el sistema de numeración decimal posicional. Aunque, a ojos de una persona adulta, parezca algo trivial, se ha de tener presente que es fruto de un dificultoso proceso de desarrollo histórico. Para el aprendizaje de sus rudimentos es necesario experimentar y comprender el sistema de numeración decimal como un sistema posicional de base diez (decenas, centenas, etc.); proponer actividades de lectura y escritura de números, contar, operar, comparar, ordenar, visualizar, imaginar, etc.; adquirir agilidad en la descomposición y composición de los números, que es la base del cálculo mental; utilizar representaciones que faciliten la comprensión del sistema decimal; buscar regularidades en los números; trabajar a partir de problemas; reflexionar sobre los números por medio de preguntas ricas, retos, descubrir regularidades, charlas de aula, etc.

Los materiales manipulables virtuales y las aplicaciones informáticas son de gran ayuda para imaginar, visualizar, adquirir agilidad mental y sentido numérico. El papel de la calculadora también es importante. Está claro que en la sociedad actual, las técnicas escritas de cálculo han perdido relevancia y utilidad, por lo que el aprendizaje de algoritmos ha de convertirse en un aprendizaje sobre algoritmos, relacionado con el pensamiento computacional. Al mismo tiempo, las actividades planteadas sobre estos algoritmos deberán permitir establecer conexiones y aprender elementos básicos y propiedades del sistema decimal posicional. En ningún caso debe articularse el aprendizaje del sentido numérico desde la ejecución automatizada de algoritmos que hayan sido aprendidos sin significado. Cuando eso ocurre, se anula el desarrollo de prácticamente cualquier estrategia de cálculo mental, pues este se relaciona más con las técnicas orales (calcular mentalmente no pasa por tratar de imaginarse un algoritmo escrito). La calculadora aparece como un recurso excelente para plantear tareas de exploración sobre estructuras numéricas e indagar con números grandes.

El uso de manipulativos, el énfasis en la oralidad y la adaptación permanente a los ritmos de aprendizaje del alumnado permite que el enfoque sea plenamente inclusivo. Al mismo tiempo, cumple cierta función diagnóstica, ya que facilita detectar dificultades específicas cuando el alumnado no responde a los apoyos planteados.

Las conexiones con el sentido de la medida son muy evidentes, así que será necesario considerar plenamente interconectados ambos sentidos y sus correspondientes saberes. En los primeros niveles, el conteo y la medida de cantidades discretas inician el aprendizaje de los números naturales. Más adelante, serán los problemas que surgen en situaciones de medida de magnitudes continuas (longitudes, área, capacidad/volumen, masa, etc.) los que den significado a la representación fraccionaria del número racional y permitan conectar esta con la representación decimal. El alumnado no está familiarizado con las distintas magnitudes y los procesos de medida, al contrario de lo que podía ocurrir a mediados del siglo XX. Por lo tanto, los centros educativos han de proporcionar situaciones de aprendizaje adecuadas y relevantes que constituyan la base experiencial necesaria (discriminar magnitudes, percibir las diferentes cantidades de magnitud, medir, pesar, etc.) para desarrollar la competencia matemática. No tiene ningún sentido que el alumnado se dedique de forma exhaustiva a ejercitar la técnica de cambio de unidades dentro del Sistema Métrico Decimal.

El término «razonamiento proporcional» no sólo hace referencia a la capacidad de resolver tareas de proporcionalidad. Este término debe asociarse a la capacidad de realizar argumentaciones y deducciones de manera comprensiva, más que con la habilidad para resolver determinadas tareas en las que se pueda tener éxito aún sin tener un conocimiento suficiente de los conceptos involucrados. Es decir, el razonamiento proporcional está relacionado con los aspectos cognitivos de la proporcionalidad y ligado a la comprensión del número racional y sus distintos significados y a las estructuras multiplicativas con diferentes tipos de números. Un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional es clave para comprender los fenómenos asociados con la proporcionalidad y es precursor de otros sentidos como el algebraico ya que inicia al estudiante en la comprensión de la covariación entre cantidades de dos magnitudes relacionadas. Así, por un lado, el razonamiento proporcional implica dar significado a conceptos como el de razón entre magnitudes, el de porcentaje o la relación de proporcionalidad y las condiciones necesarias para que esta pueda suponerse y, por otro, implica la capacidad de resolver diferentes tareas en las que estos conceptos intervienen. Las tareas propuestas deben ir más allá de los clásicos problemas de valor faltante por lo que deben considerarse tareas de tipo cualitativo o de comparación de varias situaciones de proporcionalidad. Así, la resolución de problemas no rutinarios se convierte en una pieza principal del desarrollo del razonamiento proporcional. Por tanto, la enseñanza no debe basarse tampoco en técnicas concretas para cada tipo de problema si el propósito es convertir a los estudiantes en «razonadores proporcionales».

Como se ha mencionado anteriormente, las conexiones que pueden establecerse entre el sentido numérico y el sentido de la medida son evidentes. Tanto, que son sentidos cuyos saberes han de considerarse muchas veces de forma integrada. También se ha subrayado el impacto que tiene en el plano socioafectivo el enfoque de enseñanza y aprendizaje empleado, en aspectos como la confianza y el autoconcepto, los cuales terminan siendo determinantes en el plano cognitivo. Sin embargo, las conexiones del sentido numérico alcanzan todas las áreas de la matemática. Por ejemplo, en el sentido estocástico, las situaciones de aprendizaje en torno a la probabilidad y la estadística van a exigir desde recuentos y estimaciones hasta una nueva mirada de conceptos en torno al número racional y sus significados. Igualmente, encontraremos múltiples oportunidades de conexión con cualquier otra área de conocimiento. Sin ir más lejos, el hecho de que el alumnado exponga de manera oral las estrategias empleadas en la resolución de cierto problema permite desarrollar la competencia lingüística.

B. Sentido de la medida

Ciertas cualidades de los objetos, denominadas magnitudes, son susceptibles de ser medidas. Esto quiere decir que sobre estas cualidades se puede llevar a cabo un proceso mediante el que se asigna un número a dichas cualidades, denominado proceso de medida. Este proceso se puede realizar mediante diversas técnicas y el número que se obtiene recibe el nombre de cantidad de magnitud. Como adultos, empleamos continuamente las nociones de magnitud y medida, tanto en la vida cotidiana como profesional. Sin embargo, pocas veces reflexionamos sobre los fundamentos en que se apoyan estas nociones y que son fuente de dificultades para el alumnado. No en vano, exige comenzar abstrayendo cierta cualidad común a una colección de objetos, la magnitud. Después, cómo manipular dicha magnitud, ya que cada una de ellas implica acciones y lenguaje diferentes para realizar comparaciones, primero, y procesos de medida, después.

La medida tiene interés en matemáticas por varias razones. Evidentemente, se trata de un conjunto de saberes que se integran en el sentido de la medida que resultan de gran practicidad en situaciones de la vida cotidiana. De esta manera, ofrece contextos de aprendizaje y oportunidades de conexión excelentes para aplicar y relacionar otros saberes, como operaciones aritméticas, ideas geométricas, relaciones y funciones o estadística. Sin embargo, la medida en matemáticas es particularmente especial por otro motivo. Al verbalizar las acciones que se realizan en situaciones que involucran la manipulación de magnitudes y, especialmente, la comunicación del resultado de un proceso de medida, surge la necesidad de un nuevo tipo de número: el número racional positivo, en sus múltiples representaciones simbólicas (fracciones, decimales, etc.).

Las magnitudes esenciales en Matemáticas en la educación primaria son la longitud, área, volumen, masa y peso, capacidad y volumen o tiempo. Además de estas magnitudes, que son extensivas (se pueden sumar), existen otras que son intensivas, como la temperatura o las que se forman a partir de la relación entre dos magnitudes extensivas (velocidad, densidad, …).

El alumnado acude al colegio con un escaso bagaje experiencial sobre medida, comparado con el que podría haber recibido un niño o una niña a mediados del siglo XX. Es imprescindible que el colegio aporte estas experiencias, proporcionando abundantes y diversas situaciones en las que el alumnado manipula y, sobre todo, reflexiona sobre las acciones que realiza al comparar y medir magnitudes:

1. Situaciones de identificación de la magnitud a medir. Reconocimiento de la magnitud. Conservación de la magnitud.
2. Situaciones de comparación directa de cantidades de magnitud sin objetos intermedios. Comparación por desplazamiento de objetos o mediante estimaciones visuales.
3. Situaciones de comparación de cantidades de magnitud con objetos intermedios. Tomando un tercer objeto como apoyo. Se hace operativa la propiedad transitiva. Verbalizar y ampliar el vocabulario relacionado con la magnitud.
4. Situaciones de ordenación cantidades de magnitud, cuando intervienen 3 o más cantidades. Verbalizar y ampliar el vocabulario relacionado con la magnitud.

csv: BOA20220727001

5. Situaciones de medida con unidades antropométricas o arbitrarias. Existen dos tipos de situaciones: de cálculo y de construcción. En las situaciones de cálculo el transporte, reiteración y recuento de la unidad sobre la cantidad a medir da lugar al número-medida que indica la medida. En las situaciones de construcción se conoce el número-medida y hay que construir un objeto que posea la cantidad de magnitud que indica ese número.
6. Situaciones de medida con unidades del sistema legal: Sistema Métrico Decimal. Como en el caso anterior existen dos tipos de situaciones: de cálculo y de construcción. En las situaciones de cálculo y situaciones de construcción. Utilización de instrumentos de medida.
7. Situaciones en las que resulta necesario utilizar las equivalencias de los sistemas de medida. Cambios de unidades. Decisión del grado de precisión del resultado de medida. Relación entre el resultado de la medida y la unidad de medida utilizada dado que existe una relación de proporcionalidad inversa entre el resultado de la medida y la medida de la unidad.
8. Situaciones de estimación de la medida de cantidades de magnitud y ejercitación del cálculo mental en situaciones de medida. La estimación en medida consiste en aquellos juicios que realizamos acerca del valor de una determinada cantidad de magnitud, o bien la valoración que puede hacerse sobre el resultado de una medida. Distinguir entre estimación de magnitudes continuas o discretas. Habrá que considerar situaciones en las que el objeto cuya cantidad de magnitud a estimar esté presente o no; combinando con situaciones en las que la unidad de medida (referente) esté presente o no.

A pesar de la numeración, no se trata de una secuenciación estricta de situaciones. Hay situaciones de identificación y conservación que son previas a las de comparación y medida, por ejemplo. Sin embargo, no es imprescindible esperar a que el alumnado se desenvuelva perfectamente en situaciones de conservación antes de pasar a las de medida, ya que estas últimas ayudan a desarrollar la idea de conservación. De la misma manera, las situaciones de medida con unidades arbitrarias o no convencionales son previas a las de medida con unidades convencionales o estándar. De hecho, estas últimas deben surgir como necesidad ante situaciones de comunicación en las que las unidades arbitrarias no resultan eficaces. No obstante, una vez introducidas las convencionales o estándar, no quiere decir que no podamos volver a las unidades arbitrarias. Por otro lado, las situaciones de estimación se irán intercalando en cualquier momento.

En paralelo, en el desarrollo del sentido de la medida se propondrán actividades que impliquen verbalizar las acciones de medida, ampliando el vocabulario y enriqueciendo el lenguaje relacionado con cada magnitud, así como la utilización adecuada de los diferentes instrumentos de medida.

No se trata de repetir lo mismo curso tras curso. En los primeros cursos habrá que enfatizar las situaciones de conservación, comparación y medida con unidades arbitrarias, mientras que en los últimos se conectará con la representación fraccionaria del número racional. Además, un centro educativo puede planificar el trabajo en las diferentes magnitudes a lo largo de cada ciclo.

Las conexiones del sentido de la medida con otras áreas son múltiples y variadas. En Ciencias de la Naturaleza y Ciencias Sociales, la medida es fundamental y aparece en muy diversos contextos. Hemos de tener en cuenta que el papel de la medida en matemáticas presenta matices que hay que considerar y que son extensibles a cualquier proceso de modelización. En el área de Matemáticas, la reflexión sobre las acciones que se realizan con un manipulativo (en este caso, las acciones para medir) permite abstraer y construir un objeto matemático (fracciones). Por el contrario, en Ciencias de la Naturaleza y Ciencias Sociales, el objeto matemático ya construido se emplea para estudiar un fenómeno del mundo físico, poder elaborar predicciones, etc. Otras áreas, como Educación física, permiten igualmente una utilización similar de los objetos matemáticos.

C. Sentido espacial

Las matemáticas en la educación primaria no pueden quedar reducidas a la aritmética. El énfasis injustificado en la aritmética ocasiona que otras áreas de la matemática queden relegadas a un segundo plano, como la geometría, la probabilidad o la estadística. En el caso de la geometría, autores como Vecino (en Chamorro, 2003) señalan que se llega a producir una «aritmetización» de la misma, al reducirla a la aplicación trivial de unas fórmulas en situaciones prefijadas. Los objetos geométricos constituyen una abstracción de la realidad y son nuestra manera de comprender el espacio que nos rodea. La geometría ofrece un marco incomparable para el desarrollo del razonamiento, argumentación, conjetura y justificación. Hacer geometría no es tampoco aprender de memoria una serie de definiciones. Implica razonar y establecer relaciones entre los conceptos. De hecho, la geometría se presta especialmente a la exploración y al descubrimiento. Así pues, los aprendizajes correspondientes al desarrollo del sentido espacial se han de enfocar en la construcción de conceptos, búsqueda de relaciones y perfeccionamiento de la intuición geométrica, a partir de la exploración, investigación y experimentación sobre tareas planteadas a partir del uso de manipulativos (físicos y virtuales) y objetos de uso cotidiano.

El modelo de razonamiento introducido por Dina y Pierre van Hiele (van Hiele, 1986) constituye un marco muy útil en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, tanto para el diseño de secuencias didácticas como para la gestión de las actividades en el aula o realizar una evaluación de la comprensión del alumnado (Gutiérrez y Jaime, 2012; NCTM, 2000). Dicho modelo se ha matizado a lo largo del tiempo y se ha empleado en el diseño curricular y aplicado o adaptado a contenidos concretos en numerosas ocasiones recogidas en la literatura especializada.

Los niveles de razonamiento originales propuestos por los van Hiele son cinco, numerados del cero al cuatro. Sin embargo, algunos autores han propuesto un nivel previo adicional, por lo que nos referiremos a los niveles originales del uno al cinco, reservando el nivel 0 para un nivel de pre-reconocimiento, donde se identifican algunas características de las formas, pero no les permiten discriminar figuras. Por otro lado, los niveles cuatro (de deducción formal) y cinco (rigor), se corresponden claramente con etapas educativas posteriores. Así pues, en Educación Primaria encontraremos, generalmente, a alumnado que razona desde alguno de los siguientes niveles:

- Nivel 1 (visualización): la persona reconoce las figuras geométricas por su apariencia, viéndolas como un todo desprovisto de componentes o atributos, quizá, comparándolas con un prototipo conocido (puerta, ventana). En este nivel no se reconocen las partes que componen la figura ni se explicitan las propiedades esenciales de la figura. No hay apenas razonamiento, solo percepción. Las actividades correspondientes a este nivel van enfocadas a aprender vocabulario geométrico, identificar formas y reproducir figuras.
- Nivel 2 (análisis): el alumnado que razona a este nivel empieza a distinguir las características propias de cada figura, a través de la observación y la experimentación. Se emplean propiedades geométricas para abstraer clases de figuras (p. ej., los rectángulos tienen las diagonales iguales), pero no se llega a establecer relaciones entre distintas clases (p. ej., cuadrados, rombos y rectángulos no se perciben como paralelogramos). Desde este nivel el alumnado propone definiciones enumerando varias características de una figura, posiblemente con omisiones y/o redundancias. Las justificaciones de estas propiedades se realizan en base a unos pocos casos particulares.
- Nivel 3 (deducción informal): a veces, también llamado nivel de abstracción o de clasificación. En este nivel de razonamiento se conectan diferentes propiedades y se relacionan clases de figuras. De esta manera, se comprende que una clase esté incluida en otra (p. ej., el cuadrado es un tipo de rectángulo). Las definiciones de las figuras ya no consisten en un simple listado de propiedades, sino que adquieren un significado en sí mismas y, por lo tanto, son concisas y suficientes para describir la figura en cuestión. Se deduce de manera informal, conviviendo este tipo de deducciones con resultados empíricos particulares. Aunque no se alcanza a comprender la estructura axiomática de una deducción formal (construir una demostración a partir de unas premisas) pueden llegar a seguir y apreciar pruebas formales.

En el primer nivel, de visualización, se piensa en términos de formas, dando lugar a posibles clases o familias de formas que parecen ser similares. Cuando se razona en el segundo nivel, de análisis, el pensamiento involucra clases de figuras geométricas y, a partir de diversas experiencias, se proponen propiedades. Estas propiedades son los elementos básicos de pensamiento en el siguiente nivel, de deducción informal, permitiendo elaborar razonamientos que dan lugar a relaciones entre ellas. El cuarto nivel, de deducción formal, se construye sobre estas relaciones, lo que permite introducirse en la idea de un sistema axiomático, el cual será el elemento básico de trabajo en el quinto y último nivel, caracterizado por el rigor.

Hay que ser conscientes de que se trata de niveles de razonamiento. Es decir, en el modelo de van Hiele se considera que el aprendizaje es, fundamentalmente, una acumulación de experiencias. Esto implica, por un lado, que es posible progresar en el razonamiento fuera del centro educativo, aunque estas experiencias aparecen aisladas y desorganizadas, resultando insuficientes. Por otro lado, no son niveles de desarrollo curricular. Es decir, aunque evidentemente los niveles de deducción formal y rigor quedan fuera de la educación primaria, no es adecuado del todo asignar a cada ciclo un nivel, aunque en las orientaciones se propone una posible secuenciación. Por ejemplo, el tercer nivel, de deducción informal, no suele alcanzarse plenamente en el rango de edades de la educación primaria. En cuanto al primer y segundo niveles, lo realmente importante es que las actividades permitan identificar y construir a partir del razonamiento del alumnado. De esta manera, no tiene sentido plantear una actividad para transicionar de «nivel dos» a «nivel tres» cuando las características del razonamiento que muestra el alumnado es de «nivel uno» o están recién llegados al «nivel dos». Otro elemento del modelo de van Hiele, las fases de aprendizaje, facilita el diseño e implementación de actividades de geometría que permiten progresar al alumnado, llevándolo de manera natural a lo largo de los niveles de razonamiento. Este es el motivo principal por el que se menciona este modelo en las orientaciones, puesto que hay abundante literatura al respecto. Las orientaciones de enseñanza del presente currículo describen estas fases y las ejemplifican con el desarrollo de una actividad.

El fuerte carácter visual de la geometría del plano y del espacio condiciona especialmente el desarrollo del sentido espacial. En el aprendizaje de la geometría, es crucial el uso de objetos físicos que se puedan manipular, dibujos, representaciones gráficas, diagramas, interactivos virtuales, etc. Gutiérrez y Jaime (2012) reflexionan sobre estos aspectos y se hacen eco de los trabajos de Vinner (1983, 1991) para explicar los desajustes entre los componentes gráficos y verbales de las actividades y respuestas del alumnado. El profesorado puede caer en un error didáctico si enfatiza más las definiciones que los ejemplos, en particular, cuando las primeras vienen dadas de antemano y sin elaborar a partir de tareas de exploración. Sobre todo, porque en los primeros niveles de van Hiele no se entiende lo que significa el concepto de definición. Se aprende a través de la construcción de un prototipo que debe ser rico, lo que se consigue con una adecuada selección de ejemplos y no-ejemplos. En otras palabras, los ejemplos causan más impacto que las meras definiciones en la imagen mental que se crea el alumnado de los conceptos geométricos, asociando a estos diversas representaciones. Pensemos, por ejemplo, en la imagen mental que se crea el alumnado del concepto de rectángulo. Esta estará formada principalmente por algunos rectángulos concretos, posiblemente colocados en posición estándar (parejas de lados paralelos a los bordes de la página), junto con algunas propiedades, relevantes o no.

Precisamente, el obstáculo que generan las representaciones estándar o estereotipadas de los objetos geométricos ha sido ampliamente constatado. Sin ir más lejos, la resolución de problemas en geometría depende normalmente de una adecuada representación gráfica. Para que el alumnado vaya construyendo imágenes ricas de los conceptos geométricos, es esencial la idea de variación. Es decir, las representaciones gráficas de un mismo objeto tendrán que ir variando todas aquellas características y propiedades que no sean esenciales del objeto en cuestión. Por ejemplo, que los rectángulos (o cualquier polígono) no aparezcan siempre «apoyados» de uno de los lados, paralelo al borde de la hoja. Por lo tanto, en las secuencias didácticas habrá que tener especial cuidado en incorporar representaciones diversas de los objetos que conservan propiedades fundamentales de los mismos, no otras que los estereotipan y que, en el fondo, no son relevantes. Entre las dificultades y obstáculos que surgen de este estereotipado están las relativas a la orientación (como el ya mencionado del rectángulo apoyado sobre un lado paralelo a la página), o las debidas a presentaciones incompletas de un objeto (p. ej., sólo presentar una de las alturas de un triángulo).

La geometría es una rama de la matemática donde queda muy claro el papel que juegan las Tecnologías digitales como medio para el aprendizaje, ya que estas posibilitan realizar ciertas acciones -que conllevan ciertas reflexiones- que no se pueden hacer con lápiz y papel. En otras palabras, no solamente permiten una gestión más cómoda o motivadora, sino que su uso repercute directamente a nivel del saber puesto en juego. Los entornos de geometría dinámica, por sí solos o a través de interactivos virtuales a los que pueden dar lugar, aumentan las formas en las que el alumnado se relaciona con los objetos geométricos. Este software, por ejemplo, permite que el alumnado genere sus propios modelos o ejemplos con los que explorar, investigar y conjeturar, facilitando el camino hacia pruebas y justificaciones más rigurosas propias de niveles de van Hiele más avanzados de los que aparecen en primaria.

Los conceptos, ideas y razonamientos propios del sentido espacial se revelan muy útiles en la resolución de problemas en los más variados campos, tanto en otras áreas de la matemática, como en otras áreas y en contextos de la vida cotidiana (NCTM, 2000). La oportunidad de establecer conexiones y poner en juego el sentido espacial es clara y debe aprovecharse. Por ejemplo, dentro de la propia matemática, las representaciones gráficas basadas en el modelo área sirven de ayuda para facilitar el paso de lo concreto a lo abstracto en situaciones aditivas y multiplicativas. Igualmente, gran parte de los gráficos estadísticos se apoyan en razonamientos de corte geométrico para representar la información de un conjunto de datos, los cuales pueden proceder de un trabajo de investigación de los más variados temas (precipitaciones, temperatura, salud, etc.). Cabe mencionar también que la orientación espacial es imprescindible para interpretar mapas y rutas, surgiendo oportunidades de conexión con el ámbito de la educación física. Finalmente, muchas ideas del sentido espacial tienen una relación muy estrecha con la expresión artística, como demuestra el desarrollo histórico de la noción de perspectiva o los teselados.

D. Sentido algebraico y pensamiento computacional

La enseñanza y aprendizaje del álgebra se asociaba tradicionalmente a la educación secundaria, con la resolución de ecuaciones y la manipulación de expresiones algebraicas, polinomios, etc. Esto suponía una separación conceptual muy fuerte entre las formas de pensamiento aritmético más propias de la educación primaria y el pensamiento algebraico, dando lugar a una ruptura que era fuente de numerosas dificultades por parte del alumnado, incluso para el alumnado competente en aritmética. Sin embargo, diversos autores, ya desde finales de los años 70 del siglo pasado, señalan que el álgebra escolar no se compone únicamente de la manipulación simbólica mencionada anteriormente. El álgebra escolar engloba lo que podemos denominar como pensamiento algebraico y hunde sus raíces en etapas tan tempranas del aprendizaje como la educación infantil, a través de actividades como reconocimiento de patrones o sucesiones. Desarrollar el sentido algebraico a lo largo de la educación primaria tiene, por tanto, un doble propósito. Por un lado, tiene valor en sí mismo porque se trata del desarrollo de una competencia que incide directamente en la alfabetización matemática de la ciudadanía. Por otro lado, facilita la transición entre etapas difuminando la clásica ruptura entre aritmética y álgebra. Por ejemplo, la ruptura que supone más adelante, en secundaria, aceptar expresiones como x+3 o 2n+4 como soluciones a un problema (gran parte del alumnado piensa que debe hacer algo más con ello, algún cálculo) se puede suavizar incluyendo problemas de respuesta abierta, aritméticos, cuya respuesta pueda ser «no lo sé, pero tres más que al principio» o «el doble de lo que tiene mi amigo, que no sé cuánto es, y cuatro más».

Así pues, al hablar de álgebra en educación primaria no se quiere decir que haya que adelantar lo que se ha hecho siempre en el álgebra de secundaria a la etapa de primaria, pues eso sería una receta para el desastre (Carraher y Schliemann, en Kaput, et al., 2007). Desde los años 80 han ido surgiendo diversos enfoques del álgebra que debería aprenderse en la educación infantil y primaria, como el álgebra temprana (*early algebra*), y existe un gran consenso en los tipos de actividades que fomentan el desarrollo del pensamiento algebraico. Tampoco es cuestión, como ocurre en ocasiones, de privilegiar el álgebra, como aspiración única de la matemática escolar, frente a la aritmética (Ruiz-Munzón, et al., 2015). En general, se puede identificar que el cambio curricular que se viene proponiendo no implica un tratamiento aislado del álgebra como un bloque de contenidos al uso, sino transversal.

Sin pretender ofrecer una lista exhaustiva, el desarrollo del sentido algebraico incluye (Alsina, 2019; Cai y Knuth, 2011; Cañadas y Molina, 2016; Godino y Burgos, 2017; Kaput, et al., 2007; Kieran, 2004; NCTM, 2000):

- Comprensión de relaciones y patrones, de manera que no se limiten las matemáticas al cálculo de una respuesta numérica. Las clasificaciones y ordenaciones, por ejemplo, ofrecen una oportunidad para ello, así como el estudio de relaciones cuantitativas entre cantidades de magnitud. Los procesos de generalización al describir y analizar o construir patrones son así mismo una fuente de trabajo algebraico, pudiendo emplear diferentes lenguajes para ello.
- Percepción de la estructura inherente a los objetos matemáticos. De esta manera, al abordar las situaciones aditivas en conjunto, la suma y la resta aparecen al mismo tiempo, conectando ambas con técnicas de conteo y permitiendo, más adelante establecer conexiones entre ellas y otras propiedades de los números naturales.
- Aunque no sea exclusivo del pensamiento algebraico, empoderar el proceso de resolución de problemas en sí mismo, más allá de obtener la solución. Discutir y valorar la adecuación de las representaciones y modelizaciones utilizadas para ello exige reflexionar sobre las herramientas matemáticas que se van empleando.
- Enriquecer el significado de los signos y símbolos empleados. El signo igual es un caso paradigmático. El álgebra temprana busca evitar que el significado de este signo se circunscriba simplemente a un “haz las operaciones y pon aquí el resultado”. Para ello se plantean situaciones de aprendizaje en los que el signo igual adquiere un significado de equivalencia y de relación. Por ejemplo, sentencias numéricas de las que hay que establecer su carácter de verdad.

- Estudio del cambio, más allá de las operaciones. Desde los campos de situaciones aditivas donde uno de los números actúa con significado de transformación, hasta las situaciones de proporcionalidad en donde se analiza la variación de dos cantidades de magnitud y surge una nueva magnitud como medio de expresión de cambio. Todo ello, sin olvidar otras transformaciones, como las geométricas (giros, traslaciones, simetrías).

Conviene observar que, aunque en las actividades que se han ido mencionando aparecen términos tales como estructura, propiedades o relaciones, los enfoques actuales para la enseñanza y aprendizaje de álgebra temprana no persiguen una recuperación de la llamada *matemática moderna*, propia de los años 70 y comienzos de los 80 del siglo pasado. Nada más lejos de la realidad. Aquellas *matemáticas modernas* presentaban la estructura de las matemáticas ya construida, relacionando sus elementos de una manera lógica y muy abstracta desde el principio, reconociéndose posteriormente las dificultades de comprensión a las que daba lugar. El álgebra temprana aparece siempre muy pegada al contexto de las situaciones-problema, y presta especial atención a un modo de pensar que persigue cultivar una actitud matemática de observación e indagación continua: ¿qué observas?, ¿qué puedes saber?, ¿qué te gustaría saber?

En el último ciclo de primaria, el currículo plantea la posible introducción de símbolos literales para expresar las variables. Estas expresiones han de convivir en paralelo con el lenguaje natural y otros modos de expresión simbólica, como tablas o gráficos. La idea fundamental es que sea un álgebra con símbolos literales que sirva como medio de expresión del razonamiento, con una fuerte conexión con el contexto. Es particularmente interesante fomentar el uso de estos primeros símbolos literales como variables, más que como meras incógnitas.

Resulta complicado definir con claridad qué es el pensamiento computacional. Se trata de un término introducido en 1980 por Seymour Papert, creador del lenguaje de programación Logo. Wing (2006) retomó la idea del pensamiento computacional, definiéndolo como el modo en que piensa un científico de datos, argumentando que es una habilidad básica de la que se puede beneficiar todo el mundo, al mismo nivel que la lectura, la escritura y la aritmética. Shute, et al. (2017) lo definió como el marco conceptual necesario para resolver problemas de forma efectiva y eficiente; es decir, algorítmicamente (con o sin la ayuda de ordenadores), cuyas soluciones puedan ser transferibles a otros contextos. Weintrop, et al. (2016), reconociendo la falta de consenso y lo vagas que resultan algunas definiciones, realizaron una revisión de la literatura y desarrollaron un proyecto para elaborar una exhaustiva taxonomía de prácticas propias del pensamiento computacional. Dicha taxonomía se compone de cuatro categorías de prácticas: datos, modelizado y simulación, resolución computacional de problemas y análisis de sistemas.

La relación de las matemáticas con la computación tiene un largo recorrido. De hecho, los primeros ordenadores se construyeron fundamentalmente para resolver ecuaciones. Más aún, ya en el ámbito educativo, las aulas de matemáticas fueron de las primeras en hacer uso de las Tecnologías digitales. De esta doble relación se desprende que, por un lado, el pensamiento computacional permite abordar problemas propios de las matemáticas y, por otro lado, el pensamiento computacional abre una puerta a revisitar ciertos conceptos de las matemáticas desde otro punto de vista.

El pensamiento computacional aparece junto al sentido algebraico principalmente por cuestiones organizativas. En efecto, las conexiones con el álgebra son claras, pero también con el resto de los sentidos. De hecho, el pensamiento computacional se concibe como algo más relacionado con la resolución de problemas. No en vano, el proceso de resolución de problemas en matemáticas y el proceso de resolución computacional presentan ciertas semejanzas. El reconocimiento de patrones, la descomposición del problema en otros más simples, la búsqueda de generalizaciones y abstracciones, la importancia de la modelización son elementos comunes a ambos. Sin embargo, no son los únicos, pues también podemos considerar aspectos afectivos y de carácter metacognitivo, como el desarrollo de una actitud de perseverancia, aprendizaje a través del ensayo y error, flexibilidad, etc.

Sin embargo, a pesar de estos puntos en común, pensamiento matemático y pensamiento computacional no son lo mismo y tampoco puede concebirse el uno como subconjunto del otro (Yadav y Berthelsen, 2021). Este último implica cierto diseño iterativo y un proceso de reflexión en busca de la optimización. También tiende a confundirse la programación con el pensamiento computacional. La programación es la escritura de código que pueda ser interpretado por un ordenador para realizar una serie de acciones, mientras que el pensamiento computacional se relaciona más con la resolución de problemas, es un modo de pensamiento. De hecho, el pensamiento computacional puede desarrollarse sin necesidad de utilizar ordenadores. Juegos de mesa o «trucos de magia» matemáticos (p. ej., adivinar un número) se prestan especialmente a desarrollar el pensamiento computacional, siempre y cuando se ubiquen en una secuencia didáctica con el andamiaje adecuado para reflexionar sobre los saberes que emergen de dichas situaciones de aprendizaje.

Un ejemplo muy claro de pensamiento computacional en matemáticas lo encontramos en el análisis, adaptación y creación de algoritmos. Desde la popularización de las calculadoras, el énfasis en el aprendizaje de algoritmos para las operaciones aritméticas básicas ha quedado en entredicho. Evidentemente, la repetición mecánica e insistente de una serie de pasos para sumar, restar, multiplicar y dividir hace tiempo que no se justifica de ninguna manera. En la vida cotidiana, los adultos no solemos sacar papel y lápiz: o hacemos la cuenta mentalmente (posiblemente, estimando), o utilizamos un dispositivo. Más aún, tanto las pruebas de acceso a ciclos formativos como las pruebas de acceso a la universidad se hacen con calculadora. Esto no quiere decir que no haya que aprender algoritmos, sino que los objetivos no pasan por conseguir que el alumnado haga el mayor número de cuentas inverosímiles en el menor tiempo posible. El objetivo es desarrollar el pensamiento computacional al mismo tiempo que se profundiza en aspectos propios del sistema de numeración posicional y el sentido numérico.

Por último, en el plano tecnológico, conviene considerar la utilización de diversas herramientas tecnológicas digitales para el desarrollo del pensamiento computacional. Ahora bien, al igual que hay actividades sin elementos tecnológicos digitales (*unplugged*) que fomentan el pensamiento computacional, también es perfectamente posible el uso de Tecnologías digitales sin que este implique pensamiento computacional. Lo importante es el qué se hace y la reflexión que se haga sobre ello: las actividades y secuencias didácticas. Actualmente, existen entornos de programación amigables que permiten que el alumnado se centre en aspectos exclusivos del pensamiento computacional, evitando que la sintaxis propia de los lenguajes de programación sea un obstáculo inicial. Ejemplo de ello son los entornos de programación por bloques (p. ej., Scratch). En este sentido merece la pena mencionar la relación entre la implementación de un algoritmo en estos lenguajes y ciertos aspectos del pensamiento algebraico. Más allá de la modelización en sí, al escribir un algoritmo se hace uso de expresiones y símbolos que tienen cierto paralelismo con el quehacer algebraico. Sin embargo, se han de tener presentes las diferencias. Así, una variable algebraica no es lo mismo exactamente que una variable computacional. Sintetizando, esta última hace referencia a una posición de memoria en donde se guarda cierto valor. Finalmente, la robótica, además del interés y motivación que genera en el alumnado, ofrece un interesante conjunto de posibilidades que involucran diseño, programación y resolución de problemas.

E. Sentido estocástico

El desarrollo del sentido estocástico implica lo que algunos autores han denominado alfabetización estadística y probabilística. La primera alude a la capacidad para interpretar datos, evaluarlos críticamente, realizar juicios y valoraciones para expresar opiniones respecto a información estadística, argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos. La segunda se relaciona con la capacidad para acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente diversas situaciones de incertidumbre y riesgo del mundo real, ya sea en la vida cotidiana, política o en contextos científico-tecnológicos.

Consecuentemente, el saber estocástico aparece subdividido en el currículo en dos bloques: por un lado, distribución e inferencia; por otro, predictibilidad e incertidumbre. Es algo que obedece a la clásica distinción entre estadística y probabilidad, cuyo nexo de unión más claro es la inferencia. No se trata, por tanto, de una separación estanca. Por un lado, la inferencia hará acto de presencia desde el primer ciclo con un lenguaje completamente informal, cuestionando -por ejemplo- qué podría haber pasado si los datos se hubiesen recogido en el aula de al lado. Por otro lado, en el aprendizaje de la probabilidad es indispensable realizar experimentos aleatorios, donde se recogen datos que luego hay que analizar. De esta manera, se pondrán en juego elementos asociados a la estadística como hojas de registro o gráficos de barras.

Las orientaciones internacionales (Bargagliotti, et al., 2020; Leavy, et al., 2018; NCTM, 2000) remarcan la importancia y la especificidad del proceso de resolución de problemas en estadística. En particular, que sea el elemento sobre el que se articule el aprendizaje. Los problemas en estadística pueden tomar tanto la forma de situaciones que se plantean en el aula durante el transcurso de una sesión como de un proyecto que dure varios días. En cualquier caso, es el ciclo de resolución del problema estadístico lo que da sentido a los datos, y se compone de cuatro etapas:

csv: BOA20220727001

formular una pregunta que pueda responderse con una investigación estadística, recoger o buscar los datos, analizar los datos, e interpretar los resultados. Estas etapas se realimentan unas a otras.

Las ideas esenciales de la estadística que deben sustentar el aprendizaje de la estadística son (Garfield y Ben-Zvi, 2008): comprensión y uso de los datos, modelos estadísticos, distribución, posición central, variabilidad, comparación de grupos, muestreo y distribución, inferencia estadística y covariación. Por ejemplo, una persona experta en estadística comprenderá el papel de la variabilidad en el proceso de resolución de problemas estadísticos. De esta manera, al formular la primera pregunta de investigación, anticipará cómo debería ser la recogida de datos, el análisis y las posibles interpretaciones, etapas todas ellas que introducen cierta variabilidad. Esto no quiere decir que sean idea que deban dejarse para la enseñanza superior. Al contrario, en consonancia con las orientaciones mencionadas (Alsina, 2019; Bargagliotti, et al., 2020), la imagen de conjunto revela que se trata de desarrollar el sentido estadístico a partir de lo informal e intuitivo. Es más, los niveles de razonamiento propuestos en proyectos como el GAISE (Bargagliotti, et al., 2020) ni siquiera tienen correspondencia biunívoca con cursos o niveles oficiales. Lo que sí se recomienda es que se promueva el desarrollo de todas estas ideas desde edades tempranas.

Para ese desarrollo, resulta imprescindible el trabajo directo con datos. La elección de las preguntas de investigación es lo que permitirá articular una secuencia progresivamente más sofisticada que capture las mencionadas ideas esenciales y no se limite a repetir lo mismo curso tras curso. No se trata de ver la media, moda y media y los gráficos una y otra vez. De hecho, conocer las definiciones de las medidas de posición central y saber calcularlas no sirve de nada si luego no se ponen en juego los problemas relacionados con esos conceptos.

Los gráficos estadísticos merecen una especial atención debido a su omnipresencia en la era de los datos, donde se configuran como un arma de comunicación. Son uno de los malos usos de la estadística, que no se agotan aquí pero que encuentran su cara, quizás, más evidente, en los gráficos manipulados o erróneos que tergiversan los datos y cuentan su propia historia de la situación. Se trata de desarrollar una comprensión profunda de los gráficos que no se limite únicamente a la lectura literal de los datos, sino que se promuevan los niveles de dificultad (Friel, Curcio y Bright, 2001) correspondientes a leer dentro de los datos (algo que no está explícitamente en el gráfico y que exige cierta manipulación matemática); leer más allá de los datos (obtener una información que no está representada en el gráfico y que no se puede deducir con operaciones o comparaciones); leer detrás de los datos (valorar críticamente las conclusiones y la recogida de datos).

Como hemos señalado anteriormente, la inferencia es un aspecto clave. Diversas investigaciones señalan que el alumnado de primaria y comienzo de secundaria confía más en su propio juicio que en la información obtenida a partir del análisis de datos. Además, no resulta trivial la idea de que la muestra del estudio que hemos realizado con nuestra clase forma parte de una población más amplia sobre la que es posible decir algo. De fondo, en el plano conceptual está la relación entre los datos aislados y la distribución como entidad abstracta. La secuencia de enseñanza y aprendizaje debe promover la reflexión de que las medidas estadísticas forman parte de una distribución más amplia, de manera informal y adecuada a la etapa educativa.

La probabilidad es una rama de la matemática que empieza a tomar forma muy tarde desde el punto de vista histórico. Fueron muchos los problemas y dificultades que hubo que superar debido, principalmente, a que nuestra intuición natural nos engaña con frecuencia. No obstante, el desarrollo de la teoría de la probabilidad puede verse como una formalización de las percepciones intuitivas sobre el azar y que desemboca en la idea fundamental de cuantificar; es decir, de asignar un número, el grado de incertidumbre de ciertos sucesos. A lo largo de este desarrollo han ido surgiendo diversos significados de la probabilidad. De esta manera, en el contexto educativo preuniversitario tienen interés: el significado intuitivo, donde se hace uso de lenguaje informal para cuantificar sucesos inciertos y expresar el grado de creencia en su realización; el significado clásico o laplaciano, donde se considera la probabilidad como el cociente del número de casos favorables entre el número de casos posibles, siempre y cuando los sucesos elementales sean equiprobables; el significado frecuencial, donde la probabilidad es el número hipotético hacia el que tiende la frecuencia relativa al estabilizarse cuando el número de repeticiones es suficientemente grande; el significado subjetivo, en el que la probabilidad se convierte en un valor subjetivo que depende del observador y de la información disponible (formalmente, mediante el teorema de Bayes); el significado axiomático, que concibe la probabilidad como un tipo especial de medida y matematiza su estudio de forma rigurosa.

Los resultados de numerosas investigaciones subrayan la importancia de que el alumnado comience a trabajar con situaciones aleatorias de forma temprana, desde Educación Infantil. En Educación Primaria habrá que prestar atención a los diferentes significados, salvo el axiomático, cuya rigurosidad lo hace poco pertinente. El significado intuitivo, el clásico, el frecuencial y el subjetivo proporcionarán diferentes visiones de la probabilidad que, articuladas convenientemente, darán como resultado una buena alfabetización probabilística y una base sólida para el razonamiento estocástico. No hemos de limitarnos, en ningún caso, al tratamiento exclusivo de uno de dichos significados.

Algunos de los sesgos de razonamiento probabilístico más comunes y que conseguirá mitigar una adecuada secuencia didáctica son: el sesgo de disponibilidad, que es la tendencia a pensar que son más probables los sucesos «memorables», o fáciles de recordar (siempre llueve en Pilares); el sesgo de representatividad, que consiste en asignar la probabilidad a un suceso basándose en su similitud a otros resultados ya conocidos (como ayer no llovió, hoy tampoco); y el sesgo de equiprobabilidad, donde se tiende a asumir que los diferentes resultados posibles son igual de probables (puede llover o puede no llover, por lo que la probabilidad es del 50 %).

En particular, siempre resultará esencial enriquecer el lenguaje de uso común desde el significado intuitivo. Prácticamente cualquier situación de aprendizaje que propongamos permitirá una aproximación desde este significado. La conexión con Lengua es evidente, ya que este significado involucra el uso de palabras y expresiones para indicar el grado de creencia en la ocurrencia de un suceso, las cuales pueden ser muy específicas (probable, improbable, muy probable, posible, imposible, seguro, etc.). El significado clásico o laplaciano es el que asociamos normalmente a los juegos de azar, que es donde los sucesos elementales suelen ser equiprobables y donde puede llevarse a cabo un análisis de probabilidades a priori. Un énfasis excesivo en este significado sin la reflexión adecuada podría llevar al sesgo de equiprobabilidad. Por ello, es vital articularlo con el significado frecuencial. Este último permite analizar situaciones para las que no se pueden estudiar a priori las distintas probabilidades de los sucesos. Ahora bien, presenta la limitación de que hay experimentos que no pueden repetirse en las mismas condiciones y que la probabilidad que se obtiene es siempre una estimación. Finalmente, respecto al significado subjetivo, aunque la probabilidad condicional y el teorema de Bayes son propios de la Educación Secundaria, diversos autores recomiendan abordarlo de manera informal en Educación Primaria, con situaciones cotidianas en las que el alumnado comience asignando probabilidades que posteriormente revisará a partir de la información obtenida con nuevas experiencias.

El aprendizaje de la probabilidad ha de surgir de la experiencia, dejando espacio para que el alumnado exprese sus intuiciones y conocimientos previos, de forma que pueda reflexionar sobre lo ocurrido y mejorar sus predicciones. Por lo tanto, será imprescindible la utilización de manipulativos específicos con los que realizar experimentos aleatorios, no limitándose a sucesos equiprobables (dados) sino incorporando dispositivos variados (ruletas y otros) y combinando juegos con otros contextos.

Aunque el razonamiento estadístico y el probabilístico están relacionados y se pueden integrar en el razonamiento estocástico, presentan particularidades que se han de tener presentes (Batanero, et al. 2016). Así, mientras que el punto de partida del razonamiento estadístico son los datos, a los que se trata de dar sentido buscando algún modelo que los explique; el razonamiento probabilístico se inicia estructurando el pensamiento a través del uso de modelos para predecir las diferentes realizaciones de un experimento aleatorio.

Tanto para los aspectos estadísticos como probabilísticos, las Tecnologías digitales resultan fundamentales, tanto mediante la utilización de programas software específicos (hoja de cálculo) como con applets que pueden encontrarse en internet. En el terreno de la estadística, cuando el conjunto de datos es muy grande, las Tecnologías digitales nos permiten centrarnos en la interpretación de los datos; mientras que en probabilidad la simulación evita el tedio de realizar numerosas repeticiones de un mismo experimento. No obstante, no se debe caer en el error didáctico que supondría no realizar experimentación física. Esta última es esencial. Se trata de, en el momento oportuno, sacar partido de la simulación.

Los saberes asociados al sentido estocástico ofrecen excelentes oportunidades de conexión dentro de Matemáticas y con otras áreas. Un proyecto estadístico permite dar respuesta a preguntas que pueden tener orígenes muy diversos, desde los propios intereses del alumnado hasta temáticas específicas de Ciencias de la Naturaleza (p. ej., fenómenos atmosféricos), Educación Física (p. ej., estadística aplicada al ámbito deportivo) y otras. Las conexiones más obvias con

csv: BOA20220727001

otros sentidos matemáticos son con el sentido numérico y de la medida, a partir de las técnicas de conteo sistemático y exhaustivo (precursoras de la combinatoria) y del razonamiento proporcional.

Por último, es conveniente recordar que el orden de presentación de los sentidos y saberes en el currículo no implica que el de estocástica sea el último en importancia, ni que cronológicamente haya de ser el último en ser tratado a lo largo del curso (el socioafectivo es de carácter necesariamente transversal). Tal y como se expone en las orientaciones para la enseñanza, ciertas actividades pueden intercalarse a lo largo del curso o, incluso, servir de contexto. Además, es perfectamente plausible, e incluso recomendable, comenzar algún curso con actividades de estadística y probabilidad.

F. Sentido socioemocional

La influencia del dominio socioafectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha dado lugar a una intensa línea de investigación en educación matemática. Gomez-Chacon (2000b) recoge que esto es debido al fuerte impacto que tiene en cómo el alumnado aprende y emplea las matemáticas; a la influencia de los afectos en el autoconcepto como estudiante de matemáticas; a las interacciones entre dominio afectivo y cognición; a la influencia en cómo se estructura la realidad social de la clase; y a que puede constituir un obstáculo para el aprendizaje significativo.

Es clásica la categorización del dominio afectivo en emociones, actitudes y creencias (McLeod, 1992), tres componentes interrelacionados que se diferencian principalmente en términos de intensidad y estabilidad. Otros autores (DeBellis y Goldin, 2006) incluyen también los valores para referirse a compromisos profundos por parte de los individuos, que pueden organizarse en sistemas muy estructurados, y que ayudan a establecer prioridades a corto plazo y tomar decisiones. Finalmente, otros autores se centran en aspectos como el interés y la motivación (Attard, 2014). Sin embargo, estos últimos pueden explicarse en función de los componentes anteriormente mencionados y no constituyen la esencia del dominio afectivo.

Las secuencias didácticas deben considerar momentos en los que se puedan identificar las emociones que siente el alumnado al resolver problemas. Por ejemplo, es habitual sentirse bloqueado cuando estamos ante un problema de verdad y no un ejercicio. Sin embargo, no todas las personas reaccionan de la misma manera ante dichos bloqueos. Las charlas de aula y las interacciones en pequeño grupo, convenientemente orquestadas, permiten al alumnado poner en común lo que ha pasado durante el proceso de resolución de un problema. También existen herramientas específicas para ello, como el «mapa de humor de los problemas» (Gómez-Chacón, 2000a, 2000b), que proporcionan información tanto al propio alumnado como al docente o la docente de sus reacciones emocionales. Las actitudes y creencias del alumnado hacia las matemáticas se relacionan con los estados emocionales que afloran en la resolución de problemas y les predispone a actuar de cierta manera. Así, si un alumno o alumna poseen una creencia negativa sobre las matemáticas o sobre su enseñanza, tenderá a mostrar sentimientos adversos hacia las tareas relacionadas con dicha materia, lo que le llevará a conductas de evitación o de rechazo de las mismas (Blanco, en Blanco et al., 2015).

En segundo y tercer ciclo, especialmente, el alumnado ha desarrollado ya ciertas actitudes y sistemas de creencias hacia las matemáticas y hacia lo que es aprender matemáticas. De esta manera, cuando el alumnado está acostumbrado a un enfoque expositivo y se pretende seguir un enfoque didáctico abierto a través de la resolución de problemas se produce un cambio en la cultura de aula que puede generar cierta resistencia. Esta resistencia está recogida en la literatura (Brown y Coles, 2013; Sullivan, et al., en Watson, A. y Ohtani, 2015) y ante ella se trata de actuar de forma coherente e insistente con el enfoque didáctico objetivo.

Numerosas investigaciones han constatado que no hay diferencia en el desempeño de niñas y niños en matemáticas. Cuando las hay, son mínimas y restringidas prácticamente al ámbito de la visualización y orientación espacial. Estas, además, pueden explicarse en términos de condicionantes sociales, como los juegos y juguetes de la infancia. Sin embargo, sí que hay diferencias importantes en torno al autoconcepto y la confianza en uno mismo entre niñas y niños, que se traducen en la creación y mantenimiento de estereotipos de género (como el mito de que a los niños se les dan mejor las matemáticas que a las niñas). Resulta preocupante el hecho de que esta brecha de género se identifica en edades tan tempranas como el inicio de la educación primaria. El profesorado debe ser consciente de que muchas veces se produce una diferenciación por género de manera implícita, sin apenas ser consciente de ello (p. ej, la forma de plantear las clases). Es importante considerar la perspectiva de género, ya que los estereotipos se traducen más adelante en una menor participación de la mujer en ámbitos relacionados con las matemáticas y las disciplinas STEM, en general (Kaiser, et al., en Forgasz y Rivera, 2012; Macho Stadler, et al., 2020).

Por lo tanto, es fundamental que el profesorado despliegue estrategias para reforzar el autoconcepto de todo el alumnado, atendiendo no solo a la perspectiva de género sino a cualesquiera otras perspectivas de ámbito étnico y sociocultural. Es importante reforzar creencias positivas en el alumnado acerca de sus propias capacidades, evitando, por ejemplo, relacionar sus éxitos con la suerte.

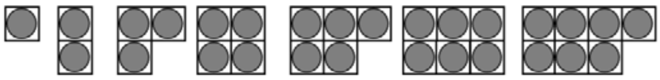
La principal propuesta de actuación es desde el enfoque didáctico (Boaler y Sengupta-Irving, 2012; Macho Stadler, et al., 2020). Una concepción expositiva de las clases en la que el profesorado explica y el alumnado se limita a memorizar y a poner en práctica lo dicho por el docente o la docente se promueve un ambiente competitivo e individualista. Especialmente, si, como suele pasar en esos casos, la evaluación es básicamente sumativa. Este ambiente, entre otras cosas, ocasiona desigualdades por género, haciendo que las niñas rindan y se impliquen menos en su aprendizaje. Por el contrario, un enfoque abierto en el que se trabaje en grupo, se discutan las ideas libremente y no se penalice el error, sino que se utilice como oportunidad de aprendizaje, la evaluación sea esencialmente formativa, etc. mejora el aprendizaje de todo el alumnado. Igualmente, hay que considerar que la elección de contextos para las situaciones de aprendizaje sea inclusiva y variada.

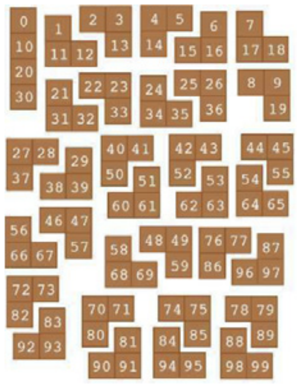
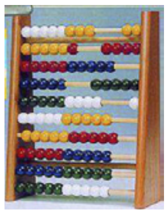
Por último, no hay que olvidar el papel de los referentes en el desarrollo cognitivo, afectivo y cultural. Sin olvidar que, especialmente en educación infantil y primaria, los principales referentes del alumnado son personas de su entorno cotidiano (familia y profesorado), es conveniente dar a conocer las matemáticas como una construcción humana y, en especial, la contribución de la mujer y diversas minorías, históricamente envuelta en dificultades. Una forma de hacer esto es abordar en clase la biografía de grandes matemáticas, procurando que su campo de estudio resulte cercano al alumnado. Aunque esto último puede resultar complicado, cabe mencionar el legado de la aragonesa Andresa Casamayor, cuyo «Tyrocinio arithmetico» es el primer libro de ciencia escrito por una mujer en español que se conserva y que versa sobre operaciones básicas. Además de la biografía y logros de esta y otras mujeres matemáticas, las programaciones didácticas pueden contemplar la realización de charlas y conferencias de mujeres matemáticas que relaten su experiencia.

III.2. Concreción de los saberes básicos

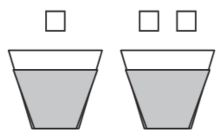
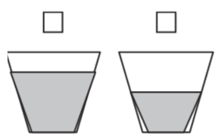
III.2.1. Primer ciclo de Educación Primaria

A. Sentido numérico	
La aritmética oral es el soporte de la aritmética escrita y debe precederla. Esto resultará esencial en el primer ciclo, donde el alumnado se encuentra todavía aprendiendo a leer y a escribir. Conviene tener presente que no se va a perder «saber matemático» por enfatizar la oralidad e invertir más tiempo en desarrollar técnicas orales de cálculo. De hecho, en este ciclo es una de las principales actuaciones para la inclusión. El aprendizaje del recuento, del sistema de numeración oral, los significados del número natural como cardinal, ordinal, medida y código, las técnicas orales de cálculo, la narración y escenificación de los enunciados de las situaciones y problemas, así como su resolución por métodos orales y en conexión con lo manipulativo, debe abordarse antes de la escritura de números y, por supuesto, de sus operaciones. En cuanto a la estimación, conviene distinguir entre estimación en cálculo y estimación en medida. La estimación en cálculo se pone en práctica al estimar el resultado de una operación aritmética; mientras que la estimación en medida involucra los juicios que se hacen sobre el valor de una cantidad de magnitud, bien sea discreta o continua. Para este bloque sobre números y cantidad, y en este ciclo en especial, las situaciones de estimación de cálculo y de medida se solapan en cierta manera, dado el rango de números y operaciones a realizar y que estas se harán muchas veces con los objetos presentes.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
A.1. Conteo y cantidad: - Estrategias variadas de conteo y recuento sistemático en situaciones de la vida cotidiana en cantidades iniciando el trabajo con centenas. - Estimaciones razonadas de cantidades en contextos de resolución de problemas. - Lectura, representación, composición, descomposición y recomposición de números naturales iniciando el trabajo con centenas. - Representación de una misma cantidad de distintas formas (manipulativa, gráfica o numérica) y estrategias de elección de la	Muchas veces se fomenta la idea de que solo es legítimo hablar de número cuando se puede enseñar a escribirlo. Este condicionamiento, que en la escuela no se llega a explicitar, pero que se percibe en toda la enseñanza de los números, obliga a presentar los números de uno en uno, en orden creciente, al mismo tiempo que se enseña su escritura. Como consecuencia de esto, el alumnado se ve inmerso en la problemática de escribir números que no han sido objeto de enseñanza previa y sobre los que apenas tienen experiencias que les permitan darles significado, ni interpretarlos como descomposición de otros números. La enseñanza de la aritmética oral es independiente de la aritmética escrita y, en buena parte, debe precederla. Esto se concreta en que en el primer ciclo se deberían introducir los veinte primeros números antes de enseñar a leer y escribir las cifras y los cien primeros números antes de enseñar la representación escrita de los números de dos cifras. Del mismo modo, mientras se trabaja esto último, debe proseguirse la presentación oral de números de tres

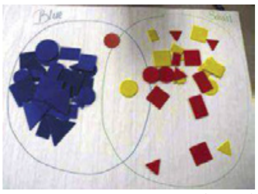
representación adecuada para cada situación o problema.	cifras, para que cuando llegue el momento de escribirlos, el alumnado esté medianamente familiarizado con su significado y propiedades. El no tener la obligación de escribir los números tan pronto como se nombran permite introducirlos por tramos de la sucesión numérica, en vez de hacerlo de uno en uno, y, a medida que el recitado de esos tramos se consolida, se pueden poner en marcha situaciones de cardinalidad u ordinalidad con recuento (sobre todo, recuentos de uno en uno y de diez en diez), de cardinalidad sin recuento, de ordenación y de suma y resta de números naturales, que son las que sientan la base experiencial sobre la que el alumnado construye el significado de los números y sus distintas propiedades. Además, antes de iniciar la representación escrita de números de dos, tres o cuatro cifras, debe procederse a representarlos mediante distintos materiales que pongan de manifiesto de una manera palpable su descomposición en unidades, decenas, centenas o millares. Solo de esta manera se puede esperar que el alumnado comprenda medianamente los principios en los que se basa nuestro sistema de numeración posicional decimal. Por ejemplo, con policubos (cubos multilink), regletas, gomets, piezas de construcción..., para comprender que el concepto de número va mucho más allá de la forma que tenga o del símbolo que se emplee para representarlo. No basta con dar sentido a los números del uno al diez, sino que hay que realizar actividades de recuento que pongan al alumnado en situación de manipular cardinales y ordinales de uno a cien e incluso de más de cien objetos. Es raro que un libro de texto plantee este tipo de situaciones, indispensables.  Plaquetas o regletas de Herbiniere-Lebert, un manipulativo fácilmente imprimible. Las situaciones de aprendizaje de la sucesión de los números naturales, las técnicas de recuento, el significado del número como cardinal y ordinal, el orden numérico y la iniciación a la combinatoria, incluyen las siguientes cinco clases de situaciones didácticas que, además, pueden aparecer aisladas o de forma articulada (siguiendo a Cid, et al., en Godino, 2003, donde se describen todas en detalle): de recitado; de cardinalidad u ordinalidad con recuento; de cardinalidad sin recuento; de ordenación; y de combinatoria. En cada una de estas situaciones, habrá que considerar las variables didácticas; es decir, aquellos aspectos de la situación que pueda ser modificado por el docente o la docente, de manera que afecte a las estrategias de resolución de la situación y a los saberes que se ponen en juego. Por ejemplo, no es lo mismo que el alumnado tenga que contar 34 objetos movibles y al alcance de su mano que 34 objetos dibujados. En el primer caso pueden resolver la situación poniendo en juego una técnica auxiliar de «separar los objetos», mientras que en el segundo tendrán que recurrir a una técnica auxiliar de «marcar los objetos» o «dibujar un camino». Existen otras variables, llamadas pedagógicas, que generan distintas situaciones didácticas dentro de una misma clase sin modificar el conocimiento matemático en juego. Por otro lado, después de haber trabajado números mayores que diez de forma oral, la escritura y lectura simbólica de números de dos cifras es un aprendizaje clave en este ciclo. Comprender que en los números de dos cifras el primero representa grupos de 10 mientras que el segundo representa unidades no es fácil y hasta el 16, expresados verbalmente, no encontramos palabras que indiquen que se trata de números compuestos (p. ej., «quince» frente a «dieciséis»). Es necesario utilizar material y representarlo de formas diversas para facilitar la comprensión: representando la decena como un grupo y las unidades como elementos sueltos, de manera habitual con el material que se elija, (garbanzos en vasos, bloques multibase, etc. Después de la representación con material y dibujos de este, sigue la escritura. Es importante no comenzar por números que terminen en cero (múltiplos de diez), ya que estos son más difíciles de escribir que los que no contienen ceros, por lo que no deben presentarse al comienzo. En particular, la escritura del diez es la más difícil de comprender por la presencia del cero y porque el agrupamiento de diez en diez no se percibe con facilidad, ya que no sobra nada al hacer el agrupamiento. La representación de números, sobre una secuencia, al estilo de la recta numérica, pone el acento más en el orden, y ayuda a imaginar su situación espacial. La construcción de una tabla de números del 1 al 100 ayuda a comprender las regularidades numéricas, por ejemplo, las columnas crecen de 10 en 10, las filas de 1 en 1. Para esto pueden ayudar

<table>
<tr>
<td></td>
<td>juegos como el de «Buscando al vecino», que consiste en buscar los números correspondientes para completar el puzle:

Puesto que el aprendizaje de la centena se basa en la decena, y las regularidades que se observen en la tabla de 100, mencionada anteriormente también se cumplen para la centena, no tiene mucho sentido hacer tablas con números mayores. Es preferible aprender con los números pequeños y basarse en ellos que trabajar con números grandes y menos imaginables. En el trabajo con los números de tres cifras, se puede seguir utilizando el material elegido para representar las decenas: si se han utilizado vasos, apilando 10 vasos y posteriormente cambiando los 10 vasos por un vaso grande; si se ha hecho con cajas apilando cajas y cambiándolas por una mayor, etc. Este trabajo se puede hacer en los dos sentidos posibles: escribir el número a partir de una cantidad dada con el material; y construir con el material la cantidad a partir de un número dado por escrito. Poco a poco se trata de ir avanzando hacia modelizaciones más gráficas y alineadas con el simbolismo propio del sistema de numeración posicional, como la que ofrecen los cubos multibase (material estructurado).
Manipulativos que favorecen todo lo anterior: no estructurados (policubos, fichas de números, de objetos; collares de bolas de 10, 20, 50; cajas de huevos de 10 en dos filas, contadores, etc.) y estructurados (placas multibase, ábaco horizontal -aditivo- o rekenrek).

Ábaco horizontal o aditivo.
Al respecto de los ábacos. Muchas veces se piensa directamente en los ábacos verticales, como el soroban japonés. El correcto manejo de un ábaco vertical ya presupone el conocimiento previo del sistema posicional de numeración, por lo que no es un material que facilite la adquisición y comprensión del conocimiento (ya que el conocimiento debe estar adquirido previamente para su uso). Por eso, es más recomendable el uso de los ábacos horizontales para alcanzar el objetivo de interiorizar y comprender el sistema de numeración posicional, especialmente en estos primeros niveles. Los ábacos verticales pueden ser útiles para otras finalidades distintas a la escritura de números naturales, como las orientadas al cálculo de operaciones aritméticas.
La estimación en cálculo puede implicar procesos de reformulación (redondeo, truncamiento o sustitución de los números implicados), traslación (cambiar la estructura del problema) y compensación (hacer ajustes durante o después del cálculo). Además, se pueden efectuar juicios sobre los resultados para tratar de determinar si la estimación es aceptable. Es indispensable plantear situaciones de estimación de magnitudes discretas. De forma integrada con las situaciones de recuento, se puede plantear que el alumnado indique antes su estimación.</td>
</tr>
<tr>
<td>**A.2. Sentido de las operaciones:**
- Estrategias de cálculo mental con números naturales iniciando el trabajo con centenas.
- Suma y resta de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido: utilidad</td>
<td>Las estrategias de cálculo tienen que ser razonadas, y conviene familiarizarse con ellas por medio de una práctica razonada y rica, y siempre teniendo en cuenta la flexibilidad, pudiendo hacer una elección entre las estrategias trabajadas y verbalizadas.
Entre las estrategias útiles para el cálculo rápido se pueden utilizar, entre otras que puedan surgir de la conversación: al cambiar el orden de los sumandos en una suma, el resultado no varía, será más eficaz sumar 7+2 que 2+7, siempre que se haya interiorizado “contar desde”,</td>
</tr>
</table>

en situaciones contextualizadas, estrategias y herramientas de resolución y propiedades.	no empezar siempre por el 1; "el paso por el 10", para sumar 7+5, se descompone el 5 en 3+2, y se convierte en 7+3+2=12, ya que a 7 le faltan 3 para llegar, "pasar" por el 10, estrategia de gran utilidad para el cálculo mental con números mayores y para la que se requiere haber hecho un trabajo previo y sistemático de descomposición de los números hasta el 10; automatizar la suma de dobles de una cifra; y de "casi dobles", 4+4=8, 4+3, uno menos, 4+5, unos más; que sumar 9 es como sumar 10 y quitar 1; partir de resultados conocidos para obtener otros, si 7+2=9, 17+2 = 19; 17+12 =29; 70+20=90 Es más importante dominar las estrategias anteriores, que llevan a un cálculo más comprensivo, que trabajar un algoritmo. Las sumas y restas, que además deben presentarse de forma intercalada, pues ambas forman parte de las situaciones aditivas, deben acompañarse de la manipulación del material, para garantizar la representación con la comprensión y se tenga un buen dominio de la agrupación de unidades en decenas. Los algoritmos de las operaciones no tienen sentido en este ciclo y no favorecen el desarrollo del sentido numérico a estas edades. Sí tienen valor como objeto de estudio dentro del pensamiento computacional en ciclos posteriores. Pero ahora se trata de enfatizar cálculo oral y mental, así como flexibilidad sobre las operaciones y comprensión de las situaciones-problema que responden a ellas. Se trata de trabajar con situaciones aditivas («de suma o de resta») con la intención de que las reconozcan, las resuelvan utilizando su conocimiento de los números y traduzcan a lenguaje matemático. Que se enfrenten a situaciones que se pueden modelizar y resolver de diversas maneras e igualmente correctas, por ejemplo, 7+2=9 es lo mismo que 2+7=9, o que si tenemos que saber el dinero que nos falta para comprar algo que cuesta 11 euros y ya tenemos 5, podemos resolverlos preguntando ¿cuánto me falta de 5 a 11 euros? Y después escribirlo 11-5=? o 5 +?= 11. La iniciación en la resta, tendrá que hacerse de la misma manera, manipulando materiales, y empleando estrategias diversas para calcular el resultado, entendiendo que con frecuencia es necesario descomponer decenas y centenas. Cuando se llegue a un resultado, tanto si es correcto como si no lo es, hay que iniciar la reflexión de cómo han llegado, cómo lo han hecho, comunicarlo y contrastarlo con sus compañeros o compañeras. Esta conversación ayudará a ampliar las estrategias y encontrar la más eficiente. Después de este proceso de reconocimiento, obtención del resultado, explicación de cómo se ha llegado, se puede escribir con lenguaje matemático, (+, -, =); en grupo, pautado por el profesorado y hacia una mayor autonomía.
A.3. Relaciones: - Sistema de numeración de base diez iniciando el trabajo con centenas: aplicación de las relaciones que genera en las operaciones. - Números naturales en contextos de la vida cotidiana: comparación y ordenación - Relaciones entre la suma y la resta: aplicación en contextos cotidianos.	Comprender lo que es la suma y lo que es la resta no debe limitarse a saber calcular operaciones formales (con o sin algoritmo) ni tampoco a elegir una de las dos operaciones en situaciones contextualizadas. Se trata de abordar de forma progresiva las diversas situaciones aditivas contextualizadas (concretas) de una etapa, al mismo tiempo que se aprenden hechos numéricos y se desarrollan técnicas de cálculo formal que conectan con las técnicas de conteo intuitivas del alumnado. Conviene observar que es preferible, por tanto, pensar en situaciones aditivas de una etapa en lugar de problemas «de suma» o problemas «de resta». La dificultad de estas situaciones no radica únicamente en el tamaño de los números, sino en su estructura semántica (significado y papel de los números que intervienen). Será la comprensión del rango de situaciones en que emerge la suma o la resta y las conexiones con el conteo las que enriquecerán el significado de estas operaciones. En Cid et al. (en Godino, 2003) se recoge una clasificación de estas situaciones atendiendo al papel que juegan los números: estado (E), cuando los números del problema son el cardinal de un conjunto, el ordinal de un elemento o la medida de una cantidad de magnitud; transformación (T), cuando un número expresa la variación que ha sufrido un estado; comparación (C), cuando el número indica la diferencia que existe entre dos estados que se comparan entre sí. De esta manera se obtienen los siguientes tipos de situaciones: EEE, ETE, ECE, TTT, CTC, CCC. En estas situaciones, además del significado de los números (cardinal, ordinal o medida) y el papel (E, T o C), se ha de tener en cuenta la posición de la incógnita; es decir, el número desconocido, que puede ser el total o una de sus partes (en las situaciones parte-todo) o el término inicial, medio o final en las demás situaciones. Además, hay que considerar también el sentido del término medio en las situaciones ETE, ECE y CTC, ya que puede indicar un aumento o una disminución del término inicial (si es una transformación) o puede señalar si el término inicial es mayor, igual o menor que el término final (si es una comparación). Por ejemplo: El enunciado «Sara tiene 7 cromos. Regala 3 a un amigo. ¿Cuántos le quedan?» responde a una situación Estado-Transformación-Estado (ETE), con la incógnita en el estado final, donde los 7 cromos son el estado inicial y los tres que regala, la transformación. La comprensión surge de la resolución de problemas, que es lo que permite al alumnado construir el significado. Para ello habrá que plantear diferentes situaciones aditivas (EEE, ETE

<table>
<tr><td></td><td>y ECE), de manera que el alumnado se familiarice con ellas y las resuelvan inicialmente con técnicas de recuento (que pueden ser variadas, y dependiendo de los números que intervienen, favorecer unas u otras, como el conteo desde el mayor). Resulta fundamental, además, ir variando desde el principio las diferentes posiciones del número desconocido y los sentidos de comparaciones y transformaciones, para evitar que el alumnado trate de decidir si es un problema «de suma» o «de resta» a partir de palabras «clave» en el enunciado (p. ej., si aparece total, entonces es de suma; si aparece quitar, de resta), las cuales llevan muchas veces a equívocos y, en pocas ocasiones, a la comprensión.
Las situaciones de tipo TTT, CTC y CCC no conviene presentarlas al comienzo del aprendizaje de la suma y la resta, ya que son muy complejas. Se puede valorar su tratamiento en segundo o tercer ciclo.
Situaciones y problemas en las que se usa la calculadora para introducir y desarrollar conceptos relacionados con el sistema decimal posicional. Una actividad que consistiera en ir sumando uno o restando uno en la calculadora da pie a reflexionar acerca de qué cifras cambian. Un ejemplo muy interesante, para 2º curso, consiste en explorar cómo llegar a ciertos números a partir de uno determinado. Para cumplir el objetivo, el alumnado pondrá en juego diversas descomposiciones, saltos de decena, etc. Es una actividad abierta que permite la discusión de diferentes estrategias.
<table>
<tr><th>Con la calculadora. Comienza con 78 y, sin borrar el resultado, haz el número siguiente.</th><th>¿Qué números has tenido que sumar o restar?</th></tr>
<tr><td>98</td><td></td></tr>
<tr><td>48</td><td></td></tr>
<tr><td>18</td><td></td></tr>
<tr><td>118</td><td></td></tr>
<tr><td>119</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>A.4. Razonamiento proporcional:
- Iniciación al pensamiento relativo.</td><td>Existen ciertas situaciones de aprendizaje que proporcionan una base experiencial que permite cierto desarrollo informal del pensamiento relativo que, a la postre, termina siendo beneficioso para el desarrollo del pensamiento proporcional. Podemos, por ejemplo, trabajar situaciones de comparación cualitativa (sin números), donde se plantean preguntas sobre conceptos como dulzor, intensidad de sabor, lo apretadas que estarán las plantas, etc. Por ejemplo: dos niñas hacen zumo de limón. Usan la misma cantidad de zumo, como ves en los vasos. Una usó un terrón de azúcar y la otra usó dos terrones de azúcar. Pregunta directa: ¿un zumo sabrá más dulce que el otro o tendrán el mismo sabor? Pregunta inversa: ¿un zumo tendrá un sabor más intenso (más ácido) que el otro o tendrán el mismo sabor?

Y lo mismo con esta otra situación.

Fuente: Nunes, et al. (2003).</td></tr>
<tr><td>A.5. Educación financiera:
- Sistema monetario europeo: monedas (1, 2 euros) y billetes de euro (5, 10, 20, 50 y 100), valor y equivalencia.</td><td>El trabajo con contextos económicos en el resto de sub-bloques del sentido numérico permite cubrir los saberes del sub-bloque de Educación Financiera.
No se trata de emplear el sistema monetario como «recurso manipulativo» sobre el que construir la idea de sistema decimal posicional, ya que presenta ciertas peculiaridades, como las bases auxiliares 2 y 5 y, particularmente en este ciclo, se salta toda la fase que conecta con el conteo y la representación de la magnitud del número.</td></tr>
<tr><th colspan="2">B. Sentido de la medida</th></tr>
<tr><td colspan="2">El sentido de la medida va mucho más allá de ser un simple contexto sobre el que hacer operaciones. Es la base sobre la que se construyen muchas de las grandes ideas de las matemáticas. Quizás, el mejor ejemplo de ello sea la abstracción paulatina del número racional, a través de sus diferentes representaciones (fracciones, decimales, etc.). En el primer ciclo de Educación Primaria se debe continuar la línea iniciada en Educación Infantil sobre magnitudes y medida. Los procesos de comparación y de medida deben realizarse en su totalidad, verbalizando las acciones que se realizan y reflexionando sobre estas. Hay que tener en cuenta que cada magnitud tiene asociadas unas acciones y un vocabulario específico, por lo que las situaciones de aprendizaje deben ser ricas y variadas en este sentido. La estimación será un estupendo campo para la exploración que, además de permitir el desarrollo de razonamientos propios, sirve para evaluar el desarrollo del sentido de la medida.</td></tr>
<tr><td>Conocimientos, destrezas y actitudes</td><td>Orientaciones para la enseñanza</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>B.1. Magnitud y medida:
- Atributos mensurables de los objetos (longitud, masa, capacidad), distancias y tiempos.
- Unidades convencionales (metro, kilo y litro) y no convencionales en situaciones de la vida cotidiana.
- Unidades de medida del tiempo (año, mes, semana, día y hora) en situaciones de la vida cotidiana.
- Conservación de la cantidad de magnitud de interés en una situación concreta.
- Estrategias de comparación directa y ordenación de medidas de la misma magnitud.
- Procesos para medir mediante repetición de una unidad y mediante la utilización de instrumentos no convencionales.
- Procesos de medición con instrumentos convencionales (reglas, cintas métricas, balanzas, calendarios...) en contextos familiares.</td>
<td>Las situaciones de identificación y conservación de la magnitud son situaciones que ponen al alumnado ante la problemática de abstraer que hay una cualidad que se mantiene constante, que no varía, a pesar de que haya otras características del objeto que sí lo hagan.
La conservación de la cardinalidad y de la longitud son las primeras en desarrollarse. En cambio, la conservación del área y del volumen es más tardía, culminando en torno al final de la educación primaria. A continuación, exponemos algunas actividades que involucran situaciones de conservación, comparación y medida con unidades arbitrarias, para la magnitud masa. Se recomienda utilizar materiales como plastilina o grupos de policubos, pues permiten cambiar de forma manteniendo la misma cantidad de masa.
- Para evaluar los conocimientos previos del alumnado y su competencia relacionada con el sentido de la medida, se plantean actividades de sopesado de dos objetos, usando las manos como platillos de una balanza, para averiguar cuál es el más pesado y cuál es el más ligero.
- Actividades para comprender y ampliar el vocabulario relacionado con la magnitud: más pesado, más ligero al comparar el peso de dos objetos, sopesar, equilibrar, balanza, etc.
- Actividades de comparación de dos objetos utilizando la balanza, cuando el sopesado con las manos no permita establecer la comparación. El alumnado deberá saber manejar la balanza de dos platos y dar sentido a las distintas posiciones de los mismos. No son actividades triviales en las que simplemente «se juega» con la balanza. Hay un momento de exploración, por supuesto, pero las preguntas y las tareas que se planteen son sumamente importantes. Posibles actividades concretas son: equilibrar objetos en la balanza con una bola de plastilina fabricada al efecto; equilibrar un objeto con varios objetos; equilibrar una bola de plastilina, fraccionarla después y observar que los pedazos obtenidos se equilibran con el mismo objeto que la bola; descomponer una cantidad de plastilina en dos o tres bolas del mismo peso; comparar objetos del mismo aspecto exterior (volumen y forma) y de peso diferente.
- Actividades de ordenación de objetos con la balanza. Los objetos han de tener una cantidad de peso lo suficientemente próximas como para no poderlos ordenar usando solo la estimación dada por el sopesado de las manos. Convendrá verbalizar las estrategias a utilizar, basadas en la aplicación de la propiedad transitiva, para economizar el número de pesadas. ¿Se puede hacer la ordenación con un número menor de pesadas? ¿Cuántas? ¿Cómo lo has hecho?
- Actividades de medida con unidades arbitrarias cuyo soporte sea plastilina, policubos o centicubos. Son situaciones de cálculo en las que el transporte, reiteración y recuento de la unidad que equilibra en la balanza la cantidad a medir da lugar al número-medida.
- Actividades de construcción de cantidades de peso conocida su medida. Por ejemplo, construir con plastilina, policubos o similares objetos que tenga una determinada medida. Se recomienda construir un sistema regular de pesas, no decimal, marcándolas convenientemente.
Conviene tener en cuenta que una situación de enseñanza puede incluir varias de las situaciones anteriores. Por otro lado, en estas orientaciones, por motivos de espacio, solo se ha ilustrado brevemente algunas actividades alrededor de la magnitud masa. Una secuencia de aprendizaje cuidadosamente diseñada para el primer ciclo debería considerar el tratamiento profundo de la longitud, masa, capacidad y volumen, y tiempo. Se pueden encontrar muchos ejemplos y bibliografía, pues es un tema ampliamente tratado desde la didáctica de la matemática (p. ej., Chamorro y Belmonte, 1991).</td>
</tr>
<tr>
<td>B.2. Estimación y relaciones:
- Estimación de medidas (distancias, tamaños, masas, capacidades...) por comparación directa con otras medidas.</td>
<td>La estimación en medida es la referida a los juicios que pueden establecerse sobre el valor de una determinada cantidad de magnitud o bien la valoración que puede hacerse sobre el resultado de un proceso de medida. Conviene distinguir entre estimación de magnitudes discretas y continuas
Un ejemplo de estimación en medida de una magnitud continua consistiría en estimar la altura de una persona mediante la comparación con nuestra propia altura. Magnitudes continuas son la longitud, como en este ejemplo, el área, la masa, la capacidad, el volumen, etc. En cuanto a la estimación de magnitudes discretas, se pueden plantear situaciones de aprendizaje planteando averiguar el número de pinzas en una cesta, canicas en un recipiente, personas en la calle, etc.
Además de considerar diferentes magnitudes, un buen diseño didáctico debe tener en cuenta las posibles situaciones que surgen, dependiendo de si la unidad de medida está presente o no; y dependiendo de si el objeto cuya cantidad de magnitud a estimar está presente o no.
<table>
<tr><td></td><td>Objeto presente</td><td>Objeto ausente</td></tr>
<tr><td>Unidad presente</td><td>Qué parte de mi cuerpo mide unos 2 palmos</td><td>Qué objeto puede tener 3 palmos de altura</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
<table><tr><td>Unidad ausente</td><td>Qué parte de mi cuerpo mide unos 15 cm</td><td>Qué objeto puede medir 30 m de altura</td></tr></table>
Para desenvolverse con estas situaciones, el alumnado deberá desarrollar diversas técnicas y habilidades, como interiorizar algunas unidades y conocer referentes de la vida cotidiana para las diversas magnitudes. En el primer ciclo se debería poner especial énfasis en la estimación haciendo uso de unidades arbitrarias.</td></tr>
<tr><th colspan="2">C. Sentido espacial</th></tr>
<tr><td colspan="2">Aunque el modelo de niveles de razonamiento introducido por los van Hiele no corresponde con etapas escolares sino con razonamientos personales, podemos guiarnos con que la mayoría del alumnado de este ciclo va a razonar desde los niveles 0 (pre-reconocimiento) y 1 (visualización) y hay que plantear actividades que permitan consolidar el nivel 1, e iniciar el camino hacia el nivel 2 (análisis). En otras palabras, al comienzo de la Educación Primaria, el alumnado suele reconocer o estar en proceso de reconocer las figuras geométricas por su apariencia, viéndolas como un todo desprovisto de componentes o atributos, quizá, comparándolas con un prototipo conocido (puerta, ventana, balón, etc.). No reconocen las partes que componen la figura ni son capaces de analizarla para indicar propiedades esenciales. Apenas hay razonamiento, solo percepción. Será necesario comenzar con actividades enfocadas a aprender vocabulario geométrico, consolidar conceptos esenciales a la posición (delante-detrás, arriba-abajo, etc.), identificar formas y reproducir figuras en un ambiente de exploración, etc., y, sobre todo, incorporar situaciones de aprendizaje que permitan ir progresando en el razonamiento, atendiendo a las propiedades de las formas geométricas, la organización del espacio y las transformaciones geométricas (giros, desplazamientos).</td></tr>
<tr><th>Conocimientos, destrezas y actitudes</th><th>Orientaciones para la enseñanza</th></tr>
<tr><td>C.1. Formas geométricas de dos y tres dimensiones:
- Formas geométricas sencillas de dos dimensiones en objetos de la vida cotidiana: identificación y clasificación atendiendo a sus elementos.
- Estrategias y técnicas de construcción de formas geométricas sencillas de una, dos o tres dimensiones de forma manipulativa.
- Vocabulario geométrico básico: descripción verbal de los elementos y las propiedades de formas geométricas sencillas.
- Propiedades de formas geométricas de dos dimensiones: exploración mediante materiales manipulables (mecanos, tangram, juegos de figuras, etc.) y herramientas digitales.</td><td>El análisis de formas geométricas en toda la etapa, pero fundamentalmente en este ciclo, hay que hacerlo manipulando materiales. La realidad ofrece abundantes posibilidades: cajas, envoltorios, frutas, etc. que se deben considerar junto a manipulativos específicos.
En este ciclo cobra mucha importancia cuidar el punto de entrada de las actividades para consolidar los conceptos fundamentales de la organización espacial.
La búsqueda e identificación de figuras de la realidad de diferentes tamaños y en diferentes posiciones, por medio de materiales reales, fotografías, en aplicaciones informáticas, etc. evita un aprendizaje limitado a formas y figuras que son presentadas en su posición estereotipada, lo cual es un gran inconveniente de los libros de texto, señalado en multitud de investigaciones.
Se deberían llevar a cabo múltiples y variadas actividades de clasificación, donde además de propiedades geométricas se pueden incluir otras cualidades de los objetos, como el color o la textura. Esta figura muestra un ejemplo con bloques lógicos (en la fuente aparece descrita en detalle).

Fuente: Howse y Howse (2014).
Habría que ir planteando actividades como esta, que pongan en juego la visualización de las distintas propiedades de las figuras y los cuerpos, haciendo que el alumnado las relacione, empleando distintos criterios de clasificación. Al final de ciclo es esperable que atiendan ya al número de lados, la forma de las caras de los cuerpos en 3D, etc. Con los cuerpos en 3D, las actividades de clasificación pueden orientarse a distinguir aquellas que tengan una superficie plana y otra curva (poliedros y no poliedros).
Muchas de las actividades pueden realizarse en conexión con el sentido de la medida. Por ejemplo, mediante la manipulación de cuadrados da pie a plantear la construcción de todas las figuras posibles con dos cuadrados, tres, cuatro, cinco, etc., lo que da lugar a las familias de triminós, tetraminós, etc. Y lo mismo con cubitos. Esto permite poner en juego la diferencia entre igualdad geométrica e igualdad física.
El uso de plantillas triangulares para dibujar diferentes polígonos y contar los triángulos que las forman también es una interesante situación de aprendizaje, al igual que su «equivalente» en 3D, manipular cubitos y hacer diferentes composiciones policúbicas y contar los cubitos que las forman. En conexión con el sentido de la medida se pueden comparar y ordenar de acuerdo con alguna cualidad, como longitud, área, peso, etc.). La utilización de tangrams, mosaicos, pentominós, bloques lógicos (pattern blocks), etc. posibilita la composición de un mismo polígono con diferentes formas.
Los «dictados geométricos» son una actividad muy interesante en la que un compañero o compañera describen a otro una forma geométrica y este la dibuja. Después, se discute a ver si era la forma deseada o qué ha podido pasar.</td></tr>
<tr><td>C.2. Localización y sistemas de representación:
- Posición relativa de objetos en el espacio e interpretación de movimientos:</td><td>De nuevo, difícilmente podremos plantear actividades específicas de este grupo de saberes, pues casi todas van a involucrar la modelización e, incluso, el pensamiento computacional. Las situaciones de aprendizaje deberían incluir la realización recorridos en un plano con tramos rectos y curvos para llegar de un lugar a otro, considerando varios recorridos posibles,</td></tr>
</table>

descripción en referencia a uno mismo a través de vocabulario adecuado (arriba, abajo, delante, detrás, entre, más cerca que, menos cerca que, más lejos que, menos lejos que…).	codificando el recorrido con números (contaje) y flechas (dirección y sentido). Esto es algo que debería realizarse con el propio cuerpo o sobre un sistema de representación, como un mapa, bien sea en papel o en una aplicación informática. - Explicar recorridos para salir de un laberinto. - Realizar recorridos en el aula y codificarlos con número de pasos y direcciones. - Evocar un recorrido y codificarlo, explicarlo. - Descripción de posiciones entre objetos a partir de fotografías, maquetas, los propios dibujos. - «Dictados geométricos» de itinerarios entre compañeros o compañeras con un inicio y un final, en una cuadrícula (tanto con el propio cuerpo como con fichas sobre una hoja de papel).
C.3. Movimientos y transformaciones: - Apreciar la simetría y la regularidad en dibujos sencillos.	Se trata de ofrecer una base experiencial al alumnado para que este desarrolle sus intuiciones sobre la simetría y los patrones en geometría. Es algo que puede realizarse en clara conexión con el área de Plástica. Por ejemplo, dibujar los ejes de simetría en figuras y dibujos sencillos; plegar figuras sencillas de papiroflexia (los pliegues adoptan configuraciones geométricas que han de apreciarse); recortar un papel con un propósito específico y dar lugar a una figura simétrica; completar figuras atendiendo a la simetría. A partir de la reproducción y coloreado de figuras y mosaicos con ayuda de una cuadrícula, se posibilita la observación y reconocimiento de regularidades geométricas. Para ello, resulta esencial planificar el andamiaje y elegir preguntas adecuadas para que el alumnado exponga sus observaciones. Además, la presencia de mosaicos y frisos en distintos monumentos del patrimonio aragonés, permite descubrir e investigar la geometría de las transformaciones.
C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica: - Modelos geométricos en la resolución de problemas relacionados con los otros sentidos. - Relaciones geométricas: reconocimiento en el entorno.	Este conjunto de saberes no puede concebirse de forma aislada al de formas geométricas de dos y tres dimensiones. El razonamiento va a ser una constante en todo el trabajo que se haga en geometría. Algunas actividades específicas de visualización son las que exigen representar el mismo objeto desde diferentes puntos de vista o averiguar cuál es el punto de vista a partir de cómo se ve un objeto. Para esto resultan muy útiles los juegos de construcción como legos, el manipulativo denominado polydron, policubos, etc. La modelización de un recorrido también es algo que debe abordarse de manera integrada con los saberes del apartado de movimientos y transformaciones. P. ej., explicar recorridos que se hacen habitualmente por medio de la evocación.

D. Sentido algebraico y pensamiento computacional

En este primer ciclo, el desarrollo del sentido algebraico debe ir orientado a que el alumnado comprenda los diferentes tipos de relaciones que pueden darse entre números o expresiones aritméticas (equivalencia, orden, etc.), con especial énfasis en la oralidad y uso del lenguaje natural para expresar estas relaciones. En este sentido, es imprescindible establecer conexiones con el sentido numérico y el espacial. De hecho, apenas tiene sentido tratarlo de manera aislada. Las clasificaciones atendiendo a diferentes criterios, la exploración de patrones y las situaciones de cambio o transformación continúan el camino hacia la generalización que ya se inició en infantil. Por supuesto, el empleo de manipulativos es fundamental en el modelizado de estas y otras situaciones, y el camino hacia la abstracción arranca inevitablemente de él.
La búsqueda de regularidades es un saber transversal a todos los contenidos matemáticos y de otras áreas: las fases de la luna, los panales de las abejas, los pasos de una danza, los resultados al arrojar una moneda, etc. Un patrón es un tipo de regularidad, en el que una sucesión de signos: numéricos, gráficos, orales, gestuales…, se construyen siguiendo una regla, de repetición, de crecimiento, de movimiento.
Las situaciones de aprendizaje con patrones suponen hacer conjeturas, argumentar, probar, organizar datos en tablas de manera exhaustiva, etc. y constituyen uno de los elementos fundamentales del desarrollo del pensamiento algebraico.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
D.1. Patrones, relaciones, clasificaciones y funciones: - Estrategias para la identificación, descripción oral, descubrimiento de elementos ocultos y extensión de secuencias a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes. - Clasificaciones de objetos atendiendo a cualidades determinadas y diferentes criterios. - Discusión sobre la veracidad o falsedad entre expresiones que incluyan operaciones, valorando si se puede afirmar o negar que una es mayor, menor o igual que otra. - Representación de la igualdad como expresión de una relación de equivalencia entre dos elementos y obtención de datos sencillos desconocidos (representados por medio de un símbolo) en cualquiera de los dos elementos. - Apreciación del cambio en distintos tipos de situaciones, tanto numéricas como geométricas.	Los patrones ofrecen excelentes oportunidades de conexión con el sentido numérico (cuando el patrón es numérico) y con el sentido geométrico (cuando se trata de patrones geométricos). Las situaciones de aprendizaje que se deberían plantear incluyen, entre otras, el completado de secuencias (y expresar verbalmente el porqué); la generación de secuencias con un patrón de repetición expresado verbalmente o de forma pictórica; clasificación de secuencias atendiendo al tipo de patrón. En lo relativo a las clasificaciones también se pueden establecer conexiones con los saberes de otros sentidos y con otras áreas. Se trata de efectuar clasificaciones, ordenaciones y correspondencias siguiendo criterios dados de forma cualitativa. Para este propósito pueden emplearse bloques lógicos (y materiales empleados para el sentido espacial), objetos del entorno u otros materiales. Las tareas a realizar con ellos se inician con la exploración, de manera que puedan aparecer clasificaciones espontáneas, quizá, fijándose en el color, forma o textura. Después de poner en común los criterios elegidos, se puede plantear la clasificación con un criterio dado específico, o una combinación de ellos (lo que formalmente sería la unión y la intersección). Es interesante abordar el caso en que no se dispone de ningún elemento que cumpla con los criterios y preguntar al alumnado cómo debería ser y si tiene sentido. Algunas de estas tareas pueden realizarse sobre un diagrama que facilite la clasificación, como los diagramas de Venn. Estos no deben convertirse en objeto de estudio, sino que simplemente son un soporte donde ir colocando los objetos a clasificar según cumplen un criterio, otro, ambos, solamente uno, etc. De nuevo, se trata de verbalizar los argumentos empleados.

	Este tipo de actividades tiene una gran relevancia para promover ideas matemáticas fundamentales. Estamos cimentando el camino que ya se inició en infantil hacia la generalización, la conjetura y la representación. De nuevo, se incluyen aquí situaciones de aprendizaje, en clara conexión con el sentido numérico, para que el alumnado comprenda los diferentes tipos de relaciones que pueden darse entre números o expresiones aritméticas (equivalencia, orden, etc.), con especial énfasis en la oralidad y uso del lenguaje natural para expresar estas relaciones. Cuando aparezca el signo igual, las tareas no deben restringirse a efectuar el cálculo de una operación, sino a poner sobre la mesa si esa expresión es cierta o falsa, o si uno de los lados es mayor o menor. En otras palabras, se trata de enfatizar las relaciones y fomentar un desarrollo rico del significado del signo igual, como forma de expresar estas relaciones. Eventualmente, pueden aparecer otros signos, como los que expresan de forma simbólica relaciones de desigualdad (“mayor que”, “menor que”), pero con la única intención de que comiencen a ser conscientes de ellos. Para conectar lenguaje verbal y lenguaje simbólico se pueden proponer tareas de «traducción» de pequeñas frases, dadas de manera oral. Por ejemplo, «María Ángeles tenía 25 cromos y ha dado 3 cromos» (25-3=). También se pueden realizar «dictados» breves de enunciados matemáticos también son una tarea adecuada. Por ejemplo: el docente o la docente leen «a dos le sumo siete y obtengo nueve», lo que da lugar a «2+7=9». La noción de cambio o transformación requiere una atención especial. Se trata de emplear situaciones que pueden surgir en el desarrollo del sentido numérico o espacial como «excusa» para analizar el proceso de cambio subyacente. Por ejemplo, en actividades donde cambia alguna propiedad de un objeto (color, tamaño, forma, cardinalidad, etc.). Alsina (2019) menciona la máquina de cambiar cualidades, las cadenas de cambios, o bien el dominó de las diferencias con un solo cambio.
D.2. Modelo matemático: - Proceso de modelización con el andamiaje adecuado en el aula, empleando objetos manipulables, dramatizaciones, dibujos, diagramas, etc. de manera que se conecte lo concreto con lo pictórico y lo abstracto para comprender las situaciones y los problemas que se planteen.	La utilización de manipulativos forma parte esencial del camino que lleva de lo concreto a lo abstracto. La abstracción, en matemáticas, comienza desde infantil, con el aprendizaje de los números a partir de identificar «algo» que comparten diferentes colecciones de objetos del mismo cardinal. El proceso de modelización, al igual que todo el aprendizaje a través de la resolución de problemas, debe tener un andamiaje (scaffolding). Esto quiere decir que la secuencia didáctica debe planificarse de manera que se pueda conectar con conocimientos previos, haya interacciones entre el alumnado y puestas en común, etc. En el caso de la modelización con manipulativos, ese andamiaje debe incluir un primero momento de exploración del material manipulativo, haciendo preguntas al alumnado acerca de las regularidades que observan (p. ej, cuando es estructurado, como en el ábaco horizontal, puede observar que cada fila tiene 10 bolitas). Hay que evitar siempre decirle al alumnado de entrada qué uso tiene que dar al manipulativo y cómo ha de pensar sobre las acciones que realiza. En este sentido, conviene observar que proporcionar andamiaje no es lo mismo que «guiar» o «pautar». El uso de los manipulativos debe ser planificado, ya que por sí solos no proporcionan la solución definitiva hacia la comprensión de los conceptos puestos en juego (Szendrei, 1996), Esto quiere decir que, después de esa fase de exploración inicial hay que contemplar qué tareas proponemos para ser abordadas con el material, qué preguntas van a realizarse, etc. Además, la elección del manipulativo es importante y constituye una variable didáctica, ya que afecta a la relación con el saber matemático en cuestión. No es lo mismo el uso de material estructurado que el de material no estructurado. Un ejemplo muy claro lo tenemos, como comenta Szendrei (1996), en el uso de las regletas de Cuisenaire, que conectan de forma idónea con la medida, pero no tanto con la aritmética del número natural, pues esto último debe conectarse con el conteo de magnitudes discretas.
D.3. Pensamiento computacional: - Estrategias para la interpretación de algoritmos sencillos (rutinas, instrucciones con pasos ordenados…).	En conexión con el sentido espacial, surgen interesantes situaciones de aprendizaje cuando se propone al alumnado que diseñe la secuencia de acciones necesaria para llegar a una determinada localización desde otra. El grueso de estas actividades puede realizarse sin elementos tecnológicos digitales. Posibles variables didácticas y otras consideraciones son: que el elemento que se mueve sea el propio alumnado, otro alumnado diferente al que diseña la secuencia, o un objeto que se mueve en un tablero o por el suelo; ejecutar un algoritmo diseñado por otro; optimizar algoritmos propios o de otros (¿se puede llegar en un número menor de movimientos?); inclusión de diferentes acciones (adelante, atrás, giros, número de pasos, etc.). De forma integrada con el desarrollo del sentido numérico y el especial énfasis que hay que poner en la oralidad; es decir, en las técnicas de conteo y cálculo oral, habrá que considerar situaciones de aprendizaje donde el alumnado describa las acciones que ha realizado para llegar a un resultado concreto. Hay que evitar el empleo de algoritmos en este primer ciclo, bien sean los estándar o tradicionales o cualquier otro, y todo lo que se haga relacionado con las operaciones ha de ser flexible.

E. Sentido estocástico
El hecho de que el sentido estocástico aparezca en el último lugar, junto con el sentido socioafectivo, no debe dar lugar a equívoco. Se trata de un conjunto de saberes y competencias vinculadas sumamente importantes, en los que el alumnado debe adquirir la base experiencial

csv: BOA20220727001

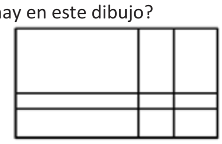
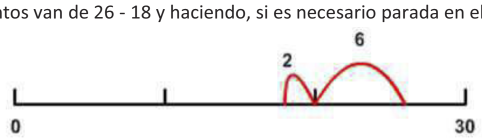
<table>
<tr><td colspan="2">necesaria para desarrollar adecuadamente su intuición. Como se verá en la descripción de los saberes, existen múltiples oportunidades de conexión con otros sentidos. Por ejemplo, la elaboración de gráficos sencillos a partir de pequeños proyectos estadísticos es algo que puede llevarse a cabo de forma integrada con actividades propias del sentido numérico. En cuanto a la probabilidad e incertidumbre, su tratamiento será fundamentalmente intuitivo y en conexión con el desarrollo del lenguaje verbal. Así, existen numerosas expresiones lingüísticas que permiten expresar nuestro grado de creencia acerca de la ocurrencia o no de un suceso.</td></tr>
<tr><td>Conocimientos, destrezas y actitudes</td><td>Orientaciones para la enseñanza</td></tr>
<tr><td>E.1. Distribución e inferencia:
- Estrategias de reconocimiento de los principales elementos y extracción de la información relevante de gráficos estadísticos muy sencillos de la vida cotidiana (pictogramas, gráficas de barras...).
- Estrategias sencillas para la recogida, clasificación y recuento de datos cualitativos y cuantitativos en muestras pequeñas.
- Representación de datos obtenidos a través de recuentos mediante gráficos estadísticos sencillos, recursos tradicionales y tecnológicos.</td><td>Las bases para comenzar a desarrollar el sentido estocástico comenzaron ya en infantil. No en vano, las comparaciones, clasificaciones y recuentos son una forma de ganar conocimiento sobre un conjunto de elementos y son la base de la estadística. El planteamiento de pequeños proyectos estadísticos, que tengan como objetivo responder a alguna pregunta, proporciona un marco muy adecuado para poner en juego estas situaciones, pudiendo integrarse de forma muy clara con otras situaciones propias del sentido numérico o algebraico. Incluso, si lo que vamos a realizar es un mini-proyecto para clasificar formas, con el sentido espacial.
Sin embargo, no se trata solo de comparar, clasificar y contar. Ya desde el primer ciclo, es fundamental trabajar la formulación de preguntas que puedan responderse con datos. A partir de esas preguntas de investigación, es cuando se puede plantear cómo recoger los datos, o dónde obtenerlos y pasar a analizarlos y sintetizarlos por medio de representaciones. En este primer ciclo, la elaboración de pictogramas, representaciones con materiales (como policubos), diagramas de barras u otro tipo de gráficos sencillos es suficiente para estos propósitos. Con los datos ya recogidos y analizados es cuando se debe retomar la pregunta inicial. ¿Qué sabía el alumnado antes de llevar a cabo el estudio? ¿Qué dicen los datos? El saber matemático que está detrás de esto es la comparación cuantitativa de frecuencias absolutas.
Estas reflexiones son importantes y, además de dar lugar a excelentes charlas de aula, ponen sobre la mesa el papel de la estadística en la toma de decisiones. Además, conviene explotar los datos un poco más y preguntarse, de manera muy informal e intuitiva, por aspectos relacionados con el muestreo y la inferencia. No es más que plantear preguntas iniciales que anticipen cierta variabilidad (¿cómo de rápido crecerá mi planta?) o, ya después del análisis de datos, preguntarse hasta dónde tiene sentido extender las conclusiones del estudio. Por ejemplo, si hemos realizado un estudio descriptivo de alguna característica de nuestra clase, hasta qué punto podemos esperar que sea igual en la clase de al lado.
Estos pequeños proyectos estadísticos a los que se hace referencia deberían plantearse en torno a temas cercanos al alumnado. Idealmente, a partir de alguna curiosidad o tema de interés, porque la fase de proponer preguntas adecuadas es, como se ha dicho, muy importante. Otro aspecto a tener en cuenta es que en el primer ciclo, el tamaño de la muestra debe ser manejable. Por ejemplo, comenzar con muestras menores de 15 elementos para los primeros proyectos y hasta 30, más adelante.
Igualmente, hay que considerar que no todos los datos son cuantitativos. Estos pueden ordenarse, contarse, etc. Pero hay otros datos, cualitativos, que pueden clasificarse (incluso, en ocasiones, ser ordenados). Esto da pie a elegir el gráfico más conveniente en cada caso (pictogramas, barras).
A modo de ilustración, ante la pregunta de investigación ¿cómo de rápido crecerá mi planta?, surgen otras nuevas preguntas: ¿las plantas a las que les da más luz solar crecen más rápido? ¿Cómo afecta la luz solar al crecimiento de la planta? Estos son ejemplos de buenas preguntas que han de responderse con un estudio estadístico. Sin embargo, cuando preguntamos ¿cómo de alta es mi planta?, como la respuesta se consigue midiendo simplemente la altura de la planta, no es una pregunta de investigación. En todo caso, es la pregunta que nos hacemos más adelante, ya para recoger los datos.
La guía para la evaluación e instrucción en educación estadística GAISE II (Bargagliotti, et al. 2020), descargable, contiene numerosas orientaciones y ejemplos de actividades para fomentar el desarrollo del sentido estocástico, en lo que concierne a distribución en inferencia estadística.</td></tr>
<tr><td>E.2. Predictibilidad e incertidumbre:
- Acercamiento informal e intuitivo al azar y la probabilidad.
- Desarrollo de lenguaje de uso común para expresar incertidumbre.
- Representaciones gráficas de datos: pictogramas.</td><td>Hay que proporcionar una base experiencial adecuada desde el primer ciclo en torno al azar y la probabilidad. El acercamiento a las ideas de predictibilidad e incertidumbre será informal e intuitivo, lo cual no quiere decir que simplemente se trate de jugar con dados o intentar adivinar el tiempo que hará mañana. Ha de haber una reflexión, y el andamiaje de las situaciones de aprendizaje debe incluir momentos en que el alumnado efectúe juicios y valoraciones antes de las experimentaciones y que después, una vez realizadas, las contraste. De nuevo, las conexiones con el sentido numérico son claras. Hay muchos juegos en los que se utilizan dados y se observa su suma, el valor más alto, etc. Observemos que, además del cálculo de la suma, tratar de contabilizar los posibles sucesos de un experimento aleatorio es una situación de conteo (combinatoria, ya que no siempre está claro cómo hacer el recuento). Es importante que no se utilicen siempre dados, sino que se incorporen otros dispositivos aleatorios y que el conjunto de situaciones no se reduzca exclusivamente a los juegos. Los fenómenos aleatorios forman parte del día a día. Por supuesto, la recogida de datos que provienen de experimentos aleatorios ponen en juego técnicas estadísticas, por lo</td></tr>
</table>

	que los saberes de uno y otro apartado del sentido estocástico están íntimamente relacionados. También son evidentes las conexiones con los saberes de Lengua. El lenguaje verbal está lleno de expresiones que indican nuestra creencia acerca del grado de ocurrencia o no de un suceso: más probable que, seguro, imposible, no creo que vaya a ocurrir esto, etc. En primer ciclo, hay que desarrollar estas expresiones, poniendo énfasis en la oralidad, jugando a ordenarlas de menos probable a más probable, elaborar frases con ellas con un contexto determinado (tiempo atmosférico, por ejemplo).
F. Sentido socioemocional	
El sentido socioafectivo en matemáticas está muy relacionado con la Competencia Personal, Social y de Aprender a Aprender (CPSAA), por lo que su desarrollo implica plantear situaciones para que el alumnado reflexione sobre sí mismo y sobre cómo se enfrenta al aprendizaje de las matemáticas, originando un autoconcepto positivo como aprendiz de matemáticas; para colaborar con otros de forma constructiva por medio de trabajo en diferentes agrupamientos: parejas, pequeño grupo, grupo/clase, dependiendo de la tarea que se plantee; situaciones que supongan un reto y en las que se entrene en perseverancia; valorar los errores como fuente de aprendizaje, reflexionando sobre ellos; etc. Todo esto debe formar parte de la cultura de aula, en cuya formación el profesorado tiene un papel fundamental: pensar en lo que pueden hacer, en lugar de fijarnos en lo que no pueden hacer todavía; pensar en las posibilidades de aprendizaje que ofrece el grupo; centrarnos en los objetivos principales en lugar de reducir la enseñanza a una serie de trucos mecánicos vacíos de significado. Desde la inclusividad, se entiende que el aprendizaje es un camino, unos o unas pueden ir más adelante que otros u otras pero todos se benefician de las preguntas y aportaciones de los compañeros o compañeras. Sentir que se cree en las posibilidades propias, es uno de los factores más importantes del aprendizaje. Las investigaciones avalan que los grupos homogéneos transmiten expectativas bajas y limitan las posibilidades de aprender. En este sentido, actividades de suelo bajo y techo alto que pueden ser abordadas por todo el alumnado. El «suelo», «piso» o «umbral» es el arranque de la actividad y conecta con conocimientos previos muy básicos). El «techo» da oportunidades de bloqueo (reto y superación) también a todo el alumnado, permitiendo diferentes niveles de profundización. Esto posibilita que todo el alumnado progrese en el aprendizaje, por lo que, en matemáticas, bien gestionadas en el aula, son un excelente ejemplo de actividad inclusiva. Observemos que tienen en cuenta el Principio General n.º 3 de esta Ley: «La acción educativa en esta etapa procurará la integración de las distintas experiencias y aprendizajes del alumnado desde una perspectiva global y se adaptará a sus ritmos de trabajo. Se pueden encontrar muchas actividades de este tipo en la red, por ejemplo: NRICH y map.mathshell.org».	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
F.1. Creencias, actitudes y emociones propias: - Gestión emocional: estrategias de identificación y expresión de las propias emociones ante las matemáticas. Curiosidad e iniciativa en el aprendizaje de las matemáticas.	Ya se ha señalado la importancia de las actitudes y expectativas del profesorado sobre el alumnado para que este tenga confianza en sus capacidades al enfrentarse a los saberes matemáticos. En las orientaciones para la enseñanza de los diferentes sentidos matemáticos se han ido sugiriendo estrategias facilitadoras del sentido socioafectivo: favorecer la construcción de los saberes, en lugar de presentarlos elaborados; permitir y favorecer el uso de estrategias personales en la resolución de problemas para conectar con conocimientos previos e intuiciones; plantear retos y problemas cuya resolución no es evidente en un primer momento y que su solución requiere perseverar; permitir la comunicación de los razonamientos matemáticos, sean correctas o no; favorecer representaciones propias en la resolución de problemas, etc…
F.2. Trabajo en equipo, inclusión, respeto y diversidad: - Identificación y rechazo de actitudes discriminatorias ante las diferencias individuales presentes en el aula. Actitudes inclusivas y aceptación de la diversidad del grupo. - Participación activa en el trabajo en equipo: interacción positiva y respeto por el trabajo de los demás. - Contribución de los números a los distintos ámbitos del conocimiento humano desde una perspectiva de género.	El planteamiento de actividades en pequeños grupos heterogéneos hace que el alumnado no tenga que afrontar solo la situación-problema de aprendizaje. Estos grupos deben ser aleatorios (siempre que se pueda) para construir una cultura de aula inclusiva, en la que se hagan visibles los procesos de pensamiento y todo el alumnado se sienta más seguro al contar sus ideas. Nunca se debe penalizar por ello, ni verbalmente ni de ninguna otra manera. La conversación entre iguales para llegar a un acuerdo y el esfuerzo por la escucha, ayuda a ampliar las propias estrategias y a empezar a utilizar un lenguaje matemático que comprendan los compañeros o compañeras. Hablar de matemáticas ayuda a la propia comprensión. Estas interacciones en el aula no son cosa de un día, sino que han de desarrollarse como parte de la cultura de aula. Hay que aprender. El papel del docente o la docente es fundamental, como guía que plantea preguntas abiertas a los niños y niñas que les ayuden a razonar, a cuestionar sus propias ideas y las de los demás, a buscar recursos en el aula que puedan emplear para resolver el problema, etc. Es importante dejar tiempo para pensar y poder contestar sin anticiparse a la respuesta del alumnado. Finalmente, materiales como lecturas y audiovisuales de contenido matemático, además de tener un sentido globalizador y contextualizado, permiten desarrollar afectos positivos hacia las matemáticas. Existen estupendas series de dibujos animados para primer ciclo, como Peg+Gato o los Numberblocks, que pueden servir como recurso, tanto como detonante de alguna situación de aprendizaje como para articular charlas de aula sobre aspectos afectivos.

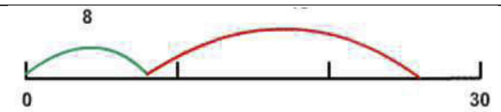
III.2.2. Segundo ciclo de Educación Primaria

A. Sentido numérico
Se debe seguir explorando el sistema de numeración decimal y los diferentes significados del número natural como cardinal, ordinal, medida y código. Se inicia la exploración de situaciones multiplicativas, que permiten, a su vez, ganar comprensión del sistema de numeración posicional y sus propiedades. Las conexiones con otros sentidos, como el de la medida, son muy evidentes, porque muchas de las grandes ideas acerca de los números, nacen de tareas de medida. Es el caso de las fracciones, cuyo aprendizaje se inicia al final de este ciclo, con mucho énfasis en la realización de medidas y la verbalización de las acciones, dejando la expresión simbólica de estas en segundo plano.

csv: BOA20220727001

<table>
<tr><td colspan="2">Otras conexiones, como las que se dan con el sentido algebraico y el pensamiento computacional, también son muy enriquecedoras, puesto que contextos de uso de los números pueden dar lugar a la investigación sobre patrones, elaboración de conjeturas, etc.</td></tr>
<tr><td>Conocimientos, destrezas y actitudes</td><td>Orientaciones para la enseñanza</td></tr>
<tr><td>A.1. Conteo y cantidad:
- Estrategias variadas de conteo, recuento sistemático y adaptación del conteo al tamaño de los números en situaciones de la vida cotidiana en cantidades hasta las unidades de millar.
- Estrategias y técnicas de interpretación y manipulación del orden de magnitud de los números (decenas, centenas y millares).
- Estimaciones y aproximaciones razonadas de cantidades en contextos de resolución de problemas.
- Lectura, representación (incluida la recta numérica y con materiales manipulativos), composición, descomposición y recomposición de números naturales hasta las unidades de millar.
- Fracciones con denominadores manejables en contextos cercanos al alumnado.</td><td>La estructura del sistema de numeración decimal posicional tiene un trasfondo multiplicativo. En este ciclo, el conocimiento de la multiplicación hace posible avanzar en el orden de magnitud de los números. Cada unidad de un orden determinado tiene un valor diez veces de la que se anota en su derecha: una decena equivale a diez unidades, una centena a diez decenas, etc. La representación con materiales, al menos una vez (y las que sean necesarias como facilitador del aprendizaje cuando haya dificultades), del mil, en bolsas transparentes ayuda a comprender cómo crecen las cantidades y es una buena propuesta para trabajar en grupo. Las cantidades mayores de 1000 serán más difíciles de representar, pero se trata de presentar progresivamente mayores cantidades, dejando tiempo para familiarizarse con ellas; reflexionar sobre la magnitud cada vez que se multiplica por 10 , el diez mil es 10 x 1000, etc. ; dar algún punto de referencia para cada cantidad: precios, habitantes, coches, etc. que ayuden a imaginarlos.
El conteo no se agota con lo realizado en primer ciclo. Es interesante trabajar con el alumnado situaciones en las que no solo tengan que contar, sino que también tengan que nombrar («enumerar») los elementos a contar. Por ejemplo, la contestación a la pregunta «¿cuántas banderas de dos franjas verticales de distinto color podemos construir con los colores azul, verde, rojo y amarillo?» exige dibujar todas las banderas posibles para poder
contarlas. Este tipo de situaciones didácticas son interesantes porque son perfectamente asequibles para el alumnado de segundo y tercer ciclo de Educación Primaria y les permite adquirir unos conocimientos que facilitan la posterior comprensión de aspectos importantes de las matemáticas de Educación Secundaria. Es la antesala de la combinatoria, que, a fin de cuentas, es el arte de contar. Una situación didáctica de combinatoria es aquella en la que el objetivo es que el alumnado averigüe cuántos grupos distintos se pueden construir combinando determinados elementos o bien, cuántos elementos se necesita combinar para obtener cierto número de grupos.
Ejemplo: ¿cuántos rectángulos hay en este dibujo?

Ejemplo: Ana, Marisa, Luis y Pedro quedan en una cafetería. Llegan de uno en uno. Escribe las posibilidades de orden de llegada de esas cuatro personas.
A las fracciones se les dota de significado desde las tareas descritas en el sentido de la medida, por lo que nos remitimos a dicha sección para leer alguna orientación.</td></tr>
<tr><td>A.2. Sentido de las operaciones:
- Estrategias de cálculo mental con números naturales y fracciones.
- Estrategias de reconocimiento de qué operaciones simples (suma, resta, multiplicación, división) son útiles para resolver situaciones contextualizadas.
- Construcción de las tablas de multiplicar apoyándose en número de veces, suma repetida o disposición en cuadrículas.
- Suma, resta, multiplicación y división de números naturales resueltas con flexibilidad y sentido: utilidad en situaciones contextualizadas, estrategias y herramientas de resolución y propiedades.</td><td>Es imprescindible conocer aquellos aspectos que son clave en cada una de las operaciones y que es necesario asegurar para construir una base sólida, basada en la comprensión. Es importante asegurarse de que se conocen y comprenden los números de la primera centena y se utiliza la estrategia de sumar y restar pasando por el 10 aprendida en el primer ciclo. Esto lo podremos evaluar si localizan y sitúan con facilidad los números en la tabla del 0 al 100; si cuando buscan los números en la tabla, se dirigen intuitivamente hacia el cuadrante donde está el número pedido sin dudar; si usan la estrategia de sumar pasando por el 10, más propia del primer ciclo; es decir, a la pregunta de cómo han sumado 17 + 23 responden, por ejemplo 17 + 3 =20 y 20+20 =40. Todas estas estrategias son importantes como antesala de la multiplicación.
Suma y resta
Ambas se han introducido en el primer ciclo en conexión con las diferentes técnicas de conteo. Durante este ciclo, debe asegurarse de que se comprenden bien y que se pueden utilizar estrategias para encontrar soluciones exactas o estimadas a partir del cálculo mental y de modelizaciones que ayudan a imaginarlo. La resta se puede plantear de dos modos: contando cuántos faltan para llegar a cierto número (conecta con conteo progresivo); o bien descontando y preguntando «cuántos quedan si quitamos este número» (conecta con conteo regresivo). La modelización sobre la recta ofrece una representación en la que se pueden explorar las dos situaciones. Así 26 - 18 se puede resolver:
a) Pensando cuántos van de 26 - 18 y haciendo, si es necesario parada en el 20.


b) Yendo hasta el 26, sacando 18 y mirando cuántos quedan</td></tr>
</table>



c) También se puede aprender a redondear los números y, en lugar de pensar en 26 – 18, imaginar 26 – 20 = 6, y luego reajustarlo haciendo 6 + 2 = 8

Los algoritmos de las operaciones no aportan mucho a la comprensión de todas estas situaciones. En cambio, si los objetivos son el profundizar sobre el sistema de numeración posicional y desarrollar el pensamiento computacional, ofrecen excelentes oportunidades de aprendizaje para ello, que nunca pasan por la repetición mecánica vacía de significado.

Multiplicación y división

La multiplicación y la división son las principales novedades dentro del sentido numérico en el segundo ciclo de primaria. Comprender y tener agilidad con la multiplicación es lo que hace que en este ciclo se haga un gran progreso que llevará a comprender cómo crecen los números naturales y, junto con la división, a iniciar el trabajo con los números fraccionarios y los decimales en relación con el desarrollo del sentido de la medida. El proceso de enseñanza de la multiplicación y la división debería iniciarse con la introducción de situaciones didácticas multiplicativo-concretas referidas a materiales presentes en el aula y con el alumnado como actor. Por ejemplo: «Reparte estas 20 fichas en 4 montones iguales» o «Si cogemos 4 fichas tres veces, cuántas fichas tendremos al final», etc. Estas situaciones deben plantearse antes de hablar de multiplicaciones y divisiones, permitiendo al alumnado que las resuelvan recurriendo a recuentos, repartos, agrupamientos, sumas o restas reiteradas, etc. Una vez iniciado el trabajo con estas situaciones, se procederán a introducir los hechos de la multiplicación (tabla de multiplicar) y las distintas técnicas de cálculo a través de situaciones didácticas multiplicativo-formales. Así, se llevan paralelamente dos vías: la concreta (a través de la resolución de problemas) y la formal (exploración de hechos en abstracto y práctica rica e intercalada). En el apartado de relaciones se describen tipos de situaciones multiplicativas de una etapa.

El aprendizaje de los hechos de la multiplicación, la «tabla de multiplicar», al igual que los de la suma, no debe realizarse de forma secuencial mediante el canturreo y la repetición vacía de contenido. El tiempo de aula es valioso y merece mucho más la pena construir las tablas sin prisas y de forma razonada, lo que ayuda a comprender la multiplicación, así como establecer conexiones con el pensamiento algebraico a partir de la observación de patrones. Será la práctica rica e intercalada, variada, que puede realizarse de forma sistemática, junto con esas actividades de exploración, las que afiancen estos hechos. Si algún alumno o alumna presentan dificultades persistentes, se han de valorar apoyos, y si no responde a la intervención, valorar con el equipo si puede tratarse de alguna dificultad específica, como discalculia. En cualquier caso, un olvido con alguno de los hechos en concreto no tiene mayor importancia.

Algunas tareas que contribuyen a dotar de significado a la multiplicación son las siguientes:

- Grupos repetidos, p. ej. 3 packs de 4 yogures, modelizando la situación con algún manipulativo no estructurado o dibujo para conectar con 3 x 4 = 12.
- Elementos sueltos a agrupar que podremos agrupar de distintos modos. Por ejemplo 15 botones se pueden agrupar en 5 grupos de 3 o 3 grupos de 5.

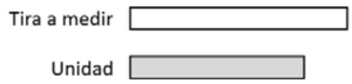
Estas representaciones se pueden concretar en un modelo rectangular que coinciden totalmente y se puede comprobar mediante el recorte y la superposición. En un ambiente de resolución de problemas se proponen situaciones como: ¿Cuántos yogures hay en 6 packs? ¿Cuántas botellas de agua hay en 4 paquetes de 6 botellas? ¿Cuántos grupos de cinco puedo realizar con 30 tapones? Son situaciones diversas (ver también apartado de relaciones, donde se clasifican las situaciones concretas) para dejar que piensen, propongan, cuenten, modelicen, representen, etc. En definitiva, el docente o la docente hacen preguntas a partir de lo que vaya saliendo para progresar en el aprendizaje y abrir nuevas vías de exploración. Es importante aprender a comunicar los argumentos, apoyándose en lenguaje matemático, tanto verbal como simbólico (números y signos).

	Dividir consiste en separar objetos en grupos iguales y es una técnica que se pone en juego en las situaciones multiplicativas. Puede verse como una reinterpretación de la multiplicación. No es necesario extenderse mucho en la multiplicación para comenzar a explorar la división, puesto que ambas responden al mismo tipo de situaciones. Algunas tareas que contribuyen a dotar de significado a la división son las siguientes: - Repartir y agrupar. Se puede repartir una cantidad en un número determinado de grupos iguales para saber cuántos elementos habrá en cada grupo; también se puede partir de una cantidad y hacer grupos iguales de una determinada cantidad para saber cuántos grupos se pueden hacer, y cuántos sobran. Esto debería realizarse, como siempre, en un ambiente de resolución de problemas: tengo 12 piezas y quiero hacer brazaletes, si hago 4 brazaletes cuántas bolas hay por cada uno? ¿Y si tengo 14 piezas? Tengo 12 bolas y quiero poner 3 en cada brazalete, ¿cuántos brazaletes podré hacer? Hablar, animarlos a representarlo y a escribir con lenguaje matemático, inventarse problemas, etc. aseguran que se va más allá de la mecánica y se potencia la autonomía. - Para conseguir rapidez en el cálculo mental hay que basarse en las propiedades de la multiplicación: al cambiar el orden de los factores el resultado no varía (permite aprender la mitad de los resultados de las tablas y la otra mitad obtenerla cambiando el orden); usar los dobles (6 x 7 es lo mismo que el doble de 3 x 7); usar representaciones gráficas que ayudan a verlo y memorizarlo; descomponer en factores (si sabemos que 7 x 3 son 21, podemos saber 7 x 4 sumando 7 al 21, 28, también podemos pensar que 7 son 5 +2 y calcular 5 x 4 y 2 x 4 que sería 20 + 8=28); construir las tablas sin prisas y de forma razonada ayuda a comprender la multiplicación así como ir observando poco a poco patrones; multiplicar y dividir por 10, 100 (no se trata de repetir que para multiplicar por la unidad seguida de ceros hay que añadir ceros, se trata de entenderlo, 2x10 son dos veces 10 y por lo tanto 20; 2x100 son dos veces 100 y por tanto 200. Algunas de estas propiedades, como la última, son imprescindibles para calcular y comprender el sistema de numeración decimal.
A.3. Relaciones: - Sistema de numeración de base diez (hasta las unidades de millar): aplicación de las relaciones que genera en las operaciones. - Números naturales y fracciones en contextos de la vida cotidiana: comparación y ordenación. - Relaciones entre la suma y la resta; y la multiplicación y la división: aplicación en contextos cotidianos.	Para desarrollar el concepto de número y desligarlo de su representación, puede resultar conveniente explorar otras formas de expresar números. Nótese que esto es algo que ya se hizo en el primer ciclo, cuando el alumnado comunica cantidades representando cantidades con policubos o dibujos y representaciones espontáneas. En este curso se continúa explorando el sistema decimal posicional y es interesante realizar actividades con otros sistemas de numeración que permitan comparar diversas maneras de expresar el mismo número. A este respecto, resulta más apropiado, en este ciclo, plantear alguna actividad en torno al sistema egipcio que, por ejemplo, con números romanos. Los números egipcios constituyen un sistema decimal, como el nuestro, pero aditivo, y sin excepciones. Más adelante, ya en tercer ciclo, si se han trabajado convenientemente las ideas centrales acerca de la escritura de números, se pueden plantear interesantes actividades sobre otros sistemas históricos de numeración. Por otro lado, no cuesta mucho introducir brevemente los números romanos, observando sus excepciones, y el uso que se les da. No obstante, aprendidos los rudimentos sobre sistemas de numeración, el sistema romano en concreto ofrece poco campo para la exploración en Matemáticas y, realmente, es algo que podría plantearse en Ciencias Sociales estableciendo la conexión oportuna. En cuanto a las situaciones aditivas, conviene consolidar las estructuras semánticas que se introdujeron en primer ciclo y añadir las de TTT, CTC y CCC (ver la clasificación de situaciones descrita en el primer ciclo, siguiendo la de Cid, et al. (en Godino, 2003)). Estas últimas son muy complejas, y a pesar de que se resuelven con una suma o una resta, su modelización es sumamente importante para comprenderlas. Como se fundamentan en transformaciones y comparaciones, son actividades en conexión con el sentido algebraico. También conviene introducir situaciones con más etapas que exijan de la modelización. Comprender lo que es la multiplicación y lo que es la división no debe limitarse a saber calcular operaciones formales (con o sin algoritmo) ni tampoco a elegir una de las dos operaciones en situaciones contextualizadas. Se trata de abordar de forma progresiva las diversas situaciones multiplicativas contextualizadas (concretas) de una etapa, al mismo tiempo que se aprenden hechos numéricos y se desarrollan técnicas de cálculo formal que conectan con las técnicas intuitivas del alumnado (sumas reiteradas, restas sucesivas, etc.). La vía de la resolución de problemas siempre ha de anteceder a la enseñanza formal de las operaciones. De lo contrario, no resultan significativas para el alumnado. Conviene observar que es preferible, por tanto, pensar en situaciones multiplicativas de una etapa en lugar de problemas «de multiplicación o problemas «de división». La dificultad de estas situaciones, al igual que con las aditivas, no radica únicamente en el tamaño de los números, sino en su estructura semántica (significado y papel de los números que intervienen). Será la comprensión del rango de situaciones en que emerge la multiplicación o la división y las conexiones con la suma y la resta las que enriquecerán el significado de estas operaciones. En Cid et al. (en Godino, 2003) se recoge una clasificación de estas situaciones atendiendo al papel que juegan los números: razón (R), cuando expresa un cociente entre medidas que se

	refieren a magnitudes diferentes o medidas referentes a una misma magnitud pero expresadas en distintas unidades; comparación multiplicativa (C), cuando indica el número de veces que una cantidad de magnitud está contenida en otra cantidad de la misma magnitud; estado (E), cuando es una cantidad que no relaciona ni compara otras cantidades. Los valores que toman las tres cantidades que intervienen en la situación (los dos datos y la incógnita o solución) nos define la estructura semántica de la situación: ERE, ECE, EEE, RRR, CCC. Un ejemplo de situación ECE con la incógnita en la comparación sería: «María tiene 25 euros y su hermana Sara, 100. ¿Cuántas veces más dinero tiene Sara que María?». Una gradación de menor a mayor dificultad podría ser la siguiente: - ERE (con la incógnita en cualquier posición). - ECE (con la incógnita en el primer término de la comparación). - EEE (con la incógnita en el estado producto). - ECE (con la incógnita en la comparación o en el segundo término de la comparación). - EEE (con la incógnita en cualquiera de los estados parciales). - RRR (con la incógnita en cualquier posición). - CCC (con la incógnita en cualquier posición). A esta gradación se le debe añadir el tamaño de los números y el grado de contextualización de la situación, ya que el alumnado comprende mejor las situaciones multiplicativas cuanto más contextualizadas están, desde que sea con materiales presentes en el aula con el alumno o alumna como actor o actriz, hasta situaciones hipotéticas contextualizadas, pero no familiares para el alumnado. Conviene observar que en estas orientaciones se ha descrito el inicio, pero por supuesto, existen situaciones aditivas y multiplicativas de más de una etapa. La equivalencia y el orden entre fracciones, en este ciclo, debe realizarse siempre con fracciones fácilmente imaginables y enfatizando la oralidad frente a la expresión simbólica, cuyo aprendizaje también debe iniciarse. En el sentido de la medida se detalla cómo debería ser el trabajo para establecer esta conexión y arrancar desde situaciones en las que el alumnado, efectivamente, mida. Una vez comprendidas desde ahí, podemos explorar relaciones con el sentido numérico. Así, la mitad es un buen punto de referencia para ayudarle a ordenar. Si tenemos un pastel, o una tira de papel partida en 3 partes y tomamos una, ¿tendremos más o menos de la mitad? Si la tenemos partida en 4 partes y cogemos 3, ¿tendremos más o menos de la mitad? Aprender a leer y comprender si una fracción es mayor o menor que la mitad es un paso decisivo para comparar y ordenar pero también para interpretar y calcular con fracciones. Relacionar la multiplicación y la división profundiza en el significado de ambas operaciones y ayuda a resolver problemas. No en vano, ambas operaciones (la división es realmente una técnica, pues da como resultado dos números) responden al mismo tipo de situaciones. La relación se puede trabajar por medio del uso de los mismos modelos gráficos de representación y modelización y por medio del lenguaje empleado para expresar ideas: «tres grupos de 4 son 12, 12 repartido en 3 grupos son 4 en cada grupo», para ir viendo que los factores de la multiplicación pasan a ser divisor y cociente en la división y el producto el dividendo. 12 : 6 = 2  6 x 2 = 12 También se puede trabajar por medio de representaciones triangulares que pongan de manifiesto las operaciones inversas, en las que se den dos números y se tenga que encontrar el tercero que los une por la división o la multiplicación. 8 x 5 = 40 permite saber que 40 : 5 = 8 o 40 : 8 = 5 El trabajo con números fácilmente imaginables, pequeños, y dejar tiempo para que el alumnado utilice las estrategias que le vayan mejor, permitirá intercambiar puntos de vista y darse cuenta de que se puede llegar al mismo resultado por vías diferentes. Se trata de plantear situaciones que permitan progresar en el aprendizaje a todo el alumnado.
A.4. Razonamiento proporcional: - Razón entre magnitudes: introducción a su cálculo e interpretación.	El desarrollo del pensamiento proporcional va en paralelo con el estudio de las estructuras multiplicativas. Las diferentes estructuras de problemas multiplicativos con números naturales suponen una introducción al concepto de razón entre magnitudes. En concreto, los problemas en los que se plantea la división como reparto igualitario pueden ser un punto de partida para la interpretación de la razón entre magnitudes como razón unitaria. Por ejemplo, si 6 rotuladores nos han costado 12 euros, si suponemos que todos los rotuladores cuestan lo mismo, podemos pedir el precio de cada rotulador (precio unitario) interpretando esta división como un reparto y el resultado como la cantidad de dinero que cuesta cada rotulador. Puede ser interesante empezar a hacer explícita en este tipo de situaciones la

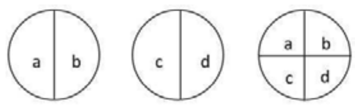
<table>
<tr><td></td><td>condición de constancia (cada rotulador cuesta lo mismo) como un acercamiento informal a justificar el cálculo de la razón unitaria.
Es importante señalar que, en este nivel, no es conveniente introducir vocabulario específico como ‘razón’, ‘proporcionalidad’, etc., se trata de incorporar problemas que den la oportunidad de trabajar con estos conceptos sin necesidad de etiquetarlos.
Además de los problemas de una etapa, al final del ciclo, pueden plantearse de manera informal y sin fijar técnicas de resolución concretas problemas sencillos con más de una etapa. Por ejemplo, en la tienda A, 6 rotuladores nos han costado 12 euros y en la tienda B, 2 rotuladores nos han costado 6 euros. ¿En qué tienda son más caros los rotuladores? Este tipo de problemas suponen un primer acercamiento al pensamiento relativo en donde la respuesta no depende de la cantidad total sino de la razón unitaria.</td></tr>
<tr><td>A.5. Educación financiera:
- Cálculo y estimación de cantidades y cambio (euros y céntimos de euro) en la vida cotidiana: ingresos, gastos y ahorro. Decisiones de compra responsable.</td><td>El trabajo con contextos económicos en el resto de sub-bloques del sentido numérico (como los presentados en A.4) debería bastar para cubrir los saberes del sub-bloque de Educación Financiera. Por ejemplo, el cálculo e interpretación del valor unitario para comparar precios (como en el ejemplo de los rotuladores) permite tomar decisiones de compra responsable.
También hay que tener presente que el alumnado suele estar familiarizado con el dinero y, de hecho, se han podido utilizar billetes como material manipulativo estructurado en el desarrollo de los saberes del sentido numérico, si bien los billetes que se utilizan como manipulativo para explorar el sistema decimal posicional son de base estrictamente decimal (sin los billetes de base auxiliar 2 y 5, como 5, 20 y 50). A pesar de esta familiaridad, hay que tener cuidado con algunos aspectos: por ejemplo, hablamos de 10 céntimos, no de 1 décimo de euro. Aunque los decimales se trabajan específicamente en tercer ciclo, ahora puede ser momento para verbalizar estas cuestiones. Además, palabras como «décimas» deben aparecer cuando aparecen fracciones, tanto en el sentido de la medida como, posteriormente, en el desarrollo del sentido numérico.</td></tr>
<tr><td colspan="2">B. Sentido de la medida</td></tr>
<tr><td colspan="2">El trabajo realizado sobre magnitudes y medida en primer ciclo debe continuar. Es decir, se vuelven a abordar situaciones de identificación y conservación de la magnitud y situaciones de comparación, con y sin objetos intermedios, así como situaciones de medida de cálculo y construcción con unidades arbitrarias o antropométricas y situaciones de estimación de cantidades de magnitud. Ante la imprecisión de estas o necesidad de comunicar a un público amplio el resultado de una medida, ha de reflexionarse sobre la necesidad de unidades estándar o convencionales. Es indispensable que los procesos de medida se realicen en su totalidad, de forma experiencial y expresando verbalmente las acciones realizadas para reflexionar sobre ellas e hilvanar las matemáticas que van surgiendo. La novedad, ahora, es que la medida de magnitudes continuas (longitud, área, masa, volumen, capacidad, etc.) va a proporcionar las situaciones de aprendizaje más adecuadas para introducir la representación fraccionaria del número racional, conectando con conocimientos previos del alumnado. Hay que tener presente que la medida no ha de ser simplemente un contexto más sobre el que realizar operaciones. En matemáticas, la medida ocupa un lugar de privilegio porque permite la abstracción de ideas esenciales. En este caso, un acercamiento al número racional y sus propiedades. Por supuesto, no es cuestión, ahora, ni siquiera en toda la educación primaria, de hablar de número racional como tal, pero eso no quiere decir que no esté presente a través de sus representaciones (fracciones -tanto en el lenguaje verbal como simbólico- y, posteriormente, ya en el tercer ciclo, números decimales).</td></tr>
<tr><td>Conocimientos, destrezas y actitudes</td><td>Orientaciones para la enseñanza</td></tr>
<tr><td>B.1. Magnitud y medida:
- Fracciones como forma de expresar el resultado de un proceso de medida (una cantidad de magnitud).
- Atributos mensurables de los objetos (longitud, masa, capacidad, superficie, volumen y amplitud del ángulo).
- Unidades convencionales (km, m, cm, mm; kg, g; l y ml) y no convencionales en situaciones de la vida cotidiana.
- Medida del tiempo (año, mes, semana, día, hora y minutos) y determinación de la duración de periodos de tiempo.
- Estrategias para realizar mediciones con instrumentos y unidades no convencionales (repetición de una unidad, uso de cuadrículas y materiales manipulativos) y convencionales.
- Procesos de medición mediante instrumentos convencionales (regla, cinta métrica, balanzas, reloj analógico y digital).</td><td>Los adultos estamos acostumbrados a medir correctamente de una forma espontánea, pero muy pocas veces nos paramos a pensar la razón de hacerlo así y no de otra manera. Poner en evidencia todas y cada una de las acciones y operaciones involucradas en el proceso de medir nos ayuda a comprender las dificultades con las que se encuentra el alumnado al abordar estos conceptos, y también aporta pautas para diseñar secuencias de enseñanza y aprendizaje.
Además de los tipos de situaciones mencionados en las orientaciones generales para el bloque, conviene recordar que en la enseñanza de las magnitudes se deberían proponer actividades para desarrollar las habilidades de verbalización de las acciones de medida y ampliar el vocabulario relacionado con la magnitud, y utilizar adecuadamente los instrumentos de medida. Cada magnitud implica un vocabulario y unos instrumentos distintos. Con la capacidad, por ejemplo, aparecen palabras como rebosar, llenar, trasvasar, etc., mientras que las unidades arbitrarias pueden ser tazas, tapones, cubiletes, etc. Además, las técnicas de medir capacidades distan mucho de aquellas para medir áreas. La base experiencial es adecuada y se encuentran múltiples conexiones con el área de Ciencias de la Naturalez. Es importante plantear situaciones donde se conserve la capacidad o el volumen y cambien otras magnitudes, como la masa, u otras cualidades del objeto, como la forma.
Una enseñanza de las fracciones basada fundamentalmente en el modelo parte-todo obstaculiza la comprensión de estas como una forma de representación de un nuevo tipo de número, pero número, al fin y al cabo: el número racional. El parte-todo, por otro lado, no permite introducir las fracciones mayores que la unidad, debiendo introducirse una distinción artificial entre fracciones propias e impropias y, llegado el caso de las impropias, modificar el discurso de una manera extraña («el todo ya no es el todo», etc.). Además, como el parte-todo surge de un proceso de doble conteo, el alumnado tiende a ver la fracción como una forma de expresar una pareja de números naturales, por lo que trata de extender las propiedades de estos a las fracciones.
La representación fraccionaria surge de la necesidad de comunicar el resultado de una acción de medida de una cantidad de magnitud continua. Los números naturales se muestran</td></tr>
</table>

insuficientes para expresar el resultado de la medida de cantidades si la unidad de medida no está contenida un número entero de veces en la cantidad a medir y es, en esta situación, cuando la fracción adquiere pleno sentido. El parte-todo, realmente, aparecerá como técnica subsidiaria de forma natural dentro de los procesos de medida, pero no como medio sobre el que fundamentar la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.
Un ejemplo de situación inicial, después de haber medido alguna longitud de manera que el resultado sea una medida entera, consistiría en medir una tira de tela, o un palo, tomando otra tira u otro palo como medida (situación que se presta a hacer con otros manipulativos, como las regletas de Cuisenaire).

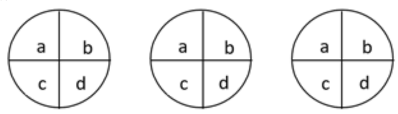


Está claro que la tira a medir mide algo más de una unidad. Por lo tanto, se tendrá que dividir la unidad en partes iguales, de la misma longitud, para hacer subunidades con las que intentar medir la tira en cuestión. Se prueba con medios y se observa que no. Quizá con cuartos. En efecto, en el ejemplo anterior (unidad de medida representada con el borde grueso):

Por lo tanto, la tira cuya longitud se deseaba medir, mide cinco cuartos (5/4) de unidad. Porque hemos dividido la unidad en cuatro partes iguales, de manera que cada una se llama «cuarto» y hemos necesitado cinco de estas partes para cubrir la longitud a medir. Esta situación se ha presentado de manera esencial. Es recomendable dotar a la situación de un propósito y, como se ha indicado anteriormente, la necesidad surge de comunicar la medida, por lo que puede enmarcarse en un contexto en el que se solicita esa cantidad. Igualmente, se puede usar un nombre cualquiera para la unidad, como pie, folio o lo que se desee (usar el largo de un folio como unidad puede ser buena idea, pues tiene la longitud apropiada como para que resulte cómodo plegar por la mitad, en cuartos, tercios, etc.). Como se ha mencionado, es importante que el alumnado realice el proceso de medida por completo, tomando parte activa de la toma de decisiones ante cada dificultad. Una secuencia muy completa, que arranca con una actividad similar la encontramos en los anexos de Escolano (2007), disponible en el repositorio de la Universidad de Zaragoza.
Es esencial enfatizar la verbalización para expresar las fracciones, dando inicio a la representación escrita en forma de fracción. Los denominadores; es decir, el número de partes en que se divide la unidad, deberían ser números cercanos y fácilmente verbalizables (medios, tercios, cuartos, … décimos, y quizá considerar los doceavos). No obstante, sobre esto último se insistirá en tercer ciclo. Por lo demás, resulta adecuado plantear más situaciones de medida de cálculo (como la ejemplificada), con esta y otras magnitudes, para proporcionar la base experiencial suficiente como para que el aprendizaje posterior sea significativo. También, situaciones de construcción y de comparación.
Es importante relacionar las fracciones con denominador 10 con las unidades de medida (metro, decímetro centímetro) o con la partición del euro en céntimos, que a su vez contribuirá también a la comprensión de las fracciones y su contextualización.
Como anticipación del modelo de reparto que se usará para introducir la notación decimal en tercer ciclo, es interesante plantearse, a final de segundo ciclo, la posibilidad de incluir tareas en las que se reparte un objeto fraccionable (pizzas, tortillas, bizcochos, …) entre unos participantes. La conexión con el modelo de medida anterior está clara, ya que se pregunta por la cantidad de magnitud que recibe cada participante, y esta ha de expresarse de manera verbal y, quizá, simbólica. Por ejemplo: Se reparten, en partes iguales, 3 tortillas entre 4 personas. Indicar la cantidad de tortilla que recibe cada una de ellas. Realiza este reparto utilizando diversas técnicas. En los dibujos se pueden cambiar las letras por colores, o dibujos para los participantes:



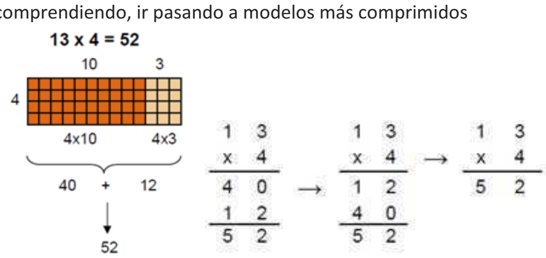
«Se parten las dos primeras tortillas en dos partes y se da una de estas partes a cada una de las personas. Se parte la tercera tortilla en cuatro partes y se da una a cada una de las personas.» Cada participante recibe un medio y un cuarto de tortilla.
Otra técnica sería esta:



«Se parten las tres tortillas en cuatro partes y se da una parte de cada tortilla a cada una de las cuatro personas». Cada participante recibe tres cuartos de tortilla.

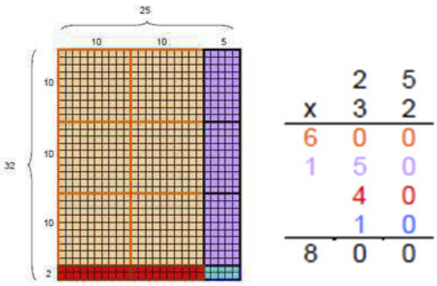
B.2. Estimación y relaciones: - Estrategias de comparación y ordenación de medidas de la misma magnitud (km, m, cm, mm; kg, g; l y ml): aplicación de equivalencias entre unidades en problemas de la vida cotidiana que impliquen convertir en unidades más pequeñas. - Estimación de medidas de longitud, masa y capacidad por comparación. - Evaluación de resultados de mediciones y estimaciones o cálculos de medidas.	Siguiendo la línea de lo indicado para el primer ciclo, donde se desgranan los diferentes tipos de situaciones de estimación, en el segundo ciclo se complementarán estas situaciones para tratar de abordar las magnitudes habituales, uso de diferentes unidades de medida, con o sin referentes. No se trata de adivinar la cantidad de magnitud, al igual que cuando se habla de estimación en el sentido numérico no se trata de adivinar el resultado de una operación. Hay que discutir qué técnicas pueden hacerse, cuáles son razonables, etc., en un ambiente de exploración que permite múltiples conexiones. Una tarea, aparentemente tan simple como averiguar cuántos granos de arroz hay en un recipiente, establece conexiones con el sentido numérico (inicio de la proporcionalidad), relaciones entre magnitudes (¿puedo medir la capacidad con granos de arroz?) y con el sentido espacial (depende de la forma del recipiente). Es una actividad multinivel, que podría llevarse a cabo en cualquiera de los ciclos. Se trata de adaptarse a las estrategias intuitivas que surgen en cada momento para que el andamiaje conduzca a unas ideas u otras. https://dgafprofesorado.catedu.es/2019/05/22/una-de-estimacion-en-clase-de-matematicas-con-arroz/
C. Sentido espacial	
Aunque el modelo de niveles de razonamiento introducido por los van Hiele no corresponde con etapas escolares sino con razonamientos personales, podemos guiarnos con que la mayoría del alumnado de este ciclo debería encontrarse de forma consolidada en un nivel 1 (visualización) y hay que plantear actividades que permitan progresar en el nivel 2 (análisis). En otras palabras, se trata de que el alumnado aprenda a distinguir las características propias de cada figura, a través de la observación y la experimentación. Se deben emplear con soltura propiedades geométricas para abstraer clases de figuras (p. ej., los rectángulos tienen las diagonales iguales), pero no se llega a establecer relaciones entre distintas clases (p. ej., cuadrados, rombos y rectángulos no se perciben como paralelogramos). Desde este nivel el alumnado propone definiciones enumerando varias características de una figura, posiblemente con omisiones y/o redundancias. Las justificaciones de estas propiedades se realizan en base a unos pocos casos particulares.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
C.1. Formas geométricas de dos y tres dimensiones: - Formas geométricas de dos o tres dimensiones en objetos de la vida cotidiana: identificación y clasificación atendiendo a sus elementos y a las relaciones entre ellos. - Estrategias y técnicas de construcción de formas geométricas de dos dimensiones por composición y descomposición, mediante materiales manipulables, instrumentos de dibujo (regla y escuadra) y aplicaciones informáticas. - Vocabulario geométrico: descripción verbal de los elementos y las propiedades de formas geométricas sencillas. - Propiedades de formas geométricas de dos y tres dimensiones: exploración mediante materiales manipulables (cuadrículas, geoplanos, policubos, etc.) y el manejo de herramientas digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada, robótica educativa, etc.).	Para evitar la formación de estereotipos en geometría que obstaculizan el razonamiento a partir de las propiedades de las figuras y cuerpos en el espacio, en lugar de a partir de su apariencia física, es necesario proporcionar imágenes variadas, incluyendo objetos de los diversos ámbitos de la actividad humana: objetos cotidianos, en la arquitectura, en el diseño artístico, etc. Las situaciones de aprendizaje deberían consistir en construir y analizar diferentes figuras planas atendiendo características geométricas (número de lados, vértices y ángulos, concavidad y convexidad, paralelismo, simetría, etc.) como base para obtener clasificaciones cada vez más complejas y poner orden en el universo de las formas. La circunferencia y el círculo merecen una atención especial, como figuras no poligonales, así como su división convencional en 360 º y como lugar geométrico de los puntos que equidistan de un centro. Se debe poner en juego el razonamiento espacial para resolver problemas geométricos, como los de obtención de polígonos a partir de la descripción de ciertas características métricas y de regularidades reconocidas. Conviene considerar que descomponer las figuras en otras que las contengan ayuda a su análisis: el cuadrado descompuesto en dos o cuatro triángulos pone de manifiesto propiedades acerca de sus diagonales, por ejemplo; el hexágono en dos trapecios o seis triángulos, etc.; un cilindro se descompone en un rectángulo y dos círculos, etc. Realizar estas descomposiciones permite hacer comparaciones y comparar áreas y volúmenes Hacer el desarrollo plano de un cuerpo (cajas y envoltorios), es una forma de descomponerlo, de poner de manifiesto los polígonos o figuras que lo componen. También permite comparar los diferentes desarrollos planos de un mismo cuerpo/caja realizado por diferentes compañeros o compañeras. La manipulación de materiales es imprescindible en los saberes espaciales: geoplanos, policubos, tangrams…; así como las aplicaciones informáticas realizadas con fines educativos. Estas actividades tendrán que venir precedidas de una fase de exploración y acompañadas de verbalizaciones que detallen el proceso de los análisis, aportando resultados y recogiendo conclusiones.
C.2. Localización y sistemas de representación: - Descripción de la posición relativa de objetos en el espacio o representaciones suyas utilizando vocabulario geométrico adecuado (paralelo, perpendicular, oblicuo, derecha, izquierda, etc.) - Descripción verbal e interpretación de movimientos, en relación a uno mismo o a otros puntos de referencia utilizando vocabulario geométrico adecuado. - Interpretación de itinerarios en planos utilizando soportes físicos y virtuales.	Interpretar un plano, usarlo para ubicarse, localizar elementos y diseñar itinerarios, estas representaciones del espacio son útiles en la vida cotidiana y dan pie a ricas e interesantes situaciones de aprendizaje. Imaginar o visualizar itinerarios, evocar recorridos, reconocer elementos conocidos (edificios, plazas, ríos). Este saber da pie a conexiones con los saberes de otros sentidos de matemáticas y con otras áreas. Por ejemplo, diseñar itinerarios sobre un plano teniendo en cuenta el contexto y las necesidades, en función de si se hace a pie o en coche. Por tanto, si es necesario tener en cuenta las direcciones de las calles o no, si se busca el itinerario más corto, o bien lo que pasa por un sitio determinado, etc. Las salidas fuera del aula ofrecen la posibilidad de un trabajo contextualizado con mapas, a la vez que el trabajo de razonamiento proporcional. La aplicación MathCityMap (https://mathcitymap.eu/es/), en la que colabora la FESPM, facilita la creación de rutas matemáticas.
C.3. Movimientos y transformaciones:	Transformar va más allá de descomponer, puesto que conduce a explorar cómo se generan nuevas formas. Un tubo de cartón aplastado se transforma en un rectángulo; a partir de

<table>
<tr><td>- Identificación de figuras transformadas mediante traslaciones y simetrías en situaciones de la vida cotidiana.
- Generación de figuras transformadas a partir de simetrías y traslaciones de un patrón inicial y predicción del resultado.</td><td>diferentes tangrams se pueden conseguir formas diversas con la misma área y elementos diferenciadores (lados, ángulos, ejes de simetría, perímetro, etc.) que posibilitan diferentes análisis.
La presencia de mosaicos y frisos en distintos monumentos del patrimonio aragonés, permitirá descubrir e investigar la geometría de las transformaciones para explorar las características de las reflexiones (en primer ciclo), giros y traslaciones (a partir del segundo ciclo).</td></tr>
<tr><td>C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica:
- Estrategias para el cálculo de perímetros de figuras planas y utilización en la resolución de problemas de la vida cotidiana.
- Modelos geométricos en la resolución de problemas relacionados con los otros sentidos.
- Reconocimiento de relaciones geométricas en campos ajenos a la clase de matemáticas, como el arte, las ciencias y la vida cotidiana.</td><td>La experimentación con materiales manipulativos sobre los que se propongan tareas de descomposición y análisis permite abordar el perímetro y el área: figuras con la misma área pueden tener diferente perímetro, y viceversa. La práctica de medir perímetros en figuras o localizaciones reales se hace necesaria para diferenciar el perímetro del área e iniciar la exploración de la (falsa) relación entre ambas.
Es esencial desarrollar la capacidad de visualización con tareas variadas, dictados geométricos entre compañeros o compañeras, imaginar formas, etc. En definitiva, se trata de visualizar un mayor número de figuras de las que aparecen en los libros de texto habituales, aspecto que termina formando una pobre imagen mental del objeto y es fuente de incontables dificultades.
Finalmente, el sentido espacial se presta a establecer relaciones constantes con el resto de los saberes matemáticos: cálculo, medida, socioafectivo, etc., así como con otras áreas, el mundo del arte, de la ciencia, la naturaleza, la arquitectura, el diseño, la publicidad, etc. Numerosos pintores (Kandinsky, Miró, Mondrián, etc.) utilizan figuras en sus creaciones que pueden ser objeto de análisis y recreación. Los logotipos ofrecen la posibilidad de analizar simetrías, giros, etc.</td></tr>
<tr><td colspan="2">D. Sentido algebraico y pensamiento computacional</td></tr>
<tr><td colspan="2">Las ideas fundamentales que subyacen en el desarrollo del sentido algebraico y el pensamiento computacional son las mismas que en el primer ciclo. De hecho, se pueden revisitar los mismos tipos de actividades pero con mayor nivel de complejidad. Las principales novedades serían el empleo de instrumentos de clasificación tabulares, como los diagramas de Carroll y la extensión de situaciones sobre las que proponer situaciones de aprendizaje sobre pensamiento computacional. Al final del segundo ciclo, por ejemplo, tiene sentido plantearse trabajar los algoritmos de las operaciones que explotan el potencial que tiene para ello el sistema decimal posicional. Como siempre, iniciando su trabajo de forma manipulativa, conectando acciones físicas con expresiones simbólicas y reglas algorítmicas, para posteriormente realizar tareas ricas sobre ellos.</td></tr>
<tr><td>Conocimientos, destrezas y actitudes</td><td>Orientaciones para la enseñanza</td></tr>
<tr><td>D.1. Patrones, relaciones, clasificaciones y funciones:
- Identificación, descripción verbal, representación y predicción razonada de términos a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes.
- Clasificaciones de objetos atendiendo a cualidades determinadas y diferentes criterios, incluso de forma combinada.
- Relaciones de igualdad y desigualdad y uso de los signos = y ≠ entre expresiones que incluyan operaciones y sus propiedades.
- La igualdad como expresión de una relación de equivalencia entre dos elementos y obtención de datos sencillos desconocidos (representados por medio de un símbolo) en cualquiera de los dos elementos.
- Representación de la relación “mayor que” y “menor que”, y uso de los signos < y >.
- Apreciación del cambio en distintos tipos de situaciones, tanto numéricas como geométricas.</td><td>Además de incluir patrones más complejos que en el primer ciclo, ahora se pueden incorporar nuevos tipos de situaciones de aprendizaje, como la observación y análisis de secuencias dadas, así como la generalización. Ante una serie de formas, colores, símbolos o configuraciones de elementos, es interesante preguntar por cómo sería no solo el siguiente elemento, sino uno muy lejano. Esto exige progresar en la abstracción y la mera verbalización de cómo se razona (o como se organiza el programa aritmético necesario, en el caso de ser una secuencia de cardinales) es pensamiento algebraico. Además, este tipo de actividades forman la base experiencial necesaria para abordar en cursos posteriores la idea de función.
Las clasificaciones pueden dar lugar a situaciones más complejas con el empleo de varios criterios sobre la misma colección de objetos. Los diagramas de Carroll permiten agrupar objetos en función de si tienen o no cierto atributo x, catalogando entonces dichos objetos como x o como no x. Se muestra ejemplo, adaptado de Alsina (2019):
<table><tr><td></td><td>Primo</td><td>No primo</td></tr><tr><td>Par</td><td>2</td><td>4, 6, 8, 10, 12, 14</td></tr><tr><td>No par</td><td>3, 5, 7, 11, 13</td><td>1, 9, 15, 21, 25</td></tr></table>En paralelo a la verbalización de relaciones entre expresiones matemáticas, se debe ir desarrollando la escritura de frases matemáticas que incorporen los símbolos <, >, = como forma de indicar cuándo una expresión es mayor, menor o igual que otra. El trabajar estos signos (y sus verbalizaciones asociadas, que fueron enfatizadas en el primer ciclo) persigue el objetivo de enriquecer el significado del signo igual. Al situarlo al mismo nivel que el de otros signos, específicamente orientados a situaciones de comparación y, por tanto, a las relaciones, se consigue diluir el significado meramente operativo.
Conviene seguir prestando atención a los usos del signo igual, planteando situaciones donde el alumnado deba describir su proceso de cálculo. Deben evitarse malos usos del signo igual (p. ej., escribir 2+8 = 10+3 =13). En estas tareas, resulta interesante incluir símbolos pictóricos que expresen cantidades variables o desconocidas.
Se deberían incorporar tareas de invención de problemas con algún condicionante. Por ejemplo, inventa un problema que se resuelva con la operación 13+27.
En conexión con el sentido numérico, se deben seguir analizando situaciones de cambio y transformación. Una tarea interesante es el dominó de las diferencias, que puede abordarse con dos o más cambios en 3º EP y con tres o más cambios en 4º EP. En el caso del dominó de las diferencias con tres cambios, se inicia el juego con una pieza y para colocar la siguiente</td></tr>
</table>

	deben cambiar tres cualidades, por ejemplo: rectángulo amarillo, grande y delgado; rectángulo rojo, pequeño y grueso (cambia el color, el tamaño y el grosor); rectángulo azul, grande y delgado (cambia el color, el tamaño y el grosor); etc.  Fuente: Alsina (2019)
D.2. Modelo matemático: - Proceso de modelización con el andamiaje adecuado en el aula, empleando objetos manipulables, dramatizaciones, dibujos, diagramas, etc. de manera que se conecte lo concreto con lo pictórico y lo abstracto para comprender las situaciones y los problemas que se planteen.	Todo lo mencionado para el primer ciclo permanece vigente en el segundo ciclo. Lo único que cambia son los objetos matemáticos que aparecen en este ciclo. Esto es algo que habrá que considerar al efectuar el andamiaje. Por ejemplo, las situaciones de aprendizaje en torno al número racional desde el modelo de medida exigen el uso de tiras de papel, manteles o superficies para medir, regletas de Cuisenaire, etc. Hay que tener presente que el proceso de modelización es un aspecto a evaluar y en ningún caso para por emplear el esquema Datos | Operación | Solución (D|O|S). Este esquema, como se describe en detalle en las orientaciones, obvia cualquier proceso de modelización, ya que no considera ni los dibujos, ni los esquemas como parte del proceso de resolución. Además, fomenta la creencia de que todos los datos han de ser numéricos, con lo que el alumnado apenas lee el enunciado ni trata de comprender la situación. Busca los números, elige una operación y da una solución. ¿Tienen que tener solución cerrada todos los problemas? ¿No se valora la verbalización de lo que significa cada número? Son solo algunas preguntas que nos podemos hacer a este respecto. En definitiva, el D|O|S es una pobre interpretación del modelo de resolución de problemas de Polya. Modelo que, por otro lado, se ha visto refinado posteriormente para incluir, sin ir más lejos, aspectos metacognitivos. El proceso de modelización puede comenzar con «rutinas» más abiertas: ¿qué observo?¿Qué puedo saber? ¿qué me gustaría saber? etc.
D.3. Pensamiento computacional: - Estrategias para la interpretación y modificación de algoritmos sencillos (reglas de juegos, instrucciones secuenciales, bucles, patrones repetitivos, programación por bloques, robótica educativa...).	Hacia el final de segundo ciclo, ya con técnicas de cálculo flexibles y con cierto trabajo de la escritura de frases matemáticas consolidado, es cuando tiene sentido explorar los algoritmos estándar de las operaciones, así como otros algoritmos que permitan explorar con más profundidad el sistema de numeración posicional y cómo aprovechar sus propiedades para elaborar algoritmos. Es importante, como siempre, huir de la enseñanza de trucos sin significado para el alumnado que conducen a una mecanización sin sentido. Una propuesta didáctica sobre algoritmos desde la comprensión comenzará desde la manipulación de materiales estructurados de base 10. De esta manera, se pueden usar bloques multibase o puntos, barras y placas para los de la suma y la resta; y quizá billetes de base decimal para la multiplicación y la división. Las acciones físicas que se realizan sobre estos materiales para agregar, sustraer, triplicar, o repartir cantidades representadas por números tienen su correspondencia con los pasos del algoritmo. A partir de la reflexión sobre estas acciones y su puesta en común, surge un algoritmo. Lo importante es la comprensión, pues para el cálculo con números de dos e incluso tres cifras se pueden usar técnicas mentales o cualesquiera, y para operaciones «complicadas», como divisiones por números de dos cifras, tendremos el apoyo de la calculadora. Una vez comprendido, o también, para evaluar y progresar en el aprendizaje, se pueden plantear interesantes situaciones de aprendizaje. Por ejemplo: ¿y si empezamos el algoritmo estándar de la suma por la izquierda?, ¿y si colocamos los números alineados por la izquierda?, etc. Este tipo de actividades se encuentran en el núcleo de la intersección entre matemáticas y pensamiento computacional: se diseña un algoritmo para resolver un problema (realizar una operación) y, al mismo tiempo, se profundiza en las propiedades matemáticas del objeto en juego (el sistema de numeración posicional). **Algoritmos de la multiplicación** En la introducción del algoritmo deberían, por tanto, mantenerse los siguientes criterios: partir de acciones con manipulativos, que la ejecución debe basarse en la comprensión, no únicamente en la repetición mecánica; desarrollar el sobre el resultado, valorando si es o no razonable. A la hora de utilizar un algoritmo en concreto, como el estándar, para encontrar un resultado, se debe tener en cuenta que es una forma más de encontrar resultados, pero no es la única ni la más adecuada en muchas de las situaciones. Desde luego, en muy pocas de las que se presentan a lo largo de la educación primaria. Se puede empezar por la modelización de la situación vía el modelo de área, y en la medida que se vaya comprendiendo, ir pasando a modelos más comprimidos 

Fuente: Creamat.

El objetivo es, que en el momento de hacer el algoritmo estándar (que también se realizará, llegando el momento con material estructurado, como placas multibase o billetes), conozcan de dónde salen los números y que puedan anticipar aproximadamente el resultado. Cuando esté suficientemente consolidada la multiplicación con una cifra se puede pasar a hacerlo con números de dos cifras, para lo que es necesario dominar la multiplicación por 10 y qué propiedades del sistema de numeración posicional se ponen en juego. Modelizaciones como la siguiente para multiplicar 25x32 y los bloques multibase ayudan a comprender el algoritmo, que gradualmente podremos compactar y explorar nuevas variantes.



Fuente: Creamat.

Conviene planificar el trabajo con algoritmos a lo largo de los ciclos. Una posible propuesta puede ser iniciar los algoritmos de la suma y de la resta al comienzo de segundo ciclo e introducir, quizá, el de la multiplicación hacia final de segundo ciclo. Siempre teniendo en mente los dos objetivos: profundizar sobre las características del sistema de numeración posicional y desarrollar el pensamiento computacional.

Por lo demás, se pueden retomar los tipos de situaciones mencionados en primer ciclo. Si es posible utilizar robots, se trata de explotar su potencial en relación con las matemáticas. No obstante, no es indispensable el uso de estos para continuar desarrollando el pensamiento computacional. Los juegos, tanto en la propia descripción de su mecanismo como en aquellos en los que hay que buscar una estrategia óptima, ofrecen oportunidades para el desarrollo del pensamiento computacional. Estos juegos pueden ser tanto juegos comerciales como juegos de lápiz y papel, de cartas, con fichas a modo de contadores. Cuando el juego, además, moviliza contenido matemático estaremos, de nuevo, en la mencionada intersección entre pensamiento computacional y matemáticas, donde hay múltiples puntos de encuentro.

E. Sentido estocástico

En el segundo ciclo sigue siendo importante ofrecer una base adecuada constituida por situaciones de aprendizaje que permitan desarrollar el sentido estocástico. De nuevo, conviene insistir en que la ordenación de los sentidos no obedece a razones de importancia o relevancia, pues todos lo son. Siempre se pueden encontrar oportunidades de conexión entre los diferentes sentidos, sin perjuicio de reservar un período a lo largo del ciclo para tratar con más profundidad algunas cuestiones. Las grandes ideas relacionadas con la estocástica son las de distribución y variabilidad de los datos, inferencia, azar e incertidumbre. Todas ellas necesitan de la acumulación de experiencias sobre las que se haya reflexionado, porque, a pesar de que vivamos en un mundo lleno de incertidumbre y aleatoriedad, sin esa reflexión y tratamiento específico, se terminan desarrollando sesgos de razonamiento. En cuanto a la predictibilidad e incertidumbre, se deberá seguir haciendo énfasis en el uso del lenguaje verbal y el significado intuitivo de la probabilidad. Es imprescindible plantear experimentos aleatorios en los cuales haya que comparar probabilidades de manera intuitiva, junto con contextos en los que tengan lugar fenómenos aleatorios (como los fenómenos atmosféricos y otras situaciones cercanas o de interés para el alumnado). La reflexión sobre la creencia acerca del grado de ocurrencia o no de estos sucesos y contrastarlo después con la experimentación o con lo que finalmente sucede es esencial para el desarrollo del razonamiento probabilístico.

Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
E.1. Distribución e inferencia: - Gráficos estadísticos de la vida cotidiana (pictogramas, gráficas de barras, histogramas...): lectura e interpretación. - Estrategias sencillas para la recogida, clasificación y organización de datos cualitativos o cuantitativos discretos en muestras pequeñas mediante calculadora y aplicaciones informáticas sencillas. Frecuencia absoluta: interpretación. - Gráficos estadísticos sencillos (diagrama de barras y pictogramas) para representar datos seleccionando el más conveniente, mediante recursos tradicionales y aplicaciones informáticas sencillas. - Iniciación a las medidas de tendencia central: moda y mediana.	Todo lo comentado para el primer ciclo sigue vigente ahora, donde los estudios estadísticos que se realicen deben seguir profundizando en las mismas cuestiones. Así, sigue siendo esencial partir del problema de plantear preguntas adecuadas para ser resueltas mediante un proyecto estadístico, con datos (ver ejemplos en el primer ciclo). Las muestras pueden ser algo más amplias, llegando hasta unos 50 elementos. El trabajo debe ir orientado a ganar comprensión acerca del conjunto de datos como un todo. En el primer ciclo se ha empezado a trabajar en este sentido, ya que la elaboración e interpretación de gráficos es una forma de aproximarse de forma sintética a lo que «dicen» los datos. Hay que recuperar este tipo de situaciones de aprendizaje ahora, pero incluyendo otros tipos de gráficos. Una novedad importante que contribuye a comprender que un conjunto de datos forma una entidad susceptible de ser descrita y analizada es que se empieza a trabajar con medidas de tendencia central. Estas medidas son una forma de resumir el conjunto de datos y el énfasis ha de ponerse desde el principio, no tanto en los procedimientos aislados de cálculo, sino en su interpretación (cuando sea posible, conjunta). La moda no es algo extraño para el alumnado, ya que la idea del «dato más frecuente» pudo surgir en el primer ciclo de manera informal. Ahora se retoma explícitamente a partir del recuento de las frecuencias absolutas. Aparece la mediana, como el valor de la variable tal que existen tantos datos con valores de la variable superiores o iguales, como inferiores o

- Comparación gráfica de dos conjuntos de datos para establecer relaciones y extraer conclusiones.	iguales a él, una vez ordenados los datos de menor a mayor. O como el valor de la variable estadística que divide en dos partes iguales a los individuos de la población, una vez ordenados de menor a mayor. Obsérvese que la mediana no tiene por qué ser un valor numérico, teniendo sentido tanto para datos cuantitativos como para cualitativos ordinales. La moda, en cambio, cuando el dato es cuantitativo y hay muchos valores puede perder sentido como medida que resume el conjunto de datos. Las situaciones de aprendizaje para introducir la idea de mediana comienzan como situaciones de ordenación de elementos de un conjunto según el valor creciente de cierto carácter. Es imprescindible realizar esto con manipulativos, u ordenando, si es posible, los objetos a estudiar directamente. Entonces es muy claro qué es el elemento «mediano» y cuál es el valor de la mediana. Del trabajo con moda y mediana conviene destacar dos cosas: identificar cuándo tienen sentido e interpretarlas de forma conjunta, proponiendo situaciones de aprendizaje en donde sean muy diferentes, para decidir cuál de las dos resume mejor el conjunto de datos. Los gráficos estadísticos pueden ser algo más complejos que en el primer ciclo. En este ciclo se puede comenzar a trabajar la interpretación de histogramas, dejando la elaboración, quizás, para el tercer ciclo. Los histogramas son un gráfico muy complejo, que sirve para representar variables cuantitativas continuas, que requiere agrupar los datos convenientemente y luego reflexionar sobre el hecho de que lo proporcional a la frecuencia relativa no es la altura de cada rectángulo (como en el diagrama de barras) sino su área. Por ello, se puede recomendar que el trabajo en este ciclo vaya orientado a iniciar la interpretación de histogramas ya hechos. Posibles tipos de gráficos que pueden empezar a ser introducidos, quizás hacia final de ciclo, son el gráfico de barras doble y el gráfico de barras apilado. Para ganar comprensión de los diferentes gráficos son muy interesantes las actividades en torno a gráficos erróneos, con los que periódicamente nos deleitan en los medios de comunicación. También, las actividades denominadas «revelado lento de gráficos» (https://slowrevealgraphs.com/) y las que ofrece el NY Times en su sección «¿Qué pasa con este gráfico» (https://www.nytimes.com/column/whats-going-on-in-this-graph). Se deben plantear situaciones de aprendizaje en las que el alumnado tenga que comparar diferentes conjuntos de datos. Estos datos pueden provenir de diferentes fuentes. Pueden ser desde pequeñas encuestas de aula hasta pequeños trabajos de investigación estadística en los que tengan que realizar observaciones para recoger datos. Es importante que sean datos de diferente tipo, cuantitativos y cualitativos, porque de esto depende luego el tipo de gráfico, la posibilidad de calcular medidas de tendencia central, etc. También empieza a ser importante el uso de Tecnologías digitales para la representación de datos, encontrando applets en Internet que facilitan la labor. El uso de estas aplicaciones permite centrarse en la elección y discusión del tipo de gráfico más conveniente (gráfico de barras simple, gráfico de barras doble, pictograma). A partir de los gráficos y las medidas de tendencia central es fundamental reflexionar sobre lo que muestran los datos y lo que podía esperarse antes de realizar el estudio estadístico. La guía para la evaluación e instrucción en educación estadística GAISE II (Bargagliotti, et al. 2020), descargable, contiene numerosas orientaciones y ejemplos de actividades para fomentar el desarrollo del sentido estocástico, en lo que concierne a distribución en inferencia estadística.
E.2. Predictibilidad e incertidumbre: - Reconocimiento de la incertidumbre en situaciones de la vida cotidiana y mediante la realización de experimentos. - Identificación de suceso seguro, suceso posible y suceso imposible. - Comparación de la probabilidad de dos sucesos de forma intuitiva.	El trabajo en probabilidad debe seguir muy ligado al significado intuitivo de esta. La cuantificación de la probabilidad con fracciones, decimales o porcentajes, se abordará en el tercer ciclo, por lo que la verbalización y valoración cualitativa de esta será fundamental. No obstante, el significado frecuencial ofrece excelentes oportunidades de conexión entre estadística y probabilidad. Hay muchas situaciones de aprendizaje interesantes en este sentido, como la realización de experimentos aleatorios que impliquen un número elevado de repeticiones y su recuento y representación en diagramas de barras. Resulta muy adecuado plantear esto desde el aprendizaje basado en juegos. Por ejemplo, y en conexión con el sentido espacial, se puede iniciar una situación de aprendizaje con la construcción en papiroflexia modular de un dado (p. ej., módulo Sonobe). Después, se les invita a jugar al clásico juego de la carrera de coches, en el que cada participante elige un número. Se tira el dado y, cada vez que sale cierto número, el coche con ese número avanza una casilla, como se aprecia en la figura. Antes de comenzar, el alumnado debe expresar su creencia y el motivo de su elección, para poder contrastar esto con el resultado de la experimentación. Al final, el propio juego devuelve un gráfico de barras. Como los dados que hace el alumnado suelen ser dados «malos», aparecen gráficos interesantes. ¿Qué número elegirías si volvieses a jugar? ¿Por qué? Es imprescindible comparar luego con lo que ocurre usando dados estándar, bien con este juego o con otro. Los juegos, además, permiten introducir la idea informal de lo que es un juego justo (que todos los jugadores tienen la misma probabilidad de ganar). 

	Las preguntas que guíen las actividades deben tratar de poner de manifiesto que no se puede predecir un resultado aislado, pero sí la frecuencia de aparición de los diferentes resultados. Por último, en conexión con el sentido numérico cabe la posibilidad de plantear situaciones sencillas de conteo que requieran del principio multiplicativo, para averiguar el número de posibles resultados de un experimento aleatorio.
F. Sentido socioemocional	
El sentido socioafectivo en matemáticas está muy relacionado con la Competencia Personal, Social y de Aprender a Aprender (CPSAA), por lo que su desarrollo implica plantear situaciones para que el alumnado reflexione sobre sí mismo y sobre cómo se enfrenta al aprendizaje de las matemáticas, originando un autoconcepto positivo como aprendiz de matemáticas; para colaborar con otros de forma constructiva por medio de trabajo en diferentes agrupamientos: parejas, pequeño grupo, grupo/clase, dependiendo de la tarea que se plantee; situaciones que supongan un reto y en las que se entrene en perseverancia; valorar los errores como fuente de aprendizaje, reflexionando sobre ellos; etc. Todo esto debe formar parte de la cultura de aula, en cuya formación el profesorado tiene un papel fundamental: pensar en lo que pueden hacer, en lugar de fijarnos en lo que no pueden hacer todavía; pensar en las posibilidades de aprendizaje que ofrece el grupo; centrarnos en los objetivos principales en lugar de reducir la enseñanza a una serie de trucos mecánicos vacíos de significado. Desde la inclusividad, se entiende que el aprendizaje es un camino, unos o unas pueden ir más adelante que otros u otras pero todos o todas se benefician de las preguntas y aportaciones de los compañeros o compañeras. Sentir que se cree en las posibilidades propias, es uno de los factores más importantes del aprendizaje. Las investigaciones avalan que los grupos homogéneos transmiten expectativas bajas y limitan las posibilidades de aprender. En este sentido, actividades de suelo bajo y techo alto que pueden ser abordadas por todo el alumnado. El «suelo», «piso» o «umbral» es el arranque de la actividad y conecta con conocimientos previos muy básicos). El «techo» da oportunidades de bloqueo (reto y superación) también a todo el alumnado, permitiendo diferentes niveles de profundización. Esto posibilita que todo el alumnado progrese en el aprendizaje, por lo que, en matemáticas, bien gestionadas en el aula, son un excelente ejemplo de actividad inclusiva. Observemos que tienen en cuenta el Principio General n.º 3 de esta Ley: «La acción educativa en esta etapa procurará la integración de las distintas experiencias y aprendizajes del alumnado desde una perspectiva global y se adaptará a sus ritmos de trabajo. Se pueden encontrar muchas actividades de este tipo en la red, por ejemplo: NRICH y map.mathshell.org».	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
F.1. Creencias, actitudes y emociones propias: - Gestión emocional: estrategias de identificación y manifestación de las propias emociones ante las matemáticas. Iniciativa y tolerancia ante la frustración en el aprendizaje de las matemáticas - Fomento de la autonomía y estrategias para la toma de decisiones en situaciones de resolución de problemas.	Ya se ha señalado la importancia de las actitudes y expectativas del profesorado sobre el alumnado para que este tenga confianza en sus capacidades al enfrentarse a los saberes matemáticos. En las orientaciones para la enseñanza de los diferentes sentidos matemáticos se han ido sugiriendo estrategias facilitadoras del sentido socioafectivo: favorecer la construcción de los saberes, en lugar de presentarlos elaborados; permitir y favorecer el uso de estrategias personales en la resolución de problemas para conectar con conocimientos previos e intuiciones; plantear retos y problemas cuya resolución no es evidente en un primer momento y que su solución requiere perseverar; permitir la comunicación de los razonamientos matemáticos, sean correctas o no; favorecer representaciones propias en la resolución de problemas, etc…
F.2. Trabajo en equipo, inclusión, respeto y diversidad: - Sensibilidad y respeto ante las diferencias individuales presentes en el aula: identificación y rechazo de actitudes discriminatorias. - Participación activa en el trabajo en equipo, escucha activa y respeto por el trabajo de los demás. - Reconocimiento y comprensión de las emociones y experiencias de los demás ante las matemáticas. - Valoración de la contribución de la geometría a los distintos ámbitos del conocimiento humano desde una perspectiva de género.	Se deben plantear actividades en pequeños grupos heterogéneos, de tres o cuatro alumnos o alumnas, a ser posible conformados de manera aleatoria, hace que el niño o la niña no se tenga que afrontar solo al problema que se plantea y se sienta más seguro al expresar sus ideas en condiciones de igualdad. No se trata de trabajar de forma cooperativa para elaborar un producto final que hay de entregar, ni de llevar a cabo roles específicos. Es cuestión de interactuar, de conversar entre iguales para discutir formas de abordar un problema, llegar a acuerdos. Cuando la cultura de aula incorpora de forma natural y cotidiana estas interacciones, las estrategias personales que pueda tener cada alumno o alumna de forma espontánea se ven ampliadas y enriquecidas, al mismo tiempo que obliga a utilizar un lenguaje matemático (en sentido amplio, atendiendo a sus diversos registros, desde el lenguaje oral hasta el simbólico-numérico, pasando por diagramas y esquemas) que comprendan los compañeros o compañeras. En definitiva, hablar de matemáticas ayuda a la propia comprensión. El profesorado debe asumir un papel fundamentalmente de guía que plantea preguntas abiertas al alumnado, preguntas ricas, que les ayuden a razonar, a cuestionar sus propias ideas y las de los demás y a buscar recursos en el aula que necesiten para resolver el problema. Es vital dejar tiempo para pensar y poder contestar sin anticiparse a la respuesta del alumnado. No es suficiente con lanzar la pregunta y acto seguido, a los pocos segundos, desvelar la respuesta. El profesorado debe ser paciente. La forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas lleva aparejado el desarrollo de actitudes básicas para el trabajo matemático: perseverancia, flexibilidad, estrategias personales de autocorrección y de superación de bloqueos, confianza en las propias posibilidades, iniciativa personal, curiosidad y disposición positiva a la reflexión sobre las decisiones tomadas y a la crítica razonada, planteamiento de preguntas y búsqueda de la mejor respuesta, aplicando lo aprendido en otras situaciones y en distintos contextos, interés por la participación activa y responsable en el trabajo en pequeño y gran grupo. Cabe mencionar materiales como lecturas y audiovisuales de contenido matemático, que además de tener un sentido globalizador y contextualizado, permiten abordar aspectos socioafectivos.

III.2.3. Tercer ciclo de Educación Primaria

A. Sentido numérico

Las situaciones de aprendizaje con los números naturales no se agotan en el primer y en el segundo ciclo. Ahora se pueden retomar, entre otras, situaciones de combinatoria en donde la colección de objetos a contar dificulte la aplicación de los principios del conteo. También surgen interesantes oportunidades de aprendizaje en torno a la divisibilidad y la estructura multiplicativa (en factores) del propio número natural. La representación fraccionaria del número racional se inició en el segundo ciclo, enfatizando la verbalización de los conceptos asociados y su comprensión desde el modelo de medida. Desde el sentido numérico, en conexión con el sentido de la medida, aparecerán situaciones en las que se pongan en juego estas. Además, se invita a utilizar el modelo de reparto para introducir el modelo decimal, el cual está íntimamente relacionado con el modelo de medida, ya que se estudia la cantidad de magnitud que recibe cada uno de los participantes en un reparto. La proporcionalidad es, quizás, el objeto más complejo de toda la aritmética, debido al grado de generalización y de abstracción que implica. Su enseñanza y aprendizaje exige también el establecimiento de conexiones con el sentido de la medida No en vano, se deben organizar situaciones de aprendizaje donde se identifiquen las magnitudes involucradas, se estudie la relación entre ambas, se explicite la condición que debe cumplirse para que estén relacionadas de forma directamente proporcional y se verbalice el significado de la razón entre magnitudes, etc. Los porcentajes, por otro lado, surgen como una forma de describir estas situaciones.

Conocimientos, destrezas y actitudes

A.1. Conteo y cantidad:

- Estrategias variadas de conteo, recuento sistemático y adaptación del conteo al tamaño de los números en situaciones de la vida cotidiana.
- Estrategias y técnicas de interpretación y manipulación del orden de magnitud de los números.
- Estimaciones y aproximaciones razonadas de cantidades en contextos de resolución de problemas.
- Lectura, representación, composición, descomposición y recomposición de números naturales y decimales hasta las milésimas.
- Fracciones y decimales para expresar cantidades en contextos de la vida cotidiana y elección de la mejor representación para cada situación o problema.

Orientaciones para la enseñanza

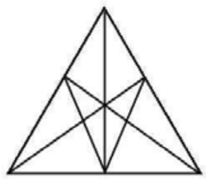
El desarrollo del sentido numérico se inicia en Educación Infantil y se trabaja durante toda la Educación Primaria. Es un campo excelente para la exploración y desarrollo de ideas profundas sobre el conocimiento de los números y permite establecer importantes conexiones con la medida y el pensamiento algebraico y computacional. En la vida cotidiana, fuera del ámbito escolar, cuando es necesario efectuar algún tipo de cálculo, lo más frecuente es que utilicemos estrategias de cálculo mental y estrategias basadas en estimaciones. A este aprendizaje hay que dedicarle tiempo en el aula. También a la calculadora, pues también se echa mano de ella en la vida cotidiana cuando los cálculos a realizar son complejos y necesitamos precisión. Decidir la conveniencia de utilizar el cálculo aproximado o exacto también es un aprendizaje. La calculadora como recurso didáctico, por otro lado, ofrece interesantes actividades de exploración que facilitan el descubrimiento de ciertas propiedades de los números y sus operaciones.

El modelo de reparto para el aprendizaje de la representación decimal comenzó a plantearse en el segundo ciclo, estableciendo las conexiones con el modelo de medida empleado para las fracciones. Desde el reparto, la expresión a/b posee dos significados: las condiciones iniciales de un reparto, es decir, repartir de forma igualitaria a unidades entre b individuos. En este caso la expresión a/b hace referencia al *proceso* de un reparto igualitario (en el que cada participante recibe la misma cantidad de magnitud); y la cantidad de magnitud que recibe cada uno de los participantes como *resultado* del reparto. Tal y como se indica en las orientaciones de segundo ciclo, este significado permite retomar propiedades de orden (comparaciones) y densidad de las fracciones (entre dos fracciones hay infinitas fracciones).

Para introducir los decimales desde el reparto se debe modificar la técnica descrita en el segundo ciclo. El reparto se realiza ahora en fases, de modo que en la primera fase se reparte el mayor número posible de unidades enteras y, si quedan unidades sobrantes, estas se fraccionan en 10 partes iguales y después se reparten. Si siguen quedando partes sobrantes se vuelven a fraccionar en 10 partes iguales y se reparten, y así sucesivamente. Esta técnica es necesaria porque los números naturales los expresamos de forma simbólica en base 10 y porque la medida de las cantidades de magnitudes las expresamos de manera estándar según el Sistema Métrico Decimal, donde los sistemas de unidades y sus múltiplos o submúltiplos están relacionados mediante potencias de 10. La acción de reparto igualitario nos va a permitir conectar los sistemas de representación fraccionario y decimal del número racional positivo. En la siguiente tabla se ejemplifica el reparto de 9 tortillas entre 4 personas de esta manera (9/4).

	Lo que tengo	Lo que doy a cada uno	Lo que doy en total	Lo que sobra
1ª fase	9[1]	2[1]	8[1]	1[1]
2ª fase	10[1/10]	2[1/10]	8[1/10]	2[1/10]
3ª fase	20[1/100]	5[1/100]	20[1/100]	0[1/100]

Como resultado, cada participante recibe 2[1] + 2 [1/10] + 5[1/100] tortillas. Es decir, dos tortillas enteras, dos décimas de tortilla y cinco centésimas de tortilla. En efecto, se trata de un algoritmo que puede abordarse desde el desarrollo del pensamiento computacional y que, por supuesto, debe partir del uso de manipulativos o representaciones gráficas que evoquen experiencias anteriores sobre repartos, de tal manera que no se presente hecho al alumnado, sino que exploren cómo repartir de esta manera. ¿Qué acciones hay que realizar? ¿Qué operaciones se hacen para calcular el número de cada una de las celdas? Etc. Por otro lado, surgen interesantes

	conexiones con otros algoritmos, como el de la división en caja. Para dotar a este último algoritmo de significado, debe introducirse de esta manera o de forma similar, porque de lo contrario se desemboca en «bajar ceros» de algún lugar que no tiene relación con lo que se está haciendo, en lugar de «como no puedo repartir más unidades, las parto, por lo que tengo 10 veces este número, pero ahora son décimas». Es fundamental el control de lo que se reparte en cada fase e, insistimos, todo esto debe realizarse según los objetivos establecidos en el desarrollo del pensamiento computacional, nunca con la mecanización operacional como objetivo principal. Para más información, nos remitimos a Escolano (2007) y trabajos relacionados. La representación de los números decimales en la recta numérica y con materiales manipulativos permite profundizar en las propiedades de los números y sus operaciones. De esta manera, se pueden revisitar propiedades de los números racionales que se han abordado previamente desde los modelos de medida (fracciones) y reparto (decimales). Por ejemplo, entre un número natural y el siguiente no hay otro número natural. Sin embargo, fracciones y números decimales expresan cantidades de magnitud continuas que la recta ayuda a visualizar. Al mismo tiempo, la recta numérica es en sí misma un interesante objeto matemático, que mucho más adelante se completará definitivamente con la recta real. Para ilustrar todo esto pueden utilizarse applets en línea como esta: http://www.sineofthetimes.org/zooming-in-on-place-value/. Se deben considerar situaciones de combinatoria como las mencionadas para segundo ciclo, con estructuras más complejas. Por ejemplo: ¿cuántos triángulos hay en esta figura? Dejar hacer, con calma y tranquilidad, contrastar estrategias, hacer preguntas, ¿cómo podemos estar seguros de haber llegado al resultado correcto? ¿nos hemos dejado alguno? ¿hemos contado dos veces el mismo?  En el apartado de Educación financiera se mencionan algunos aspectos importantes a considerar antes de la utilización del dinero como recurso manipulativo sobre el que introducir los números decimales. Además de que no se puede considerar realmente un modelo de aprendizaje, pues ya viene construido de antemano, puede generar concepciones erróneas fácilmente evitables.
A.2. Sentido de las operaciones: - Estrategias de cálculo mental con números naturales, fracciones y decimales. - Estrategias de reconocimiento de qué operaciones simples o combinadas (suma, resta, multiplicación, división) son útiles para resolver situaciones contextualizadas. - Potencia como producto de factores iguales. Cuadrados y cubos. - Estrategias de resolución de operaciones aritméticas (con números naturales, decimales y fracciones) con flexibilidad y sentido: mentalmente, de manera escrita o con calculadora; utilidad en situaciones contextualizadas y propiedades.	Es habitual que algunos alumnos o alumnas utilicen estrategias propias de cálculo, lo que no es tan frecuente es que las comunique. Aprovechar que alguien haya encontrado un resultado de manera no formal, espontánea, depende de la actitud del profesorado, promoviendo que se explique cómo se ha llegado al resultado, que se inicie el diálogo y la escucha hacia los razonamientos de los demás. El uso de estrategias didácticas que faciliten hacer visible el pensamiento del alumnado es esencial en este sentido (p. ej., pizarras en las paredes de la clase, grupos aleatorios de tres alumnos o alumnas, etc. (Liljedahl, 2021)). Al valorar y explicitar las diferentes estrategias personales para encontrar resultados ayudamos a ampliar el repertorio. Una actividad que puede fomentar esto específicamente consiste en ordenar tres operaciones según su grado de dificultad (donde lo que se valora son los argumentos empleados para justificar ese orden). No obstante, no siempre surgen de manera espontánea todas las técnicas posibles. En ese caso se puede proporcionar algo más de andamiaje para llegar a ellas, enlazando con técnicas de conteo o con descomposiciones con material manipulativo. Entre otras, cabe distinguir las que se basan en los números en sí, p. ej., 5+9=14, 25+19=44 (20+10+14); y las que se basan en las propiedades de las operaciones, p. ej., 15x12=180 , 15 x (10+2) - Redondear números. Cambiar un número por el más cercano acabado en 0 para facilitar la operación y luego ajustar. Se utiliza en la estimación en cálculo también. - Iniciar los cálculos por la izquierda, por las unidades de orden mayor. Esta estrategia ayuda a conservar mentalmente la magnitud de los números con los que se está operando. - Descomponer números. - Dobles y mitades. - Usar las conexiones entre operaciones. Abordar una resta como si estuviéramos completando una suma, una multiplicación como suma repetida, una división como el completado de una multiplicación o una división como una resta reiterada.

- Intercambiar los términos en caso de suma y multiplicación.
- Descomponer una operación en operaciones más pequeñas a partir de las propiedades asociativa y distributiva.
- Compensar, modificar los números de una operación para hacerla más fácil y compensar a continuación la modificación para no alterar el resultado.
- Buscar el completado de decenas o centenas. P. ej., 35+98 = 35+100-2.

La representación de los números y las operaciones en diferentes modelos extiende las posibilidades de exploración: recta numérica, cuadro de los números, materiales multibase, ábacos, etc. Como en los ciclos anteriores, proporciona formas de visualizar, desarrollar un discurso verbal que dé soporte a las operaciones y propiedades de los números, etc. que ayudarán a la construcción de estrategias personales de cálculo. Por ejemplo:

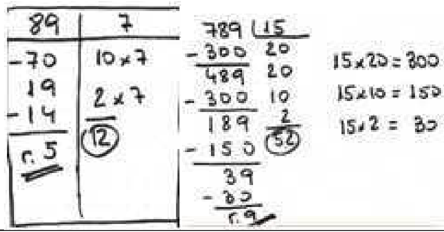
- Desplazamientos. Explorar las operaciones como desplazamientos sobre la recta numérica, o sobre el cuadro de los números del 0 al 100, conectando con situaciones de transformación y cambio.
- Visualizar las unidades de orden en la forma que las presentan los ábacos verticales (recurso asociado al aprendizaje de ciertos aspectos del sistema de numeración posicional; existen ábacos horizontales, como se ha mencionado en ciclos anteriores, que conectan con técnicas de conteo) , el material multibase, o representaciones planas de la multiplicación como el área de un rectángulo.

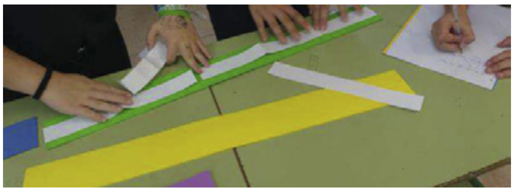
Después de un tiempo en el que aprender los algoritmos y utilizarlos sin errores era el objetivo principal de la escuela, en estos momentos en que nos podemos servir de otras herramientas más rápidas y seguras para obtener resultados, el aprendizaje de los algoritmos tiene un sentido distinto, que se explora desde el sentido algebraico y el pensamiento computacional. Si el alumnado en este ciclo no tiene un buen dominio de los algoritmos por haber realizado un aprendizaje únicamente mecanicista, es preferible ayudarles a conseguir un dominio más comprensivo. La realización de operaciones «complicadas» siempre podrá realizarse con calculadora u otros dispositivos, pero la institución escolar no debe perder ninguna oportunidad para el aprendizaje desde la comprensión. Esto no quiere decir que no se realicen tareas propias del pensamiento computacional, por lo que sugerimos leer las orientaciones expuestas allí.

En Internet pueden encontrarse multitud de propuestas con orientaciones (NRICH, map.mathshell.org -la página del Shell Centre dedicada a unidades con evaluación formativa-, PuntMat, Creamat, etc.). Estas propuestas están inspiradas en el ciclo de conferencias Reflexiones sobre el cálculo en primaria, que se pueden encontrar en PuntMat (http://puntmat.blogspot.com/p/publicacions.html) (David Barba y Cecilia Calvo), desde las que es conveniente observar que surgen interesantes oportunidades de conexión con el pensamiento computacional.

La multiplicación por dos cifras, se puede entender como que cada una de las cifras de un factor se multiplica por cada una de las cifras del otro factor, es decir, distinguir lo que es el número en sí de las cifras o dígitos que lo componen. De esta manera, multiplicar 25 x 32 implica multiplicar 30 x 20 y 30 x 5 y a continuación multiplicar 2 x 20 y 2 x 5. Empezar por la unidad de mayor orden ayuda al control del resultado. De hecho, antes de proceder con ningún tipo de cálculo, conviene anticipar el posible resultado.

La división debe entenderse como restos sucesivos, como señalamos en la descripción del modelo de reparto para los números decimales. No obstante, si el objetivo es la exploración y desarrollo de técnicas flexibles, podemos pasar de una fase de tanteo y de máximo despliegue, a otra en la que el tanteo es menos explícito.



	Fuente: Creamat. En el anterior ciclo se comenzó, quizás, a trabajar la suma y resta de fracciones que expresan cantidades de magnitud con el mismo tamaño de subunidad (igual denominador). Ahora es necesario comprender, con números fácilmente imaginables, cómo sumar y restar fracciones que expresan medidas realizadas con distintos tamaños de subunidad (distintos denominadores). Las acciones que se realizan desde el modelo de medida (ver imagen) permiten comprender la suma como la agregación de cantidades de magnitud y la resta como la sustracción de cantidades de magnitud, o como forma de expresar una diferencia.  Por ejemplo, si deseamos comunicar la longitud de la tira resultante de juntar una que mide 5/4 u y otra que mide 3/2 u, tenemos que medir de nuevo esa longitud. Para ello, es necesario medir en cuartos, en este caso.  Reflexionando sobre estas acciones se pone de manifiesto que lo que se ha realizado es una amplificación de la fracción 3/2, para convertirla en su equivalente 6/4. Se deben plantear otras situaciones que fomenten la simplificación de una de las fracciones a sumar (o restar) y otras situaciones donde haya que modificar ambas. En ningún caso, especialmente en este último, debe desembocar en el aprendizaje mecánico del cálculo del mcm, mucho menos a partir de las factorizaciones. Es esencial desarrollar la flexibilidad. Es importante relacionar las fracciones con denominador 10 con los números decimales, con las unidades de medida (metro, decímetro centímetro) o con la partición del euro en céntimos, lo cual, a su vez, ayudará también a la comprensión de las fracciones y su contextualización.
A.3. Relaciones: - Sistema de numeración de base diez (números naturales y decimales: aplicación de las relaciones que genera en las operaciones. - Números naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas en contextos de la vida cotidiana: comparación y ordenación. - Relaciones entre las operaciones aritméticas: aplicación en contextos cotidianos. - Relación de divisibilidad: múltiplos y divisores. - Relación entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.	El conocimiento y dominio de los números naturales es otro tema que se inicia en educación infantil, se trabaja durante toda la etapa, es un tema de gran importancia ya que la falta de dominio del cálculo tiene su razón en la falta de comprensión del sistema de numeración. No se trata solo de ir construyendo números cada vez mayores, sino que es necesario asegurar cómo funciona el sistema de numeración decimal y que los números se forman siempre siguiendo la misma estructura. Es decir, se trata de reconocer regularidades, propiedades de los números y su estructura multiplicativa en factores. Esto no implica estancarse haciendo el mismo tipo de actividades. Existen muchísimas tareas de suelo bajo y techo alto que permiten dar oportunidades de aprendizaje a todos (NRICH, PuntMat, map.mathshell.org, etc.). Algunas orientaciones: - En conexión con el sentido algebraico, tareas a partir de la observación de regularidades y elaboración de conjeturas. P. ej., detectar los patrones de series numéricas y realizar conjeturas sobre cómo continuarán. Si ven 80, 190, 300, y continúan 410, 520 con cierta fluidez, se dan cuenta de que el patrón que se sigue consiste en sumar 110 al número anterior, o aplicar alguna estrategia como sumar 100 y 10 más. - También son interesantes las series de múltiplos de un número que sirven de base a la reflexión sobre múltiplos y divisores. 4, 8, 16, 20, 24, … 11, 22, 33, 44, … - Conociendo los múltiplos y divisores de los números entre 2 y 9. Para elaborar tablas de los múltiplos de los primeros números, es muy apropiada la parrilla de los números entre 0 y 100 para marcar múltiplos.

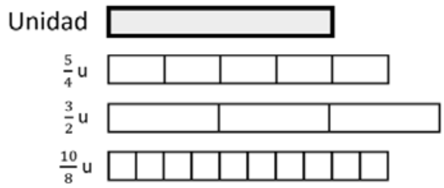
	Esto permite fijarse en las regularidades y deducir formas de reconocerlos; caer en la cuenta de las coincidencias entre tablas de múltiplos de varios números, por ejemplo la del 2, la del 4, la del 8…; o la falta de coincidencia entre estas y la del 5. - Comprender la estructura multiplicativa (factorial) de los números es necesario para comprender la equivalencia en las fracciones o para estimar cocientes y restos de las divisiones. Así, para dividir 48 entre 5 podemos saber que no dará un resultado exacto porque 48 no es múltiplo de 5, el múltiplo más cercano es 45 y, por tanto, quedará un resto de 3. - Dobles y mitades, con números naturales y fracciones. La idea de doble y mitad tiene muchas aplicaciones y gran potencia. Como en la multiplicación y la división de números naturales, con las fracciones también hay que darle un trato preferente. Con naturales, por ejemplo, multiplicar un número por 12 es cómo multiplicar por 10 y multiplicarlo por dos: 44x 12 =44 x 10 + 44 x 2 = 440 + 88 = 528. O bien 440:20 se puede pensar como 440/10/2= 44 /2= 22. Permite también deducir que 8 x 7 = 56 sabiendo que 4 x 7 = 28 simplemente dándose cuenta de que es el doble. - Siempre que sea posible se trabajarán las operaciones a partir de situaciones reales y/o imaginables. Ordenar números implica reconocer la cantidad que representan, el significado en cada situación. En este ciclo conviven ya naturales con racionales (fracciones y decimales). Que puedan explicar cómo los han ordenado, por qué uno es mayor que el otro, que puedan pensar un número «mayor que...», «menor que...», «uno que estaría entre tal número y tal otro», etc. En cuanto a las fracciones, volvemos a remitir al sentido de la medida, donde se dan orientaciones para su tratamiento desde el modelo de medida. Plantear actividades como la relación entre las áreas de las figuras del tangram chino, ayuda a su comprensión. Así mismo, se han dado orientaciones para los decimales en el primer apartado de este sentido. Hay que ser precavidos al asimilar, implícita o explícitamente, los decimales con los naturales. La semejanza entre ambos es solo aparente. Puede facilitar la comprensión de ciertos aspectos, pero al mismo tiempo es la responsable de algunas confusiones que hay que considerar específicamente: - La semejanza entre los nombres de las unidades de orden que ocupan lugares simétricos, decena y décima, centena y centésima; millar y milésima; si la decena es la unidad de orden más pequeña en los naturales, la décima será la más pequeña en los decimales, y, de la misma manera, la milésima es mayor que la centésima y esta que la décima. - El número de cifras: para escribir milésimas se necesitan más cifras que para las centésimas o décimas, aunque las milésimas son más pequeñas. En el caso de los naturales, cuantas más cifras, mayor es el número. - El papel que juegan los ceros. El cero en los naturales sirve para indicar la posición de las unidades vacías, los ceros a la izquierda no cambian el valor del número, a la derecha si que modifican el valor. Con los números decimales, esto ocurre al revés, los ceros a la derecha no modifican el valor, mientras que a la izquierda sí. - En la comparación y ordenación de decimales, hay que darse cuenta de cuándo los ceros no tienen valor y cuándo si lo tienen. 0,0106 no es lo mismo que 0,106. La argumentación sobre la decisión tomada en la ordenación y comparación de decimales, reforzará los razonamientos o se podrá reconducir si son erróneos. En cuanto a la relación entre fracciones y decimales, los números decimales, al igual que las fracciones, nos ayudan a expresar la medida de una cantidad de magnitud. En este sentido, podemos decir que las fracciones y los decimales permiten representar un mismo tipo de números, los racionales, de dos formas distintas. Algunas identificaciones utilizadas habitualmente como puntos de referencia tienen que ser reconocibles (conocer la identificación de un medio, un tercio, un cuarto, tres cuartos, un décimo,.con su expresión decimal). Un aprendizaje significativo de los porcentajes debe partir de su interpretación para describir situaciones de proporcionalidad. En especial, debe evitarse simplificar el trabajo sobre porcentajes al identificarlos con un número decimal o restringirlos a un uso de operador. Nos remitimos al siguiente apartado, donde se detalla esto.
A.4. Razonamiento proporcional: - Situaciones proporcionales y no proporcionales en problemas de la vida cotidiana: identificación como relación multiplicativa entre magnitudes. - Resolución de problemas de proporcionalidad en contextos diversos cercanos al alumnado (vida	Para un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional es necesario que las situaciones con magnitudes relacionadas (o no relacionadas) que se plantean al alumnado sean variadas en diferentes sentidos. Hay que prestar atención a presentar magnitudes de diferentes tipos: continuas, como la longitud, discretas, como el número de latas de un producto del mercado, intensivas, como la velocidad o la temperatura. Así mismo, se pueden presentar datos que no representen magnitudes a modo de distractor (por ejemplo, "en el

cotidiana, porcentajes, escalas, …) reflexionando a partir de las razones involucradas.	portal 5 viven 23 personas", el número de portal no representa una cantidad de magnitud). Por otro lado, hay que presentar situaciones con relaciones diversas entre las magnitudes en vez de presentar de forma aislada y localizada en el tiempo solo situaciones proporcionales. Por ejemplo, se puede pedir analizar si hay o no magnitudes directamente proporcionales en situaciones como "El bebé tiene 2 meses y pesa 4 kg" (no proporcionales) o "Para dar de comer a 16 personas he necesitado 2 kg de arroz" (pueden suponerse proporcionales). De entre las formas de justificar si una relación entre magnitudes es de proporcionalidad directa hay que evitar siempre utilizar argumentos erróneos del tipo "a más de esto, más de lo otro" (o similares). Estos argumentos no permiten describir una relación de proporcionalidad directa, sino una relación creciente y, por tanto, además de inválidos pueden llevar a confusiones futuras y a la promoción de la ilusión de linealidad. Se propone utilizar justificaciones que acerquen la relación de proporcionalidad a la razón entre las magnitudes y, por tanto, a interpretar la constante de proporcionalidad, este será el paso en futuras etapas (no en primaria) para introducir la modelización algebraica de la proporcionalidad. Por ejemplo, en la situación "Para dar de comer a 16 personas he necesitado 2 kg de arroz", las magnitudes serán directamente proporcionales si doy la misma comida siempre a cada persona. Si suponemos esta condición viable podremos calcular y dar significado a "comen 8 personas con cada kg de arroz" o a "necesitamos 1 / 8 kg = 0,125 kg de arroz para dar de comer a cada persona". Por otro lado, no tiene sentido que el bebé engorde lo mismo cada mes, por lo que en el otro ejemplo las magnitudes no pueden suponerse proporcionales. A partir del análisis de situaciones diversas pueden proponerse problemas variados en donde no necesariamente haya que calcular una cantidad desconocida, también se pueden proponer ejemplos en los que haya que comparar las razones o constantes de proporcionalidad para determinar cuál de entre varias opciones es más ventajosa. Por ejemplo, "En la tienda A, 4 latas grandes de atún nos han costado 28 €; en la tienda B 3 latas del mismo atún nos han costado 22,50 €; y en la tienda C, 5 latas nos han costado 32,50 €. Ordena de más barata a más cara las tiendas para comprar esas latas de atún." El alumnado puede responder al anterior problema mediante el cálculo de la razón unitaria "precio de cada lata". Junto con problemas como el anterior, pueden plantearse problemas "clásicos" de proporcionalidad en los que haya que calcular una cantidad desconocida. Para estos problemas hay que evitar usar técnicas algebraicas o algorítmicas, como la regla de tres o el producto cruzado, o, incluso, técnicas específicas que no sirvan en otros contextos, por lo que se deben promover las resoluciones aritméticas basadas en dar significado a las operaciones y los resultados de las mismas. Por ejemplo "En la tienda A, 4 latas grandes de atún nos han costado 28 €. ¿Cuánto tendríamos que haber pagado por 10 latas?" En primer lugar, hay que razonar la relación de proporcionalidad (si cada lata cuesta lo mismo podemos suponer que son directamente proporcionales) para después calcular el precio unitario repartiendo el coste total entre el número de latas porque a cada lata le corresponde la misma cantidad de dinero, 28:4= 7 € por lata. Por lo que para calcular el precio de 10 latas debemos repetir 10 veces el precio de una lata. Es decir, 7x10=70 € costarán las 7 latas. En este tipo de problemas, pueden surgir otras estrategias aritméticas de forma natural que no deben penalizarse y que sirven para dar una visión más rica del fenómeno de la proporcionalidad. Por ejemplo, un alumno o alumna podría resolver el anterior problema diciendo que si 4 latas cuestan 28 euros, 8 latas (el doble) costarán 56, y 2 latas (la mitad) costarán 14. Por lo que sumando el precio de 8 latas y de 2 latas 56+14=70, obtenemos el precio de 10 latas. Para no convertir estas actividades en ejercicios rutinarios se pueden contraponer con ejercicios con una estructura similar pero en los que no pueda suponerse una relación directa y no puedan resolverse ("En el portal 5 de mi calle hay 10 vecinos, ¿cuántos vecinos hay en el portal 10?") o con problemas resolubles pero con otro tipo de relaciones ("Julio y Marga están corriendo a la misma velocidad. Julio empezó a correr antes y cuando lleva 15 metros recorridos, Marga lleva 5 metros. ¿Cuántos metros llevará recorridos Julio cuando Marga lleve 15 metros?") El trabajo con contextos como el porcentaje o las escalas, debe relacionarse con las estrategias que se han utilizado anteriormente en problemas generales, evitando introducir fórmulas o técnicas nuevas para este tipo de contextos. En concreto, hay que realizar un esfuerzo en identificar que un porcentaje "esconde" dos valores que se refieren a dos cantidades de magnitud diferentes. Por ejemplo, "en el refresco hay un 10 % de zumo de limón y el resto es agua", el dato "10 %" representa que hay 10

	unidades de zumo de limón por cada 100 unidades de refresco. A partir de ahí, pueden calcularse las razones entre las magnitudes involucradas. De la misma forma, las escalas, por ejemplo, un plano de una casa a escala 1:50, deben interpretarse como dos cantidades de magnitudes diferentes relacionadas, en el ejemplo, 1 unidad de longitud en el plano por cada 50 unidades de longitud en la realidad. Posteriormente, se pueden utilizar las estrategias generales presentadas anteriormente dando significado a las operaciones.
A.5. Educación financiera: - Resolución de problemas relacionados con el consumo responsable (valor/precio, calidad/precio y mejor precio) y con el dinero: precios, intereses y rebajas.	El trabajo con contextos económicos en el resto de sub-bloques del sentido numérico (como los presentados en A.4) debería bastar para cubrir los saberes del sub-bloque de Educación Financiera. Por ejemplo, el cálculo e interpretación del valor unitario para comparar precios (como en el ejemplo de los rotuladores) permite tomar decisiones de compra responsable. También hay que tener presente que el alumnado suele estar familiarizado con el dinero y, de hecho, se han podido utilizar billetes como material manipulativo estructurado en el desarrollo de los saberes del sentido numérico relativos a los números naturales, si bien los billetes que se utilizan como manipulativo para explorar el sistema decimal posicional son de base estrictamente decimal (sin los billetes de base auxiliar 2 y 5, como 5, 20 y 50). A pesar de esta familiaridad, hay que tener cuidado con algunos aspectos, ya que el uso de billetes como forma de representación de los decimales no está exento de desventajas que deben considerarse cuando se plantea su utilización como recurso manipulativo (Jameson, 2016). Por ejemplo, con los billetes se puede crear la concepción errónea de que la longitud de una representación tiene que ver con lo mayor o menor de un número; interpretan el decimal con dos números naturales separados por un marcador; el alumnado consigue ser capaz de ordenar correctamente número con hasta dos cifras decimales, pero fallan al dar significado más allá de las centésimas (céntimos). Otra dificultad es que hablamos de 10 céntimos, no de 1 décimo de euro. Así, una cantidad de 3 euros y 4 céntimos, es frecuente verla escrita erróneamente como 3,4 , en lugar de como 3,04. Se puede presentar el euro como la unidad y los céntimos como fracciones de esa unidad. (3€ 50 céntimos); escribir e interpretar la coma como elemento separador de la unidad y la fracción. Una recomendación general es comenzar la introducción de los números decimales con modelos de aprendizaje más adecuados, como el de reparto con objetos fraccionables, en conexión con las tareas de medida mencionadas en el sentido de la medida. Posteriormente, basta con hacer la conexión pertinente.
B. Sentido de la medida	
En el segundo ciclo aparecieron las fracciones, haciendo énfasis en su expresión verbal, como forma de comunicar cantidades de magnitudes continuas (necesito cinco cuartos de kilo de merluza para esta receta). Aunque la expresión simbólica (5/4 kg) pudo surgir entonces, es ahora cuando se va a desarrollar el significado de las fracciones y, a partir de este, comparaciones y orden de fracciones y algunas operaciones. Las situaciones sobre magnitudes y medida se conectan con las de reparto, de tal forma que, cuando se quiere expresar la cantidad de magnitud que recibe cada uno de los participantes, surgen fracciones y, si se exige que el reparto sea decimal, surge la notación decimal del número racional. Por lo tanto, la relación entre el sentido de la medida y el sentido numérico es especialmente intensa. En lugar de presentar estos objetos (fracciones, decimales) ya construidos y usar la medida como contexto sobre el que realizar operaciones, será la medida la que origine dichos objetos y permita explorar los conceptos relacionados. Las conexiones con el sentido numérico también abarcan toda la cuestión de la proporcionalidad, ya que estudia la relación entre dos magnitudes, y, por extensión, los porcentajes. Sigue siendo esencial continuar desarrollando razonamientos a partir de situaciones de estimación de diferentes magnitudes. Como novedad, se plantea el trabajo de estimación de grandes cantidades de magnitud (problemas de Fermi).	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
B.1. Magnitud y medida: - Fracciones como forma de expresar el resultado de un proceso de medida (una cantidad de magnitud). - Comparación, orden, agregación y sustracción de cantidades de magnitudes continuas expresadas en forma de fracción y con notación decimal. - Relación entre el proceso de reparto y la medida de la cantidad de magnitud que recibe cada participante. - Unidades convencionales del Sistema Métrico Decimal (longitud, masa, capacidad, volumen y superficie), tiempo y grado (ángulos) en contextos de la vida cotidiana: selección y uso de las unidades adecuadas. - Instrumentos (analógico o digital) y unidades adecuadas para medir longitudes, objetos, ángulos y tiempos: selección y uso.	Una forma adecuada de comenzar el trabajo en fracciones desde la medida es retomar las situaciones iniciales de medida (cálculo y construcción) con unidades arbitrarias descritas en el segundo ciclo para empezar dotando de significado a la notación fraccionaria. Es decir, se trata de que una fracción expresa una cantidad de magnitud. El numerador es realmente el número de subunidades y el denominador el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad. Se podría valorar planificar la enseñanza para que, por ejemplo, en 5º curso se hiciese con la magnitud longitud y, en 6º curso, con la magnitud área, que implica otras manipulaciones. Sin embargo, también se puede partir de la magnitud longitud en ambos cursos, variando el manipulativo empleado y la unidad arbitraria. No obstante, la elección de la longitud como magnitud inicial sobre la que construir estos conceptos no quiere decir que todo el trabajo sobre medida, fracciones, etc. se haga sobre la longitud. Al revés, será necesario incluir situaciones con otras magnitudes y otros contextos donde se pueda transferir lo aprendido. Una secuencia muy completa, que arranca con una actividad inicial similar la encontramos en los anexos de Escolano (2007), disponible en el repositorio de la Universidad de Zaragoza. Seguirá siendo importante prestar atención al proceso de medida en su totalidad y al empleo de instrumentos de medida.

csv: BOA20220727001

¿Cómo se construye, a partir del significado de medida, la noción de equivalencia de fracciones? La idea fundamental es que dos fracciones serán equivalentes si expresan la misma cantidad de magnitud. La tarea esencial es plantear situaciones que exijan medir objetos con diferentes tamaños de subunidad. Al agrupar aquellos que tienen la misma cantidad de magnitud, las fracciones que expresan sus medidas se dice que son equivalentes. Por ejemplo:

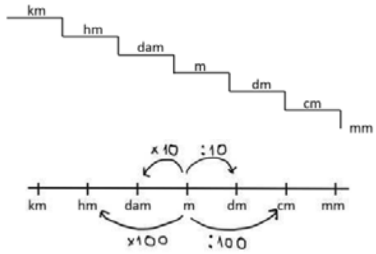


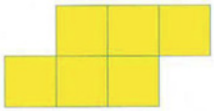
La figura muestra una situación que primero se ha podido hacer con manipulativos (tiras de tela, de papel, regletas de Cuisenaire, etc.) y, posteriormente, haber representado gráficamente las acciones realizadas. La tira que mide 5/4 u es igual de larga que la que mide 10/8 u. Por lo tanto, 5/4 y 10/8 son equivalentes. ¿Por qué ocurre eso? Hemos necesitado el doble de subunidades, pero estas son la mitad de grandes. En este tipo de situaciones hay que fomentar estos razonamientos y la comprensión, evitando el «son equivalentes porque los productos cruzados son iguales». Esta regla, si es que aparece, debería ser en todo caso como el resultado de una observación en una secuencia de exploración. Manipulaciones y representaciones gráficas asociadas a ellas como las anteriores son imprescindibles para una comprensión adecuada. Más aún, dentro de un marco inclusivo, tanto para el alumnado con dificultades como para el que ha accedido a comprender lo esencial y están profundizando. Las representaciones gráficas deben conectar con el discurso verbal y aritmético.

Lo mismo ocurre con la comparación. Se debe abordar con diferentes técnicas: de forma gráfica, igualando el número de subunidades o igualando el tamaño de estas. Siempre de forma flexible. Desde el modelo de medida, 4/5 es mayor que 3/5 porque el tamaño de subunidad es igual (expresan medidas en quintos de unidad), mientras que estamos tomando una subunidad más. 6/5 es menor que 6/4 porque el número de subunidades es igual, y los quintos son menores que los cuartos porque se ha dividido la unidad en más partes.

Esto solo son algunos ejemplos. La suma de fracciones aparece de manera natural como la agregación de cantidades de magnitud (juntar tiras de papel y medir el resultado); la resta de fracciones como una sustracción de una cantidad de magnitud a otra, o como diferencia; la multiplicación de una fracción por un número natural como la suma reiterada de la misma cantidad de magnitud; la división de una fracción por un número natural, surge al repartir una cantidad de magnitud entre un número de personas (5/4 kg de harina para hacer 10 panecillos). La multiplicación de fracciones exige explorar la situación en la que una fracción actúa como operador y la otra como medida, así como la situación en la que ambas fracciones son medidas. De nuevo, se trata de explorarlas desde la comprensión, con manipulativos y representaciones gráficas que doten de significado al discurso aritmético. El caso de la división de fracciones es más complejo y se recomienda abordar su exploración únicamente en contextos muy cercanos (p. ej., repartir 3/4 de litro en vasos de 1/4 de litro).

Las situaciones de cambio de unidades forman parte del sentido de la medida e implican el uso del pensamiento proporcional. Se evitará el empleo de técnicas como «la escalera de cambio de unidades» que llevan al uso de reglas mnemotécnicas vacías de significado como «subir, dividir; y bajar, multiplicar». Chamorro y Belmonte (1991) se hacen eco de las consecuencias que trae la automatización sin tener garantizada la comprensión. Si estas situaciones de cambio se reducen a la multiplicación y la división por un uno seguido de un número de ceros a determinar, trucos como el de la escalera añaden una capa de misterio innecesaria acerca de por qué se divide o por qué se multiplica. Además, gran parte del alumnado no sabe realmente si ha de contar el peldaño de salida y/o el de llegada, o ninguno. A esto habría que añadir la dificultad de manejar magnitudes lineales de dos o tres dimensiones (área, volumen). Otra técnica vacía de significado es la que se muestra en la derecha de la figura. ¿Y si las conversiones no parten de la unidad? Si en la recta el espacio entre m y dam representa 10, ¿por qué el de espacio entre m y hm es 100 y no 20?

	 Cuando el alumnado tenga dificultades conviene recuperar tareas de equivalencia con material manipulativo que facilite poner en juego razonamiento proporcional. Si cada unidad de estas equivale a 4 de las otras, ¿cómo puedo saber cuántas necesito para medir el área de esta superficie? Una vez comprendidas estas situaciones, enlazar con el sistema métrico decimal es sencillo. La conexión con la notación decimal se realiza a través del modelo de reparto, desde el cual también cabe revisitar las ideas de comparación y orden. Desde este modelo, el numerador de la fracción es el número de objetos a repartir, mientras que el denominador indica el número de participantes en el reparto. En el apartado del sentido numérico se detalla un poco más este trabajo, que también queda reflejado en los mencionados trabajos de Escolano y Gairín.
B.2. Estimación y relaciones: - Estrategias de comparación y ordenación de medidas de la misma magnitud aplicando las equivalencias entre unidades (sistema métrico decimal) en problemas de la vida cotidiana. - Relación entre el sistema métrico decimal y el sistema de numeración decimal. - Estimación de medidas de ángulos y superficies por comparación. - Evaluación de resultados de mediciones y estimaciones o cálculos de medidas, razonando si son o no posibles.	Además de las situaciones de estimación recogidas en el ciclo anterior y la ampliación a magnitudes no tratadas anteriormente, Albarracín, et al. (2015) señalan que el último ciclo de Educación Primaria se presta a explorar y resolver situaciones y problemas de estimación de grandes cantidades. El uso de grandes cantidades dificulta los recuentos exhaustivos o las mediciones directas, con lo que el alumnado necesita desarrollar estrategias alternativas para justificar sus estimaciones. Estos autores sugieren que para diseñar las actividades es recomendable utilizar problemas contextualizados en el propio centro educativo, considerando que la familiaridad con el contexto debería promover que los problemas sean más interesantes y accesibles, así como permitir que se pudieran efectuar las mediciones oportunas en un lugar accesible. En el artículo citado, se ejemplifican situaciones de los siguientes tipos a) Estimación de la cantidad de personas que se pueden disponer en una cierta superficie. P. ej.: ¿Cuánta gente cabe en este porche? b) Estimación de la cantidad de objetos que se pueden disponer en una cierta superficie o volumen. P. ej: ¿Cuántos folios hay en un montón como el que está en la mesa del maestro o la maestra? ¿Cuántos libros hay en estas estanterías?
C. Sentido espacial	
El desarrollo del sentido espacial exige describir, analizar propiedades, relacionar propiedades, clasificar y, sobre todo, razonar y argumentar. En el proceso, se aprende también a definir en geometría, lo cual implica la articulación de los elementos anteriores. El aprendizaje de los saberes propios del sentido espacial requiere hacer y pensar sobre lo que se hace. Debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar de acuerdo a criterios libremente elegidos, cada vez más complejos, construir, dibujar, modelizar, medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Las situaciones de aprendizaje están relacionadas con: componer y descomponer polígonos y poliedros; conocer los elementos de polígonos y poliedros; clasificar polígonos atendiendo a diferentes criterios y justificarlos; descubrir propiedades de polígonos y poliedros. La manipulación de materiales físicos o virtuales, el uso de plantillas cuadradas, triangulares, la búsqueda de patrones, la justificación, se hacen imprescindibles y establecen conexiones profundas con el sentido de la medida y el algebraico, especialmente. Se deberían promover las condiciones para que el alumnado de este ciclo consolide el nivel 2 (análisis) de los van Hiele, iniciando el camino hacia el nivel 3 (de deducción informal).	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
C.1. Formas geométricas de dos y tres dimensiones: - Formas geométricas en objetos de la vida cotidiana: identificación y clasificación atendiendo a sus elementos y a las relaciones entre ellos. - Técnicas de construcción de formas geométricas por composición y descomposición, mediante materiales manipulables, instrumentos de dibujo y aplicaciones informáticas. - Vocabulario geométrico: descripción verbal de los elementos y las propiedades de formas geométricas. - Propiedades de formas geométricas: exploración mediante materiales manipulables (cuadrículas, geoplanos, policubos, etc.) y herramientas digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada, robótica educativa, etc.).	El modelo de van Hiele sugiere usar cinco fases de instrucción para ayudar al alumnado a progresar en sus niveles de razonamiento. El alumnado primero recopila información trabajando con ejemplos concretos (p. ej., hallando el perímetro de algunas figuras), luego completan tareas relacionadas con esa información (como agregar piezas a la figura para aumentar el perímetro). El alumnado, entonces, toma conciencia de las relaciones y es capaz de explicarlas. Finalmente, se reta al alumnado a pasar a tareas más complejas y a resumir y reflexionar sobre lo aprendido. El lenguaje utilizado por profesorado y alumnado es importante para el progreso de este último a través de los niveles, desde lo concreto a lo visual y a lo abstracto. Malloy (1999) describe una interesante actividad sobre área y perímetro (aspecto esencial al que debe dedicarse la atención necesaria), ilustrando cómo se conecta con el modelo de razonamiento de los van Hiele. Es la siguiente: «Supongamos que los lados de las losetas cuadradas en esta figura tienen una unidad de longitud. Agrega las losetas cuadradas necesarias para que la figura tenga un perímetro de 16. Los cuadrados que se agreguen deben coincidir de modo que se toquen en al menos un lado de la figura.»



Algunas preguntas que pueden servir de andamiaje para esa actividad, después de la exploración y para explotar todo el potencial de la tarea, que es mucho, son (Malloy, 1999, p. 89):

- ¿Dónde colocarías una ficha para aumentar el perímetro en 1? ¿Y en 2? ¿Y en 3?
- ¿Cómo podrías aumentar el área en 3 y no aumentar el perímetro?
- ¿Cuál es la menor cantidad de losetas que se pueden agregar para aumentar el perímetro a 16 unidades? Describe esta nueva forma. ¿Cuál es su área?
- ¿Cuál es la mayor cantidad de mosaicos que se pueden agregar para aumentar el perímetro a 16 unidades? Describe esta nueva forma. ¿Cuál es su área?
- Usa las fichas para encontrar todos los rectángulos distintos que tienen un perímetro determinado. Los perímetros pueden variar de 12 a 24 unidades. (Nota: ¿Podría un perímetro ser un número impar?

Es habitual que los libros de texto presenten imágenes de figuras esquemáticas, y estereotipadas, lo que desemboca en obstáculos de aprendizaje muy serios. Por ejemplo, un cuadrado, cuando se gira, para gran parte del alumnado, deja de ser un cuadrado para convertirse en un rombo. Podemos aprovechar el reconocimiento de figuras en el entorno, la arquitectura, la publicidad, la fotografía, etc. y las aplicaciones informáticas que también posibilitan una mejor visualización.

El aprendizaje de las áreas y los volúmenes no debería organizarse nunca en torno al aprendizaje de las fórmulas, sino a través de la descomposición y medida. Por ejemplo, situaciones propias del sentido de la medida donde se plantee el problema del cálculo del área de un rectángulo y, a partir de ahí, con papel y tijeras, construir rectángulos equivalentes (de igual área) que un paralelogramo, los tres tipos diferentes de triángulos, rombos, etc. Existen tareas para conectar esta aproximación con el cálculo del área del círculo, para lo que solo hace falta considerar Pi como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Trabajados los elementos que caracterizan a las figuras y cuerpos geométricos en cursos anteriores, es el momento de consolidar el análisis y avanzar hacia el nivel correspondiente a la deducción informal. Esto implica, entre otras cosas, avanzar en las clasificaciones (pasando de particionales a jerárquicas; es decir, pasar de criterios exclusivos a criterios inclusivos), atendiendo a diferentes características y propiedades: lados/aristas; ejes de simetría; perímetro, superficies; líneas abiertas y cerradas; paralelismo entre lados y perpendicularidad; diagonales; ángulos rectos, agudos, obtusos; polígonos cóncavos y convexos, etc. Clasificar triángulos atendiendo a sus lados y ángulos; cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados. La circunferencia y el círculo, desde la interpretación de Pi como la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Se trata de identificar las figuras según sus características, por ejemplo, mostrando grupos de figuras y pidiendo que identifiquen las que tienen alguna característica común: ángulos rectos o bien las que tienen lados paralelos, las que tienen los lados del mismo tamaño; las que son rectángulos…

La aplicación *Which doesn´t belong to?* supone un nuevo reto, puesto que exige el razonamiento y verbalizar la argumentación. Es una rutina para iniciar charlas de aula que no se restringe únicamente a la geometría, y que sirve tanto como evaluación inicial del conocimiento previo del alumnado, como para progresar en el aprendizaje. En https://wodb.ca/ hay muchos ejemplos.

Se debería continuar con el trabajo alrededor de desarrollos planos de cuerpos geométricos. Por ejemplo, una tarea rica es elegir de entre una serie de desarrollos el que corresponde a un determinado cuerpo geométrico y verbalizar las razones. Otra, utilizar el truncamiento, para obtener nuevos poliedros a partir de otros conocidos, ¿cómo son estos nuevos poliedros?

Resolución de problemas geométricos, a partir de recursos manipulativos, informáticos; actividades relacionadas con la visualización, por medio de maquetas, construcciones policúbicas, etc.

La manipulación de materiales es imprescindible en los saberes propios del sentido espacial: geoplanos, mecanos o geotiras, policubos, tangrams (hay muchos, no solo el «clásico»), espejos (los libros de espejos son extremadamente interesantes), aplicaciones informáticas realizadas con fines educativos, el origami o papiroflexia (que pone en juego muchísimo lenguaje y que permite explorar equivalencias entre lo que se hace con compás y regla y los pliegues).

C.2. Localización y sistemas de representación: - Localización y desplazamientos en planos y mapas a partir de puntos de referencia (incluidos los puntos cardinales), direcciones y cálculo de distancias (escalas): descripción e interpretación con el vocabulario adecuado en soportes físicos y virtuales. - Descripción de posiciones y movimientos en el primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano.	Interpretar un plano, usarlo para ubicarse, localizar elementos y diseñar itinerarios, estas representaciones del espacio son útiles en la vida cotidiana y dan pie a ricas e interesantes situaciones de aprendizaje. Imaginar o visualizar itinerarios, evocar recorridos, reconocer elementos conocidos (edificios, plazas, ríos). Este saber da pie a conexiones con los saberes de otros sentidos de matemáticas y con otras áreas. Por ejemplo, diseñar itinerarios sobre un plano teniendo en cuenta el contexto y las necesidades, en función de si se hace a pie o en coche. Por tanto, si es necesario tener en cuenta las direcciones de las calles o no, si se busca el itinerario más corto, o bien lo que pasa por un sitio determinado, etc. Las salidas fuera del aula ofrecen la posibilidad de un trabajo contextualizado con mapas, a la vez que el trabajo de razonamiento proporcional. La aplicación MathCityMap (https://mathcitymap.eu/es/), en la que colabora la FESPM, facilita la creación de rutas matemáticas.
C.3. Movimientos y transformaciones: - Transformaciones mediante giros, traslaciones y simetrías en situaciones de la vida cotidiana: identificación de figuras transformadas, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado. - Semejanza en situaciones de la vida cotidiana: identificación de figuras semejantes, generación a partir de patrones iniciales y predicción del resultado.	Si se realiza un trabajo manipulando los materiales que ya se han ido nombrando, aparecerá la pregunta, por ejemplo, si los triángulos que tienen las mismas características y diferente tamaño son el «mismo». Esto abre la puerta a discutir sobre la congruencia y la semejanza. Dos figuras son congruentes cuando coinciden en tamaño y forma, independientemente de la posición que adopten. Las figuras simétricas son congruentes,y su área será igual. Por otro lado, dos figuras son semejantes si comparten propiedades, pero pueden diferir en tamaño. No se trata de dar definiciones (en todo caso, se pueden trabajar de manera que el alumnado perfeccione sus definiciones), sino de generar razonamientos en un ambiente de conversación y resolución de problemas. Los mosaicos, los bloques lógicos (pattern blocks), la baldosa aragonesa, los espejos, etc., ofrecen posibilidades para experimentar qué les pasa a las figuras al aplicarles un giro (de ángulos reconocibles, 90º, 180º, 360º, 45º); un desplazamiento; o una simetría. ¿Qué características mantiene la figura transformada con la figura inicial? ¿Cambia el área? ¿Cambia el perímetro? Etc. La presencia de mosaicos y frisos en distintos monumentos del patrimonio aragonés permitirá descubrir e investigar la geometría de las transformaciones para explorar las características de las reflexiones (en primer ciclo), giros y traslaciones (a partir del segundo ciclo).
C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica: - Estrategias para el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas en situaciones de la vida cotidiana. - Modelos geométricos en la resolución de problemas relacionados con los otros sentidos. - Elaboración de conjeturas sobre propiedades geométricas utilizando instrumentos de dibujo (compás y transportador de ángulos) y programas de geometría dinámica. - Las ideas y las relaciones geométricas en el arte, las ciencias y la vida cotidiana.	La manipulación de figuras de tangrams, construidas en geoplanos, con bloques lógicos (pattern blocks), a partir de actividades en un ambiente de resolución de problemas, ayuda a diferenciar área de perímetro; así como a ver relaciones entre estos conceptos. Figuras con la misma área pueden tener perímetro diferente, y figuras con el mismo perímetro, diferente área. La ejemplificación de los panales de las abejas o la formación en círculo de las ovejas y otros herbívoros cuando son atacados, entre otros, sitúa estos conceptos en un contexto real y cercano. El volumen es una magnitud difícil de identificar. Es necesario ver que se trata del espacio cerrado en el interior de un cuerpo de tres dimensiones. La visualización con policubos, recipientes transparentes que se llenen de agua, arena o arroz, ayuda a formarse una idea y lo relaciona con la capacidad. Continuando con el trabajo de visualización, se puede abordar la representación de figuras construidas, por ejemplo, con policubos u otras piezas de construcción, de vistas cenitales, frontales, desde la base. Preguntas del estilo «¿cómo la verías si la giras?» o bien «vista de lado, ¿qué forma tendría?», son un paso más, ya que supone visualizar sin el objeto delante, siempre y cuando el alumnado no lo requiera. Esta tarea, también se puede llevar a cabo con poliedros. Una vez abordados los elementos esenciales en otras tareas (número de caras, vértices, aristas, etc.) y habiendo manipulado el poliedro, posteriormente podemos pensar en el número de caras, vértices o aristas sin tener delante el poliedro. La posibilidad de imaginar cambios mentalmente o características constituye, en resumidas cuentas, lo que llamamos visualizar. Se desarrolla a partir de manipular figuras y cuerpos. Cuando se presentan dificultades, se puede recurrir de nuevo al material, que debería estar siempre a mano en el aula. Las aplicaciones informáticas que trabajan estos saberes son muy útiles. Deberían realizarse también situaciones problematizadas relacionadas con la estimación y medida de magnitudes de polígonos y poliedros, la elección adecuada de la unidad, la aproximación al resultado, la estimación del error, relacionan los saberes espaciales y de medida. El cálculo de áreas de poliedros hay que basarlo en el área de sus desarrollos, a partir de los que deducir el área correspondiente por descomposición. Finalmente, el sentido espacial se presta a establecer relaciones constantes con el resto de los saberes matemáticos: cálculo, medida, socioafectivo, etc., así como con otras áreas, el mundo del arte, de la ciencia, la naturaleza, la arquitectura, el diseño, la publicidad, etc. Numerosos pintores (Kandinsky, Miró, Mondrián, etc.) utilizan

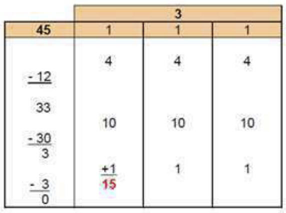
	figuras en sus creaciones que pueden ser objeto de análisis y recreación. Los logotipos ofrecen la posibilidad de analizar simetrías, giros, etc.
D. Sentido algebraico y pensamiento computacional	
En el tercer ciclo es importante seguir planteando actividades para promover procesos de generalización, conjetura, argumentación, representación y uso preciso del lenguaje matemático. Por ello, el trabajo con patrones y relaciones siempre desde la comprensión, es fundamental. Un aspecto esencial es que terminen la Educación Primaria habiendo adquirido un significado rico del signo igual, relacional y no meramente operativo. Por este motivo, hay que seguir insistiendo en proponer tareas donde se discutan relaciones entre expresiones, comparen, ordenen, etc. Algunas novedades en este apartado con respecto a los ciclos anteriores, aparte de la mayor complejidad de los objetos matemáticos que intervienen, es el paso a criterios de clasificación inclusivos que den lugar a clasificaciones jerárquicas, donde unas clases estén incluidas en otras. Además, se puede comenzar a usar letras para expresar variables, siempre y cuando las tareas que se propongan estén alineadas con un contexto cercano y refleje el discurso aritmético. De nuevo, aparecen conexiones muy evidentes con saberes de otros sentidos, especialmente con el sentido numérico y espacial.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
D.1. Patrones, relaciones, clasificaciones y funciones: - Estrategias de identificación, representación (verbal, tablas, gráficos y notaciones inventadas) y predicción razonada de términos a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes. - Creación de patrones recurrentes a partir de regularidades o de otros patrones utilizando números, figuras o imágenes. - Clasificaciones de objetos atendiendo a cualidades determinadas y diferentes criterios. - Relaciones de igualdad y desigualdad y uso de los signos < y >. Determinación de datos desconocidos (representados por medio de una letra o un símbolo) en expresiones sencillas relacionadas mediante estos signos y los signos = y ≠. - Apreciación del cambio en distintos tipos de situaciones, tanto numéricas como geométricas.	Conviene dar importancia a la escritura de frases matemáticas que incluyan operaciones combinadas. No es necesario, ni recomendable, que sean especialmente largas, pero sí que sean precisas. Esto se puede realizar de manera integrada con el sentido numérico. Por ejemplo, el juego del 24, del que se pueden encontrar páginas en internet con applets para jugar y tarjetas de juego imprimibles. Consiste en que, dados cuatro números, hay que conseguir 24 empleando las cuatro operaciones. Por un lado, se ejercita de manera rica y flexible el cálculo mental. Pero, por otro lado, es una ocasión excelente para que el alumnado tenga que escribir el proceso seguido de forma fiel a su razonamiento y rigurosa con el uso del lenguaje simbólico. Así, si los números son 4, 4, 5 y 6, una forma de hacerlo sería «a cinco, le resto cuatro, y el resultado lo multiplico por 4 y por 6», lo que escrito simbólicamente sería 4·(5-4)·6 = 24. Por supuesto, no es la única manera. Por ejemplo, 4·6/(5-4) = 24. En cuanto a la escritura, se trata de fomentar la escritura del proceso en horizontal, haciendo buen uso de los signos. Cuando un alumno o una alumna utilice incorrectamente el signo =, con expresiones erróneas como 5-4=1·6=6·4=24, se aprovechará la oportunidad para discutir si eso refleja su modo de pensar y si a ambos lados del igual hay expresiones que son equivalentes o no. El uso de letras para expresar cantidades variables o desconocidas puede surgir del planteamiento de situaciones-problemas pseudo-aritméticos donde la respuesta no sea un número, o que sea variable. Por ejemplo: Esta mañana he jugado dos partidas de cromos, de manera que en una he ganado 5 cromos y en otra he perdido 7 cromos, ¿cuántos cromos tengo? Las respuestas iniciales del alumnado pueden ser «No lo sé», «Me faltan datos», «No lo sé pero dos menos que antes», etc. Se deben aprovechar estas situaciones para que, mediante las preguntas adecuadas en un ambiente de charla de aula, surja la necesidad de empezar a utilizar letras para dar una respuesta a este tipo de problema: si decimos que tenía c cromos al empezar, al final tendré c-2. Una vez introducidas las letras de esta manera, se pueden utilizar para explicar el proceso personal de pensamiento o de generalización (ver el ejemplo en el apartado de patrones) y para practicar la escritura de frases matemáticas. Por ejemplo: - La suma de 6 y un número: 6+n - La multiplicación de dos números: a·b - A 20 le resto un número, y el resultado lo multiplico por 2: 2·(20-x) Se trata de enfatizar el uso de estas letras (que tienen que ser variadas, estando desaconsejado limitarse a usar la 'x') como forma de expresar cantidades variables o desconocidas, siempre en conexión con el contexto propio de cada situación, dejando la manipulación sintáctica para etapas posteriores.
D.2. Modelo matemático: - Proceso de modelización con el andamiaje adecuado en el aula, empleando objetos manipulables, dramatizaciones, dibujos, diagramas, etc. de manera que se conecte lo concreto con lo pictórico y lo abstracto para comprender las situaciones y los problemas que se planteen.	Todo lo mencionado para los ciclos anteriores permanece vigente en el tercer ciclo. Lo único que cambia son los objetos matemáticos que aparecen ahora, los cuales pueden tener sus manipulativos específicos o sus formas de representación. Esto es algo que habrá que considerar al efectuar el andamiaje. Por ejemplo, las situaciones de aprendizaje en torno al número racional desde el modelo de reparto, cuando este ya es decimal (se parten en 10 las partes sobrantes), se prestan más a los dibujos que evoquen la situación que al uso en sí de manipulativos (aunque se puede comenzar desde ahí). El andamiaje en los procesos de modelización que comienzan desde la representación pictórica es similar al explicado ya con materiales manipulativos. Es decir, como se trata de que haya una primera fase exploratoria, hay que enlazar con las representaciones intuitivas que desarrolla el alumnado, discutir cómo enlazan estas con lo que se está modelizando, etc. En cualquier caso, el uso de manipulativos sigue siendo esencial también, habiendo de buscar aquellos que se acomoden al saber matemático en cuestión.
D.3. Pensamiento computacional: - Estrategias para la interpretación, modificación y creación de algoritmos sencillos (secuencias de pasos ordenados, esquemas, simulaciones, patrones	Una opción en la secuenciación del trabajo con los algoritmos de las operaciones es centrar en el segundo ciclo el trabajo de adaptación y propuesta de variantes sobre los de suma y resta. De esa manera, en tercer ciclo cabe revisitar los de multiplicación y división (incluso iniciar ahora el de la división) de forma rica. ¿Y si empezamos a

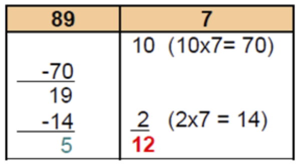
repetitivos, bucles, instrucciones anidadas y condicionales, representaciones computacionales, programación por bloques, robótica educativa...).

multiplicar por la izquierda? ¿Y si la división empieza por la derecha? ¿Cómo queda entonces el algoritmo? Por otro lado, plantear un algoritmo distinto, como la multiplicación en celosía, y dejar que el alumnado analice por qué funciona es una excelente actividad.

El algoritmo de la división

Siguiendo los mismos criterios que para la multiplicación indicados en las orientaciones de segundo ciclo, se trata de avanzar progresivamente en la modelización, compactando las representaciones y cuidando la comprensión y el control sobre el resultado. Para dividir 45 entre 3, hay que repartir en tres grupos iguales, una posible representación extendida puede ser esta, para pasar a otras más compactas. La agilidad mental de cada alumno o alumna determinará por qué cantidad empieza a realizar los repartos, y puede ser un tema de conversación razonada en el grupo.

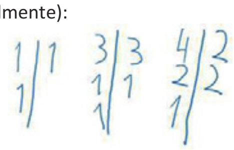




Fuente: Creamat.

Hay más formas de introducir este algoritmo. Otra, mediante la representación de un número con billetes de base decimal, de tal manera que se use el menor número posible de ellos. Después, proceder al reparto.

Otro punto de encuentro con la algoritmia en matemáticas es con la factorización de los números. Al igual que con los de las operaciones básicas, si se desea plantear el problema de la factorización como un problema algorítmico, en primer lugar, debe plantearse de forma abierta y con el objetivo de diseñar una serie de pasos que pueda reproducir otro alumnado o una máquina. Ahora bien, antes de llegar a este punto, dentro del sentido numérico y algebraico, el énfasis debe haber venido puesto en estrategias flexibles, análisis de la estructura multiplicativa de los números y uso correcto del signo =. Es decir, 24=6·4=2·3·2·2, o bien 24=2·12=2·2·6=2·2·2·3. Si se presenta el algoritmo «de la raya» desde el principio, el alumnado confunde concepto con procedimiento (procedimiento, además, poco flexible) y es habitual encontrarse con esto, lo cual es absurdo (es el uno o un número primo o se puede factorizar sin algoritmo fácilmente):



Sin embargo, como decíamos, sí que puede ser interesante plantear el problema de programar un algoritmo para el cálculo de los factores de un número. Se puede hacer con o sin ordenador. En este último caso, cada grupo de alumnos y alumnas diseña un algoritmo y luego lo intercambian con otros grupos, que lo analizan. ¿Es de verdad un algoritmo? ¿Funciona para todos los casos? ¿Le cuesta más con unos números que con otros? ¿Se puede mejorar de alguna manera? ¿Qué es mejorar un algoritmo?

Por lo demás, se pueden retomar las situaciones de ciclos anteriores añadiendo complejidad. Existen juegos de mesa que toman la idea de programar un robot que ha de ir a un lugar determinado de un mapa, pudiendo ver modificado el resultado del programa debido a la interacción de otros robots, lo que obliga a anticipar las acciones.

E. Sentido estocástico

Siguiendo la línea de trabajo de los ciclos anteriores, es importante ofrecer una base adecuada constituida por situaciones de aprendizaje que permitan desarrollar el sentido estocástico. De nuevo, conviene insistir en que la ordenación de los sentidos no obedece a razones de importancia o relevancia, pues todos lo son. Esto quiere decir que, sin perjuicio de las conexiones que se puedan realizar entre los diferentes sentidos, es posible -y hasta recomendable- comenzar uno de los dos cursos con situaciones propias del sentido estocástico.

Las grandes ideas relacionadas con la estocástica son las de distribución y variabilidad de los datos, inferencia, azar e incertidumbre. Todas ellas necesitan de la acumulación de experiencias sobre las que se haya reflexionado, porque, a pesar de que vivamos en un mundo lleno de incertidumbre y aleatoriedad, sin esa reflexión y tratamiento específico, se terminan desarrollando sesgos de razonamiento. Las novedades son importantes porque implican conexiones profundas con fracciones, porcentajes y proporcionalidad. Así, en estadística se inicia el trabajo con tablas de frecuencias absolutas y relativas y, en probabilidad también está la cuestión de las frecuencias relativas y la escala de medida de la probabilidad, junto con la introducción de la regla de Laplace.

La introducción de la media como forma de resumir el conjunto de datos completa las tres medidas de tendencia central, junto con moda y mediana, teniendo que considerar para qué tipos de datos se pueden calcular unas y otras, así como lo que se puede decir de los datos a

partir de la interpretación conjunta de esas medidas. Se inicia también la exploración de la dispersión, que debe realizarse sobre todo de forma gráfica y cualitativa. Se introduce el rango, del cual hay que destacar su escaso valor como medida de dispersión. Siempre presente la interpretación y elaboración de gráficos, en tercer ciclo aparecen nuevos tipos que permitirán la realización de proyectos estadísticos algo más complejos que los de ciclos anteriores.	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
E.1. Distribución e inferencia: - Conjuntos de datos y gráficos estadísticos de la vida cotidiana: descripción, interpretación y análisis crítico. - Estrategias para la realización de un estudio estadístico sencillo: formulación de preguntas, recogida, registro y organización de datos cualitativos y cuantitativos procedentes de diferentes experimentos (encuestas, mediciones, observaciones…). Tablas de frecuencias absolutas y relativas: interpretación. - Gráficos estadísticos sencillos (diagrama de barras, diagrama de sectores, histograma, etc.): representación de datos mediante recursos tradicionales y tecnológicos y selección del más conveniente. - Medidas de centralización (media, mediana y moda): interpretación, cálculo y aplicación. - Dispersión: valoración intuitiva a partir de una representación gráfica y cálculo e interpretación del rango (apreciando su escasa utilidad como medida de dispersión). - Calculadora y otros recursos digitales, como la hoja de cálculo, para organizar la información estadística y realizar diferentes visualizaciones de los datos. - Relación y comparación de dos conjuntos de datos a partir de su representación gráfica: formulación de conjeturas, análisis de la dispersión y obtención de conclusiones. - Identificación de un conjunto de datos como muestra de un conjunto más grande y reflexión sobre la población a la que es posible aplicar las conclusiones de investigaciones estadísticas sencillas.	Se debe continuar dando importancia a plantear preguntas que puedan responderse con datos. Evidentemente, ahora se cuenta con más experiencia y más herramientas que en el primer ciclo, por lo que se puede extraer más información del conjunto de datos, se puede trabajar con muestras más grandes, se pueden llevar a cabo comparaciones algo más profundas entre diferentes conjuntos de datos, los informes estadísticos pueden conjugar variables de todos los tipos (cualitativos ordinales, cualitativos nominales, cuantitativos discretos y cuantitativos continuos), etc. La elaboración de gráficos estadísticos, con y sin ayuda de las Tecnologías digitales, incluye nuevos tipos. No debe restringirse tampoco a los habituales que se ven en el colegio, sino que merece la pena interpretar infografías y otros gráficos creativos que aparecen en medios. Es particularmente interesante la sección del NY Times «What's going on in this graph» (https://www.nytimes.com/column/whats-going-on-in-this-graph), donde se invita a interpretar un gráfico y a inventarse un título para este. Otro tipo de tarea para desarrollar la interpretación de gráficos es el revelado lento de gráficos, o «slow reveal graphs» (https://slowrevealgraphs.com). El trabajo con medidas de centralización no debe limitarse, en ningún caso, a su cálculo. Es decir, sumar un conjunto de números y dividir por el número total de datos es el procedimiento para calcular la media. Sin embargo, visto así, no es más que una tarea -y poco rica- propia del sentido numérico. Se debe plantear también el uso de la calculadora. El concepto de media como medida estadística implica mucho más. Hay que interpretarla, sobre todo de forma conjunta con la moda y la mediana. ¿Es mejor la media o la mediana? ¿Por qué están tan separadas para este conjunto de datos? ¿Cómo las identificamos en este gráfico? Son solo algunas de las preguntas a considerar. Un ejemplo de pregunta rica en torno a la mediana: Siete amigos tienen tallas de zapato entre la 29 y la 37. Si el zapato mediano es de la talla 33, ¿cuáles son las posibles combinaciones de tamaños de zapatos del grupo de amigos? Las situaciones de aprendizaje deben articularse a partir de problemas, situaciones y pequeños (o grandes) proyectos estadísticos en donde los datos se presenten de diversas formas, uno a uno, en forma de lista, tabla, gráficos o se tengan que recoger y planificar la recogida convenientemente. Es el momento ideal para iniciarse en el trabajo a partir de datos recogidos por otros o generados a partir de simulaciones, diferenciar entre dos muestras, hacer observaciones, conjeturar y proponer nuevas preguntas a partir de la comparación de estas (Alsina, 2019) La guía para la evaluación e instrucción en educación estadística GAISE II (Bargagliotti, et al. 2020), descargable, contiene numerosas orientaciones y ejemplos de actividades para fomentar el desarrollo del sentido estocástico, en lo que concierne a distribución en inferencia estadística.
E.2. Predictibilidad e incertidumbre: - La incertidumbre en situaciones de la vida cotidiana: cuantificación y estimación mediante experimentos aleatorios. - Cálculo de probabilidades en experimentos, comparaciones o investigaciones en los que sea aplicable la regla de Laplace: aplicación de técnicas básicas del conteo. - Articulación entre la aproximación frecuencial y la clásica. - Valoración de la contribución de hombres y mujeres al desarrollo de la probabilidad y de la estadística y de estas al desarrollo humano.	La gran novedad es el uso de la escala de probabilidad. Es decir, lo que hasta ahora se valoraba desde el lenguaje verbal natural, pasa a ser susceptible de ser cuantificado. Esta escala, en la que la probabilidad se mide como un número entre 0 y 1 es un objeto matemático complejo que se relaciona con la idea de número racional, fracciones y decimales, así como con porcentajes. En cuanto a la relación con los porcentajes, es vital trabajar la interpretación de una probabilidad expresada de esta manera. Ante una probabilidad de lluvia del 70 %, hay individuos que responden que lloverá en el 70 % de las localidades de la provincia o que lloverá durante el 70 % del tiempo, por nombrar algunas interpretaciones erróneas. La premisa didáctica básica del trabajo en probabilidad continúa siendo la misma que en ciclos anteriores: expresar, razonadamente, el grado de creencia acerca de la ocurrencia o no de ciertos sucesos, para luego contrastarlo con la experimentación. Se debe fomentar el uso del lenguaje verbal para expresar estos razonamientos, que progresivamente habrá extendido la terminología empleada. Se inicia en el uso de la regla de Laplace. Esta regla ha de ser introducida a partir de la experimentación. Un juego como el descrito para segundo ciclo, pero con dados estándar, pone de manifiesto que las 6 caras de un dado tienen la misma probabilidad de ocurrencia, por lo que la probabilidad de cada una debe ser 1/6. Este 1/6 debe interpretarse más allá de 1 caso favorable entre 6 posibles. Desde el punto de vista frecuencial, esperamos que aproximadamente una vez de cada seis se obtenga el número en cuestión, el 16,6% aprox. En conexión con el sentido numérico, cobra importancia la exploración del principio multiplicativo para el conteo de los diferentes resultados de un experimento

	aleatorio, cuando este surge de la combinación de varios dispositivos (lanzamiento de dos dados, elección al azar de un menú, etc.) Es imprescindible proporcionar un rango variado e intercalado de situaciones que articulen los significados frecuencial y clásico, que incluya la realización de experimentos aleatorios, de forma real y mediante simulación. Los dispositivos no pueden ser siempre dados y monedas, equiprobables, donde siempre resulta aplicable la regla de Laplace, sino que deben usarse chinchetas, ruletas y otros donde los diferentes sucesos elementales a los que den lugar no sean equiprobables. Además, se deben considerar contextos como fenómenos atmosféricos, deportivos, científicos, etc. El libro de Godino, Batanero y Cañizares (1987) sigue teniendo plena vigencia e incluye los tipos de actividades esenciales a abordar en azar y probabilidad a lo largo de la Educación Primaria y comienzo de la Educación Secundaria. Los materiales de Edumat (Godino, 2003), descargables, también contienen orientaciones específicas, tanto para la distribución e inferencia como para la predictibilidad e incertidumbre.
F. Sentido socioemocional	
El sentido socioafectivo en matemáticas está muy relacionado con la Competencia Personal, Social y de Aprender a Aprender (CPSAA), por lo que su desarrollo implica plantear situaciones para que el alumnado reflexione sobre sí mismo y sobre cómo se enfrenta al aprendizaje de las matemáticas, originando un autoconcepto positivo como aprendiz de matemáticas; para colaborar con otros de forma constructiva por medio de trabajo en diferentes agrupamientos: parejas, pequeño grupo, grupo/clase, dependiendo de la tarea que se plantee; situaciones que supongan un reto y en las que se entrene en perseverancia; valorar los errores como fuente de aprendizaje, reflexionando sobre ellos; etc. Todo esto debe formar parte de la cultura de aula, en cuya formación el profesorado tiene un papel fundamental: pensar en lo que pueden hacer, en lugar de fijarnos en lo que no pueden hacer todavía; pensar en las posibilidades de aprendizaje que ofrece el grupo; centrarnos en los objetivos principales en lugar de reducir la enseñanza a una serie de trucos mecánicos vacíos de significado. Desde la inclusividad, se entiende que el aprendizaje es un camino, unos o unas pueden ir más adelante que otros u otras pero todos o todas se benefician de las preguntas y aportaciones de los compañeros o compañeras. Sentir que se cree en las posibilidades propias, es uno de los factores más importantes del aprendizaje. Las investigaciones avalan que los grupos homogéneos transmiten expectativas bajas y limitan las posibilidades de aprender. En este sentido, actividades de suelo bajo y techo alto que pueden ser abordadas por todo el alumnado. El «suelo», «piso» o «umbral» es el arranque de la actividad y conecta con conocimientos previos muy básicos). El «techo» da oportunidades de bloqueo (reto y superación) también a todo el alumnado, permitiendo diferentes niveles de profundización. Esto posibilita que todo el alumnado progrese en el aprendizaje, por lo que, en matemáticas, bien gestionadas en el aula, son un excelente ejemplo de actividad inclusiva. Observemos que tienen en cuenta el Principio General n.º 3 de esta Ley: «La acción educativa en esta etapa procurará la integración de las distintas experiencias y aprendizajes del alumnado desde una perspectiva global y se adaptará a sus ritmos de trabajo. Se pueden encontrar muchas actividades de este tipo en la red, por ejemplo: NRICH y map.mathshell.org».	
Conocimientos, destrezas y actitudes	*Orientaciones para la enseñanza*
F.1. Creencias, actitudes y emociones propias: - Autorregulación emocional: autoconcepto y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva de género. Estrategias de mejora de la perseverancia y el sentido de la responsabilidad hacia el aprendizaje de las matemáticas. - Flexibilidad cognitiva, adaptación y cambio de estrategia en caso necesario. Valoración del error como oportunidad de aprendizaje.	Ya se ha señalado la importancia de las actitudes y expectativas del profesorado sobre el alumnado para que este tenga confianza en sus capacidades al enfrentarse a los saberes matemáticos. En las orientaciones para la enseñanza de los diferentes sentidos matemáticos se han ido sugiriendo estrategias facilitadoras del sentido socioafectivo: favorecer la construcción de los saberes, en lugar de presentarlos elaborados; permitir y favorecer el uso de estrategias personales en la resolución de problemas para conectar con conocimientos previos e intuiciones; plantear retos y problemas cuya resolución no es evidente en un primer momento y que su solución requiere perseverar; permitir la comunicación de los razonamientos matemáticos, sean correctas o no; favorecer representaciones propias en la resolución de problemas, etc…
F.2. Trabajo en equipo, inclusión, respeto y diversidad: - Respeto por las emociones y experiencias de los demás ante las matemáticas. - Aplicación de técnicas cooperativas simples para el trabajo en equipo en matemáticas y estrategias para la gestión de conflictos, promoción de conductas empáticas e inclusivas y aceptación de la diversidad presente en el aula y en la sociedad. - Valoración de la contribución del análisis de datos y la probabilidad a los distintos ámbitos del conocimiento humano desde una perspectiva de género.	Se deben plantear actividades en pequeños grupos heterogéneos, de tres o cuatro alumnos o alumnas, a ser posible conformados de manera aleatoria, hace que el niño o la niña no se tenga que afrontar solo al problema que se plantea y se sienta más seguro al expresar sus ideas en condiciones de igualdad. No se trata de trabajar de forma cooperativa para elaborar un producto final que hay de entregar, ni de llevar a cabo roles específicos. Es cuestión de interactuar, de conversar entre iguales para discutir formas de abordar un problema, llegar a acuerdos. Cuando la cultura de aula incorpora de forma natural y cotidiana estas interacciones, las estrategias personales que pueda tener cada alumno o alumna de forma espontánea se ven ampliadas y enriquecidas, al mismo tiempo que obliga a utilizar un lenguaje matemático (en sentido amplio, atendiendo a sus diversos registros, desde el lenguaje oral hasta el simbólico-numérico, pasando por diagramas y esquemas) que comprendan los compañeros o compañeras. En definitiva, hablar de matemáticas ayuda a la propia comprensión. El profesorado debe asumir un papel fundamentalmente de guía que plantea preguntas abiertas al alumnado, preguntas ricas, que les ayuden a razonar, a cuestionar sus propias ideas y las de los demás y a buscar recursos en el aula que necesiten para resolver el problema. Es vital dejar tiempo para pensar y poder contestar sin anticiparse a la respuesta del alumnado. No es suficiente con lanzar la pregunta y acto seguido, a los pocos segundos, desvelar la respuesta. El profesorado debe ser paciente.

	La forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas lleva aparejado el desarrollo de actitudes básicas para el trabajo matemático: perseverancia, flexibilidad, estrategias personales de autocorrección y de superación de bloqueos, confianza en las propias posibilidades, iniciativa personal, curiosidad y disposición positiva a la reflexión sobre las decisiones tomadas y a la crítica razonada, planteamiento de preguntas y búsqueda de la mejor respuesta, aplicando lo aprendido en otras situaciones y en distintos contextos, interés por la participación activa y responsable en el trabajo en pequeño y gran grupo. Cabe mencionar materiales como lecturas y audiovisuales de contenido matemático, que además de tener un sentido globalizador y contextualizado, permiten abordar aspectos socioafectivos.

IV. Orientaciones didácticas y metodológicas

IV.1. Sugerencias didácticas y metodológicas

El aprendizaje a través de la resolución de problemas en matemáticas no es una metodología. Se trata de un enfoque de enseñanza y aprendizaje en el que las matemáticas no se dan construidas al alumnado, sino que se construyen desde sus significados personales. Si consideramos que el alumnado debe desarrollar su competencia en resolución de problemas, son muchas las investigaciones en educación matemática que señalan que tratar heurísticas aisladas en resolución de problemas no resulta provechoso. Si acaso, permite describir las actuaciones propias del que ya es un buen resolutor. El trabajo de Polya (1945) sobre estas heurísticas condujo a diversas malinterpretaciones de las que, quizás, la rutina «datos, operaciones, solución» sea su mejor exponente. Es esta rutina uno de los lastres en la resolución de problemas de la que conviene desprenderse. Asume que siempre hay unos datos, que suelen ser numéricos. Asume que solo hay que elegir una operación, la cual suele ser una de las dos que se acaban de ver en clase. Y asume que siempre hay solución y que es numérica. No hay espacio, por supuesto, para el proceso de pensamiento del alumnado, que podría ser reflejado mediante dibujos y otras representaciones gráficas. Por eso, son mucho más ricas preguntas del tipo «¿qué observo?, ¿qué puedo saber?, ¿qué me gustaría saber?». Al margen de todo esto, a partir de los trabajos de Schoenfeld (1985) cobraron importancia los procesos metacognitivos y, sobre todo, el hecho de que si pretendemos que el alumnado sea buen resolutor de problemas, la resolución de problemas debe ser un elemento central. Más aún, debe ser el eje alrededor del cual se articulan los diferentes saberes.

Una clase expositiva no puede compartir este enfoque de enseñanza y aprendizaje porque lo que está en juego no es el modo en que se enseña y aprende, sino la propia concepción de las matemáticas. Por este motivo, metodologías que tradicionalmente se catalogan como activas, como la gamificación, la clase invertida o el aprendizaje basado en proyectos también pueden pecar de lo mismo. Desde luego, un vídeo clásico de una clase invertida suele dar las matemáticas ya construidas, por lo que el alumnado se limita a poner en práctica lo allí explicado. En cuanto al aprendizaje basado en proyectos, está claro que ofrece excelentes oportunidades para la conexión de saberes y desarrollo de competencias. Sin embargo, habrá que ser cuidadosos para que la aparición de las matemáticas no sea puramente instrumental. Wright (2017) señala que el profesorado de matemáticas tiende a repetir los modelos de enseñanza que ha vivido como alumnado, otorgando a estos modelos el crédito de su propio éxito, lo que resulta en una aceptación general de las ideologías dominantes. Más allá de otros factores de impacto en ese éxito, como el socioeconómico, conviene abstraerse -sin restar valor- de la experiencia vivida como aprendices y reflexionar sobre el enfoque de enseñanza.

La resolución de problemas está íntimamente vinculada con las demás dimensiones de la competencia matemática, pues esta se desarrolla a través de la resolución de problemas. Los procesos de comunicación y representación constituyen una parte fundamental de esta competencia, y se ven favorecidos especialmente por las conversaciones que tienen lugar tanto en pequeños grupos como en el grupo-aula. Preguntas que pueden servir de andamiaje para esas conversaciones pueden ser las siguientes, siempre tratando de no anticipar lo que realmente tiene que salir del alumnado: para fomentar el pensamiento del alumnado, ¿cuál es ese problema?, cuenta lo que ves; como apoyo al pensamiento del alumnado, ¿qué querías decir cuando decías esto?, ¿qué estabas pensando cuando decidiste esto otro?, enséñanos lo que quieres decir con tu representación, tómate el tiempo que necesites; extender el pensamiento del alumnado, ahora has resuelto el problema por este camino, ¿puedes pensar otra manera de hacerlo?, ¿alguien lo ha resuelto de forma diferente?, ¿qué pasaría si…?, ¿puedes repetir lo que han dicho tu compañera o compañero con

csv: BOA20220727001

tus palabras?; para animar a la participación en la conversación, ¿alguien quiere añadir algo?, ¿alguien tiene otra solución?

La competencia matemática también exige el establecimiento de conexiones. El hábito de conectar diferentes saberes es esencial para poder argumentar y resolver problemas. Por ejemplo, propiedades numéricas y estrategias de cálculo; patrones numéricos y geométricos; representaciones fraccionaria y decimal del número racional; etc. La modelización y representación de las situaciones por medio de manipulativos, dibujos, tablas, diagramas, etc. ayudan a la visualización del problema y, por tanto, a la conexión. Igualmente, un ambiente de resolución de problemas en el que se hable sobre las diferentes maneras de resolver una actividad, no solo favorece las conexiones, que pueden darse entre los saberes matemáticos y de otras áreas, sino que contribuye al adecuado desarrollo socioafectivo del alumnado. La experiencia personal de cada uno es lo que determina los afectos hacia las matemáticas y hacia el aprendizaje de estas. Conforme van pasando los cursos, el alumnado forma su propio autoconcepto, que le lleva a actuar de una forma determinada ante las matemáticas, dando lugar a sistemas de creencias que cada vez son más difíciles de modificar. Por ejemplo: «yo no valgo para esto», «las matemáticas son repetir lo que me dice el docente o la docente», etc.

El razonamiento y la prueba constituyen otra dimensión de la competencia matemática. De hecho, sin razonamiento, apenas puede decirse que estamos haciendo matemáticas. Razonar implica analizar situaciones, conjeturar, comprobar, argumentar, comunicar, generalizar patrones, etc. La prueba, en matemáticas, es una idea fundamental. Evidentemente, no se trata de hacer demostraciones formales en la Educación Primaria, pero es esencial iniciar el camino a través de la argumentación y la conjetura. Es necesario, por tanto, proponer actividades abiertas, de investigación; proponer situaciones donde sea necesario obtener soluciones utilizando varios caminos (ensayo-error, trabajo sistemático, uso de tablas para descubrir regularidades, visualización, etc.). En definitiva, se trata de formar una cultura de aula donde el ambiente sea seguro, que inspire confianza en las posibilidades personales, valorando las aportaciones, dar tiempo y fomentar la autonomía.

En la descripción y las orientaciones de los diferentes sentidos matemáticos se ha ido nombrando la necesidad de manipular materiales. Entre otras muchas referencias, en el Seminario sobre Materiales para el aula de Matemáticas en Primaria, organizadas por la Federación Española de Profesorado de Matemáticas (FESPM) (Esteban, 2019), se decía que en la actualidad sabemos que los materiales manipulativos han de jugar un papel básico en la actividad cotidiana en el aula de matemáticas de Primaria. Eso no quiere decir que haya que desestimar el aporte de las nuevas Tecnologías digitales de las Matemáticas, ya que ambos recursos se complementan y potencian mutuamente. El trabajo con materiales manipulativos es el punto de partida, pero requiere ser acompañado de tareas ricas y buenas preguntas del docente o de la docente que inviten al alumnado a la representación y abstracción de los conceptos matemáticos relacionados.

La utilización de estos materiales permite generar ambientes de clase ligados a la resolución de problemas, entendiendo la resolución de problemas como algo mucho más allá del planteamiento de «problemas aritméticos escolares». Se entiende por material manipulativo cualquier objeto que pueda ayudar al alumnado a percibir y abstraer algún concepto matemático mediante la manipulación. Tradicionalmente se hace la clasificación entre materiales estructurados y no estructurados. Materiales estructurados son aquellos que están organizados en torno a determinadas configuraciones (dedos de la mano, dados, ábacos, bloques multibase, etc.), mientras que los no estructurados no presentan esa organización (policubos, fichas, contadores, papel para hacer papiroflexia, etc.). Pueden ser comerciales, elaborados por los docentes o las docentes u objetos de uso en la vida cotidiana, pero todo centro debería contar con material variado y, a ser posible, dentro del aula. Aunque depende del saber en cuestión, puede decirse que el trabajo con manipulativos sigue una serie de etapas: manipulación libre con el material, manipulación guiada, expresión oral intuitiva, representación gráfica, abstracción (que puede ser verbal o mediante expresiones simbólicas).

Parafraseando a Szendrei (1996), los materiales manipulativos no son una receta mágica, sino que requieren de una cuidadosa planificación. En primer lugar, la comprensión del saber matemático en juego no se produce por la simple manipulación. Y, en segundo lugar, se debe reflexionar sobre qué material es más adecuado para las tareas a realizar. Por ejemplo, un geoplano 3x3, habiendo convenido que la unidad de longitud es la distancia entre pivotes, no es apropiado para calcular el perímetro de los triángulos que se pueden formar en él, pues aparecen lados de longitudes desconocidas. Igualmente, en las primeras etapas del conteo hay que considerar manipulativos que enlacen preferentemente la aritmética con técnicas de conteo, como policubos o regletas «discretizadas», en lugar de otros que resultan más adecuados para la medida, como las regletas de Cuisenaire. En general, una buena forma de preguntarse si estamos haciendo un uso poco adecuado de un material manipulativo es ver si este apenas cumple un papel similar a una regla nemotécnica. Se trata de que el manipulativo permita reconstruir el objeto matemático en cuestión. Szendrei (1996) señala como ejemplo de uso poco adecuado la asociación número-color con las regletas de Cuisenaire.

Al respecto de la distribución y el orden de los sentidos en el presente currículo y sus correspondientes saberes, puede decirse, ante todo, que no obedece a ninguna razón de importancia. Todos los sentidos contribuyen a un adecuado desarrollo de la competencia matemática y forman parte de la alfabetización matemática esencial. En primer curso de Educación Primaria puede resultar sensato empezar haciendo más hincapié en el conteo y, por ende, los números. Aún así, surgen excelentes oportunidades de conexión entre el sentido numérico y el de la medida. Incluso, son muy evidentes los recuentos que dan lugar a pictogramas, propios del sentido estocástico. Sin restar importancia al sentido numérico, que, además, no está limitado a hacer cuentas formales de manera mecanicista, las matemáticas van mucho más allá. El sentido espacial no puede verse de forma rápida y reducida a unos pocos tipos de ejercicios triviales sobre figuras geométricas estereotipadas y las fórmulas de las áreas (que debe evitarse). Lo mismo con el sentido estocástico, que incluye saberes esenciales que permiten una adecuado desarrollo del razonamiento en probabilidad y estadística. Los equipos docentes pueden organizar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en cada ciclo para poder explorar los saberes de todos los sentidos con calma y profundidad y valorando su potencialidad para establecer conexiones. Las orientaciones que ofrece este currículo proporcionan sugerencias para ello. Por ejemplo, las fracciones surgen del trabajo realizado desde el sentido de la medida, que puede incluir, a su vez, tareas más propias del sentido numérico. En definitiva, no son compartimentos estancos, sino que hay que interpretarlos de manera que la construcción de los saberes resulte coherente.

La programación didáctica ha de surgir de la reflexión global sobre el currículo y sus orientaciones y estar sujeta a adaptaciones en función del progreso del alumnado. Aunque la relación entre el profesorado y los libros de texto es compleja, diversos autores identifican carencias en estos y llaman la atención sobre el hecho de que, muchas veces, terminan siendo el currículo de facto. Shield y Dole (2013) se hacen eco de varios de estos estudios, al mismo tiempo que en el suyo también identifican carencias, en particular, un tratamiento muy superficial del currículo. Además, la mayoría de los libros de texto marcan un único camino, donde primero se ve la «teoría», con sus ejemplos, después se trabajan unos ejercicios y, finalmente, con suerte, algunos problemas. Todo esto puede entrar en conflicto con una enseñanza a través de la resolución de problemas si el docente o la docente no gestionan de forma adecuada los recursos didácticos. Alsina (2019, p. 28) compara la pirámide de la nutrición saludable con la pirámide de la educación matemática, situando en el vértice superior de esta el libro de texto, mismo lugar que ocupan grasas y dulces en la nutricional. En definitiva, ha de programarse desde el currículo.

Al hablar de recursos didácticos conviene detenerse en el cuaderno del alumnado. Arce (2018) señala que suele ser un instrumento habitual en las aulas, lo cual ha podido contribuir a que sea visto como una herramienta natural e intrínseca al aula y al estudiante y se haya cuestionado poco su influencia y el diferente papel que puede jugar en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. Este autor recoge la aportación de Fried y Amit, quienes distinguen entre actividad de dominio público y actividad de dominio privado. Actividad de dominio público es aquella actividad en la que el alumnado es responsable de la misma ante el profesorado y el resto de compañeros o compañeras, lo que implica obligaciones y ataduras derivadas del seguimiento de prácticas comunes, como una necesidad de comunicar formalmente lo realizado en la actividad. Actividad de dominio privado sería aquella actividad en la que no existe esa responsabilidad ante profesorado y compañeros o compañeras, ni hay restricciones ligadas a prácticas comunes, siendo libre el estudiante para explorar, dar marcha atrás, reflexionar. En el cuaderno de matemáticas existe una tensión entre ambas actividades. Un énfasis excesivo en el dominio público podría conllevar que el alumnado no viera el pensamiento, la reflexión propia o la exploración de posibles soluciones a problemas como algo legítimo en matemáticas y malinterprete la naturaleza de estas. Por otro lado, también es cierto que existe la necesidad de comunicar los avances obtenidos ante una comunidad (docente y compañeros y compañeras), haciendo uso de unos signos y de un lenguaje compartido en matemáticas. Por tanto, la propia actividad matemática conjuga una componente privada con una pública. El docente o la docente, al menos, ha de ser consciente de la existencia de esa

csv: BOA20220727001

dualidad. Liljedahl (2021) menciona que solamente el 20% del alumnado revisa sus anotaciones y que, mientras toman esas notas, la gran mayoría está tan desconectado que no hay aprendizaje significativo, ya que se puede copiar perfectamente sin ser consciente de lo que se escribe. Por lo tanto, aunque esta práctica suele hacerse con las mejores intenciones, tener al alumnado copiando apuntes no es activo ni significativo. En una cultura de aula con un ambiente de resolución de problemas, estas anotaciones deben involucrar al alumnado, quien debe decidir qué anotaciones pueden servirle de ayuda más adelante. Los resultados de investigación indican que esta forma de elaborar el cuaderno exige pensar al alumnado antes y durante el proceso de anotación. Es entonces cuando la mayoría del alumnado vuelve a esas anotaciones en el futuro.

Atender a la diversidad no significa dar unas fichas con operaciones formales sencillas o ejercicios tipificados a ese alumnado que no puede seguir las matemáticas «elevadas» que están viendo el resto de sus compañeros o compañeras. Y viceversa, dar unas fichas con matemáticas «elevadas» a algunos alumnos o alumnas mientras los demás están con algo diferente, tampoco es atenderlos. No, al menos, de manera inclusiva. Desde el enfoque a través de la resolución de problemas se asume esa diversidad continuamente. Para comprender cómo se atiende esta diversidad es necesario asumir que en el aula conviven diferentes ritmos de aprendizaje y que cada alumno o cada alumna crean sus propios significados personales sobre el contenido matemático. Las secuencias didácticas, por tanto, deben facilitar el desarrollo de estos significados y plantearse como objetivo el progreso en el aprendizaje de todo el alumnado. Las actividades de suelo o umbral bajo y techo alto (low floor - high ceiling) ejemplifican perfectamente la idea de inclusión. Tienen un punto de entrada asequible para todos, sin planos de abstracción formal innecesarios que impidan el acceso a las ideas matemáticas que hay detrás. Y permiten progresar y profundizar, enriqueciendo esos significados personales y facilitando el máximo desarrollo personal de cada alumno o de cada alumna. La atención a las diferencias individuales, con facilitadores del aprendizaje (p. ej., manipulativos cerca para cuando sea necesario volver a sacarlos) se hará en primera instancia en el aula. El trabajo central del aula, en pequeños grupos de unos tres alumnos o alumnas, permite realizar apoyos a través de esos facilitadores y otras estrategias. Cuando el alumnado con dificultades

El trabajo en pequeños grupos que fomenten las interacciones debe ser lo habitual. Liljedahl (2021) se hace eco de diversas investigaciones que señalan que la colaboración entre el alumnado es un aspecto importante de la práctica en el aula, porque cuando funciona según lo previsto, tiene un impacto poderoso en el aprendizaje. Sin embargo, al igual que el uso de manipulativos, esto no es una receta milagrosa. Por un lado, Boaler (en Lerman, 2014) señala, a partir de evidencias en países de todo el mundo, que la agrupación según habilidades perjudica el rendimiento de los estudiantes en los grupos medio y bajo y no afecta al de los estudiantes de alto rendimiento. Por otro lado, Liljedahl (2021) recoge que, tanto si se hacen los pequeños grupos de forma estratégica como si se deja que el alumnado forme sus propios grupos, el 80% del alumnado adopta la mentalidad de de que su trabajo, dentro del grupo es no pensar. Este autor indica como solución el hacer grupos visiblemente aleatorios, frecuentemente. Con el tiempo, pasadas seis semanas, la totalidad del alumnado abordaba las tareas en grupo con la mentalidad de que no solo iban a pensar, sino que iban a contribuir. Además, se demostró que el uso de agrupaciones frecuentes y visiblemente aleatorias derriba las barreras sociales dentro del aula, aumenta la movilidad del conocimiento, reduce el estrés y aumenta el entusiasmo por las matemáticas. El trabajo en grupo consiste, no tanto en la elaboración de un producto final y a la adopción de roles determinados, como en interactuar para poner en común ideas y formas de pensamiento. Liljedahl (2021) sintetiza otras estrategias (cómo proporcionar las tareas a realizar, cómo distribuir el mobiliario, etc.), a partir de resultados de investigación, que contribuyen a la formación de una cultura de aula a través de la resolución de problemas, basada en el pensamiento del alumnado.

Jugar es una de las seis actividades matemáticas esenciales, y debe considerarse al mismo nivel que contar, medir o explicar, siendo algo que todas las culturas practican (Bishop, 1998). El juego, en general, y particularmente en Educación Primaria, tiene evidentes efectos positivos en el desarrollo afectivo del alumnado. Por otra parte, es clara también la relación entre una actitud positiva ante una actividad concreta y un mayor aprendizaje. La práctica de juegos –matemáticos– estimula el interés y favorece el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas. Parece natural, entonces, incluir la sugerencia del uso del juego –matemático– en la enseñanza de las Matemáticas. Los propósitos del uso en el aula de los juegos matemáticos son cuatro (Gairín, 1990): desarrollar conceptos matemáticos, practicar algoritmos, desarrollar habilidades de razonamiento y proporcionar entornos donde resulta natural utilizar el pensamiento lógico y emplear técnicas heurísticas apropiadas para la resolución de problemas. En relación con los dos primeros propósitos tendríamos juegos que llamamos de conocimiento (la oca, ¿quién tiene? ¡yo tengo!, el juego del producto, etc.), mientras que, en relación con los dos últimos, tendríamos los juegos denominados de estrategia (Nim, nextbol, ajedrez, etc.). No obstante, muchos juegos de conocimiento admiten cierta estrategia (el juego del producto, por analogía con el tres en raya) y ciertos juegos de estrategia pueden facilitar la aparición de ciertos conocimientos (construcción de diagramas de árbol en el ajedrez).

El uso de juegos como el ajedrez permite desarrollar estrategias de resolución de problemas: proponer y probar hipótesis, procesos deductivos, búsqueda de patrones, control del impulso, flexibilidad mental representaciones pictóricas, entre otras. Es razonable pensar que jugar al ajedrez mejora las habilidades matemáticas básicas (como la aritmética simple), porque es una actividad que depende en cierta medida de esas habilidades (Trinchero y Sala, 2016). No obstante, estos autores proponen también que el ajedrez puede aportar al aprendizaje de las matemáticas la práctica de ciertas heurísticas generales que los jugadores de ajedrez utilizan durante las partidas: la planificación y control de las decisiones tomadas, por ejemplo, serían similares a las utilizadas en las tareas de resolución de problemas matemáticos. Además, nos ofrece aprender un lenguaje abstracto, propio del ajedrez, que va a facilitar montar pequeñas posiciones en un tablero, donde van a poder verbalizar y explicar situaciones alfanuméricas de forma natural. Para que la utilización del ajedrez o, más bien, de actividades basadas en ajedrez tenga efectos relevantes en el aprendizaje de las matemáticas, se necesitan actividades específicas que profundicen en las relaciones entre ambos. En este sentido, en Arnal-Bailera y Gasca (2018) y Arnal-Bailera y Vera (2021) se recogen dos actividades de aula.

Desde la administración educativa y otros agentes, como las sociedades de profesorado de matemáticas, se promueven actividades y concursos que alimentan la curiosidad del alumnado, tanto del que participa expresamente en ellas como el que la vive en el entorno de aula, donde se dan a conocer estas propuestas y pueden formar parte de la secuencia didáctica. Estas actividades han de proponerse a todo el alumnado. Ahora bien, en el caso de alumnado con altas capacidades, ofrecen un estímulo adicional de gran valor. En tercer ciclo de Educación Primaria se celebra la Olimpíada Alevín, cuya fase de preparación puede aportar interesantes problemas para plantear en el aula. Otros ejemplos de actividades son concursos de tangram, concursos de figuras imposibles, diversos talleres, etc. Finalmente, es interesante mencionar que algunas de estas actividades ofrecen claras oportunidades de conexión con otras áreas. Es el caso de los concursos de radionovelas matemáticas, microrrelatos matemáticos o fotografía matemática, que cultivan aspectos lingüísticos de expresión oral o escrita, combinado con el uso de las Tecnologías digitales (en el caso de las radionovelas o, incluso, la fotografía matemática).

IV.2. Evaluación de aprendizajes

La evaluación engloba todas aquellas acciones que realiza el docente o la docente (Goos, en Lerman, 2014, p. 413) para recoger e interpretar evidencias del aprendizaje del alumnado y usarlas consecuentemente. En este apartado nos referiremos exclusivamente a la evaluación de aula, pues existen otros tipos de evaluación, de carácter externo (pruebas diagnósticas, de acceso, etc.) o de evaluación de programas educativos. En general, dentro de la evaluación de aula se puede distinguir entre evaluación sumativa, cuyo objetivo es certificar el desempeño del alumnado (las pruebas externas suelen ser siempre sumativas); y evaluación formativa, que persigue apoyar el aprendizaje del alumnado proporcionando al docente o a la docente evidencias para la toma de decisiones en los procesos de enseñanza.

Conviene distinguir entre calificación y evaluación. Calificar es un proceso mediante el cual se emite un juicio de valor sobre el aprendizaje del alumnado, bien sea mediante una valoración cualitativa (en términos de apto o no apto, o cualquier otra escala), bien mediante una valoración cuantitativa (numérica). En las enseñanzas obligatorias, la calificación se concreta principalmente en los boletines que se formalizan al final de cada trimestre, en tres o cuatro ocasiones a lo largo del curso. Esta certificación sumativa del aprendizaje apenas sirve como guía para el planteamiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, limitándose a propósitos de ordenación y clasificación.

Cuando las clases se conciben de manera abierta y participativa, desde las interacciones en pequeño grupo y puestas en común, desplegando estrategias variadas para hacer visible el pensamiento del alumnado, la evaluación formativa emerge como algo natural. Esta evaluación está constituida por todas las oportunidades en las que el alumnado recibe información sobre dónde está y hacia dónde va en el proceso de aprendizaje, oportunidades que, al mismo tiempo, proveen de evidencias al profesorado para diseñar, adaptar e implementar secuencias didácticas. Ahora bien, es normal que profesorado y alumnado perciban cierta tensión entre esta cultura de aula y la necesidad de calificar. Es decir, por un lado, se están resolviendo problemas en grupo, exponiendo argumentos, interaccionando, manipulando, etc. y, por otro lado, se para todo eso para hacer pruebas individuales cerradas para obtener una calificación. Además, luego, son esas calificaciones las que se usan prácticamente en exclusiva para certificar sus aprendizajes, sin margen para la flexibilización y llegando a penalizar el progreso. Esto es algo que se hace en aras de una supuesta objetividad, pero nada más lejos de la realidad. Hay mucha investigación acerca de la baja fiabilidad de las puntuaciones otorgadas al calificar en pruebas escritas de matemáticas. Liljedahl (2021) se hace eco de múltiples estudios en evaluación y señala que estas inconsistencias se observan incluso en pruebas cuyo diseño es exhaustivo y profesional, como el examen SAT-I. Finalmente, si un alumno o alumna demuestran ser competente en un tipo de tarea, en clase, después de haber realizado la prueba escrita individual, ¿ha de ignorar el profesorado esa evidencia de aprendizaje? Es más, ¿le tiene, acaso, que penalizar esa prueba anterior?

Tal y como señala la normativa, la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado será continua, formativa e integradora. La clave para reducir esa tensión está -en palabras de Liljedahl (2021)- en pasar de un paradigma de calificación basado en la acumulación de puntos a un paradigma basado en evidencias de aprendizaje. Un paradigma basado en la acumulación de puntos está basado en la toma de instantáneas sucesivas del proceso de aprendizaje y tiende a ignorar lo que ocurre entre medias. Los puntos obtenidos en cada una de esas instantáneas, que pueden tomar la forma de exámenes, pero no de forma exclusiva, son luego promediados con algún tipo de ponderación. Como se ha dicho anteriormente, esta calificación no es ni justa, ni objetiva, ni precisa. Una cultura de aula como la que se describe en esta normativa exige evaluar a partir de lo que se observa en clase, desde los criterios de evaluación. Si se pretende dar valor a esas interacciones en grupo, integrarlas con eventuales tareas individuales y combinar evidencias de distintas fuentes, es necesario un cambio de paradigma. No es otra forma de calcular la calificación, es un enfoque completamente diferente en esencia al de recolectar puntos.

Liljedahl (2021) sintetiza un conjunto de buenas prácticas que facilitan la creación de una cultura de aula en la que se aprende a través de la resolución de problemas, a partir de la implementación de diversas técnicas y estrategias en el aula por parte de un amplio grupo de docentes. En lo que se refiere a los procesos de evaluación y calificación insiste en olvidarse de cualquier tipo de calificación hasta el momento en que esta es exigida por la administración. Por lo demás, se trata de planificar la recogida de evidencias de aprendizaje, de manera que en lugar de tener un cuaderno de puntuaciones, el profesorado elabore un cuaderno repleto de información que indique dónde está cada alumno o cada alumna.

La recogida de esta información puede adoptar diversas formas, pero ha de resultar un proceso ágil y cómodo. Por ejemplo, se puede codificar fácilmente en tablas, a modo de registro. En cada secuencia didáctica se articulan tareas y situaciones de aprendizaje donde se pone de manifiesto dónde está cada alumno o cada alumna al respecto de una competencia o saber determinado y que se relacionan con los criterios de evaluación. Por lo tanto, podemos partir de ahí y jugar con las variables didácticas (las que dependen del saber matemático en cuestión) para establecer tres niveles de complejidad para cada una de las tareas. En el caso de la secuencia para la lectura y escritura de números de dos cifras que se incluye de ejemplo en el Anexo IV.4, estas situaciones podrían ser las siguientes:

LECTURA Y ESCRITURA DE NÚMEROS DE DOS CIFRAS	Básico	Intermedio	Avanzado
Agrupar material no estructurado de 10 en 10 y comunicar el resultado.			
Representar un número dado verbalmente en el ábaco horizontal.			
Representar un número dado verbalmente con plaquetas.			
Construir una colección de un cardinal dado por escrito con policubos.			
Construir una colección de un cardinal dado por escrito en el ábaco.			
Construir una colección de un cardinal dado por escrito con plaquetas.			

Siguiendo la propuesta de Liljedahl (2021), en cada uno de los niveles de complejidad se pueden utilizar diferentes símbolos para codificar el dato, la información, la evidencia de aprendizaje, de manera que quede reflejado: si el alumnado muestra evidencia del saber de forma individual (✓); si el alumnado muestra evidencia del saber de forma individual, pero con algún pequeño error (～); si el alumnado muestra evidencia del saber de forma individual, pero

csv: BOA20220727001

con ayuda de algún compañero o compañera o del docente o de la docente (A); si el alumnado demuestra ese saber en grupo (G); si ha abordado la tarea, pregunta o situación, pero de forma claramente equivocada (X); y, finalmente, si no ha intentado la tarea (N). Si a estos símbolos se le añade un subíndice para indicar si la evidencia viene de una observación (o) o de una conversación (c) ya tenemos todo lo necesario para evaluar y, en última instancia, calificar. Una prueba específica individual, como un examen o un test, tiene también cabida en este esquema. Ahora bien, estas pruebas siguen siendo oportunidades, como otras cualesquiera, para recoger información, por lo que no van asociadas a una nota numérica (ni en global ni como el agregado de la suma de cada cuestión o tarea de la prueba). Ese tipo de tareas se devuelven con comentarios, a modo de feedback formativo, los cuales pueden complementarse con una puesta en común.

De la forma descrita anteriormente, cada alumno o cada alumna tendrían asociada una tabla con toda la información relativa a su progreso en la secuencia didáctica. Observemos que no es la única forma de recoger los datos. Así, si se prefiere utilizar una tabla de una sola entrada para tener en una misma hoja o pantalla a todo el alumnado, se podría plantear la tabla de forma similar a esto otro, con las adaptaciones correspondientes a la codificación de los progresos en el aprendizaje para mostrar el nivel de complejidad de la tarea (por ejemplo, un 2, 3 o 4, para el básico, medio y avanzado, respectivamente, seguido de la codificación anterior):

	LECTURA Y ESCRITURA DE NÚMEROS DE DOS CIFRAS		
ALUMNADO	Agrupamiento con material no estructurado	Representar un número en el ábaco	…
Alumno/a 1			
Alumno/a 2			
…			

La recogida de información por medio de este tipo de tablas se integra de forma natural en el día a día de la clase, son coherentes con una cultura de aula basada en la interacción continua y constituyen un componente fundamental de la evaluación formativa. Los datos así obtenidos permiten informar tanto al alumnado como al profesorado de los progresos en el aprendizaje, dando pistas al primero de dónde está y qué hacer para mejorar, y al segundo, información valiosa para el diseño e implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje. Este instrumento tampoco requiere obtener información de todos y cada uno de los alumnos o alumnas todos los días. De hecho, cuando un alumno o una alumna ya han mostrado evidencias de desenvolverse adecuadamente en una tarea con cierto nivel de complejidad, no es necesario recabar más información. Ahora bien, se reconoce que existe un compromiso entre una escasez de evidencias de aprendizaje y demasiada información a la hora de decidir si ese alumno o alumna son competentes para una cierta tarea o situación. Lo que sugiere Liljedahl (2021) es dar por válidas dos evidencias consecutivas de haber alcanzado la competencia. Tiene sentido, porque si para un alumno o alumna hemos recogido información contradictoria, hace falta un poco más.

Observemos que esta evaluación no solo permite atender a la diversidad, sino que puede cumplir cierta función diagnóstica de dificultades de aprendizaje. Cuando un alumno o alumna no muestran evidencias de progreso para alguna de las situaciones, bien porque no las intenta, bien porque siempre necesita ayuda, se volverá a insistir en otro momento. Entonces, una conversación con él o con ella ayudará a comprender la dificultad que puede tener y, a partir de ahí, indicarle que se centre en una tarea o lo que se considere oportuno. Si en la secuencia se plantean pruebas individuales, estas deben planificarse de manera que incluyan diferentes niveles de complejidad. Siendo la misma prueba para todo el alumnado, siempre se puede indicar que comiencen por una o por otra, incluso plantear variantes de forma flexible y espontánea si, durante el desarrollo de una de estas pruebas, observamos dificultades o, por el contrario, margen para la profundización. En el caso de que las dificultades persistan y el alumnado no responda a las estrategias de atención desplegadas en el aula, será el momento de indagar en las causas y evaluar el caso concreto en coordinación con el resto del equipo docente y especialistas, en paralelo a procurar una comunicación fluida con la familia o el tutor o tutora legal del alumnado.

Al terminar un período evaluativo, o en las reuniones con las familias y responsables legales, la información recogida de esta manera se puede utilizar para elaborar un informe completamente cualitativo del progreso del alumnado. Para ello, prácticamente bastaría con depurar la tabla en sí de eventuales anotaciones anecdóticas. Finalmente, tanto si la administración exige emitir un juicio de valor en una escala cualitativa como cuantitativa, se podrá llevar a cabo a partir de dicha información. Por ejemplo, si asignamos un valor de 2 puntos para el nivel básico, 3 puntos para el intermedio y 4 puntos para el avanzado, la constatación de un nivel básico sería la mitad de los puntos en total. Obsérvese que esta forma de valorar no penaliza a un alumno o alumna si al principio no era competente ante cierta tarea o tipo de situación-problema. Lo que cuenta es lo que alcanza en cada uno de ellos, porque el aprendizaje consiste en un desarrollo personal.

IV.3. Diseño de situaciones de aprendizaje

El diseño de situaciones de aprendizaje y su articulación en secuencias didácticas debe partir de los principios de equidad e inclusión, que puede traducirse en que estas han de conseguir el progreso en el aprendizaje de todo el alumnado. Aunque es prácticamente imposible tener en cuenta estas consideraciones desde el punto de vista exclusivo del diseño, sin contar con la gestión en el aula, sí que se puede reflexionar sobre las condiciones necesarias de inicio.

En general, se pueden distinguir dos grandes tipos de situaciones de aprendizaje. Por un lado, aquellas situaciones, que denominaremos esenciales, y que constituyen el contacto inicial con el objeto matemático en cuestión prestando especial atención a la construcción de este. Estas situaciones suelen tomar la forma de secuencias didácticas que articulan diversas situaciones-problema a través de las cuales, con el andamiaje adecuado, emergen los saberes correspondientes. Estas situaciones constituyen el núcleo del desarrollo de un saber determinado para un curso en particular. Un claro ejemplo son las situaciones sobre fracciones que se han descrito en las orientaciones para el sentido de la medida. Por otro lado, sin perjuicio de que las situaciones esenciales compartan alguna de las características que se nombran a continuación, existen otras situaciones de aprendizaje que persiguen consolidar saberes y competencias (mediante la práctica rica e intercalada), evaluar conocimientos y experiencias previas del alumnado, profundizar sobre un aspecto concreto de uno o varios saberes o establecer conexiones intra o extra matemáticas. Esta vía de consolidación, en palabras de Liljedahl (2021) implica reconstruir un concepto desde abajo y dando pie a profundizar, aprovechando el trabajo del alumnado producido durante su reflexión sobre un conjunto de situaciones-problema. Las tareas o actividades de suelo (o umbral) bajo y techo alto (https://nrich.maths.org/10345) son el paradigma de actividad rica e inclusiva. Su diseño es tal que ofrece un punto de partida accesible para todo el alumnado, pero, al mismo tiempo, también proporciona posibles puntos de bloqueo para todo el alumnado.

Un marco de referencia muy extendido para el sentido espacial es el de las fases de aprendizaje de van Hiele, que ayudan a organizar y secuenciar el aprendizaje de contenidos específicos en forma de actividades que permiten construir una red mental de conexiones entre los objetos geométricos que intervienen. Son las siguientes:

Primera fase: información o diagnóstico

Es la toma de contacto y cumple un doble propósito. Por una parte, el docente o la docente observan qué conocimiento previo tiene el alumnado acerca del contenido a aprender, qué experiencias personales ha podido tener al respecto, cómo razona, qué vocabulario maneja, etc. Es fundamental identificar todo esto porque es lo que permite adaptar el andamiaje de las siguientes fases, optimizando el aprendizaje de todo el alumnado. Además, así se evita perder el tiempo enseñando cosas que ya se saben y se aprovechan las experiencias personales como motivación. Si se van a usar materiales, manipulativos físicos o virtuales, hay que presentarlos en esta fase.

Segunda fase: orientación dirigida

Es una fase en la que el docente o la docente, previamente, han seleccionado los materiales y las tareas a realizar con ellos, que suelen ser breves y consistir en cuestiones específicas que proporcionan el andamiaje necesario para que el alumnado empiece a investigar el contenido objetivo de la actividad. Los conceptos, propiedades, representaciones, etc. que surgen son los que empezarán a configurar la red de relaciones del nuevo nivel de razonamiento, siempre y cuando las actividades se han diseñado de forma adecuada y permiten introducirlos de manera progresiva.

Tercera fase: explicitación

csv: BOA20220727001

Después de haber explorado en la fase anterior, el alumnado expresa sus descubrimientos e intercambia los resultados de sus indagaciones, qué regularidades ha observado, qué acciones ha realizado, etc. El papel del profesorado en esta fase es el de fomentar interacciones, organizar puestas en común y el de ayudarles a progresar en el uso de un lenguaje cuidadoso y preciso, ya que es a través de este lenguaje cuando se empiezan a clarificar y articular los conceptos, propiedades, etc. que surgen. No se trata de introducir mucha terminología al principio, ya que se ha comprobado que esto genera obstáculos de aprendizaje. Inicialmente, puede ser un lenguaje completamente espontáneo e informal. Lo importante es que se discuta sobre lo que se ha hecho y surjan puntos de vista diferentes. Las interacciones permiten que el alumnado organice sus ideas para articular justificaciones alrededor de lo que han hecho y que aprendan unos de otros.

Esta fase no es una transición fija entre la segunda y cuarta fases, sino que tiene más bien un carácter transversal, pudiendo organizar charlas de aula a modo de puestas en común en cualquier momento de la actividad. Es más, el docente o la docente pueden hacer que muchas de ellas se reduzcan a interacciones entre el alumnado. En ningún caso se trata de explicaciones, reservándose la última fase para las puntualizaciones formales que sean necesarias.

Cuarta fase: orientación libre

Las tareas de esta fase son más complejas que en la segunda fase y pueden constar de varios pasos, ser abordadas de múltiples maneras y tener final abierto. En este momento ya se conoce bastante el objeto de estudio y será mediante estas tareas con las que se consoliden y perfeccionen esos conocimientos y competencias. No se trata de la repetición de tareas realizadas ya en fases anteriores ni de meros ejercicios de aplicación directa, sino de nuevas tareas que exigen recombinar lo que se ha ido aprendiendo y explorar nuevos caminos. Las actividades de esta fase permiten completar la red de conexiones entre conceptos, propiedades, etc. que se empezó a formar en las fases anteriores. En esta fase es cuando cobra especial importancia la atención a la diversidad. Si se interpreta en términos de suelo bajo y techo alto, puede decirse que la segunda y tercera fase constituyen gran parte de lo que sería el suelo bajo. En la cuarta fase, las diferentes formas de abordar las tareas y el hecho de que puedan existir variaciones o exploraciones que requieran de reflexiones más profundas, proporcionan el andamiaje necesario para el techo alto.

Quinta fase: integración

Es el final del proceso, cuando el docente o la docente recogen todo lo que ha ido apareciendo e institucionaliza el conocimiento. En esta fase no aparecen nuevos conceptos o propiedades, sino que el papel del docente o de la docente se limitan a sintetizar lo aprendido y a conectarlo con otros contenidos ya conocidos por el alumnado en una última puesta en común, más dirigida que las anteriores. No obstante, aunque en esta fase es fundamental el papel del docente o de la docente, no se debe excluir la posibilidad de que el alumnado intervenga o se sigan incorporando técnicas de evaluación formativa.

En la red se pueden encontrar muchos ejemplos de uso de las fases de van Hiele para el diseño de situaciones de aprendizaje. Por ejemplo, Howse y Howse (2014) describen en detalle una actividad de clasificación con bloques lógicos, muy apropiada para primer ciclo; y Malloy (1999) hace lo propio con una actividad sobre la relación falsa entre área y perímetro, adecuada para segundo o tercer ciclo.

IV.4. Ejemplificación de situaciones de aprendizaje

Situación de aprendizaje 1: Lectura y escritura de números de dos cifras

Cualquier situación didáctica que se organice en el aula para aprender la sucesión de los números naturales, las diferentes técnicas de recuento, los significados del número natural como cardinal y como ordinal, el orden numérico y la iniciación a la combinatoria, se puede articular a partir de cinco clases de situaciones didácticas: de recitado, de cardinalidad u ordinalidad con recuento, de cardinalidad sin recuento, de ordenación y de combinatoria. Si la situación didáctica se compone de una sola de estas situaciones diremos que es simple, mientras que si compone de varias, diremos que es compleja. Por otro lado, la enseñanza del sistema de numeración escrito exige tres clases de situaciones didácticas: de comunicación escrita, de trazado y reconocimiento de las cifras y de agrupamiento decimal, siendo esta última necesaria para la lectura y escritura de números de dos cifras.

csv: BOA20220727001

Las situaciones didácticas de comunicación de números de dos cifras deben iniciarse antes que las de lectura y escritura de dichos números (al igual que las situaciones de comunicación de números de una cifra, que deben comenzar antes que las situaciones de trazado y las situaciones de reconocimiento de las cifras). En otras palabras, se plantea un aprendizaje a través de la resolución de problemas, entendidos estos como situaciones, tareas, etc. Las situaciones de comunicación son, básicamente, situaciones didácticas de recuerdo, de adivinanza o de petición. En las de recuerdo se le dice al alumnado que tome nota escrita de cierto cardinal u ordinal para poder recordarlo días después. En las de adivinanza, se trata de adivinar un cardinal u ordinal a partir de una información escrita hecha por otros compañeros o compañeras o por el docente o la docente. En las de petición, el alumnado tiene que pedir por escrito a otros compañeros o compañeras o al docente o la docente, o el docente o la docente al alumnado, que construyan un cierto cardinal u ordinal. Esta vía de la resolución de problemas, que incluye, como hemos dicho, la génesis del objeto matemático en cuestión, permitiendo construir nuevo conocimiento a partir de lo que ya sabe el alumnado, se complementa con la vía de la técnica. En paralelo a todas estas situaciones, se intercalan otras donde se profundiza en los mismos tipos de situaciones, modificando algunas variables didácticas, y se consolida lo aprendido mediante la práctica rica e intercalada.

Las estrategias iniciales que emplea el alumnado en situaciones de comunicación de números de dos cifras suelen pasar por utilizar las cifras de forma aditiva (por ejemplo, expresar catorce como «8 6», ya que 8 + 6 = 14) o expresar los primeros nueve objetos mediante la cifra correspondiente y dibujar los demás. A medida que paralelamente se va desarrollando la técnica de escritura posicional decimal de números de dos cifras, el alumnado la va asumiendo espontáneamente. A aquellos niños y niñas que, pasado un tiempo prudencial, siguen expresando los números de manera aditiva, el docente o la docente pueden sugerirles que utilicen el número diez (se supone que para entonces, mediante la vía de la técnica, el alumnado ya está familiarizado con la representación usual del diez como «10»). De esa manera, pasarán a escribir, por ejemplo, treinta y dos como «10 10 10 2», lo que los irá acercando a la representación posicional decimal. En estas situaciones se deben considerar las siguientes variables didácticas: significado del número (cardinal u ordinal), tamaño del número (del 1 al 9, del 10 al 20, del 20 al 50, del 50 al 100, etc.), tipo de situación (recuerdo, adivinanza o de petición), sentido de la situación: de lectura (paso del escrito al oral) o de escritura (paso del oral al escrito), material utilizado (todo tipo de objetos movibles y al alcance de la mano o dibujados, cajas o sobres para guardar objetos, etc.).

Para el aprendizaje de los números de dos cifras es esencial considerar situaciones didácticas de agrupamiento decimal (de 10 en 10). En un primer momento, se parte de conjuntos de cardinal dado (que no sea múltiplo de diez) y se pide al alumnado que distribuya los objetos en grupos de diez, y que digan (o escriban) cuántos grupos de diez y cuantas unidades se obtienen. Es importante no comenzar por números que terminen en cero (múltiplos de diez), ya que estos son más difíciles de escribir que los que no contienen ceros, por lo que no deben presentarse al comienzo. En particular, la escritura del diez es la más difícil de comprender por la presencia del cero y porque el agrupamiento de diez en diez no se percibe con facilidad, ya que no sobra nada al hacer el agrupamiento. Se debe utilizar un material no estructurado (fichas, tapones, policubos sueltos, etc.) para que el alumnado tenga que construir efectivamente las decenas. Una vez presentadas varias de estas situaciones, conviene pedir al alumnado que estime cuántos grupos de diez y cuántas unidades van a obtenerse antes de iniciar ninguna acción. De esta manera, el alumnado se va familiarizando con el hecho de que en un treinta y cuatro se obtienen tres decenas y cuatro unidades, en un cincuenta y dos, cinco decenas y dos unidades, etc. Después, se presentan situaciones en las que, dados varios grupos de diez (decenas) y varias unidades,se debe encontrar el cardinal del conjunto total.

Estas mismas situaciones deben plantearse también con materiales estructurados en decenas y unidades (materiales organizados en torno a determinadas configuraciones, como los dedos de las manos, plaquetas, ábacos, dinero ficticio, etc.). Se da por supuesto que antes de iniciar las situaciones de lectura y escritura de números de dos cifras se han trabajado los números en forma oral (por lo menos los cincuenta primeros números) y se ha ejercitado la lectura y escritura de las cifras. También es importante que el alumnado esté familiarizado con las situaciones de agrupamiento en general; es decir, situaciones en las que se pide descomponer un conjunto en subconjuntos de un número dado de elementos. Por ejemplo: «Coge diecisiete fichas y forma con ellas grupos de cuatro fichas». Las variables didácticas que han de tenerse en cuenta son: el tamaño del número, tamaño de la agrupación (diez, o, cuando lleguemos a números de tres cifras, cien, mil, etc.), sentido de la situación (directo, de obtención del número de grupos y de unidades a partir del cardinal; o inverso, de obtención del cardinal conocido el número de grupos y de unidades), material utilizado (no estructurado o estructurado), estimación del resultado (con o sin exigencia previa de estimación del resultado), escritura del número (con o sin escritura del número).

A continuación, se describe una propuesta de secuencia didáctica formada por seis situaciones. Se señalarán algunas variables didácticas que pueden ser modificadas por el docente o la docente para proponer distintas situaciones de una misma clase, de manera que las estrategias de resolución y el conocimiento matemático que pone en juego el alumnado se ve afectado. Observemos que pueden existir otras variables, aspectos a controlar por el profesorado, que son de corte pedagógico y generan también otras situaciones, pero sin alterar el conocimiento matemático que emerge de ellas. Remitimos al lector a Cid, et al. (en Godino, 2003, capítulo sobre sistemas numéricos) para profundizar sobre los tipos de situaciones didácticas.

Introducción y contextualización:

Propuesta de secuencia didáctica para el aprendizaje de la escritura de números de dos cifras en el primer curso de Educación Primaria. Los conocimientos previos que debe tener el alumnado, y a los que se habrá prestado atención durante los primeros meses del curso, son los siguientes: contar de uno en uno y de diez en diez, interpretar como cardinales las palabras numéricas correspondientes a los números de dos cifras, descomponer un conjunto en subconjuntos de un número dado de elementos, manejar el ábaco y las plaquetas para representar números de dos cifras, sumar de diez en diez y decenas con unidades y leer y escribir las cifras.

Objetivos didácticos:

Aprender a escribir y leer números de dos cifras. Aprender a desenvolverse en situaciones de comunicación de cantidades mayores que diez.

Elementos curriculares involucrados:

En el plano competencial se desarrollan las siguientes competencias: CE.M1, CE.M2, CE.M5, CE.M6, CE.M7, CE.M8. Por otro lado, se trata de una actividad propia del sentido numérico (conteo y cantidad, relaciones). El enfoque a través de la resolución de problemas lleva siempre aparejado un desarrollo del sentido socioafectivo.

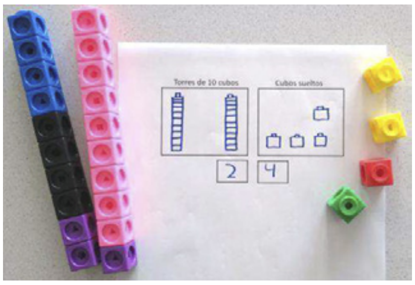
Conexiones con otras áreas:

La lectura y escritura de números de dos cifras resulta esencial en todas las áreas. Quizá sea Lengua el área con la que se puedan establecer conexiones más claras, pudiendo intercalar estas situaciones con otras de lectura de instrucciones cortas.

Descripción de la actividad:

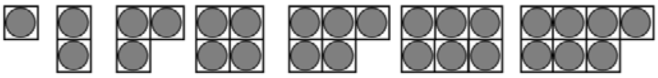
Las tres primeras situaciones son situaciones de escritura de números:

1ª situación didáctica: agrupamiento con material no estructurado. En el aula hay 6 cajas, distribuidas convenientemente, con 200 policubos en cada una de ellas. El alumnado recibe la siguiente instrucción del docente o de la docente: «Debéis ir a la caja de los cubos y coger veinticuatro cubos que llevareis a vuestra mesa. Después tenéis que construir todas las torres de diez cubos que podáis. Una vez realizada la tarea el docente o la docente les da un papel para que dibujen las torres y los cubos que han quedado sueltos y escriban debajo el número de torres y el de cubos.»



2ª situación didáctica: representación de números en un ábaco. Cada alumno o cada alumna disponen de un ábaco de diez varillas horizontales con diez bolitas en cada varilla (cinco de un color y cinco de otro color) y recibe la instrucción: «Pon en el ábaco el número treinta y seis, dibuja las barras de diez bolitas y las bolitas sueltas y escribe debajo cuantas son».

3ª situación didáctica: representación de números con plaquetas. Cada niño dispone de 30 plaquetas de un punto y 10 plaquetas de diez puntos y recibe la siguiente instrucción: «Pon en la mesa veinticinco puntos utilizando el menor número de plaquetas. Después dibuja las plaquetas que has utilizado y escribe cuántas son».



Plaquetas o regletas de Herbiniere-Lebert, un manipulativo fácilmente imprimible.

A continuación, se describen las situaciones de lectura.

4ª situación didáctica: construcción, con policubos, de colecciones cuyo cardinal venga dado por la representación escrita de un número. El alumnado dispone de dos grandes cajas que contienen policubos: en una los cubos están sueltos y en la otra están formando torres de diez cubos, y reciben la siguiente instrucción escrita: «Lleva a tu mesa 45 cubos». Si no lo reconocen como cuarenta y cinco (se supone que el docente o la docente no nombran el número en ningún momento), pueden coger 4 torres y 5 cubos sueltos y contar los cubos que hay. Si lo reconocen como cuarenta y cinco, es interesante ver si toman todas las torres posibles o si prefieren coger cubos sueltos.

5ª situación didáctica: construcción, en el ábaco, de colecciones cuyo cardinal venga dado por la representación escrita de un número. Cada alumno o cada alumna disponen de un ábaco y recibe la instrucción escrita: «Representa en el ábaco el número 34». Después deben decir de qué número se trata.

6ª situación didáctica: construcción, con plaquetas, de colecciones cuyo cardinal venga dado por la representación escrita de un número. Cada alumno o cada alumna disponen de 9 plaquetas de 10 puntos y 9 plaquetas de 1 punto. También, dispone de un sobre y recibe la siguiente instrucción escrita: «Mete en el sobre 56 puntos». Después, verbalmente el profesorado les dice que coloquen el papel donde está escrito el número y los puntos en el sobre y se lo pasen a su compañero o compañera de al lado, sin decirle nada. Por último, cuando cada escolar recibe el sobre de su compañero o compañera, debe comprobar si este ha realizado correctamente la tarea. Es conveniente que cada alumno o cada alumna y su compañero o compañera más próximo construyan colecciones de distinto cardinal. Esto se consigue si el profesor o profesora preparan sobres de dos colores diferentes de modo que en cada uno de ellos cambie el enunciado de la tarea.

Estas situaciones didácticas deben plantearse varias veces cambiando el número de partida. Cuando el alumnado empieza a estar algo familiarizados con la lectura y escritura de números de dos cifras significativas (es decir, distintas de cero), deben introducirse los números que corresponden a decenas completas: veinte, treinta, etc., más difíciles de representar por la existencia del cero, y, finalmente, introducir el diez.

Metodología y estrategias didácticas:

Las primeras tres situaciones didácticas admiten una variante que consiste en pedir a los niños que anticipen el resultado, escribiendo cuantas torres (o barras o plaquetas de diez) y cuántos cubos (o cuentas o plaquetas de un punto) sueltos se van a obtener, antes de formar las torres o representar el número en el ábaco o con las plaquetas. Una vez realizada la tarea, deben dibujar los grupos de diez y las unidades y comprobar si salen las que ellos habían predicho.

Atención a las diferencias individuales:

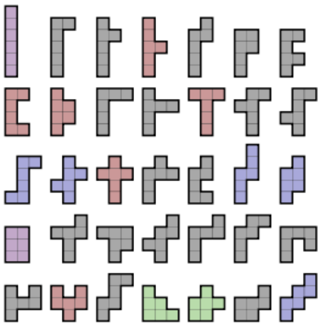
En primer curso de Educación Primaria se ha de tener en cuenta que el alumnado no tiene por qué llegar sabiendo leer. Esta secuencia está pensada para llevarse a cabo pasados unos meses del comienzo de curso. No obstante, habrá que tener especial cuidado en que las instrucciones verbales escritas sean cortas, concisas y que, además, no supongan un obstáculo. Así, se presentan varias opciones, no excluyentes. Por ejemplo, en la creación de grupos para trabajar sobre las situaciones, se puede tener en cuenta la inclusión siempre de alguien que pueda leer la instrucción en voz alta; puede leer el docente o la docente la instrucción en voz alta; o si solo hay un grupo que tiene dificultades en ese sentido, actuar en ese momento.

Recomendaciones para la evaluación formativa:

El planteamiento de la actividad a través de la resolución de problemas, que, en este caso, toman la forma de una situación de comunicación de cantidades, proporciona múltiples oportunidades para la evaluación formativa. Así, el docente o la docente observan cómo se expresa el alumnado, qué dificultades presenta, y adapta las variables didácticas de las situaciones para permitirle progresar en el aprendizaje. Los comentarios que haga el docente o la docente al alumnado, o entre el propio alumnado, servirán como feedback. Resulta especialmente importante dar tiempo a que el alumnado aborde las situaciones, evitando adelantar rápidamente la respuesta, pues esto frena el desarrollo de la competencia matemática y, además, genera una cultura de aula en la que no se empodera la actitud exploratoria. Como recomendación general, los procesos de calificación no deben interferir en ningún caso con la evaluación formativa, pues esta debe estar orientada a una mejora continua y no a una mera clasificación u ordenación. El día a día nutre de evidencias de progreso suficientes como para poder justificar, al final de cada período evaluativo, una nota numérica. Estas evidencias pueden recogerse en cualquiera de las formas que toma actualmente un cuaderno del profesorado, anotándose de forma cualitativa cómo responde el alumnado ante las diversas situaciones. Observemos que no es cuestión de realizar profundas anotaciones todos los días de lo que hacen todos y cada uno de los alumnos o de las alumnas. Otras evidencias de aprendizaje podemos encontrarlas en el cuaderno del alumnado, donde debe prestarse atención a cómo este refleja los procesos de pensamiento, los cuales mostrarán su evolución a lo largo del tiempo.

Situación de aprendizaje 2: ¿Con todos los hexaminós se puede hacer un cubo?

Introducción y contextualización:
Se describe una actividad que ilustra el modelo de fases de aprendizaje de van Hiele para progresar en el razonamiento en geometría, a partir de un trabajo sobre los hexaminós. Un hexaminó es un polígono formado por seis cuadrados unidos por los lados, de tal forma que cada dos de ellos tienen al menos un lado común. En función de las tareas a realizar y del grado de profundización es posible realizarla en segundo o tercer ciclo. La actividad se plantea como un reto: ¿Qué hexaminós corresponden con los desarrollos planos de un cubo? o ¿hay hexaminós con los que no se puede formar un cubo? Para ello, se proporciona una trama ortométrica (geoplano de rejilla «cuadrada») en papel y material estructurado de polígonos encajables (tipo Polydron o Conexión, aunque solo se necesitan 6 cuadrados), material con el que ya está familiarizado el alumnado. En caso contrario, habrá que dejar tiempo para su manipulación libre.
Los poliminós son un recurso que ofrece muchas posibilidades en el aprendizaje de la geometría. Una actividad previa que conecta directamente con la que se describe es la búsqueda de todos los hexaminós posibles (se puede realizar con tetraminós o pentominós igualmente).



Los 35 hexaminós. Fuente: R. A. Nonenmacher.

Objetivos didácticos:
Identificar el cubo como una figura de tres dimensiones y sus desarrollos planos. Representar y reconocer, a través de la manipulación, los desarrollos planos del cubo. Comunicar propiedades del cubo, por ejemplo, dos caras del cuadrado se unen en una arista del cubo, tres caras del cuadrado se unen en un vértice en el cubo, etc. Visualizar los

desarrollos planos que corresponden a un cubo. Argumentar las características de los hexaminós que no son desarrollos del cubo. Explorar la simetría y la congruencia por superposición en hexaminós. Elaborar un plan sistemático de representar los hexaminos posibles. Desarrollar actitudes de exploración, curiosidad y perseverancia.

Elementos curriculares involucrados:

La actividad desarrolla algún aspecto de cada una de las competencias matemáticas. Especialmente, la actividad se corresponde con el saber espacial y los siguientes saberes. Se señalan los de tercer ciclo, aunque puede iniciarse en segundo ciclo.

- C.1. Formas geométricas de dos y tres dimensiones:
  - Formas geométricas en objetos de la vida cotidiana: identificación y clasificación atendiendo a sus elementos y a las relaciones entre ellos
  - Técnicas de construcción de formas geométricas por composición y descomposición, mediante materiales manipulables, instrumentos de dibujo y aplicaciones informáticas.
  - Propiedades de formas geométricas: exploración mediante materiales manipulables (cuadrículas, geoplanos, policubos, etc.) y herramientas digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada, robótica educativa, etc.).
- C.3. Movimientos y transformaciones:
  - Identificación de figuras transformadas
- C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica:
  - Modelos geométricos en la resolución de problemas relacionados con los otros sentidos.
  - Las ideas y las relaciones geométricas en el arte, las ciencias y la vida cotidiana.

Se desarrollan todas las competencias en mayor o menor grado. En concreto, la CE.M3 de conjeturas, la CE.M5 de conexiones, la CE.M6 de comunicación y representación, puesto que la representación en las tramas es fundamental para llevar a cabo una tarea de búsqueda exhaustiva de todos los hexaminós posibles y poder argumentar las características de los hexaminós que no desarrollan el cubo y de los que sí la hacen posible. Las competencias CE.M7 y CE.M8, también, ya que la resolución de problemas, el trabajo en grupo, la valoración de las aportaciones, el error como base del aprendizaje… llevan asociado el desarrollo del dominio socioafectivo.

Conexiones con otras áreas:

Si se propone, como exploración, calcular perímetros y áreas y estudiar su relación, estamos enlazando con el sentido de la medida. La actividad también se puede vincular con la realización de diseños plásticos de cubos, con papiroflexia (excelente nexo de unión entre Plástica y Matemáticas).

Descripción de la actividad:

Primera fase: información o diagnóstico

Es la fase en que el docente o la docente observan qué conocimiento previo tiene el alumnado acerca del tema, al mismo tiempo que el alumnado se hace una idea acerca de la dirección que tomará el estudio posterior de la situación. Como forma de contextualizar la actividad en clase se puede hablar de objetos, lugares, esculturas, etc. con forma de cubo. El arte ofrece variados ejemplos, como los «cubos de Ibarrola». Si anteriormente se hizo alguna actividad con hexaminós, recordar entre todos en qué consistió. Propuesta la actividad, habrá que asegurarse de que se entiende lo que se pide, ¿lo puedes explicar con tus palabras?

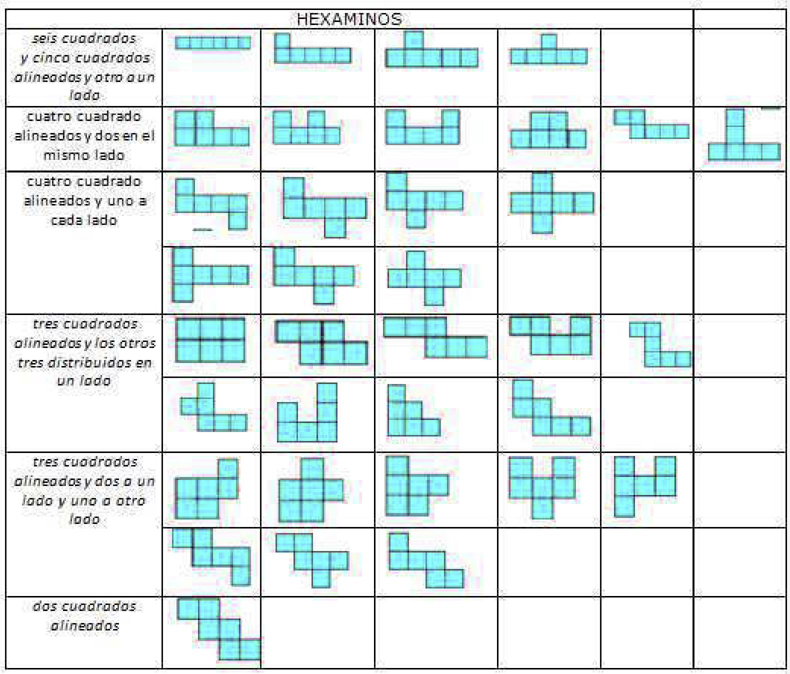
Segunda fase: orientación dirigida

Partiendo de los materiales entregados y el reto propuesto, se puede plantear la construcción de un cubo, su despliegue y que se dibuje este en la trama. Es posible que el profesorado tenga que intervenir en el uso de la trama, ya que se trata de usar los puntos de esta como vértices. La actividad se realiza en pequeños grupos, aunque cada miembro del grupo tiene que tener su material (6 cuadrados), aparecerán diferentes desarrollos para el cubo.

Tercera fase: explicitación

Esta fase forma un ciclo con la anterior. Cuando el docente o la docente observan que ya han aparecido conclusiones que merece la pena compartir, organiza una puesta en común. Aquí, por ejemplo, «el desarrollo de un cubo es una figura plana compuesta de seis cuadrados unidos por uno de los lados»; «hay diferentes hexaminós que se corresponden con el desarrollo de un cubo»; «el problema es averiguar cuántos».
Después de esa explicitación, puede recuperarse la segunda fase, que volverá a intercalar nuevas fases de explicitación conforme vaya trabajando el alumnado y obteniendo conclusiones. En el segundo ciclo, podremos proponer el dibujo en la trama de hexaminós que desarrollen el cubo. Que encuentren los 11 hexaminós no es relevante en este ciclo. Si la actividad se realiza en tercer ciclo, nos planteamos, ¿cómo sabemos que hemos encontrado todos los hexaminós que desarrollan el cubo? ¿podemos buscar todos los hexaminós y buscar los que lo desarrollan? ¿cómo podemos hacerlo para no dejarse ninguno, ni repetir? Para responder a esto es necesario hacer un trabajo sistemático, ¿cómo lo podemos hacer?

Una posible organización sistemática que puede surgir de la conversación o ser propuesta por el docente o la docente, es la de la tabla adjunta, para lo que habrá que ponerse de acuerdo en cómo lo expresamos.



Con todos los hexaminós (buscados por el alumnado -lo cual es prácticamente otra actividad, centrada en diferenciar igualdad geométrica de igualdad física- o proporcionados por el profesorado) intentarán reconocer los que desarrollan el cubo, por visualización o con ayuda del material. Por otra parte, comprobar cada uno de los hexaminós puede resultar algo tedioso. Así que podemos encontrar razones que nos permitan descartar grupos de hexaminós, ¿cuáles podemos descartar? Por ejemplo, no serán desarrollos de un cubo aquellos hexaminós que tengan un vértice en el que concurran cuatro cuadrados, ¿puedes explicar con tus palabras por qué? Tampoco lo serán aquellos que tengan cinco o seis cuadrados en línea, ¿puedes explicar por qué? Tampoco lo serán aquellos que tengan cuatro cuadrados en línea y los otros dos en el mismo lado, ¿por qué? Mientras se realiza este trabajo, aparecerán hexaminos congruentes, lo cual se puede comprobar superponiéndolos.

Cuarta fase: orientación libre

Se puede continuar calculando el perímetro y el área de los hexaminós que desarrollan el cubo y planteando preguntas adicionales que permitan la exploración. ¿Tienen todos el mismo perímetro? ¿Y la misma área? Tomando como unidad la longitud del lado de los cuadrados dibujados en la trama, se llega a la conclusión de que todos los hexaminós tienen la misma área pero no tienen el mismo perímetro.

Quinta fase: integración

Para finalizar, es conveniente realizar un resumen de la actividad, ya sea en el cuaderno individualmente o por medio de la comunicación oral.

Como ampliación, tareas relacionadas se pueden encontrar en:

https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Cube-Nets/

https://nrich.maths.org/1140

https://www.transum.org/Maths/Activity/Net_or_Not/

https://nrich.maths.org/2315

Metodología y estrategias didácticas:

Como se ha mencionado en las orientaciones, el aprendizaje a través de la resolución de problemas no es una metodología, sino más bien un enfoque de enseñanza. La propuesta se plantea en forma de reto, por lo que responde al planteamiento de trabajar en un ambiente de resolución de problemas. La situación de aprendizaje permite atender a la dimensión de razonamiento y prueba, promoviendo la realización de conjeturas, anticipar cuáles de los hexaminos son desarrollos del cubo y comprobarlo si se hace necesario, para poder argumentar. En el fondo, lo de menos es llegar a la solución final (descubrir los 11 hexaminós que desarrollan el cubo), sino el desarrollo de esa competencia en argumentación, aprender sobre las propiedades del cubo como cuerpo espacial, su representación en dos dimensiones como desarrollo plano, etc.

Atención a las diferencias individuales:

Como ya se ha nombrado, la actividad posibilita que el alumnado pueda llegar a diferentes grados de profundidad, pueda utilizar el material manipulable en la medida que lo necesite, se puedan utilizar diferentes estrategias o criterios de organización sistemática y de representación. El andamiaje de la actividad tiene lugar durante toda la actividad: reconduciendo con buenas preguntas (no se trata de dar respuestas); ayudando al alumnado a confiar en sus propias capacidades; gestionando el error replanteando la situación, no asociándolo a fracaso; facilitando la verbalización del proceso, dando tiempo y confianza.

Recomendaciones para la evaluación formativa:

Los diferentes niveles de profundización que ofrece la actividad pueden servir para recoger evidencias de aprendizaje (ver ejemplos en las orientaciones para la evaluación formativa) con las que informar al alumnado para facilitar su desarrollo, y adaptar la actividad en el momento o posteriores diseños didácticos. Dependiendo de si se realiza en segundo o tercer ciclo se pueden ajustar estos indicadores atendiendo a los saberes imprescindibles del curso en cuestión.

- Nivel 1: Interviene, únicamente, a iniciativa del maestro o de la maestra y de forma breve. Hace representaciones poco eficientes en relación con la situación.
- Nivel 2: Verbaliza la estrategia usada para llevar a cabo la tarea y explica el proceso seguido. Rehace el proceso si la estrategia no le funciona o utiliza material. Relaciona figuras planas con figuras del espacio, utilizando el material manipulable. Hace descripciones orales completas de los procesos visuales llevados a cabo. Hace representaciones aleatorias.

- Nivel 3: Hace representaciones sistemáticas. Elige la estrategia más eficaz. Encuentra errores en los razonamientos de los otros. Relaciona figuras planas con figuras del espacio, sin necesidad del material manipulable. Interviene por iniciativa propia, sugiere problemas.

V. Referencias

Albarracín, L., Lorente, C., Lopera, A., Pérez, H. y Gorgorió, N. (2015). Problemas de estimación de grandes cantidades en las aulas de Educación Primaria. *Épsilon, 32*(1), 19-34.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.

Arnal-Bailera, A., y Gasca, B. (2018). Actividades con el ajedrez para trabajar la argumentación y la resolución de problemas en matemáticas en Educación Primaria. *Números, 99*, 71-84.

Arnal Bailera, A., y Vera Sáez-Benito, D.M. (2021). Enseñanza de herramientas de combinatoria a través de actividades basadas en el ajedrez en Educación Primaria. Un estudio de caso. *REIDOCREA, 10*(7), 1-18.

Anghileri, J. (2006). *Teaching number sense* (2nd ed). Continuum.

Arce, M. (2018). El cuaderno de matemáticas: un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido. *La Gaceta de la RSME, 21*(2), 367–387.

Attard, C. (2014). I don't like it, I don't love it, but I do it and I don't mind: Introducing a framework for engagement with mathematics. *Curriculum Perspectives, 34*(3), 1–14.

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Johnson, S., Perez, L. y Spangler, D. A. (2020). *Pre-K-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II)* (2nd edition). American Statistical Association.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno*, 25, 45–58.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J. Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability. ICME-13. Topical Survey series*. Springer.

Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *Uno, 18*, 9-19.

Blanco, L. J., Cárdenas, J. A. y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de matemáticas en la formación de matemáticas inicial de profesores de primaria*. Universidad de Extremadura.

Boaler, J. y Sengupta-Irving, T. (2012). Gender Equity and Mathematics Education. En J. Banks (Ed.), *Encyclopedia of Diversity in Education*. SAGE Publications, Inc.

Brown, L. y Coles, A. (2013). On doing the same problem – first lessons and relentless consistency. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22)* (pp. 617–626). Oxford, UK.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early Algebraization*. Springer.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1991). *El problema de la medida*. Síntesis.

Chamorro, C. (Ed.). (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Pearson.

De Bellis, V. A. y Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 131-147.

English, L. D. y Gainsburg, J. (2015), Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition* (pp. 313-335), Routledge, Nueva York.

csv: BOA20220727001

Escolano, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: Un estudio desde los modelos de medida y cociente*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Esteban, M. A. (2019). Jornadas de la FESPM sobre Materiales para el aula de matemáticas en Primaria. *Entorno Abierto, 29*, 2-4.

Forgasz, H. y Rivera, F. (Eds.). (2012). T*owards equity in mathematics: Gender, culture, and diversity*. Springer.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gairín, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar, 17*, 105-118.

Garfield, J. B. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer.

Godino, J. D. (Coord.) (2003). *Proyecto Edumat-Maestros: Matemáticas y su Didáctica para Maestros*. Universidad de Granada. Disponible en https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Síntesis.

Godino, J. D. y Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 49–66). SEIEM.

Gomez-Chacón, I. M. (2000a). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.

Gomez-Chacón, I. M. (2000b). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 43*(2), 149–168.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 32*, 55–70.

Gutierrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the van Hiele Levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237–251.

Guzmán, M. D. (2006). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Madrid: Pirámide.

Jameson, E. (2016). *Use of Money as a Decimal Representation: A Review*. University of Cambridge. Disponible en https://www.cambridgemaths.org/Images/research-3-money-and-decimals-full.pdf

Howse, T. D. y Howse, M. E. (2014). Linking the Van Hiele Theory to Instruction. *Teaching Children Mathematics, 21*(5), 304–313.

Kaput, J. J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2007). *Algebra in the early grades*. Routledge.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139–151.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers. An integration of research* (pp. 131-156). Lawrens Publishers.

Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M. y Paparistodemou, E. (Eds.). (2018). *Statistics in Early Childhood and Primary Education: Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking*. Springer.

Lerman, S. (2014). *Encyclopedia Of Mathematics*. Springer.

Liljedahl, P. (2021). *Building Thinking Classrooms*. Corwin.

csv: BOA20220727001

Macho Stadler, M., Padrón Fernández, E., Calaza Díaz, L., Casanellas Rius, M., Conde Amboage, M., Lorenzo García, E., & Vázquez Abal, M. E. (2020). *Igualdad de género en el ámbito de las Matemáticas*. Libro Blanco de Las Matemáticas, 375–420.

Malloy, C. E. (1999). Perimeter and area through the van Hiele model. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(2), 87-90.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-598). Macmillan.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.

Nunes, T., Desli, D., & Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research, 39*, 651-675.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. *REDIMAT, 4*(2), 106.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis.

Shield, M., & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 183-199.

Shute, V. J., Sun, C. y Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review, 22*, 142-158.

Sierra Santasusana, T. (2011). *Hablando de matemáticas para aprender*. Asociación de Maestros Rosa Sensat.

Sowder, J. T. (1992). Making Sense of Numbers in School Mathematics. En G. Leinhardt, R. Putman y Hattrup, R. A., *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1–51). Lawrence Erlbaum Associates.

Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. En A. J. Bishop, K. Clements, Christine Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 411-434). Kluwer Academic Publishers.

Trinchero, R. y Sala, G. (2016). Chess training and mathematical problem-solving: The role of teaching heuristics in transfer of learning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(3), 655-668.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Kluwer.

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *ZDM, 83*(1), 20-25.

Watson, A. y Ohtani, M. (Eds.) (2015) *Task Design In Mathematics Education*. Springer.

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L. y Wilensky, U. (2016). Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. *Journal of Science Education and Technology, 25*(1), 127-147.

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 33-35.

Wright, P. (2017). Critical relationships between teachers and learners of school mathematics. *Pedagogy, Culture & Society, 25*(4), 515-530.

Yadav, A. y Berthelsen, U. D. (Eds.). (2021). *Computational Thinking in Education: A Pedagogical Perspective.* Routledge.