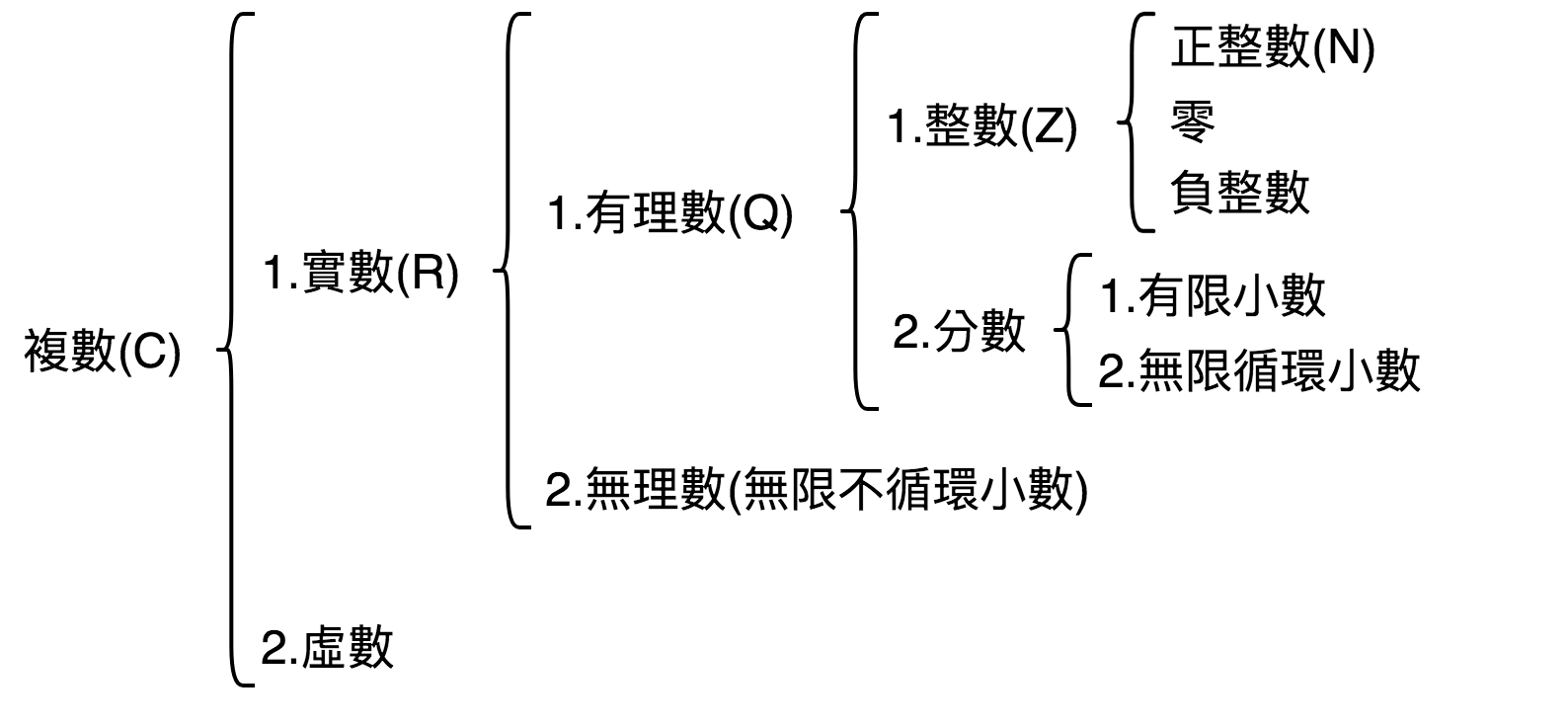
* 1. 整數﷽﷽﷽﷽﷽﷽﷽﷽﷽﷽﷽﷽﷽數與數線
     1. 前言

1. 數系



無理數

1. 函數值

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

1. 特定值

e = 2.718285...

=3.141592...

1. 實數系的幾何模型－數線

取一條直線，設某一定點為O(原點)，約定其左右為正區，左側為負區，並取適當長為單位長。

則：每一個實數均可在數線上對應唯一一個點，愈大的數所對應的點在愈右。

反之，數線上每一點都對應唯一一個實數。

* 畫法

1. 整數
2. 有理數
3. 無理數
4. 數系的各種性質

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 性 質 | | N | Z | Q | R |
| 運算律 | 加法交換律 | ( r + s = s + r ) | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 乘法交換律 | ( rs = sr ) | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 加法結合律 | ( r + s) + t = r + ( s + t ) | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 乘法結合律 | ( r・s )・t = r・( s・t ) | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 分配律 | r (s + t) = r・s + r・t | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 指數律 | 1. = | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 封閉性 | a + b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| a – b | ✗ | ✓ | ✓ | ✓ |
| a・b | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
|  | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ |
| 次序性質與運算律 | 三一律 | “ a > b，a = b，a < b ”  三式中洽有一式成立 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 遞移律 | 若 a > b且 b > c  則 a > c | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 加法律 | 若 r > s  則 r + t > s + t | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 乘法律 | 若 r > s，則：   1. t > 0時，rt > st 2. t < 0時，rt < st | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 數線上的分佈 | 可數性 | 在一封閉範圍內  數的個數可數 | ✓ | ✓ | ✓ | ✗ |
| 分散性 | m、n為同一數系m  則｜m – n｜恆成立 | ✓ | ✓ | ✗ | ✗ |
| 稠密性  (分點公式) | m、n為同一數系m  則在m、n之間必存在與m、n相同數系的數s恆成立 | ✗ | ✗ | ✓ | ✓ |

說例：利用尺規作圖，在數線上哪些點我們“無法“求得？

(1) 　(2) 　　(3) 　(4) 　　(5)

* + 1. 有理數

整數的特性

1. 循環
2. 可分解成另2整數的乘積(a=bc)
3. 具可數性
4. 定義

已知：二整數m、n，n

若：存在一數 a =

則：稱a為有理數

其中：若m、n互質時，則稱為最簡分數

1. 有理數與小數的關係

已知：a為一有理數

若：將a化成十進位的小數

則：a必為 1. 整數

2. 有限小數

3. 無窮循環小數

　 比如：(1) (2) (3)

說例1：試將下列循環小數化成有理數

(1) 0. (2) 0. (3) 0. (4)1.2

說例2：設f(n)表化成小數時，小數點後第n位數字，求f(200)＝？

1. 有理數的稠密性
2. 已知：a，b Q，a < b

　則：必可在a、b之間找到一有理數c

比如：試在與 之間找到一個有理數 =？

1. 有理數稠密性的應用－內分點公式

已知：a，b Q，a < b且a、b分別在數線上對應二點A、B

　若：在實數線上存在一點P在上，滿足：＝m：n，m，nQ

　則：P所對應之數值x為 Q

　pf：

說例：已知a < b，試在數線上表出下列各點之位置

1. 先看分母(找等份)
2. 再看分子比例

1.

2.

3.

4.

例 1.設為一既約分式，其分子、分母和為70，

將此分數化為小數並四捨五入後為0.6，求此分數？

例2. a為阿拉伯數字且可化為有限小數，則a=？

例3.n且10000 < n < 20000，若n之末尾至少有兩個”0”，且 為有限小數，

求n=？

例4. 設a、b為實數且a < b，令甲=，乙=，丙=，

　　 則甲、乙、丙之大小順序為

1. 甲 > 乙 > 丙 (2)乙 > 甲 > 丙 (3)乙 > 丙 > 甲

(4)丙 > 甲 > 乙 (5)丙 > 乙 > 甲

例5. 設a、b是有理數，且a < b，則下列何者成立？

(1) a < < b (2) a < < < b

(3) a < < < b (4) a < < < b

* + 1. 實數
       1. 定義

已知：一數線

　若：數線上每一個點都對應唯一一個數值

　則：稱這些所有的數值為實數

　即：數線上找得到的數就是實數

其中：時數可成二部分：(1)有理數 (2)無理數

* + - 1. 無理數()

已知：一實數x

　若：x無法化成 ，n，m的表示法

則稱：x為無理數

其中：x必為無限不循環小數

比如：常見的無理數有 (1) ，

　　　　　　　　 (3) log2，log3，⋯⋯

　　　　　　　　 (4) ，，⋯⋯

3. 無理數與有理數的混合計算

1. 有理數 + 有理數：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. 有理數 有理數：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
3. 有理數 + 無理數：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
4. 有理數 無理數：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
5. 無理數 + 無理數：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
6. 無理數 無理數：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

※ 結論：

1. a0，若與均為有理數，試證：a為有理數

例2. 下列敘述何者正確？

1. 若a，b，c Z，ac = bc，則a = b
2. 若a，b，c Z，a < b，則ac < bc
3. 若a Q，b為無理數，則a + b，ab均為無理數
4. 若a，b均為無理數，則a + b，ab均為無理數
5. 若a + b、b + c、c + a均為有理數，則a，b，c Q

例3. 我們知道：=6，並且 < < 。

　　 試問：比較接近與中的哪一個數？

例4. 設a=+b=+，試比較a，b之大小。

例5. (1) 試證為無理數。

1. 由上題之結論，試證為無理數。
2. 承第(1)題，試證為無理數。
3. 根式分母有理化

兩方根之積若為有理數，則稱此二方根互為有理化因式。

在方根的運算中，利用有理化因是將分母化為有理數，這個過程為有理化分母。

常見的有理因式：

(1) \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(2) \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(3) (a + )\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(4) (+)\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(5) ()( )\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(6) ()( )\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

說例1. 化簡下列各式：

(1) (2) (3)

說例2.化簡

說例3. 設f(x)=，求？

1. 根式的乘除與雙重根號化簡

已知：a>0，b>0

　則：(1)

　　　(2)

　　　　 (3)

　　　　 (4)

pf：

　(3)

　　　　　　　　　 = =

　(4)

　　　　　　　　　 = =｜｜

說例：試化簡下列各數

(1)？ 　　　(2)？ (3)？

　　　(4) )？ (5) )？

1. 共軛無理數
2. 已知：a，b，c Q且 Q

　則：稱與互為共軛無理數

其中：1. ()+()=\_\_\_\_\_\_\_\_\_

　　　2. ()=\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. 已知：a，b，p，q Q且Q

　若：

　則：a=p，b=q

pf：設bq

　　(b)

　　 為有理數，與已知不合

　　　　　故

說例：設a，b Q，，求？

1. 化簡下列各式：

(1) (2) (3)

1. 化簡下列各式：

(1) (2) (3) (4)

例3. 之整數部分為a，小數部分為b，則？

例4. ，a Z，0<b<1，求 =？

例5. 設x，y Q，且，

　　 試求數對(x，y)=？

例6. 設正實數a之小數部分為b，若，求=？

1. 算幾不等式(算術平均幾何平均)

已知：

　則：

其中：“=”成立時，a=b

pf：【法I：減減看】

)

　　　　　　　)

且“=”成立時，即a=b

【法II：畫圖】

令，

=弦半長

弦半長 半徑=

“=”成立時表 為半徑，即P在圓心

說例：已知x、y均為正數

1. 若，求xy之最大值
2. 若xy=36，求之最小值

* 結論：

1. 何時利用來求極值

(2)如何利用來求極值