Maiez.

Alexander Ziwet

KOLLEKTIVMASSLEHRE

VON

GUSTAV THEODOR FECHNER
(1801–1887)

IM AUFTRAGE

DER

KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN

VON

GOTTL. FRIEDR. LIPPS

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1897.

Prof. Alex. Ziwet
3-1-1923

Vorbemerkung des Herausgebers.

Das Manuskript der Kollektivmaßlehre fand sich nur teilweise vollendet im Nachlasse Fechner's vor. Es musste daher einesteils das Vorhandene geordnet, anderenteils das Fehlende ergänzt werden. Um beide Aufgaben auszuführen, wurde ein Plan für den Aufbau der Kollektivmaßlehre entworfen, der aus der gruppenweisen Zusammenfassung der Kapitel in der Inhaltsangabe (S. IX) zu ersehen ist. Auf Grund desselben ergab sich die Anordnung des Stoffes, der übrigens für die vier ersten Kapitel in fest geordneter Reihenfolge vorlag, zugleich mit der Feststellung der Lücken in eindeutiger Bestimmtheit.

Bei Ausfüllung der Lücken war die Absicht maßgebend, dem Werke im Sinne seines Verfassers eine solche Vollendung zu geben, dass es keine Fragmente, sondern ein in sich geschlossenes Ganzes darstelle. Darum wurden zunächst die vorhandenen Kapitel, soweit sie lückenhaft geblieben waren, ergänzt. Da ferner einzelne Kapitel vollständig fehlten, so musste, unter Beschränkung auf die notwendigsten Ausführungen, ein Ersatz für dieselben gegeben werden. Jede Zuthat aber, selbst wenn sie bloß in der Beifügung von Zitaten bestand, wurde in eckige Klammern gesetzt und so kenntlich gemacht.

Damit hat nun allerdings das Werk keineswegs diejenige Vollendung erhalten, die ihm sein Verfasser gegeben haben würde. Insbesondere hätte der zweite Teil durch die Ausführungen, die in der Absicht Fechner's lagen, wesentlich gewonnen. Es war jedoch nicht thunlich, die ergänzenden Untersuchungen, die sich auf neu gesammeltes Untersuchungsmaterial stützen mussten, noch weiter auszuführen, sollte nicht die schon lange verzögerte Drucklegung des Werkes noch weiter hinausgeschoben werden. Vielmehr war ich bemüht, nachdem die Manuskripte FECHNER's im Frühjahre 1895 mir zugestellt worden waren, die Bearbeitung derselben zu einem baldigen Abschlusse zu bringen.

Noch möchte ich bemerken, dass die Rechnungen, die in großer Ausdehnung teils zur Bewährung, teils zur Begründung der Theorie dienen, durchweg geprüft oder von neuem ausgeführt wurden. Der Vorwurf etwaiger Versehen muss daher mich allein treffen.

Straßburg i/Elsass, im Januar 1897.

Dr. **G. F. Lipps.**

Vorwort.

Vorliegendes Werk ist schon seit vielen Jahren von mir angelegt, Material dazu gesammelt und in der Ausarbeitung desselben vorgegangen, diese aber vielfach durch andere Arbeiten unterbrochen, längere Zeit ganz beiseite gelegt und somit der Abschluss des Werkes bisher verzögert worden. Ihn länger zu verzögern, möchte bei meinem Alter nicht rätlich sein, wenn das Werk überhaupt erscheinen soll; auch glaube ich wohl, dass es sich nach wiederholtem Zurückkommen darauf endlich getrauen darf, zu erscheinen, zwar nicht als ein vollkommenes Werk, aber als Unterlage für einen weiteren Ausbau der hier behandelten Lehre. Bestimmter spricht sich das folgende Einleitungskapitel über die Aufgabe der Lehre aus; und so mögen hier nur noch folgende allgemeine Bemerkungen darüber Platz finden.

Mit dem neuen Namen, unter dem die Lehre hier auftritt, gebe ich sie doch nicht als eine ganz neue Lehre; nur dass der bisherige Stand ihrer Entwicklung das Bedürfnis noch nicht nahe legte, sie überhaupt unter einem besonderen Namen für sich aufzustellen. Überall spezialisiert sich ja die Wissenschaft im Wege ihrer wachsenden Entwicklung und verlangt demgemäß trennende Bezeichnungen ihrer verschiedenen Gebiete. Nun dürfte das Allgemeinste, Interessanteste, Verdienstlichste, was von unserer Lehre bisher vorlag, in QUETELET's »Lettres sur la théorie des probabilités« (1846) und seiner »Physique sociale« (1869) zu finden sein, und wenn man will, kann man in ihm ebenso den Vater der Kollektivmaßlehre, wie in E. H. WEBER den der Psychophysik sehen; doch wird man sich aus dem Verfolg dieses Werkes überzeugen können, wieviel Anlass doch war, nicht nur wesentlich erweiternd, sondern auch berichtigend über ihn hinauszugehen.

In dieser Beziehung mache ich von einer Seite als Hauptfrucht, von anderer als Hauptwurzel der ganzen folgenden Untersuchung die sich gegenseits kontrollierende mathematische Begründung und empirische Bewährung einer Verallgemeinerung des Gauss'schen Gesetzes zufälliger Abweichungen geltend, wodurch die Beschränkung desselben auf symmetrische Wahrscheinlichkeit und verhältnismäßige Kleinheit der beiderseitigen Abweichungen vom arithmetischen Mittel gehoben wird, und bisher unbekannte gesetzliche Beziehungen auftreten, deren wichtigste man § 33 zusammengestellt findet. In der That ist in dieser Verallgemeinerung der allgemeinste Regulator aller in der Kollektivmaßlehre zur Sprache kommenden Verhältnisse ebenso gegeben, als im einfachen Gauss'schen Gesetze der Regulator aller physikalischen und astronomischen Genauigkeitsbestimmungen, und dürfte sich selbst noch fragen, ob nicht prinzipiell auch hier auf das allgemeinere Gesetz zu rekurrieren wäre, worüber man die Bemerkungen in § 8 nicht unberücksichtigt lassen möge.

Insofern die Kollektivmaßlehre auf einer Verbindung von Beobachtung und Rechnung in gegenseitiger Beziehung beruht, darf sie sich zu den exakten Lehren rechnen. Die Lehren, die auf eine solche Bezeichnung Anspruch haben, lassen aber überhaupt einen sehr verschiedenen Grad der Sicherheit ihrer Resultate zu. Obenan stehen Mechanik, Astronomie, Physik; die Physiologie steht wegen der Schwierigkeiten, welche die Komplikation und Variabilität ihrer Objekte entgegenstellen, weit dahinter zurück; noch weiter, wegen noch größerer Schwierigkeiten in dieser Hinsicht, die Psychophysik. Die Kollektivmaßlehre teilt Schwierigkeiten dieser Art, ohne gleichen prinzipiellen Schwierigkeiten zu unterliegen als die Psychophysik, überbietet diese an praktischem Interesse, indes sie ihr an philosophischem Interesse weit nachsteht. Doch fehlt es auch der Kollektivmaßlehre nicht ganz an einem solchen, sofern die darein eingehende Unterordnung des Zufalls unter allgemeinere Gesetze hier in einem Gebiete und in einer Weise zur Geltung kommt, welche bisher der Betrachtung nicht unterlegen haben.

In betreff der Form und Weite so mancher Ausführungen wird zu berücksichtigen sein, dass das Werk nicht sowohl für Fachmathematiker bestimmt ist, denen die hier in Rücksicht kommenden fundamentalen Punkte schon geläufig sind, als für solche, denen es um Kenntnisnahme und Anwendung der Lehre zu thun ist, ohne dass sie schon im Besitz solcher Vorkenntnisse sind.

Hiernächst möchte ich zur Förderung unserer Lehre noch einen Wunsch an Rechner vom Fach richten. In den bekannten Tabellen, welche das Gauss'sche Wahrscheinlichkeitsintegral der zufälligen Abweichungen vom Mittel (Beobachtungsfehler) gewöhnlich als

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-tt}\, dt$$

ausgedrückt darstellen, ist das Argument t bloß bis auf zwei Dezimalen ausgeführt, was für den beschränkten Gebrauch, den Physiker und Astronomen davon zu machen haben, unter Zuziehung einer Interpolation mit ersten und zweiten Differenzen ausreicht; aber für den weit ausgedehnteren Gebrauch, der in der Kollektivmaßlehre davon zu machen ist, auf dasselbe herauskommt, als wenn man für die vielen Rechnungen, die mittelst Logarithmen zu führen sind, das Zahlenargument, wozu die Logarithmen gehören, bloß auf zwei oder drei Ziffern reduzieren und Zwischenbestimmungen nur der Interpolation anheimgeben wollte. Also wäre erwünscht, wenn im Interesse unserer Lehre, was übrigens von der psychophysischen Methode der richtigen und falschen Fälle geteilt wird, Tabellen vorlägen, worin t mindestens auf vier Dezimalen ausgeführt ist[1]), um Interpolationen teils zu ersparen, teils zu erleichtern, und jedenfalls habe ich selbst solche Tabellen bei Ausführung dieser Arbeit schmerzlich vermisst. Natürlich würde die Ausdehnung der Tabellen damit

1) [Eine Ausführung dieser Tabelle auf drei Dezimalen von t, mit Beschränkung des Integralwertes auf vier resp. fünf Dezimalen, findet man im Anhang § 183.]

wachsen, aber der Vorteil schien mir in stärkerem Verhältnisse damit zu wachsen. Und sollte es denn kein astronomisches oder statistisches Institut geben, was über mechanische Rechenkräfte zu verfügen hat, das sich der Sache annähme! Auch ließe sich wohl eine Preisaufgabe darauf stellen.

Inhaltsangabe.

Erster Teil.

Vorläufige Darlegungen.

		Seite
I.	Einleitung. § 1, 2	3— 6
II.	Vorläufige Übersicht der wesentlichsten Punkte, welche bei der Untersuchung eines Kollektivgegenstandes in Betracht kommen, und darauf bezügliche Bezeichnungen. § 3—11	7— 26
III.	Vorläufige Übersicht des Untersuchungsmaterials und allgemeinere Bemerkungen dazu. § 12	27— 30
IV.	Requisiten; Abnormitäten. § 13—23	31— 54
V.	Gauss'sches Gesetz der zufälligen Abweichungen (Beobachtungsfehler) und dessen Verallgemeinerungen. § 24—37	55— 83
VI.	Charakteristik der Kollektivgegenstände durch ihre Bestimmungsstücke oder sog. Elemente. § 38—46	84— 98

Die rechnerische Behandlung der Kollektivgegenstände.

VII.	Primäre Verteilungstafeln. § 47—52	99—110
VIII.	Reduzierte Verteilungstafeln. § 53—67	111—140
IX.	Bestimmung von Σa, $\Sigma a_{,}$, $\Sigma a'$, $m_{,}$, m', $\Sigma \Theta_{,}$, $\Sigma \Theta'$. § 68—75	141—159
X.	Zusammenstellung und Zusammenhang der Haupteigenschaften der drei Hauptwerte A, C, D; ferner R, T, F. § 76—86	160—181
XI.	Der dichteste Wert D. § 87—92	182—194

Die Asymmetrie der Kollektivgegenstände.

XII.	Gründe dafür, dass wesentliche Asymmetrie der Abweichungen bezüglich des arithmetischen Mittels und Gültigkeit des asymmetrischen Verteilungsgesetzes bezüglich des dichtesten Wertes D im Sinne des verallgemeinerten Gauss'schen Gesetzes (Kap. V) der allgemeine Fall sei. § 93—95	195—202
XIII.	Mathematische Verhältnisse der Verbindung von wesentlicher und unwesentlicher Asymmetrie. § 96	203—205

Seite

XIV. Formeln für den mittleren und wahrscheinlichen Wert des von rein zufälliger Asymmetrie abhängigen Unterschiedes u. § 97—101 . . . . . 206—214

XV. Wahrscheinlichkeitsbestimmungen für den von rein zufälliger Asymmetrie abhängigen Unterschied u beim Ausgange vom wahren Mittel. § 102—111 . . . . . 215—247

XVI. Wahrscheinlichkeitsbestimmungen für den von rein zufälliger Asymmetrie abhängigen Unterschied v beim Ausgange vom falschen Mittel. § 112—117 . . . . . 248—270

Die Verteilungsgesetze der Kollektivgegenstände nach arithmetischem Prinzip.

XVII. Das einfache und das zweiseitige Gauss'sche Gesetz. § 118 bis 122 . . . . . 271—282

XVIII. Das Summengesetz und das Supplementarverfahren. § 123 bis 128 . . . . . 283—293

XIX. Die Asymmetriegesetze. § 129—136 . . . . . 294—320

XX. Die Extremgesetze. § 137—142 . . . . . 321—338

Das logarithmische Verteilungsgesetz.

XXI. Die logarithmische Behandlung der Kollektivgegenstände. § 143 bis 146 . . . . . 339—351

XXII. Kollektive Behandlung von Verhältnissen zwischen Dimensionen. Mittlere Verhältnisse. § 147—151 . . . . . 352—364

Anhangskapitel.

XXIII. Abhängigkeitsverhältnisse. § 152—155 . . . . . 365—375

Zweiter Teil.

Specielle Untersuchungen.

XXIV. Über den räumlichen und zeitlichen Zusammenhang der Variationen der Rekrutengröße. § 156—163 . . . . . 379—402

XXV. Gliederung und Asymmetrie des Roggens. § 164—169 . . . . . 403—417

XXVI. Die Dimensionen der Galleriegemälde. § 170—175 . . . . . 418—435

XXVII. Kollektivgegenstände aus dem Gebiete der Meteorologie. § 176—179 . . . . . 436—455

XXVIII. Die Asymmetrie der Fehlerreihen. § 180—182 . . . . . 456—466

Anhang. Die t-Tabelle. § 183 . . . . . 467—476

Register . . . . . 477—481

Verzeichnis der Tabellen . . . . . 482—483

Erster Teil.

Allgemeine Untersuchungen.

I. Einleitung.

§ 1. Unter einem Kollektivgegenstande (kurz K.-G.) verstehe ich einen Gegenstand, der aus unbestimmt vielen, nach Zufall variierenden, Exemplaren besteht, die durch einen Art- oder Gattungsbegriff zusammengehalten werden.

So bildet der Mensch einen Kollektivgegenstand im weiteren Sinne, der Mensch von bestimmtem Geschlechte, bestimmtem Alter und bestimmter Rasse einen solchen im engeren Sinne, wie überhaupt das, was man den Umfang eines K.-G. nennen kann, sich nach der Ausdehnung des Gattungs- oder Artbegriffs, unter den er tritt, ändert.

Die Exemplare eines K.-G. können räumlich oder zeitlich verschieden sein und hiernach einen räumlichen oder zeitlichen K.-G. bilden. So können die Rekruten eines Landes oder Ähren eines Kornfeldes als Exemplare eines räumlichen K.-G. gelten. So giebt die (mittlere) Temperatur des 1. Januar, an einem gegebenen Orte durch eine Anzahl von Jahren verfolgt, ebenso viele Exemplare eines zeitlichen K.-G. Statt des 1. Januar kann man jeden anderen Jahrestag, statt eines bestimmten Tages einen bestimmten Monat, statt der Temperatur den Barometerstand setzen u. s. w. und wird damit Exemplare eben so vieler zeitlicher K.-G. erhalten.

Anthropologie, Zoologie, Botanik haben es überhaupt wesentlich mit K.-G. zu thun, da es sich darin nicht um eine Charakteristik einzelner Exemplare, sondern nur um das handeln kann, was einer Gesamtheit derselben zukommt, die aus dem oder jenem Gesichtspunkte als Gattung oder Art in größerer oder geringerer Weite zusammengefasst wird. Die Meteorologie bietet nach eben angeführten Beispielen in ihren nicht periodischen Witterungsphänomenen zahlreiche Beispiele davon dar; und selbst in der Artistik lässt sich von solchen sprechen, sofern Bücher, Visitenkarten darunter gehören.

Die Exemplare eines K.-G. nun sind einerseits qualitativ, andererseits quantitativ, d. i. nach Maß und Zahl, bestimmt, und nur um letztere Bestimmtheit handelt es sich in der Kollektivmaßlehre. Ein K.-G. macht in der That hinsichtlich seiner quantitativen Bestimmtheit dieselben Ansprüche als ein einzelner Gegenstand; nur dass in gewisser (freilich nur gewisser) Hinsicht die Teile des einzelnen Gegenstandes durch die Exemplare des K.-G. vertreten werden. Gelte es z. B. Rekruten eines gegebenen Landes, so fragt es sich: wie groß sind die Rekruten im Mittel, wie stark schwanken die einzelnen Maße um ihr Mittel, wie groß sind die größten und kleinsten, wie verhalten sich die Rekrutenmaße nach diesen Bestimmungen in den einzelnen Jahrgängen, wie in verschiedenen Ländern unter einander. Solche und damit zusammenhängende, später zu betrachtende Fragen lassen sich bei jedem K.-G. aufwerfen; und sofern ein räumlicher Gegenstand verschiedene zu unterscheidende Teile und Dimensionen hat, lassen sie sich auf jeden dieser Teile und Dimensionen besonders aufwerfen, und diese sich insofern als besondere K.-G. behandeln, so Schädel, Gehirn, Hände, Füße eines Menschen, Höhe, Gewicht, Volumen des ganzen Menschen oder gegebener Teile des Menschen; aber auch quantitative Verhältnisse werden in Frage kommen, wie denn bei Vergleichung der Menschen verschiedener Rassen die Verhältnisse der mittleren Höhe, Breite, Länge des Schädels ein besonderes Interesse in Anspruch nehmen.

§ 2. Über alle diese Einzelfragen aber erhebt sich eine allgemeinere, die wichtigste, um die es sich überhaupt in dieser Lehre handeln kann und demgemäß im Folgenden handeln wird, die Frage nach dem Gesetze, wie sich die Exemplare eines K.-G. nach Maß und Zahl verteilen. Unter dem Ausdrucke Verteilung aber ist die Bestimmung zu verstehen, wie sich die Zahl der Exemplare eines gegebenen K.-G. mit ihrer Größe ändert. Bei jedem, in einer größeren Zahl von Exemplaren vorhandenen K.-G. kommen die kleinsten und größten Exemplare, kurz Extreme, am seltensten vor, am häufigsten solche von einer gewissen mittleren Größe. Aber giebt es nicht ein allgemeines, auf alle oder wenigstens die meisten K.-G. anwendbares Gesetz der Abhängigkeit der Zahl von der Größe der Exemplare? In der That wird sich ein solches aufstellen lassen, und eine Hauptaufgabe des Folgenden auf seine Feststellung gehen.

Von vornherein freilich kann man bezweifeln, dass bei der außerordentlichen Verschiedenheit der K.-G. gesetzliche Verteilungsverhältnisse in einer gewissen Allgemeinheit dafür überhaupt zu finden sind. Inzwischen, da nach dem Begriffe der K.-G. ein solcher aus nach Zufall variierenden Exemplaren besteht, finden jedenfalls auch die allgemeinen Wahrscheinlichkeitsgesetze des Zufalls — und jeder Mathematiker weiß, dass es solche giebt — darauf Anwendung. In der That werden die Verteilungsverhältnisse der K.-G. allgemein von solchen beherrscht, indes dieselben Wahrscheinlichkeitsgesetze bei physikalischen und astronomischen Maßbestimmungen nur nebensächlich für die Sicherheitsbestimmung der erlangten Mittelmaße in Betracht kommen, hiermit hier eine ganz andere und viel unwesentlichere Rolle spielen als in der Maßlehre der K.-G. Insofern aber der Zufall unter bestimmten, für die verschiedenen K.-G. verschiedenen, äußeren und inneren Bedingungen spielt, lassen sich, durch alle Zufälligkeiten durch, die verschiedenen K.-G. durch charakteristische, aus ihren Verteilungsverhältnissen ableitbare Konstanten unterscheiden. Diese sind es, worin die Bestimmtheit derselben gegen einander ruht; und diese gilt es mit Berücksichtigung der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsgesetze aufzusuchen. Nun hat man schon von jeher in dieser Hinsicht den arithmetischen Mittelwert der Exemplare ins Auge gefasst und Fleiß auf seine Bestimmung bei den verschiedenen K.-G. gewandt, daneben auch wohl noch die Extreme, seltener die mittlere Abweichung vom Mittel berücksichtigt. Aber so wichtig diese Bestimmungsstücke sind und immer bleiben werden, sind sie doch bisher zu einseitig berücksichtigt worden, indes andere, prinzipiell nicht minder wichtige, dabei außer Acht fallen.

Insofern nun die Behandlung der K.-G. nach der Gesamtheit der vorigen Beziehungen überhaupt anderen Gesichtspunkten unterliegt und andere Bestimmungsweisen mitführt, als bei physikalischen und astronomischen Maßnahmen in Rücksicht kommen, kann die

Maßlehre der K.-G., oder sagen wir kurz Kollektivmaßlehre, als eine Lehre ihrer Art besonders aufgestellt und behandelt werden, und wird dies folgends zur Aufgabe gemacht werden.

Da in unseren Begriff der K.-G. der Begriff einer zufälligen Variation der Exemplare eingeht, kann man vorweg eine Definition des Zufalls und Erklärung über sein Wesen wünschen. Der Versuch, eine solche aus philosophischem Gesichtspunkte zu geben, würde aber für die folgende Untersuchung wenig fruchten. Es muss hier genügen, den, für das Folgende zu Grunde gelegten, faktischen Gesichtspunkt von mehr negativem als positivem Charakter dafür anzugeben. Unter einer zufälligen Variation der Exemplare verstehe ich eine solche, welche ebenso unabhängig von einer auf die Größenbestimmung gehenden Willkür, als von einer die Größenverhältnisse dazwischen regelnden Naturgesetzlichkeit ist. Mag die eine oder andere an den Bestimmungen der Gegenstände Anteil haben, so sind doch zufällig nur die davon unabhängigen Veränderungen. Daher kann durch kein Zufallsgesetz bestimmt werden, wie groß dieses oder jenes einzelne Exemplar ist, obwohl, in welchen Größengrenzen sich eine gegebene Zahl derselben mit diesem oder jenem Grade der Wahrscheinlichkeit halten wird.

Damit wird nicht geleugnet, dass es aus allgemeinstem Gesichtspunkte keinen Zufall giebt, indem durch die bestehenden Naturgesetze unter den bestehenden Bedingungen die Größe jedes einzelnen Exemplares mit Notwendigkeit als bestimmt angesehen werden kann. Aber wir sprechen so lange von Zufall, als wir zu einer Ableitung der Einzelbestimmungen aus solchen allgemeinen Gesetzlichkeiten weder aufzusteigen, noch aus den vorliegenden Thatsachen darauf zu schließen im stande sind. Insoweit es der Fall ist, hört der Zufall auf, und hört die Anwendbarkeit der hier vorzuführenden Gesetze auf oder wird dadurch gestört.

II. Vorläufige Übersicht der wesentlichsten Punkte, welche bei der Untersuchung eines K.-G. in Betracht kommen, und darauf bezügliche Bezeichnungen.

§ 3. Die folgende Zusammenstellung wird dienen können, die Ausdehnung und den Charakter der Untersuchungen, mit denen wir uns folgends zu beschäftigen haben, bestimmter übersehen zu lassen, und sich über die meisten der zu brauchenden Bezeichnungen vorweg im Zusammenhange zu orientieren; eine eingehendere Besprechung dieser Punkte aber bleibt den folgenden Kapiteln vorbehalten.

Bei der zufälligen Ordnung, in welcher sich die Exemplare eines K.-G. darzubieten pflegen, würde sich weder eine Übersicht über die Verhältnisse derselben nach Maß und Zahl gewinnen lassen, noch eine methodische Bearbeitung derselben möglich sein, wenn man ihre, allgemein mit a zu bezeichnenden Maße in derselben zufälligen Ordnung, in der man sie erhalten und in einer sog. Urliste verzeichnet hat, belassen wollte; also sind sie vor allem ihrer Größe nach zu ordnen und so geordnet in einer Tabelle, sog. Verteilungstafel, aufzuführen. Hat man nun keine große Zahl von Exemplaren eines Gegenstandes vorliegen, so wird jedes a oder werden doch die meisten a nur einmal in der Tafel erscheinen, und werden die Größendistanzen zwischen den aufeinanderfolgenden a sehr unregelmäßig wechseln; bei vielzahligen Gegenständen aber, d. h. von welchen viele Exemplare vorliegen, wie sie für das Folgende hauptsächlich vorauszusetzen sind, werden, wenn nicht alle doch viele oder die meisten a, welche der Maßstab und die Schätzung hergiebt, mehr oder weniger oft wiederholt vorkommen, und dann richtet man die Verteilungstafel so ein, dass man in einer Kolumne der a jedes a zwar nur einmal aufführt, aber in einer beigegebenen Kolumne der z die Zahl z angiebt, wie oft es vorkommt. Die Gesamtzahl der a, welche in eine Verteilungstafel eingehen, stimmt natürlich mit der Summe Σz, welche man durch Zusammenzählen aller z der Tafel enthält, überein und wird von mir mit m bezeichnet.

Die Aufstellung einer solchen Tafel ist so zu sagen der erste Schritt, den man bei Bearbeitung eines vielzahligen K.-G. von der Urliste aus zu thun hat.

Ein zweiter Schritt ist dieser: dass man den, mit A zu bezeichnenden, arithmetischen Mittelwert der Einzelmaße und die positiven und negativen Abweichungen davon bestimmt, deren Zahl z natürlich mit der der abweichenden a übereinstimmt.

Hierzu aber können als Ausgangspunkt der Abweichungen statt A auch manche andere Werte, welche mit mathematischer Bestimmtheit aus der Verteilungstafel ableitbar sind, dienen; und durch jede andere Wahl in dieser Hinsicht kommen neue Beziehungen zum Vorschein, von denen später zu sprechen sein wird. Allgemein nun nenne ich Werte, die zur Entwickelung solcher Beziehungen als Ausgangswerte der Abweichungen gebraucht werden, **Hauptwerte** und bezeichne sie mit H, wovon also A nur ein besonderer Fall ist, auf dessen Berücksichtigung man sich bisher in der Behandlung von K.-G. allein beschränkt hat, was aber eine willkürliche Einschränkung der Kollektivmaßlehre mitführt, wie leicht aus später folgenden Bemerkungen hervorgehen wird. Allgemein nenne ich Abweichungen, von welchem Hauptwerte sie auch abhängig gemacht werden mögen, **Kollektivabweichungen**.

§ 4. Leicht nun überzeugt man sich von folgendem Umstande. Ein je größeres m in die Verteilungstafel eines K.-G. eingeht, um so regelmäßiger wird der Gang der zu den a zugehörigen z, und um so bestimmter stellen sich die Gesetzlichkeiten heraus, von denen wir zu sprechen haben werden. Der ideale Fall wäre der, dass man ein unendliches m hätte, wo man einen ganz regelmäßigen Gang der z und eine ganz genaue Erfüllung der betreffenden Gesetzlichkeiten zu erwarten haben würde, wonach man auch ideale Verhältnisse und Gesetzlichkeiten, wie sie eine ideale Tafel hergeben würde, und empirische, welche in mehr oder weniger großen Annäherungen daran bestehen, zu unterscheiden hat.

Alle Wahrscheinlichkeitsgesetze des Zufalls überhaupt, und die Verteilungsgesetze der K.-G. sind solche, haben das gemein, dass ihre Befolgung um so sicherer zu erwarten ist, auf eine je größere Zahl von Fällen sie sich beziehen, eine sozusagen ideale Gültigkeit aber nur für den Fall einer unendlichen Zahl von Fällen besitzen, was nicht ausschließt, dass schon bei einer empirisch wohl zu beschaffenden Zahl von Fällen die Bestätigung der betreffenden Gesetze in großer Annäherung stattfindet. Insofern man nun jedenfalls in Wirklichkeit nur mit K.-G. aus einer endlichen Zahl von Exemplaren zu thun hat, welche ebenso viele Fälle repräsentieren, bezeichne ich die Abweichungen, welche wegen Endlichkeit der Zahl der Exemplare von den ideal gesetzlichen Bestimmungen stattfinden, als unwesentliche, und, insofern sie gleichgiltig nach der einen und anderen Seite gehen, als durch unausgeglichene Zufälligkeiten hervorgerufen, indes ich die, für die Voraussetzung einer unendlichen Zahl von Fällen, unseren Falles von Exemplaren, geltenden Bestimmungen als wesentliche oder normale bezeichne. Das allgemeine Merkmal der Unwesentlichkeit einer Bestimmung besteht darin, dass sie um so mehr verschwindet, je mehr man die Zahl der Fälle, resp. Exemplare, unter Einhaltung der Bedingungen, welche den Begriff des K.-G. bestimmen, vergrößert, so dass man voraussetzen kann, sie würde bei unendlicher Zahl der Fälle ganz wegfallen; wonach für Untersuchung der Gesetze in unserem Falle überhaupt nur vielzahlige Gegenstände geeignet sind.

Selbst bei kleinem m aber beweist sich die Unwesentlichkeit einer Bestimmung dadurch, dass bei Wiederholung der Bestimmung mit demselben kleinen m aus immer neuen Exemplaren desselben Gegenstandes Größe und Richtung der Bestimmung unbestimmt wechselt, wogegen bei Wesentlichkeit derselben sich im Mittel einer Mehrheit von Wiederholungen ein bestimmtes Größenresultat und eine bestimmte Richtung desselben um so fester herausstellt, je größer die Zahl der Wiederholungen und das m jeder einzelnen ist.

Wir sprechen von einer symmetrischen Verteilung der Werte bezüglich eines gegebenen Hauptwertes H, wenn jeder Abweichung eines a ins Positive von H die gleich große negative Abweichung eines anderen a von H entspricht, so dass gleich stark nach beiden Seiten von H abweichenden a gleich große z zugehören. Bei einem K.-G. aus einer endlichen Zahl von Exemplaren kann man wegen der nicht ausgeglichenen Zufälligkeiten überhaupt nicht erwarten, bezüglich irgend eines Hauptwertes eine vollständig symmetrische Verteilung zu finden, und selbstverständlich kann eine symmetrische Verteilung nicht bezüglich mehrerer Hauptwerte zugleich bestehen; es ist aber ein wichtiger Gegenstand der Untersuchung, ob sich nicht ein Hauptwert finden läßt, bezüglich dessen sich die Verteilung um so mehr der symmetrischen nähert, je mehr man das m des K.-G. vergrößert, in der Art, dass man bei unendlichem m eine wirklich symmetrische Verteilung als erreicht voraussetzen könnte, in welchem Falle man, da ein unendliches m nicht zu haben ist, doch von einer symmetrischen Wahrscheinlichkeit der Abweichungen sprechen kann.

§ 5. Aber noch aus einem anderen als dem vorigen Gesichtspunkte kann man eine ideale Verteilungstafel von einer empirischen und davon abhängige ideale und empirische Resultate unterscheiden. Bei den Messungen der Exemplare kann man nicht über gewisse Grenzen der Genauigkeit hinausgehen, wie sie die Einteilung des Maßstabes und die Schätzung dazwischen hergiebt. Man kann z. B. noch Millimeter, noch Zehntelmillimeter, noch Hundertelmillimeter aber nicht darüber hinaus unterscheiden. Für den, der nur Millimeter unterscheidet, fließen alle Einzelmaße, die sich in den Grenzen eines Millimeters halten, ununterscheidbar zusammen, und so bezieht er die ganzen z Exemplare, die eigentlich auf ein ganzes Intervall von 1 mm verteilt sind, auf einen einzigen Wert a, welcher die Mitte dieses Intervalls bildet. Sei allgemein i der noch erkennbare Unterschied der Maße, so gehört das z jedes a der empirischen Tafel eigentlich dem ganzen Intervall von der Größe i zwischen $a - \frac{1}{2}i$ und $a + \frac{1}{2}i$ an, wogegen es sich nach der empirischen Tafel so ausnimmt und bei Verwertung derselben zumeist so gefaßt wird, als wenn das darein fallende Maß a selbst z mal vorkäme. Bei idealer,

d. h. bis zur Grenze der Genauigkeit gehender Messung und Schätzung aber würde i auf einen unendlich kleinen Wert herabkommen[1]), die unterschiedenen a der Tafel sich hiermit vermehren, ihre z aber sich entsprechend verkleinern; hiermit die ideale Tafel von der empirischen abweichen.

Wo nun das empirische i sehr klein ist, unterscheiden sich die Resultate der empirischen Tafel, soweit sie die Größe und Verhältnisse der daraus ableitbaren Hauptwerte und Hauptabweichungswerte betreffen, nicht erheblich von denen der idealen; doch bleibt der Unterschied allgemein gesprochen zu berücksichtigen und wird später diese Berücksichtigung da finden, wo er in erheblichen Betracht kommt. Empirische Bestimmungen und Verhältnisse, in denen er nicht erforderlich berücksichtigt ist, sondern es so angesehen wird, als wenn wirklich das z jedes a diesem a ganz zukäme, nenne ich rohe, solche, wo er thunlichst berücksichtigt ist, scharfe.

§ 6. In jedem Falle nun muss man von den Resultaten der empirischen Tafel zu den idealen der idealen Tafel, hiermit von unwesentlichen zu wesentlichen, von rohen zu scharfen aufzusteigen suchen, wozu eine demgemäße Bearbeitung der Verteilungstafeln gehört.

In dieser Hinsicht ist ein Unterschied zwischen primären und reduzierten Tafeln zu machen. Unter primären Tafeln verstehe ich solche, wie sie unmittelbar durch Ordnung der Maße aus der Urliste erhalten werden und hiermit dieselben Erfahrungsdata wie diese, nur eben geordnet, darbieten. Reduzierte Tafeln heiße ich solche, in denen die z für größere Maßintervalle, als in den primären Tafeln unterschieden sind, und zwar für gleich große durch die ganze Tafel zusammengefasst werden, die z dieser größeren Intervalle aber den Mitten derselben, als reduzierten a, beigeschrieben werden, mit dem Vorteile, dadurch einen regelmäßigeren Gang der z in der Tafel und

---

1) Ein unendlich kleiner Wert, hier im Sinne der Infinitesimalrechnung verstanden, ist doch nicht mit Null zu verwechseln, sondern, obwohl unter jede anführbare Größe herabgehend und seiner absoluten Größe nach unbestimmbar, doch rechnungsweise noch nach seinen Verhältnissen zu anderen unendlich kleinen Werten bestimmbar.

eine geeignetere Unterlage für Rechnungen zu erhalten, wenn schon nicht ohne Konflikt mit einem Nachteile wegen Vergrößerung des i, worauf später zurückzukommen. Eingehender ist überhaupt von der Aufstellungsweise und den Verhältnissen der primären und reduzierten Tafeln in den Kapiteln VII und VIII gehandelt, wobei die Möglichkeit verschiedener Reduktionsstufen und Reduktionslagen zur Sprache kommt.

§ 7. In jeder nicht zu unregelmäßigen primären oder durch Reduktion regelmäßig gemachten Tafel findet man Folgendes.

Die kleinsten z finden sich nach den beiden Grenzen der Tafel zu, wonach, wie schon früher berührt, die kleinsten und größten a am seltensten vorkommen, die größten z aber im allgemeinen in einem mittleren Teile der Tafel. Das Maximal-z fällt auf ein gewisses a in diesem mittleren Teile, von wo nach beiden Seiten die z nach den Extremen hin kontinuierlich, wenn auch bei ungenügender Reduktion hier und da noch durch Unregelmäßigkeiten unterbrochen, abnehmen. Den Wert a einer nicht zu unregelmäßigen primären oder reduzierten Verteilungstafel, auf den das Maximal-z fällt, nenne ich den dichtesten Wert der Tafel oder auch empirisch dichtesten Wert des Gegenstandes, welcher sich freilich nur als Annäherung an den ideal dichtesten Wert betrachten lässt, den man bei unendlich großem m und unendlich kleinem i erhalten würde, was aber nicht minder vom A der Tafel gilt, doch schon als solche Annäherung besondere Beachtung verdient und die Unterlage zu einer genaueren Annäherung durch Rechnung in später zu betrachtender Weise bietet. Sei er empirisch oder ideal, in dieser oder jener Annäherung gefasst, bezeichne ich ihn allgemein mit D.

Man könnte glauben, dass der dichteste Wert wesentlich, also aus sehr großem, streng genommen unendlichem m und bei sehr kleinem, streng genommen unendlich kleinem i, bestimmt, mit dem arithmetischen Mittel zusammenfallen würde, und in der That weichen bei der Mehrzahl der K.-G. beide nach Bestimmung aus großem m und kleinem i wenig genug von einander ab, dass man geneigt sein kann und bisher in der That dafür gehalten hat, dass die noch übrige Abweichung bloß eine Sache unausgeglichener Zufälligkeit sei. Es wird aber eins der wichtigsten Resultate der folgenden Untersuchung sein, dass eine wesentliche Abweichung zwischen arithmetischem Mittel und dichtestem Werte vielmehr der allgemeine Fall ist, der Art, dass Größe und Richtung dieser Abweichung selbst charakteristisch für verschiedene K.-G. sind. Insofern nun auch die Abweichungen bezüglich beider Werte verschiedene Verhältnisse einhalten, ist der empirisch dichteste Werth D als ein vom arithmetischen Mittel A derselben Tafel zu unterscheidender, wichtiger Hauptwert d. i. Ausgangswert von Kollektivabweichungen anzuerkennen.

Zu beiden vorigen Hauptwerten A, D aber tritt noch ein von beiden vorigen zu unterscheidender, dritter, den ich als Zentralwert oder Wertmitte mit C bezeichnen werde, d. i. der Wert von a, der eben so viele größere a über sich als kleinere unter sich hat und in dieser Hinsicht die Reihe der a mitten durchteilt. Auf dasselbe kommt es heraus, wenn man sagt, es sei der Wert, bezüglich dessen die Zahl der positiven Abweichungen gleich der Zahl der negativen ist. Vom arithmetischen Mittel unterscheidet er sich durch die beiden Bestimmungen, dass, während bezüglich A die Summe der beiderseitigen Abweichungen gleich ist, hingegen bezüglich C die Zahl der beiderseitigen Abweichungen gleich ist, und dass, während bez. A die Summe der Quadrate der Abweichungen ein Minimum, d. i. kleiner als bez. irgend eines anderen Ausgangswertes ist, hiergegen bez. C die Summe der einfachen Abweichungen (die negativen dabei nach absolutem Werte gerechnet) in demselben Sinne ein Minimum ist[1]). Mit dem Zutritte dieses dritten Hauptwertes zu den beiden vorigen eröffnen sich nun abermals neue charakteristische Beziehungen für die K.-G., von welchen zu sprechen sein wird.

Außer den genannten drei Hauptwerten können noch andere, aus der Verteilungstafel mathematisch ableitbare als Ausgangswerte von Abweichungen und hiermit als Hauptwerte dienen und teils unabhängig von den vorigen betrachtet, teils mit denselben in

1) Diese, früher nicht bemerkte, Eigenschaft des Zentralwertes habe ich in einer besonderen Abhandlung über denselben nachgewiesen [Über den Ausgangswert der kleinsten Abweichungssumme; Abhandl. der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften; 11. Band, 1878].

Beziehung gesetzt werden; doch sind jedenfalls die vorigen die wichtigsten, und ich bleibe zunächst dabei stehen. In einem späteren Kapitel (Kap. X) jedoch werde ich nebensächlich noch drei andere Hauptwerte als Scheidewert R, schwersten Wert T und Abweichungsschwerwert F berücksichtigen, welche jedenfalls ein mathematisches Interesse darbieten.

§ 8. Ein Tier ist seinem inneren Baue nach charakterisiert durch Gehirn, Herz, Magen, Leber u. s. w., die Größe und Lage dieser Organe gegen einander, die zuführenden und abführenden Wege dazu. So ist ein K.-G. seiner inneren quantitativen Bestimmtheit nach charakterisiert durch arithmetisches Mittel, Zentralwert, dichtesten Wert und sonst etwa zuzuziehende Hauptwerte, die Größe und Lage dieser Hauptwerte gegen einander und die Abweichungen davon; und diese Werte stehen nicht minder in mathematischem als jene Organe in organischem Zusammenhange. Ein K.-G. bildet so zu sagen einen mathematischen Organismus, welcher einer Zergliederung fähig ist, auf die im Folgenden einzugehen sein wird. Und wenn damit nicht gesagt ist, dass jeder Gegenstand auf die Durchführung einer solchen Zergliederung Anspruch zu machen hat, so hat sich jedenfalls eine allgemeine Kollektionsmaßlehre mit den allgemeinen Gesichtspunkten derselben zu beschäftigen.

Zum Voraus lässt sich dabei bemerken, dass allerdings unter einer gewissen Voraussetzung die beiden Hauptwerte D und C mit A und mithin alle drei unter einander zusammenfallen würden, unter der Voraussetzung nämlich, dass die beiderseitigen Abweichungen bez. A eine symmetrische Wahrscheinlichkeit besäßen, also mit wachsendem m sich in der Art einer symmetrischen Verteilung (in obigem Sinne) näherten, dass man bei unendlichem m eine solche als erreicht ansehen könnte. Aber es wird sich zeigen, dass man für K.-G. vielmehr eine asymmetrische Wahrscheinlichkeit der Abweichungen bez. A vorauszusetzen hat, welcher gemäß man bei wachsendem m sich nicht einer symmetrischen Verteilung, sondern einer auf ein gewisses Gesetz zu bringenden, wesentlich asymmetrischen Verteilung nähert. Ja es lässt sich abgesehen von dem nur als Ausnahme anzusehenden wesentlichen Zusammenfallen von D und C mit A überhaupt kein Wert für K.-G. finden, bez. dessen eine symmetrische Wahrscheinlichkeit der Abweichungen nach beiden Seiten statt fände.

Wenn man nun bisher bei Behandlung der K.-G. bloß auf A, die Abweichungen davon und etwa die Extreme Rücksicht genommen, so sieht man nicht nur schon aus Vorigem, dass ganz wichtige charakteristische Verhältnisse und Unterschiede der Gegenstände dabei außer Acht fallen, sondern es wird sich auch zeigen, dass ein allgemeines Verteilungsgesetz der Exemplare von K.-G. gar nicht durch diese beschränkte Behandlungsweise zu gewinnen ist.

Sie hat aber unstreitig darin ihren Grund, dass man die leitenden Gesichtspunkte der physikalischen und astronomischen Maßlehre auf die Kollektivmaßlehre übertragen hat, ohne zwei wesentliche Unterschiede, die zwischen beiden bestehen, zu berücksichtigen, wodurch jene beschränkte Behandlungsweise für erstere Lehre eben so motiviert, als für letztere verwehrt ist. Für erstere hat der arithmetische Mittelwert A der Beobachtungswerte des seinem Maße nach zu bestimmenden einzelnen Gegenstandes mit den Abweichungen von A, d. i. Beobachtungsfehlern, die dominierende, ja im Grunde allein zählende, Bedeutung, da man nach Gründen, die den Fach-Mathematikern und Physikern bekannt sind, in dem Werte, bezüglich dessen die Summe der Quadrate der Abweichungen, d. i. Fehler, die kleinstmögliche ist, dem arithmetischen Mittel, zugleich den Wert sieht, welcher dem wahren Werte, um dessen Bestimmung es zu thun ist, mit überwiegender Wahrscheinlichkeit am nächsten kommt, in den Abweichungen davon aber ein Mittel findet, die Größe zu bestimmen, um welche der wahre Wert doch noch mit gegebener Wahrscheinlichkeit nach einer oder der anderen Seite verfehlt wird. Warum sich also in dieser Lehre noch um andere Hauptwerte kümmern, die und deren Abweichungen zur Erfüllung der Aufgabe dieser Lehre nichts helfen! Also ist auch weder von einem dichtesten Werte, noch Zentralwerte in der astronomischen und physikalischen Maßlehre die Rede, ungeachtet die verschiedenen Beobachtungswerte eines und desselben Gegenstandes in ihr, als a gefasst, an sich ebenso gut zur Ableitung eines D und C Anlass geben könnten, als die verschiedenen

Exemplare eines K.-G. Aber es wäre müßig, eine Sonderbetrachtung derselben zuzuziehen, und geschieht jedenfalls nicht.

Für die Kollektivmaßlehre aber hat der Gesichtspunkt, welcher in der physikalischen und astronomischen Maßlehre den arithmetischen Mittelwert mit den Abweichungen davon prinzipiell bevorzugen lässt, gar keine Bedeutung. Alle Exemplare eines K.-G., mögen sie noch so weit vom arithmetischen Mittelwerte oder irgend einem anderen Hauptwerte abweichen, sind gleich wirklich und wahr, und eine vorzugsweise Berücksichtigung des einen vor dem anderen aus einem für alle gleich nichtigen Gesichtspunkte hat natürlich keinen Sinn. Hiergegen hat jeder andere Hauptwert nach anderer Beziehung seine charakteristische und zum Teil selbst praktische Bedeutung für einen K.-G., wodurch er zur Unterscheidung desselben von anderen Gegenständen beiträgt.

Zweitens aber unterscheiden sich nach der in der physikalischen und astronomischen Maßlehre freilich vielmehr postulierten oder vorausgesetzten als zweifelsfrei erwiesenen, symmetrischen Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler bez. des arithmetischen Beobachtungsmittels bei guter Beobachtung die drei Hauptwerte nicht wesentlich, sondern nur durch unausgeglichene Zufälligkeiten von einander, so dass man in dem wegen des angegebenen Umstandes vorzuziehenden arithmetischen Mittel der Beobachtungswerte zugleich die wahrscheinlichsten Werte der anderen Hauptwerte mittrifft, wogegen für die K.-G. bemerktermaßen eine asymmetrische Wahrscheinlichkeit der Abweichungen bez. des arithmetischen Mittels als der allgemeine Fall anzusehen ist, wonach auch die verschiedenen Hauptwerte wesentlich auseinanderfallen.

Ubrigens kann es sogar noch fraglich erscheinen, ob man mit jenem Postulat bei den Beobachtungsfehlern wirklich ganz im Rechte ist, eine Frage, die uns zwar hier nicht wesentlich angeht, doch später in einem besonderen Kapitel[1]) berücksichtigt werden wird. Kehren wir aber jetzt zu den für die Kollektivmaßlehre wesentlichen Verhältnissen zurück.

---

1) [Mit Rücksicht auf diese Frage wird im zweiten Teile, Kap. XXVIII, die Asymmetrie von Fehlerreihen untersucht.]

§ 9. Unter Elementen oder Bestimmungsstücken eines K.-G. werde ich bei der Analyse eines solchen überhaupt folgende Werte unter folgenden, zum Teil schon früher gebrauchten, Bezeichnungen verstehen.

1) Die allgemein mit m bezeichnete Gesamtzahl der Exemplare a einer in Betracht gezogenen Verteilungstafel.

2) Die allgemein mit H bezeichneten Hauptwerte oder Ausgangswerte von Abweichungen, wovon bemerktermaßen der arithmetische Mittelwert A, der Zentralwert C und dichteste Wert D die wichtigsten sind. Da der Zentralwert allgemein zwischen A und D zu suchen ist, wie später zu zeigen, so werden die vorigen drei Hauptwerte künftig allgemein in der Ordnung A, C, D von mir aufgeführt werden. Hierzu noch einige, nebensächlich zu berücksichtigende Hauptwerte, welche im X. Kapitel besprochen werden.

Der arithmetische Mittelwert wird, aus den a einer primären Tafel bestimmt, mit A_1, aus denen einer reduzierten bestimmt, mit A_2 bezeichnet werden; entsprechend mit C. Bei D ist kein solcher Unterschied gemacht, weil er wegen der Unregelmäßigkeiten der zu Gebote stehenden primären Tafeln überall bloß aus reduzierten Tafeln hat abgeleitet werden können, hiermit überall mit D_2 zu bezeichnen wäre. Hiergegen ist nach der Herleitungsweise ein Unterschied dazwischen zu machen. Nach dem von mir so genannten Proportionsverfahren, welchem ich das meiste Zutrauen schenke, abgeleitet, bezeichne ich ihn mit D_p, nach dem weniger sicheren Interpolationsverfahren abgeleitet, mit D_i. Von dem Unterschiede beider Verfahrungsweisen wird weiterhin die Rede sein.

Alle Werte, welche auf die positive Seite des Hauptwertes, zu dem sie in Beziehung stehen, fallen, bezeichne ich mit einem Strichelchen oben, alle, welche auf die negative Seite fallen, mit einem Strichelchen unten, indes ich bei solchen, welche sich unterschiedslos auf beide Seiten beziehen, die Strichelchen ganz weglasse, wonach a' einen Wert a bezeichnet, welcher H übersteigt, $a_,$ einen solchen, welcher von H überstiegen wird.

Unter Θ verstehe ich allgemein Abweichungen von irgend einem Hauptwerte H; unter $\Theta' = a' - H$ also eine positive, unter $\Theta_, = a_, - H$

eine negative, wenn der negative Charakter von $\Theta_,$ beibehalten werden soll; da aber allgemein die negativen Abweichungen nach ihrem absoluten Werte, wie positive, zu verrechnen sein werden, ist vielmehr zu setzen $\Theta_, = H - a_,$. Hiernach ist mit $\Sigma\Theta' = \Sigma(a' - H)$ die Summe der positiven Abweichungen, mit $\Sigma\Theta_, = \Sigma(H - a_,)$ die der negativen Abweichungen nach absolutem Werte, mit $\Sigma\Theta = \Sigma\Theta' + \Sigma\Theta_,$ die Gesamtsumme der Abweichungen bez. H bezeichnet.

3) Die Hauptabweichungszahlen d. i. die Zahl der Abweichungen Θ von gegebenen Hauptwerten H, welche natürlich mit der Zahl der abweichenden Werte a zusammenfällt, also der Gesamtzahl nach unabhängig von der Natur der Hauptwerte gleich m ist, wogegen die Zahl der positiven und negativen Θ insbesondere sich mit der Natur der Hauptwerte ändert und als positive allgemein mit m', als negative mit $m_,$ bezeichnet werden. Von m' und $m_,$ sind dann die Unterschiede $\pm(m' - m_,)$ und die Verhältnisse $m' : m_,$ und $m_, : m'$ abhängig, welche statt m' und $m_,$ angeführt werden können, sofern aus ihnen unter Zuziehung von m die Werte von m' und $m_,$ folgen (s. unten).

4) Die Hauptabweichungssummen und daraus folgenden mittleren Abweichungen, d. i. Summen der Abweichungen, dividiert durch die Zahl derselben. Die Totalsumme der Abweichungen nach beiden Seiten zusammen, nach absolutem Werte, wie wir sie immer fassen, drückt sich durch $\Sigma\Theta$ aus, nach beiden Seiten einzeln, insbesondere durch $\Sigma\Theta'$ und $\Sigma\Theta_,$, so dass $\Sigma\Theta = \Sigma\Theta' + \Sigma\Theta_,$. Davon abhängig sind dann die einfachen mittleren Abweichungen oder mittleren Abweichungen schlechthin [1]):

$$\varepsilon = \frac{\Sigma\Theta}{m}, \quad \varepsilon' = \frac{\Sigma\Theta'}{m'}, \quad \varepsilon_, = \frac{\Sigma\Theta_,}{m_,}.$$

Die Totalsummen der Abweichungen $\Sigma\Theta$ bleiben sich nicht wie die

1) In der physikalischen und astronomischen Fehlerrechnung pflegt vielmehr als mittlere Abweichung schlechthin die Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrate $= \sqrt{\Sigma\Theta^2 : m}$, bez. A zu gelten, welche ich, wo etwa darauf Bezug zu nehmen, nach der Angabe unter folgender Nummer 5) als quadratische mittlere Abweichung von der wie oben bestimmten einfachen unterscheiden und mit q bezeichnen werde.

Totalzahlen m je nach den Hauptwerten gleich, sondern ändern sich nicht minder als die einseitigen Summen je nach dem Hauptwerte.

Bezüglich des arithmetischen Mittels A insbesondere sind die beiderseitigen Abweichungssummen $\Sigma\Theta'$ und $\Sigma\Theta_,$ notwendig gleich, weil dies im Begriffe dieses Mittels selbst liegt, indes die beiderseitigen Abweichungszahlen m', $m_,$ bez. dieses Mittels im allgemeinen ungleich sind, was mitführt, dass auch die einseitigen mittleren Abweichungen $\varepsilon' = \Sigma\Theta' : m'$, $\varepsilon_, = \Sigma\Theta_, : m_,$ bez. A im allgemeinen ungleich sind. Das für beide Seiten gemeinsam geltende $\varepsilon = \Sigma\Theta : m$ ist aber nicht als einfaches Mittel zwischen ε' und $\varepsilon_, = \frac{1}{2}(\varepsilon' + \varepsilon_,)$ zu finden oder zu bestimmen, wie ich fälschlich in einer amerikanischen Abhandlung über Rekrutenmaße (von ELLIOTT[1]) angegeben finde, da man dadurch nicht auf

$$\varepsilon = \frac{\Sigma\Theta' + \Sigma\Theta_,}{m} = \frac{\Sigma\Theta}{m}$$

zurückkommt; sondern dies ist nur der Fall, wenn man bei der Mittelziehung aus ε' und $\varepsilon_,$ die Gewichte berücksichtigt, welche ihnen vermöge des m' und $m_,$, woraus sie erhalten sind, zukommen, hiernach setzt:

$$\varepsilon = \frac{m'\varepsilon' + m_,\varepsilon_,}{m' + m_,},$$

was nach folgender einfachen Betrachtung auf $\varepsilon = \Sigma\Theta : m$ zurückführt. Da das Produkt eines Mittels aus Abweichungen in die Zahl derselben gleich der Summe der Abweichung ist, so ist $m'\varepsilon' = \Sigma\Theta'$ und $m_,\varepsilon_, = \Sigma\Theta_,$, also $m'\varepsilon' + m_,\varepsilon_, = \Sigma\Theta' + \Sigma\Theta_, = \Sigma\Theta$, andererseits $m' + m_, = m$.

Je größer die mittlere Abweichung ε bezüglich eines Hauptwertes ist, in desto weiteren Grenzen weichen durchschnittlich die einzelnen Werte a von demselben ab, oder desto stärker schwanken sie durchschnittlich um denselben. Außer der absoluten Größe von ε kommt aber auch sein Verhältnis zu dem H, worauf sich ε bezieht, also $\varepsilon : H$ in Betracht, was ich die verhältnismäßige

---

1) [E. B. ELLIOTT, On the military statistics of the United States of America; Berlin 1863. International statistical congress at Berlin.]

Schwankung nenne. Die durchschnittliche wie verhältnismäßige mittlere Schwankung bei gegebenem m gehen sich zwar nicht proportional für die verschiedenen Hauptwerte; doch nehmen sie, allgemein gesprochen, in so weit mit einander zu und ab, dass ein bezüglich eines gewissen Hauptwertes stark oder schwach schwankender Gegenstand auch bezüglich der anderen Hauptwerte als stark oder schwach schwankend angenommen werden kann, und man also ohne Rücksicht auf Beiziehung eines bestimmten Hauptwertes von stark und schwach im Mittel oder verhältnismäßig schwankenden Gegenständen sprechen kann.

Hiernach noch folgende Bemerkung. Die Größe der einfachen Summe $\Sigma\Theta$ und des einfachen Mittelfehlers $\varepsilon = \Sigma\Theta : m$ bezüglich des arithmetischen Mittels A ist nicht ganz unabhängig von der Zahl m der Werte a, aus denen das betreffende A abgeleitet ist, sondern nimmt durchschnittlich mit wachsendem m etwas zu; man kann aber die bei irgend einem endlichen m erhaltenen Werte $\Sigma\Theta$ und ε bez. A durch Multiplikation mit $\sqrt{m : (m - 1)}$ auf den Normalfall zurückführen, dass sie bez. eines A aus einer unendlichen Zahl von a erhalten worden, was ich die Korrektion wegen des endlichen m nenne [1]. Während nun $\Sigma\Theta$ und $\varepsilon = \Sigma\Theta : m$ die unkorrigierten Werte sind, so bezeichne ich mit $\Sigma\Theta_c$ und ε_c die korrigierten Werte:

$$\Sigma\Theta\sqrt{\frac{m}{m-1}} \quad \text{und} \quad \varepsilon\sqrt{\frac{m}{m-1}}.$$

Nur bei sehr kleinem m unterscheiden sich jedoch die korrigierten Werte erheblich von den unkorrigierten, und da wir im allgemeinen mit großem m, wogegen 1 merklich verschwindet, zu thun haben,

1) Bekanntlich hat Gauss vorlängst schon für die Summe der Fehlerquadrate $\Sigma\Theta^2$ bez. A und den daraus abzuleitenden, von mir sog. quadratischen Mittelfehler $q = \sqrt{\Sigma\Theta^2 : m}$ die Korrektion wegen des endlichen m bestimmt; wonach die erstere durch Multiplikation mit $m : (m - 1)$, die letztere übereinstimmend mit unserer Korrektion des einfachen Mittelfehlers durch $\sqrt{m : (m-1)}$ geschieht. Die theoretische Ableitung und empirische Bewährung unserer Korrektion von $\Sigma\Theta$ und ε aber ist von mir in den Berichten der Kgl. Sächsischen Gesellschaft, Math.-Phys. Klasse, Bd. XIII, 1861, S. 57f. geschehen, und da die Bewährung mit entschiedenem Erfolge an Kollektivabweichungen geführt ist, kann sie als zweifelsfrei für solche gelten.

begnüge ich mich in Aufführung der Elemente allgemein mit Angabe der gemeinen, d. i. unkorrigierten Werte $\Sigma\Theta$, ε, woraus sich mit Zuziehung des stets bekannten m die korrigierten Werte leicht finden lassen, wenn es darum zu thun ist. Eine entsprechende Bemerkung wird unstreitig für die Abweichungssummen und mittleren Abweichungen bez. anderer Hauptwerte als A gelten, wenn schon die direkte Untersuchung in dieser Hinsicht sich bisher bloß auf die Abweichungen von A erstreckt hat. Es ist aber um so weniger Anlass bei Anführung und Verwertung der bei einem gegebenen endlichen m erhaltenen Elemente die korrigierten Werte zu bevorzugen, als nicht nur die Abweichungssummen und mittleren Abweichungen bez. der verschiedenen Hauptwerte, sondern auch die Abweichungen der Hauptwerte selbst von einander unter dem Einflusse desselben endlichen m stehen, die Verhältnisse derselben sich also nicht durch die gemeinsame Korrektion ändern würden. Bei Untersuchung der Verteilungsgesetze aber hat es uns vielmehr auf diese Verhältnisse als auf absolute Werte anzukommen. Wo man aber doch auf solche gehen will, hat bezüglich Korrektion der einseitigen Werte $\Sigma\Theta'$, $\Sigma\Theta_{,}$ und ε', $\varepsilon_{,}$ die Anmerkung statt zu finden, dass sie nicht respektive durch $\sqrt{m' : (m'-1)}$ und $\sqrt{m_{,} : (m_{,}-1)}$, sondern wie die von $\Sigma\Theta$ und ε durch $\sqrt{m : (m-1)}$ zu geschehen hat, weil man sonst durch Addition der korrigierten Werte $\Sigma\Theta'$, $\Sigma\Theta_{,}$ die korrigierte Summe $\Sigma\Theta$ nicht wiederfinden würde. Auch liegt dabei der rationelle Gesichtspunkt unter, dass die Abweichungssummen jeder Seite als Glieder der totalen Abweichungssumme von der Größe ihres m gemeinsam influiert werden müssen.

5) **Die wahrscheinliche Abweichung w und quadratische mittlere Abweichung q.** Unter wahrscheinlicher Abweichung w bez. eines Hauptwertes ist diejenige Abweichung zu verstehen, welche eben so viel größere Abweichungen nach absolutem Werte über sich, als kleinere unter sich hat, also bez. der Abweichungen Θ dieselbe Bedeutung hat, als der Zentralwert C bez. der a. Unter quadratischem Mittelfehler q verstehe ich kurz die Wurzel aus dem mittleren Abweichungsquadrate, d. i. den Wert, den man erhält, wenn man die gesamten Abweichungen von einem Hauptwerte H besonders zum

Quadrate erhebt, die Summe dieser Quadrate, d. i. $\Sigma\Theta^2$ (wohl zu unterscheiden von dem Quadrate der Summe, d. i. von $(\Sigma\Theta)^2$), mit der Gesamtzahl m dividiert und aus dem Quotient die Wurzel zieht, kurz $q = \sqrt{\Sigma\Theta^2 : m}$. Statt für beide Seiten gemeinschaftlich, können diese Werte eben so wie die einfache mittlere Abweichung ε für beide Seiten besonders bestimmt und wegen des endlichen m korrigiert werden, worauf ich hier nicht eingehe, indem ich das, was darüber zu sagen, noch auf das Nachtragskapitel über das Gauss'sche Gesetz (Kap. XVII) verspare, nach welchem diese Werte bestimmte Beziehungen unter einander haben, welche eine Ableitung derselben aus einander gestatten, was ersparen wird, sie nach Aufführung von ε unter den Elementen noch besonders aufzuführen.

6) Die extremen Werte a der Tafel, d. i. das kleinste und größte a der Tafel, ersteres als E', letzteres als E, zu bezeichnen. Nach der hergebrachten Einrichtung der Tafel aber steht das dem Werte nach höhere Extrem zu unterst, das niederere zu oberst.

§ 10. Wenn zwei Werte α, β in folgender Weise durch runde Klammern verbunden sind, wie $\alpha(\beta)$, so ist dieser Ausdruck gleichgeltend mit $\alpha\beta$, d. i. Produkt von α und β, wenn sie aber durch eckige Klammern in folgender Weise verbunden sind: $\alpha[\beta]$, so bedeutet dies nicht, dass α mit β multipliziert werden soll, sondern dass α Funktion von β ist; also z. B. $\Theta[A]$ bezeichnet eine Abweichung von A, $\Theta[C]$ eine solche von C u. s. w., $m[A]$ die Gesamtzahl der Abweichungen bez. A; $m[C]$ die damit gleiche bez. C u. s. f.

Da aber bei dem vorzugsweise häufigen Gebrauche der Hauptwerte A und D die darauf bezüglichen Ausdrücke und Formeln durch solche Zufügung unbequem und unbehilflich werden würden, ziehe ich es im allgemeinen vor, für Θ, m, ε je nach ihrer Abhängigkeit von A oder D gleich verschiedene einfache Bezeichnungen zu setzen, und zwar wird dies durch folgende, unter den betreffenden Hauptwerten stehende Bezeichnungen geschehen, welche ohne Strichelchen sich unterschiedslos auf die beiderseitigen Abweichungen beziehen, je nachdem sie aber der positiven oder negativen Seite besonders angehören, noch mit einem Strichelchen oben oder unten zu versehen sind:

	A	D
Θ	$\varDelta$	∂
m	μ	$\boldsymbol{m}$
ε	η	$\boldsymbol{e}$

Also bedeutet z. B. $\varDelta$ eine Abweichung von A, ∂ eine solche von D. Da die Gesamtzahl der Abweichungen unabhängig von der Wahl des Hauptwertes ist, so ist allgemein $m = \mu = \boldsymbol{m}$, wogegen $\Sigma\varDelta$ nicht gleich $\Sigma\partial$, und η nicht gleich $\boldsymbol{e}$ ist.

Der Unterschied $\mu' - \mu_,$ (bez. A giltig) wird kurz mit u, der Unterschied $\boldsymbol{m}' - \boldsymbol{m}_,$ (bez. D) mit $\boldsymbol{u}$ bezeichnet. Aus u folgt μ' und $\mu_,$, aus $\boldsymbol{u}$ folgt $\boldsymbol{m}'$ und $\boldsymbol{m}_,$ nach folgenden Gleichungen:

$$\mu' = \frac{\mu + u}{2}, \quad \mu_, = \frac{\mu - u}{2},$$

$$\boldsymbol{m}' = \frac{\boldsymbol{m} + \boldsymbol{u}}{2}, \quad \boldsymbol{m}_, = \frac{\boldsymbol{m} - \boldsymbol{u}}{2}.$$

Für die mehrfach in Betracht zu ziehenden Abweichungen des oberen und unteren Extremes vom arithmetischen Mittel nach absolutem Werte dienen die Bezeichnungen:

$$U' = E' - A \text{ und } U_, = A - E_,.$$

Anstatt die Gesamtzahl der Abweichungen, sei es nach beiden Seiten oder nach jeder Seite insbesondere, in Betracht zu ziehen, werden wir auch Anlass finden, sie vom Hauptwerte aus nur bis zu gewissen Grenzen oder zwischen gegebenen Grenzen, sei es ihrem absoluten Werte oder ihrem Verhältnisse zu m, m' oder $m_,$ nach, in Betracht zu ziehen, was unter Gebrauch der Zeichen Φ und φ später (im V. Kap.) besonders besprochen wird.

In gewohnter Weise ist in den Tafeln von den kleinen Maßen $\boldsymbol{a}$ nach den größeren, also nach der natürlichen Lage des Blattes vor den Augen von dem oberen nach dem unteren Teile der Tafel fortgeschritten, was freilich in Konflikt damit kommt, dass man kleinere Werte als niedere, untere; größere als höhere, obere Werte fasst. Man muss also nach dem Zusammenhange oder ausdrücklicher

Angabe entscheiden, ob die Ausdrücke »höhere«, »niedrigere«, »obere«, »untere Werte« auf die Lage der Tafel oder das Größenverhältnis der Werte bezogen sind. Zur Vermeidung dieses etwas lästigen formellen Konfliktes würde es künftig besser sein, die Verteilungstafeln mit dem größten Werte a anfangen zu lassen; aber nachdem ich durch den früheren größeren Teil meiner Untersuchungen der üblichen Aufstellungsweise gefolgt war, konnte ich es nicht mehr ändern, ohne meine Tafeln umzubauen und Gefahr zu laufen, mich selbst zu verwirren. Die Strichelchen oben und unten an den Werten beziehen sich jedenfalls auf das Größenverhältnis der Werte, nicht ihr Lagenverhältnis in der Tafel.

Hiernach ist noch die Bedeutung und Bezeichnungsweise folgender Ausdrücke zu besprechen, welche in unseren Untersuchungen eine wesentliche Rolle spielen.

Unter Vorzahl, Vorsumme verstehe ich respektive die Zahl Σz und Summe Σa der a, welche einem gegebenen Werte a der Tafel in Größe vorangehen, unter Nachzahl, Nachsumme die, welche einem gegebenen Werte a der Tafel in Größe folgen. Natürlich ändern sich diese Zahlen und Summen mit den Werten a der Tafel, denen sie vorangehen und folgen, und zur Verhütung von Weitläufigkeiten führe ich auch hier für die Fälle, welche es in den Anwendungen vorzugsweise zu berücksichtigen gilt, besondere Bezeichnungen ein. Allgemein mögen mit v, V, n, N die Vorzahl, Vorsumme, Nachzahl, Nachsumme bezüglich irgend eines in Betracht kommenden Anfangs-a und Schluss-a einer gegebenen Tafelverteilung bezeichnet werden, unter $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{N}$ die betreffenden Werte bezüglich des a, dem das größte z zukommt, d. i. des empirisch dichtesten Wertes D, unter $\mathfrak{v}_i$, $\mathfrak{V}_i$, $\mathfrak{n}_i$, $\mathfrak{N}_i$ bezüglich eines a, dessen Umkreisintervall zur scharfen Bestimmung der Elemente in später anzugebender Weise zu interpolieren ist, der übrigens in den meisten Fällen mit dem vorigen, dem dichtesten Werte zusammenfällt, wo dann auch die Bezeichnung durch den Index wegfallen kann.

§ 11. Endlich noch folgende Bemerkung. Es wird Anlass sein, eine arithmetische und eine logarithmische Behandlung der K.-G. zu unterscheiden, von welchen erstere für solche Gegenstände in Anwendung kommt, deren mittlere Abweichungen bezüglich ihrer Hauptwerte nur klein sind, die andere für solche, wo sie verhältnismäßig dazu groß sind. Ersteres ist nicht nur der bei weitem häufigere und daher in größerer Ausdehnung als der zweite zu berücksichtigende, sondern auch einfacher zu behandelnde Fall, und alle Bestimmungen und Bezeichnungen dieses Kapitels sind zunächst auf diesen Fall zu beziehen; doch würde ohne Mitberücksichtigung des zweiten Falles der ganzen Untersuchung die erforderliche Allgemeinheit fehlen.

Der wesentliche Unterschied beider Behandlungsweisen ist dieser: Bei der arithmetischen Behandlung werden die Abweichungen der einzelnen a von ihren Hauptwerten im gewöhnlichen Sinne als arithmetische, d. i. als positive und negative Unterschiede von ihren Hauptwerten gefasst, und die Hauptwerte selbst direkt nach angegebenen Regeln aus den a der Verteilungstafel bestimmt. Bei der logarithmischen Behandlung werden die Abweichungen, mit denen man operiert, als logarithmische gefasst, d. h. als Unterschiede der Logarithmen der a von sog. logarithmischen Hauptwerten, d. i. Hauptwerten, die nach ganz denselben Regeln aus den $\log a$, als die arithmetischen Hauptwerte aus den einfachen a abgeleitet werden. Der Uebergang von der arithmetischen zur logarithmischen Behandlung bringt manche neuen Gesichtspunkte, Bestimmungen und Bezeichnungen mit, auf die jedoch erst später einzugehen, nachdem sich Anlass dargeboten haben wird, darauf Bezug zu nehmen (s. insbesondere Kap. V (§ 36) und XXI).

Unter π wird in gewohnter Weise die Ludolf'sche Zahl $= 3{,}141\,592\,7$, unter e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $= 2{,}718\,281\,8$, unter Mod. $=$ log. comm. e der sog. Modulus des gemeinen logarithmischen Systemes $= 0{,}434\,294\,5$ verstanden; wovon es, wegen des häufig davon zu machenden Gebrauches, nützlich sein kann, die gemeinen Logarithmen anzuführen. Man hat:

$$\log \pi = 0{,}497\,149\,9;\ \log e = 0{,}434\,294\,5;\ \log \text{Mod.} = 0{,}637\,784\,3 - 1.$$

Unter t, t', $t_{,}$ respektiv werden respektiv die Werte:

$$\frac{\Theta}{\varepsilon\sqrt{\pi}},\ \frac{\Theta'}{\varepsilon'\sqrt{\pi}},\ \frac{\Theta_{,}}{\varepsilon_{,}\sqrt{\pi}}$$

verstanden. Unter t-Tabelle eine im Anhang, § 183, folgende Tabelle, welche die zu t in Bezug stehenden, im V. Kapitel zu besprechenden Werte Φ im Sinne des Gauss'schen Gesetzes zufälliger Abweichungen angiebt. Da der Wert $\exp[-t^2]$[1]) von häufiger Anwendung und etwas komplizierter Berechnung ist, so mag hier die Berechnung seines Logarithmus angegeben werden, woraus er selbst unmittelbar ableitbar ist.

Um $\log \exp[-t^2] = \log 1 : \exp[t^2]$ zu finden, addiere $2 \log t$ zu $0{,}63778 - 1$ (d. i. zu log Mod.), suche dazu in den Logarithmentafeln die Zahl und nimm sie negativ, so hast du darin den verlangten Logarithmus[2]), aber in einer von der gebräuchlichen abweichenden und für die Anwendung der Logarithmentafeln zur Ableitung von $\exp[-t^2]$ selbst daraus ungeeigneten Form. Um ihn in der dazu brauchbaren Form zu erhalten, ziehe seinen absoluten Wert von der um 1 höheren ganzen Zahl ab und füge diese der Differenz hinten mit dem Zeichen — zu. So, wenn $\log \exp[-t^2] = -0{,}25$ oder $-1{,}25$ oder $-2{,}25$ gefunden wäre, würde man dafür zu setzen haben resp. $0{,}75 - 1$; oder $0{,}75 - 2$ oder $0{,}75 - 3$ u. s. f.

Unter $\mathcal{E}$ wird die Maßeinheit verstanden, in welcher die Exemplargrößen a, die Hauptwerte H und Abweichungsgrößen davon ausgedrückt sind.

Statt Wahrscheinlichkeit wird meist W.; statt Kollektivgegenstand, wie schon bemerkt, K.-G. und statt Gauss'sches Gesetz nach künftiger Bemerkung G. G. gesetzt.

---

1) [Der Einfachheit wegen wird hier und im Folgenden die Exponentialfunktion e^x durch $\exp[x]$ bezeichnet, wonach oben $\exp[-t^2]$ statt e^{-t^2} gesetzt ist.]

2) In der That, der Logarithmus von $\exp[t^2]$ ist gleich $t^2 \log e$, mithin der Log. von $1 : \exp[t^2]$ gleich dem negativ genommenen Logarithmus von $\exp[t^2]$.

III. Vorläufige Übersicht des Untersuchungsmateriales und allgemeinere Bemerkungen dazu.

§ 12. Eine wichtige Schwierigkeit für eine Untersuchung wie die vorliegende liegt in der Beschaffung des dazu nötigen Materiales. Ein solches kann nämlich nur in einer Mehrzahl von K.-G. aus verschiedenen Gebieten gesucht werden, deren jeder in einer so großen Zahl von Exemplaren vorliegt, dass Zufälligkeiten der Verteilung nach Maß und Zahl nahehin — denn absolut ist es nicht möglich — nach dem Gesetze großer Zahlen als ausgeglichen gelten können, und bei deren jedem die im folgenden Kapitel geltend zu machenden, anderweiten Requisiten nicht minder als nahehin erfüllt angesehen werden können. Endlich müssen die Angaben darüber alle zur Bearbeitung nötigen Data enthalten.

Aber über manche Arten von K.-G., die nicht übergangen werden durften, um der Untersuchung die erforderliche Allgemeinheit zu geben, lag überhaupt bisher nichts vor, und wenn es für andere nicht an Angaben mangelt, ja für manche, wie die Rekrutenmaße, ein embarras de richesse vorliegt, ist doch mit denselben in ihrer bisherigen Fassung nicht allen für die Zwecke der Untersuchung an sie zu stellenden Forderungen genügt. Zu eigenen Messungen aber stehen nur wenige Gegenstände zu Gebote, und da es bei jedem sehr viele Exemplare zu messen und in Verteilungstafeln zu bringen gilt, finden Zeit und Geduld bei diesem, gleich langmühigen und langwierigen, Geschäfte leicht ihre Grenze.

Indes ist es mir doch gelungen, auf zum Teil mühsamem und umständlichem Wege das folgends verzeichnete Material für unsere Untersuchung zusammen zu bringen, wovon freilich manches den geltend zu machenden Requisiten nur unvollständig entspricht, damit aber auch Gelegenheit giebt, den Erfolg davon erkennen zu lassen.

I. Anthropologisches.

A. Rekrutenmaße schlechthin, d. s. Längenmaße gleichalteriger Rekruten von bestimmter Herkunft, hauptsächlich sächsischer, von denen ich mir Abschriften der Urlisten zu verschaffen wusste, um Verteilungstafeln in einer zur Untersuchung geeigneten Form daraus zu gewinnen. Am wichtigsten für unsere allgemeine Untersuchung im ersten Teile sind 20 Jahrgänge Leipziger Studentenrekrutenmaße mit einem Gesamt-$m = 2047$; demnächst 17 Jahrgänge sog. Leipziger Stadtmaße, d. i. bezüglich Rekruten der übrigen Leipziger Bevölkerung, mit einem Gesamt-$m = 8402$; außerdem Rekrutenmaße von 3 Jahrgängen, resp. der Borna'schen und Annaberger Amtshauptmannschaft mit $m = 2642$ und 3067. Dazu werden im zweiten Teile Rekrutenmaßtafeln bez. anderer Länder, sofern solche vorlagen und schon früher von QUETELET behandelt sind, als namentlich belgische, französische, italienische und amerikanische, eine teils kritische Besprechung, teils von der QUETELET'schen abweichende Behandlung erfahren, und Maße von Körpergewicht und Brustumfang der Rekruten mit berücksichtigt werden.

B. Schädelmaße, die mir von Prof. WELCKER in Halle zur Disposition gestellt sind, a) des Vertikalumfanges, b) des Horizontalumfanges von je 450 europäischen Männerschädeln.

C. Gewicht der inneren Organe des menschlichen Körpers, nach BOYD's Angaben[1]).

II. Botanisches.

Von mir selbst gemessene Roggenähren (Secale cereale) von demselben Standorte und Jahrgange, 217 sechsgliedrige (abgesehen von der Fruchtähre) und 138 fünfgliedrige; jedes der Glieder besonders

1) [Dr. BOYD's Tables of the weights of the human body and internal organs. Philosophical Transactions of the Royal Society of London; 1861.]

gemessen und teils als besonderer K.-G. behandelt, teils nach seiner Beziehung zu den übrigen Gliedern in Betracht genommen.

III. Meteorologisches.

a) Thermische und barometrische Tages- und Monatswerte oder Abweichungen in dem unter § 19 und 20 näher zu besprechenden Sinne. Darunter gehören die von QUETELET in seinen Lettres sur la prob. verzeichneten, folgends unter § 21 zu besprechenden, 10jährigen sog. »variations diurnes« mit einem m von 282 bis 310; hierzu eigene Zusammenstellungen thermischer und barometrischer Tageswerte nach Beobachtungen auf dem Peissenberge durch eine längere Reihe von Jahren, und von thermischen Monatsabweichungen nach DOVE'schen Abhandlungen.

b) Tägliche Höhen gefallenen Wassers für Genf durch viele Jahre, aus der Bibliothèque universelle de Genève (Archives des sciences physiques et naturelles) von mir zusammengestellt.

IV. Artistisches.

a) Visitenkarten und Adresskarten von Kaufleuten und Fabrikanten, von mir selbst nach Länge und Breite besonders gemessen.

b) Dimensionen, Höhe h und Breite b, von Galleriegemälden (im Lichten des Rahmens) aus den Katalogen der Sammlungen unter Reduktion auf dieselbe Maßeinheit für Genrebilder, Landschaften, Stillleben von mir besonders bestimmt; dabei der Fall unterschieden, wo $b > h$ und wo $h > b$.

Dies nur zur vorläufigen Übersicht; spezieller wird auf vorstehendes Material unter besonderen Kapiteln des zweiten Teiles einzugehen, wo die hier noch zu vermissenden näheren Angaben darüber zu finden, sowie darauf zu verweisen sein, wenn schon im vorliegenden ersten Teile auf dies Material Bezug zu nehmen ist.

Man kann bemerken, dass unter vorigen Gegenständen solche vorkommen, mit denen sich zu beschäftigen kein oder nur ein geringes sachliches Interesse vorhanden ist. Aber der Gesichtspunkt eines sachlichen Interesses daran ist überhaupt hier nicht maßgebend für ihre Wahl und Behandlung gewesen; sondern eben nur ihre Benutzbarkeit als Unterlage für unsere Untersuchung, in welcher Hinsicht manche unbedeutend scheinende Gegenstände, als wie die Dimensionen der Galleriegemälde und die täglichen Regenhöhen wichtig geworden sind.

Insoweit aber ein sachliches Interesse an den Gegenständen vorlag, darf man aus demselben Grunde nicht erwarten, die Behandlung derselben in diesem Interesse hier erschöpft zu finden, wenn schon so manche Resultate, die in dasselbe hineintreten, von selbst als Nebenprodukte der Behandlung abfallen werden. Jeder der genannten Gegenstände könnte zu einer monographischen Behandlung Anlass geben; aber ein wie großes Werk würden nur die Rekrutenmaße erfordern, sollte eine vergleichende Darstellung und Diskussion derselben für die verschiedenen Länder und in denselben Ländern für die verschiedenen Jahrgänge oder eine solche für die Schädeldimensionen der verschiedenen Rassen oder für die Gliederungsverhältnisse der verschiedenen Gramineen durchgeführt werden! An Durchführungen dieser Art ist hier nicht zu denken. Dagegen macht das, was hier an Beispielen aus verschiedenen Gebieten erläutert und bewiesen wird, allerdings Anspruch, bei jeder ausgedehnteren Behandlung derselben Gebiete Anwendung und Berücksichtigung zu finden. [1])

---

1) [Anmerkung: Den Angaben dieses Kapitels ist hinzuzufügen, dass eine teilweise Neubeschaffung des Untersuchungsmateriales nötig war, da außer Bruchteilen der Rekrutenmaße und der Maße der Roggenhalme von keinem der bezeichneten K.-G. Urlisten oder primäre Verteilungstafeln sich vorfanden. Zwar wurde, soweit es thunlich war, das Untersuchungsmaterial aus den angegebenen Quellen ergänzt; insbesondere wurden Maße für Galleriegemälde den Katalogen der alten Pinakothek zu München und der Gemäldegallerie zu Darmstadt, für die täglichen Regenhöhen von Genf den Archives des sciences physiques et naturelles der Bibliothèque universelle entnommen (s. Kap. XXI, sowie XXVI und XXVII). Aber an Stelle der Beobachtungen thermischer und barometrischer Tageswerte auf dem Peissenberge dienten entsprechende Werte, die für Utrecht im Niederländischen Jahrbuche für Meteorologie publiziert sind (s. Kap. XXIII und XXVII). Den Ersatz für die Schädelmaße schließlich (s. Kap. VII und XXII) verdanke ich Herrn Prof. Welcker, der die Güte hatte, mir die Maße von rund 500 europäischen Männerschädeln zu übermitteln.]

IV. Requisiten; Abnormitäten.

§ 13. Soll ein K.-G. eine erfolgreiche Untersuchung zulassen, so muss er gewisse Bedingungen erfüllen, die zum Teil in seinem Begriffe liegen, zum Teil sich allgemeineren Gesichtspunkten unterordnen.

Nach der einleitend vorausgeschickten Erklärung soll ein K.-G. ein unter einen bestimmten Begriff fassbarer, in seinen quantitativen Bestimmungen nach Zufall schwankender Gegenstand aus unbestimmt vielen Exemplaren sein. Nun lassen sich unendlich viele Exemplare von ihm nicht haben, doch muss man besprochenermaßen möglichst viele von ihm zu erhalten suchen, so viele, dass die strenggenommenen nur für eine unendliche Zahl in Anspruch zu nehmenden, idealen Gesetze des Zufalls noch mit einer für den angestrebten Grad der Genauigkeit hinreichenden Annäherung bestätigt werden können. Aber sei diese Bedingung hinreichend erfüllt, so muss ein K.-G. noch aus anderen Gesichtspunkten normal oder fehlerlos sein, wie wir uns kurz ausdrücken mögen, um sich den gesetzlichen Bestimmungen zu fügen, die sich als die allgemeinsten für K.-G. aufstellen lassen, welche diesen Fehlern nicht unterliegen.

Hierzu gehört vor allem, dass die Exemplare aus keinem anderen Gesichtspunkte zu einem K.-G. zusammengenommen, noch solche davon ausgeschlossen werden, als im Begriffe des Gegenstandes begründet liegt, dass also der Gegenstand nicht nur aus vorigem Gesichtspunkte vielzahlig, sondern auch insofern vollzahlig sei, als alle von ihm in den Grenzen seines Begriffs sich darbietenden Exemplare auch wirklich mit gezählt werden, nicht etwa aus dieser oder jener Nebenrücksicht der eine oder andere Teil der Maßskala in Wegfall komme, hiermit der Gegenstand so zu sagen verstümmelt werde, wie es z. B. der Fall sein würde, wenn in Rekrutenmaßtafeln die sog. Untermäßigen ausgeschlossen werden sollten, indes gegenseits der Gegenstand auch möglichst rein und ungemischt erhalten werden muss, d. h. Exemplare, die nach irgend einer Seite aus seinem Begriffe heraustreten, von ihm ausgeschlossen werden müssen, also z. B., wo der Kollektivbegriff auf gesunde Individuen geht, Exemplare mit krankhaft veränderten Dimensionen in Wegfall kommen müssen; daher in die von mir zu behandelnden WELCKER'schen Schädelmaße weder fassförmig aufgetriebene Hydrocephale noch entschieden mikrocephale Schädel mit eingehen. Daran aber knüpfen sich Bemerkungen von allgemeiner Tragweite.

§ 14. Gewiss ist, dass die Grenze zwischen gesunden und krankhaft veränderten Schädeln nicht sicher zu bestimmen ist, und eine entsprechende Unsicherheit über die Abgrenzung des Gegenstandes kehrt in sehr vielen anderen Fällen wieder; wenn aber nur die Unsicherheit sich in so engen Zahlengrenzen hält, dass die Grenzen der Unsicherheit, die man sich wegen unausgeglichener Zufälligkeiten gefallen lassen muss, dadurch nicht überschritten werden, kann kein erheblicher Nachteil im ganzen daraus erwachsen, und wird man sich durch den Erfolg selbst befriedigt finden können, wenn der, nach bestem Ermessen abgegrenzte Gegenstand sich den normalen Verteilungsgesetzen fügt, oder wird man so viele Exemplare abschneiden können, dass es der Fall ist.

Jedoch erhebt sich hierbei folgende sehr wichtige Frage: Es ist freilich logisch selbstverständlich, dass, wenn gesunde Individuen oder Teile von solchen, wie Schädel, hinsichtlich der Verteilungsverhältnisse ihrer Exemplare untersucht werden sollen, nicht solche, welche als krank erkannt oder dafür angenommen sind, mit eingemischt werden dürfen, und nicht minder selbstverständlich, dass die Feststellung der Verhältnisse für gesunde Exemplare ein größeres Interesse hat, als für eine Mischung von gesunden und kranken; nur scheint es wider die Allgemeinheit der Aufgabe der Kollektivmaßlehre zu laufen, zur Feststellung der allgemeinsten Verteilungsgesetze den K.-G. aus bloß gesunden Exemplaren dem Gegenstande aus einer Mischung von gesunden mit kranken vorzuziehen.

In der That, wenn die krankhaft veränderten Schädel aus dem Begriffe der gesunden heraustreten, so fallen sie doch noch unter den Begriff der Schädel überhaupt, und was berechtigt uns, bei Aufsuchung der allgemeinsten Gesetze für K.-G. die kranken Schädel auszuscheiden, da wir vielmehr hierzu nur den weiteren Begriff, der alle Schädel einschließt, statt des engeren der gesunden anzuwenden hätten; und es giebt unzählige andere Fälle, wo eine gleiche Möglichkeit der engeren und weiteren Fassung besteht; ja streng genommen besteht eine solche überall, da zuletzt alle K.-G. sich unter dem Begriffe eines existierenden Wesens vereinigen lassen, der nur nach verschiedensten Richtungen verengert werden kann. Doch würden wir mit dem Versuche, unsere für allgemein ausgegebenen Gesetze an sehr weiten Fassungen der K.-G. zu bewähren, schlecht fahren, indem sie sich nicht oder nur unvollkommen daran bewähren würden, indes sie doch bei hinreichend engen Fassungen für die allerverschiedensten K.-G. dieselben bleiben und insofern ihre Allgemeingültigkeit bewähren. Nun fragt sich, welcher Gesichtspunkt maßgebend für die einzuhaltende Beschränkung der Weite ist.

Diese scheinbar schwierige Frage ist mit Rücksicht auf folgende thatsächlichen Verhältnisse zu beantworten.

Wenn wir Gegenstände, die bei hinreichend enger Fassung für sich den für die verschiedensten Gegenstände gemeinsamen Verteilungsgesetzen entsprechen, vermischen, so muss folgende Bedingung erfüllt sein, wenn auch die Mischung denselben Gesetzen noch entsprechen soll: Die Konstanten oder wesentlichen Elemente, durch welche die Verteilungsverhältnisse bestimmt werden, also mindestens arithmetischer Mittelwert und mittlere Abweichung davon, womit die anderen Elemente mehr oder weniger zusammenhängen, dürfen für die komponierenden Gegenstände nicht weiter von einander abweichen, als durch unausgeglichene Zufälligkeiten erklärlich ist, wonach wir einstimmige und disparate Gegenstände als solche unterscheiden können, welche diese Bedingung erfüllen, und welche sie nicht erfüllen, andererseits einheitliche und zwiespältige als solche, welche aus einstimmigen, und welche aus disparaten Gegenständen zusammengesetzt sind. Jede Erweiterung des Begriffs eines K.-G. aber führt eine Zusammensetzung desselben mit einem oder mehreren anderen, möglicherweise disparaten Gegenständen mit sich.

Aus diesem Gesichtspunkte nun ist bei vielen Gegenständen unmittelbar einleuchtend, dass sie nicht vermischt werden dürfen. In der That wird es niemand einfallen, Männer und Frauen oder Kinder und Erwachsene in denselben K.-G. zu vereinigen, wenn die Verteilung ihrer Exemplare hinsichtlich der Körperlänge in Betracht gezogen werden soll, ungeachtet sie gemeinsam unter den weiteren Begriff menschlicher Wesen fallen; aber man weiß vorweg, dass wesentlich verschiedene Mittelwerte dafür bestehen, wodurch sie zu disparaten Gegenständen werden. Und so muss auch eine Zusammensetzung gesunder Schädel mit krankhaft veränderten Schädeln zu einem K.-G. unstatthaft gefunden werden, insofern beide sich disparat gegen einander verhalten.

§ 15. Aus diesem Gesichtspunkte scheinen mir sehr instruktiv die Ergebnisse aus Untersuchungen über die Rekrutenmaße, die, nachdem ihrer oben (Kap. III unter I A) flüchtig erwähnt ist, im zweiten Teile dieses Werkes (Kap. XXIV) eingehender mitgeteilt werden sollen.

Rekrutenmaße können überhaupt für die verschiedensten Länder, Zeiten, Altersstufen unter dem weitesten Begriffe solcher Maße zusammengefasst, aber auch sehr spezialisiert werden; und von vornherein wird man z. B. 18 jährige Rekruten eines Landes nicht mit 20 jährigen eines anderen Landes gemischt behandeln wollen, da beide sich durch verschiedene Mittelmaße unterscheiden; aber auch gleichalterige Rekruten desselben Landes lassen Spezialisierungen in verschiedenem Sinne zu. So habe ich die Rekrutenmaße von (20 jährigen) Leipziger Studenten einerseits und die der übrigen Leipziger Bevölkerung, sog. Leipziger Stadtmaße, andererseits besonders behandelt. Für die ersten hat sich eine sehr befriedigende, für die anderen eine nach gewisser Beziehung unvollkommene Bestätigung der aufzustellenden allgemeinen Verteilungsgesetze, welche ich **fundamentale** nenne, ergeben; indem sich bei Vergleich zwischen Rechnung und Beobachtung gezeigt hat, dass bei letzteren die kleinen Maße verhältnismäßig häufiger vorkommen, als es nach Berechnung auf Grund der fundamentalen Gesetze der Fall sein sollte, ohne dass unausgeglichene Zufälligkeiten hinreichten, es zu erklären. Dasselbe ergab sich für die Rekrutenmaße der gemischten Bevölkerung verschiedener größerer Distrikte Sachsens. Was ist der Unterschied des ersten von den anderen Fällen? Die Rekrutenmaße der Studenten beziehen sich auf den beschränkten Umfang aus verhältnismäßig wohlhabenden, einem normalen Wachstume der Individuen die Mittel nicht versagenden Ständen; die anderen auf Individuen aus einer Mischung solcher Stände mit Ständen, in welchen es von der Zeugung und Geburt an mehr oder weniger an solchen Mitteln mangelt, und abnorm verbuttete Individuen nicht selten vorkommen, deren Maße in die Rekrutenmaßliste mit aufgenommen sind, wenn schon die Individuen selbst in den Dienst nicht mit eingestellt werden. In dieser Hinsicht dürften folgende Data interessieren.

In den mir zu Gebote stehenden 20 Jahrgängen von Leipziger Studentenrekrutenmaßen mit einem Gesamt-$m = 2047$ fällt nur ein einziges Individuum (mit 60 Zoll) unter das Maß 64 Zoll[1]); in 17 Jahrgängen von Maßen der übrigen Leipziger Bevölkerung (kurz Leipziger Stadtmaße) mit einem Gesamt-$m = 8402$ fallen 197 Individuen unter 64 Zoll (das kleinste mit 48 Zoll); und reduzieren wir 197 nach Verhältnis des Gesamt-m, so fallen gegen 1 Individuum der Leipziger Studentenmaße noch 48 der Leipziger Stadtmaße unter 64 Zoll. Die Leipziger gemischte Bevölkerung enthält aber, wie die jeder großen Stadt, einen großen Prozentsatz elendes Proletariat. Doch weiter: 3 Jahrgänge Rekrutenmaße der Bornaschen Amtshauptmannschaft außer Leipzig (vorzugsweise kleine Städte und ackerbauende Dörfer einschließend) mit $m = 2642$ gaben absolut 50 oder, wie vorhin reduziert, 39 Maße unter 64 Zoll (mit dem Minimalmaße 51 Zoll), und 3 Jahrgänge Rekruten der Annaberger Amtshauptmannschaft (viel Gebirgs- und arme Fabrikbevölkerung einschließend) mit $m = 3067$ absolut 62, reduziert 41 Maße unter 64 Zoll (mit dem Minimalmaße 49 Zoll). Also nach Proportion

1) [1 **sächsischer Zoll = 23,6 mm.**]

des *m* haben wir überhaupt beziehentlich für die angegebenen 4 Abteilungen:

1	48	39	41

Maße unter 64[1]), und gehen wir zu den arithmetischen Mitteln (nach den primären Tafeln) über, so finden sich folgende Werte in sächsischen Zollen:

Stud.	Lpzg. St. M.	Borna	Annaberg
71,76	69,61	69,34	69,00.

Also ist das arithmetische Mittel der Leipziger Studenten um mehr als 2 Zoll größer als das der gemischten sächsischen Bevölkerung, und dasselbe gilt für Zentralwert und dichtesten Wert. Andererseits ist die mittlere Abweichung bezüglich des arithmetischen Mittels nach einer für alle Abteilungen gleichförmigen Bestimmungsweise in sächsischen Zollen für:

Stud.	Lpzg. St. M.	Borna	Annaberg
2,01	2,26	2,14	2,33.

Und natürlich würde der Unterschied nach beiden Beziehungen noch mehr betragen, wenn die gemischte Bevölkerung der drei letzten Abteilungen in solche mit normalem und solche mit abnormem Wachstume zerlegt und beide einander gegenüber gestellt werden könnten.

Dabei ist nicht zu behaupten, dass, wenn wir die Rekruten des Proletariats wirklich ebenso für sich vor uns hätten als die der wohlhabenden Klassen in den Studenten, sich unsere fundamentalen Verteilungsgesetze ebenso gut bei jenen als bei diesen bestätigen würden, weil das Proletariat selbst noch ein weiter Begriff ist, welcher der Spezialisierung nach verschiedenen Richtungen fähig ist, und nicht a priori zu versichern ist, dass seine Spezialitäten im obigen

---

1) Weniger auffällig als bezüglich der kleinsten Maße ist der Unterschied zwischen den Studentenmaßen und Maßen der anderen drei Abteilungen bezüglich der größten; und stimmt auch die Verteilungsrechnung bei letzteren nach oben besser als nach unten; doch fehlt ein Unterschied bezüglich der größten Maße nicht ganz. Die Studentenmaße schlossen nach oben mit den drei Maßen 80; 80,75; 82,5; die Leipziger Stadtmaße mit 79,5 (4 mal) und 79,75; die Borna'schen mit 77,25; 77,75; 78,25; die Annaberg'schen mit 76,75; 77,25; 78,5.

Sinne einstimmig sind. Ja von vornherein würde dasselbe ebenso wenig von den durch die Studenten vertretenen wohlhabenden Klassen zu behaupten sein; aber da die Erfahrung selbst lehrt, dass die Spezialisierung in den Studentenmaßen weit genug getrieben ist, um eine Bestätigung der betreffenden Gesetze zu gestatten, so weit es überhaupt wegen unausgeglichener Zufälligkeiten möglich ist, so dürfen wir uns auch dabei beruhigen, wogegen wir hier wie dort die Spezialisierung noch weiter zu treiben hätten, wenn sie nicht genügte.

Auch kann recht wohl zugestanden werden, dass, wenn wir nur das m der Studentenrekrutenmaße recht vergrößerten und dann nach verschiedenen Gesichtspunkten, z. B. je nach der Herkunft aus Dörfern oder Städten oder aus verschiedenen Jahrgängen oder verschiedenen Ständen in Abteilungen sonderten, die noch ein hinreichendes m hätten, um feine Unterschiede der wesentlichen Elemente mit Sicherheit entdecken zu können, es an solchen nicht fehlen würde, welche einer vollkommenen Einstimmigkeit zuwiderlaufen; und es hindert nichts, eine Aufgabe der Untersuchung daraus zu machen.

Aber wenn diese Unterschiede nur klein sind, und die mancherlei Abteilungen, die man nach den verschiedensten Gesichtspunkten machen kann, hiermit die Unterschiede zwischen den Elementen selbst, mit dem Charakter der Zufälligkeit variieren, so lässt sich nicht nur vernünftigerweise voraussetzen, sondern lehrt die Thatsache selbst, dass die betreffenden Unterschiede der Elemente in den unvermeidlichen unausgeglichenen Zufälligkeiten ununterscheidbar mit aufgehen und der Bewährung der fundamentalen Gesetze kein wesentliches Hindernis entgegensetzen.

§ 16. Um so weniger aber darf man in den Abweichungen, welche die Verteilungsverhältnisse zu weit gefasster und dadurch zwiespältiger K.-G. von den fundamentalen Gesetzen zeigen, einen Widerspruch gegen diese Gesetze sehen, als es prinzipiell hinreicht, die Mischungsverhältnisse und wesentlichen Elemente der komponierenden Gegenstände eines zwiespältigen Gegenstandes zu kennen, um nach den fundamentalen Gesetzen selbst die Verteilungsverhältnisse des zusammengesetzten Gegenstandes zu berechnen, so dass sie also auch in dieser Hinsicht ihre allgemeine Gültigkeit behaupten.

Allgemein folgt aus Vorstehendem, dass wir uns bei Feststellung und Prüfung der fundamentalsten Verteilungsgesetze nicht nur hüten müssen, die nach verschiedensten Richtungen auseinander weichenden Verteilungsresultate zu weit gefasster, untriftig gemischter Gegenstände gegen die Allgemeingültigkeit der für hinreichend eng gefasste, einheitliche Gegenstände in Anspruch genommenen Gesetze geltend zu machen, sondern auch bei der Wahl zwischen den Resultaten einer weiteren und engeren Fassung, unter sonst gleichen Umständen, die der engeren für die Konstatierung der fundamentalen Gesetze vorzuziehen haben. Den vorigen Betrachtungen ordnen sich wesentlich die folgenden unter.

Die Herkunft der Exemplare eines K.-G. aus verschiedenen Räumen oder Zeiten oder beiden zugleich führt leicht nicht nur qualitative, sondern auch quantitative Verschiedenheiten derselben mit sich, was eine besondere Beachtung insofern verdient, als man, um ein hinreichend großes m für eine erfolgreiche Untersuchung zu erlangen, sich meist veranlasst oder genötigt findet, den K.-G. aus Exemplaren zusammenzusetzen, welche verschiedenen Räumen oder Zeiten angehören, ja ganz demselben Raume und derselben Zeit können sie überhaupt nicht angehören. In dieser Beziehung findet nun ein Konflikt statt. Die Exemplare aus sehr von einander entlegenen oder sehr weiten Räumen und Zeiten zusammenzunehmen, setzt in Gefahr, disparate Gegenstände zu vereinigen und hiermit die fundamentalen Verteilungsverhältnisse zu verfehlen; die Exemplare aus zu engen Raum- und Zeitgrenzen zusammenzunehmen, giebt den unausgeglichenen Zufälligkeiten zu großen Spielraum, um wesentliche Bestimmungen überhaupt mit irgend welcher Sicherheit abzuleiten. Die einzuhaltenden Grenzen in dieser Hinsicht aber lassen sich nicht a priori ziehen, und schließlich muss der Erfolg selbst entscheiden, ob man mit der angenommenen zeitlichen oder räumlichen Weite des Gegenstandes zu einer befriedigenden Erfüllung der fundamentalen Verteilungsgesetze gelangt; wo nicht, die Verengerung weiter treiben, und wenn man damit in zu kleine Werte von m hinein kommt, um Resultate von genügender Sicherheit zu erlangen, die Untersuchung bis zur Erlangung einer größeren Anzahl von

Exemplaren aufgeben. Im allgemeinen dürfte dies jedenfalls das Praktischste sein.

§ 17. Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen bei der Frage, ob ein Gegenstand aus disparaten Komponenten zusammengesetzt ist, folgende zum Teil schon berührte Verhältnisse der Verteilungstafeln.

In unseren Fundamentalgesetzen liegt begründet, dass die z kontinuierlich mit den a bis zu einer gewissen Größe des a aufsteigen, bei weiter wachsendem a aber ebenso kontinuierlich absteigen, so dass es ein Maximum der z in einem mittleren Teile der Verteilungstafel (beim sog. dichtesten Werte) und zwei Minima respektive beim Anfange und Ende der Tafel (bei den extremen a) giebt. Wenn man die a als Abscissen, die z als die Ordinaten nimmt, kann man dadurch in bekannter Weise die gesetzliche Verteilung graphisch darstellen und erhält damit eine Kurve, welche bei klein genommenen i glatt bis zu einem Gipfel ansteigt und von da wieder absteigt. Aber bei den von mir sogenannten primären, d. h. unmittelbar aus den Urlisten der Maße abgeleiteten Tafeln wird man insgemein vom Anfange herein durch die ganze Tafel ein unregelmäßiges Auf- und Absteigen der z bei kontinuierlichem Wachsen der a, hiermit eine höckerige Beschaffenheit der Verteilungskurve finden; wozu die primären Verteilungstafeln des VII. Kapitels hinreichende Beispiele gewähren. Die allgemeinste, ja nie fehlende Ursache solcher Unregelmäßigkeiten nun liegt jedenfalls in unausgeglichenen Zufälligkeiten, und die hiervon abhängigen Höcker der Kurve schwinden durch eine hinreichend weit getriebene Reduktion der Tafel, d. h. nach früher (§ 6) angegebener Erklärung, Zusammennahme der z für gleich gehaltene Intervalle der a durch die ganze Tafel wie in Kapitel VIII auszuführen und durch Beispiele reduzierter Tafeln zu belegen. Aber zum Teil kann die Ursache auch darin liegen, dass K.-G. von disparater Beschaffenheit ihrer Hauptwerte sich gemischt haben.

In der That lässt sich schon aus allgemeinem Gesichtspunkte übersehen, dass, wenn wir z. B. die Maße von gleich viel Männern und Frauen, die im arithmetischen Mittelwert wie dichtesten Wert sehr von einander abweichen, vermischen wollten, dadurch wesentlich,

d. i. abgesehen von unausgeglichenen Zufälligkeiten, ein Anlass zur Entstehung zweier Maximal-z mithin zweier dichtesten Werte entstehen würde, ja es könnten durch Vermischung von noch mehr disparaten Gegenständen Verteilungstafeln mit wesentlich noch mehr Maximal-z entstehen. Jedenfalls nun eignen sich zur Prüfung der Fundamentalgesetze der Verteilung nur Verteilungstafeln mit einem Maximal-z im Hauptbestande der Tafel, wogegen kleine Unregelmäßigkeiten nach den Enden der Tafel zu ohne erhebliche Störung sind. Liegen daher Verteilungstafeln vor, welche dieser Bedingung nicht entsprechen, so sind sie zur Prüfung der Gesetze nur nach solcher Reduktion brauchbar, dass sie durch hinreichende Ausgleichung der Zufälligkeiten derselben entsprechen, wonach sich die betreffenden Gesetze an der reduzierten Tafel noch sehr wohl bestätigen können, wenn die Mehrheit der Maximal-z im Hauptbestande der Tafel wirklich nur von unausgeglichenen Zufälligkeiten abhing.

Jedoch ist nicht außer Acht zu lassen, dass, da durch die Reduktion einer Verteilungstafel deren Intervalle vergrößert werden, mit den unausgeglichenen Zufälligkeiten zugleich die, von disparater Beschaffenheit der Komponenten der Tafel abhängige, Mehrheit der Maximal-z schwinden kann, wenn diese nämlich auf einander nahe a fallen, welche gemeinsam in das durch die Reduktion vergrößerte Intervall treten, hiermit ununterscheidbar werden, ja man braucht nur mit der Reduktion und hiermit Vergrößerung der Intervalle beliebig weit zu gehen, um dies sicher zu erreichen. Also wird zwar die Regel, die hinsichtlich der Verteilung zu prüfende Tafel durch Reduktion auf bloß ein Maximal-z und einen von da nach beiden Seiten absteigenden Gang der z zu reduzieren, beizubehalten sein, doch eine etwaige Abweichung von den Fundamentalgesetzen dann immer noch möglicherweise von einer disparaten Beschaffenheit der Komponenten der Tafel, die sich durch die Reduktion verwischt hat, abhängen können; mithin auch in dieser Beziehung nur die Untersuchung der Verteilung selbst entscheidend sein können.

§ 18. Jedoch wir sind mit unseren Requisiten noch nicht zu Ende. Gegenstände, welche von Menschen mit Bezug auf gewisse Zwecke oder Ideen gestaltet sind, kurz nennen wir sie artistische, unterliegen trotz der Absicht, die bei ihrer Entstehung obgewaltet hat, doch hinsichtlich der Größenbestimmungen, welche dem Zufall noch freien Raum lassen, den Kollektivmaßgesetzen; wenn aber Nebenrücksichten oder Nebenzwecke die Freiheit des Zufalls durch Bevorzugung oder Ausschließung einzelner Dimensionen wesentlich beschränken, so kann den Gesetzen auch wesentlich Abbruch geschehen, was sich durch folgende Beispiele erläutert.

Visitenkarten, sowie die sog. Adresskarten von Kaufleuten und Fabrikanten sieht man auf das Mannigfaltigste nach Länge wie Breite variiert, und ich glaubte anfangs, ein vorzügliches Objekt zur Prüfung unserer Gesetze darin zu haben, da sie sich in großer Anzahl, sei es aus dem täglichen Verkehr, sei es aus den Musterbüchern ihrer Verfertiger, worin sich Probeexemplare eingeklebt finden (deren ich viele von verschiedenen Verfertigern zu Messungen benutzt habe), erhalten lassen und dabei den Vorteil gewähren, dass man die Genauigkeit der Messung und Schätzung mehr als bei vielen anderen Gegenständen in der Hand hat. Aber obwohl sie sich, sei es nach Länge, sei es nach Breite gemessen, unseren Gesetzen keineswegs ganz entziehen, bieten sie doch nur eine sehr unvollkommene Bewährung derselben dar, wovon man den Grund in folgenden Umständen suchen kann.

Bei aller Variation ihrer Dimensionen wird doch die Freiheit des Zufalls dadurch eingeschränkt, dass die Verfertiger insgemein solche Dimensionen vorziehen, welche gestatten, die Kartonbogen, aus denen die Karten geschnitten werden, möglichst auszunutzen, d. h. so vollständig als möglich zu verbrauchen, dabei auch wohl gewisse, besonders beliebte Verhältnisse zwischen Breite und Länge, insbesondere 2 : 3 oder 3 : 5 (Annäherungen an den goldenen Schnitt) einzuhalten; und in der That habe ich mich bei den Messungen solcher Karten, die ich in den Musterbüchern einer Mehrheit von Fabrikanten vorgenommen, überzeugt, dass bei jedem derselben gewisse Dimensionen öfter vorkommen, als dass man es als zufällig ansehen könnte. Die Dimensionen der Galleriegemälde im Lichten des Rahmens aber unterliegen nicht demselben Nachteil und werden, nachdem ich eine große Menge Maße derselben aus den Katalogen der verschiedensten

Gallerien zusammengebracht (vergl. Kap. XXVI), ein vorzügliches Material zur Bewährung der logarithmischen Maßgesetze liefern.

§ 19. Bei den Naturgegenständen andererseits gehört zu den durch den Begriff selbst bedingten Requisiten, dass die Exemplare nicht in einer naturgesetzlichen Abhängigkeit von einander stehen, welche aus den Zufallsgesetzen heraustritt. Dieser Punkt kommt namentlich bei meteorologischen K.-G. in Rücksicht. Thermometer- und Barometerstände, sowie andere meteorologische Werte zeigen an jedem Orte ein zwar im einzelnen durch Zufälligkeiten gestörtes, aber in Mittelwerten sich entschieden herausstellendes, gesetzliches Auf- und Absteigen schon beim Verfolge durch die Stunden eines Tages, nicht minder durch die Tage oder Monate eines Jahres. Diese sog. periodischen meteorologischen Werte fallen nicht unter den Begriff eines K.-G., sondern nur die nicht periodischen, insofern sie als zufällig wechselnd angesehen werden können. In dieser Beziehung können wir in Kürze meteorologische Tageswerte, Monatswerte und Jahreswerte, insofern sie von ihren vieljährigen Mitteln abweichen, und diese Abweichungen selbst als Tagesabweichungen, Monatsabweichungen und Jahresabweichungen unterscheiden, worauf hier etwas bestimmter einzugehen sein wird, da vielfach Anlass sein wird, auf solche zurückzukommen. Knüpfen wir die Erläuterung an die thermischen Werte und Abweichungen, wovon sich die Übertragung auf andere Arten meteorologischer Werte und Abweichungen von selbst ergiebt.

Thermische Tageswerte kann jeder nach seinem Jahresdatum bestimmte Tag insbesondere geben, sagen wir z. B. der 1. Januar. Nehmen wir als Temperatur dieses Tages an einem gegebenen Orte in einem gegebenen Jahre, kurz als thermischen Tageswert des 1. Januar sei es den aus seinen 24 Stunden bestimmten Mittelwert oder die Temperatur einer, dann konsequent beizubehaltenden, bestimmten Tagesstunde oder auch das Mittel aus der Maximal- und Minimaltemperatur des Tages. Dieser Tageswert des 1. Januar sei durch eine Reihe von Jahren hinter einander beobachtet. Die nach den Jahren zufällig wechselnden Tageswerte repräsentieren die Exemplare *a* eines zeitlichen K.-G. Man ziehe daraus den arithmetischen

Mittelwert, indem man die Summe der Tageswerte mit der Zahl derselben dividiert, welche mit der Zahl der Jahre, durch welche man beobachtet hat, zusammenfällt. Dieses Mittel heiße das allgemeine thermische Tagesmittel des 1. Januar, und die Abweichungen der in den verschiedenen Jahren erhaltenen Tageswerte a von dem allgemeinen Tagesmittel A bilden dann die einzelnen Tagesabweichungen, welche nach der angegebenen Bezeichnungsweise mit Δ zu bezeichnen sind. Entsprechende Bestimmungen können für den 2. Januar und jeden anderen Jahrestag an jedem Beobachtungsorte insbesondere erhalten werden.

Anstatt für jeden Tag des Jahres aber können solche Bestimmungen auch für jede bestimmte Woche des Jahres, für jeden Monat des Jahres und für das ganze Jahr selbst aus mehrjährigen Beobachtungen erhalten werden, die dann als Wochenwerte, Wochenabweichungen, Monatswerte, Monatsabweichungen, Jahreswerte, Jahresabweichungen zu bezeichnen sind. Hiervon verdienen die thermischen Monatswerte und Monatsabweichungen besondere Beachtung, weil besonders zahlreiche Bestimmungen an vielen Orten dafür vorliegen. Die thermischen Monatswerte als a erhält man also z. B. für den Januar (und entsprechend für jeden anderen Monat) in den durch eine Reihe von Jahren bestimmten Mitteltemperaturen des Januar, welche aus den 31 Tagen desselben zu gewinnen sind, die thermischen Monatsabweichungen des Januar als Δ in den Abweichungen dieser a von dem allgemeinen Mittel der a. Anstatt arithmetischer Mittel und Abweichungen davon, lassen sich aber auch andere Hauptwerte und Abweichungen davon aus solchen Werten ableiten.

Meteorologische K.-G. dieser Art sind für die Untersuchung ihrer allgemeinen Gesetze überhaupt aus mehreren Gesichtspunkten schätzbar; einmal wegen des reichlichen Materiales, was dafür in den Quellen der Meteorologie vorliegt oder daraus zusammengestellt werden kann, zweitens wegen der Genauigkeit der Bestimmungen, die mit den meteorologischen Beobachtungsmitteln und Methoden erreichbar ist, drittens weil diese Gegenstände bisher das einzige Material liefern, wonach zu beurteilen, ob zeitliche K.-G. denselben Gesetzen unterliegen als räumliche. Nur leiden sie an dem sehr wichtigen

Nachteil, dass, da das m derselben mit der Zahl der Jahre, durch welche die Beobachtungen reichen, zusammenfällt, nicht leicht ein großes m derselben, ja nirgends bisher ein solches vorliegt, wie es für die Sicherheit der daraus zu ziehenden Resultate erwünscht wäre.[1])

§ 20. Nun kann man allerdings ein viel größeres m aus einer gegebenen Anzahl von Jahren, als die Zahl der Jahre beträgt, auf folgendem Wege erhalten, der bei wichtigen Bedenklichkeiten doch nicht schlechthin zu verwerfen ist.

Um von den bestimmten Vorstellungen eines Quetelet'schen Beispiels (s. Quetelet's Lettres, letzte Vertikalspalte der Tabelle p. 78) auszugehen, nehmen wir an, die Temperatur aller Januartage als Mittel zwischen Minimum- und Maximum-Temperatur jedes Tages an einem bestimmten Orte (Brüssel) sei durch 10 Jahre beobachtet worden, so werden wir nach angegebener Bestimmungsweise, welche als korrekt anzusehen ist, für jeden der 31 Januartage als K.-G., den ersten, zweiten, dritten u. s. w. ein $m = 10$ erhalten, was viel zu wenig ist, um die Verteilungsgesetze daran zu studieren; hiergegen werden wir ein $m = 310$ für den ganzen Januarmonat als K.-G. erhalten, wenn wir nach Quetelet's Vorgange bei dem betreffenden Beispiele so verfahren, dass wir die 31 Tagestemperaturen des Januar als Exemplare der Januar-Tagestemperatur für die 10 Jahre zusammennehmen, giebt 310 Exemplare, hieraus das arithmetische Mittel durch Division mit 310 ziehen, hiervon die 310 Abweichungen Δ nehmen und, wenn wir wollen, auch die anderen Hauptwerte mit den Abweichungen davon daraus bestimmen.

Nun leuchtet freilich von vornherein ein, dass, da abgesehen von den zufälligen Änderungen die Temperatur des Januar vom 1. bis zum 31. Tage gesetzlich wächst, wir hiermit eine Komplikation des zufälligen Ganges mit einem naturgesetzlichen Gange der Tageswerte erhalten, indes streng genommen der naturgesetzliche Gang bei Untersuchung der wesentlichen Verteilungsgesetze ausgeschlossen sein

1) Unter den 70 Orten, für welche Dove in einer seiner Abhandlungen die thermischen Monatsabweichungen verzeichnet, ist es bloß Berlin, wo 100 als m überschritten wird, indem der Verfolg durch 138 Jahre geschehen ist, und bloß Prag und London zeigen ein m über 90, respektive 94 und 92.

soll. Indes lässt sich wohl zugeben, dass die Änderungen der Tagestemperatur, welche durch den gesetzlichen Fortschritt derselben während eines Monates bedingt sind, gegenüber der durchschnittlichen Größe der zufälligen Änderungen der einzelnen Tagestemperaturen zu wenig in Betracht kommen, um die Zufallsgesetze erheblich zu stören; jedenfalls dieselben nicht aufheben, sondern eben nur stören können. Aber ein wichtigeres Bedenken erhebt sich daraus, dass ganz abgesehen von dem gesetzlichen Fortschritte durch einen Monat die meteorologischen Zustände der unmittelbar auf einander folgenden Tage überall eine gewisse Abhängigkeit von einander verraten, welche in den Gesetzen des Zufalls nicht vorgesehen ist. Im allgemeinen folgen sich mehrere warme, d. i. über der Wertmitte der Temperatur des Januar stehende, und mehrere kalte, d. i. unter dieselbe fallende Tage hinter einander, und vollzieht sich der Übergang von den einen zu den anderen nicht sprungweise, sondern durch successives Aufsteigen bis zu einer gewissen Höhe über die Wertmitte und, da das Steigen doch nicht ins Unbestimmte gehen kann, Wiedersinken bis zu einer geringeren Höhe oder bis unter die Wertmitte, nur dass keine regelmäßige Periodizität in diesem Wechsel zwischen Aufsteigen und Absteigen sichtbar ist. Ähnlich mit allen sog. unregelmäßigen periodischen Veränderungen.

Hierzu scheint mir nützlich, die Bemerkung zu machen, dass es ein sehr einfaches Mittel giebt, sich eben so von den Forderungen des reinen Zufalls für derlei Fälle als der Nichtbefriedigung durch diese Fälle zu überzeugen. Ich habe mir aus einer Reihe von Jahren die Ziehungslisten sächsischer Lotterien verschafft, in welchen die Gewinnnummern nach der Reihenfolge, wie sie herausgekommen, verzeichnet sind. Wenn irgendwo, spielt hier der Zufall seine reine Rolle. Bezeichnen wir nun die geradzahligen Nummern mit einem +, die ungeradzahligen mit einem —, und verfolgen die Reihe der Zeichen durch eine große Anzahl von nacheinander folgenden Gewinnnummern, so finden wir, abgesehen von einem kleinen Unterschiede wegen unausgeglichener Zufälligkeiten, eben so viel Folgen gleicher Zeichen als Wechsel der ungleichen. Thun wir aber ebenso mit den + Fällen über und — Fällen unter der aus der Gesamtheit der Fälle bestimmten Wertmitte bei meteorologischen Tagestabellen, so überwiegt entschieden die Anzahl der Folgen über die der Wechsel, Beweis einer aus den Zufallsgesetzen heraustretenden Abhängigkeit der aufeinander folgenden meteorologischen Tageswerte. Weiter aber, wenn wir statt voriger Bezeichnung der aufeinander folgenden Lotterienummern jedes Übersteigen einer Nummer durch die folgende mit +, jedes Herabsinken der folgenden unter die vorige mit — bezeichnen, so finden wir beim Verfolg durch eine große Zahl Nummern (abgesehen von unausgeglichenen Zufälligkeiten) die Zahl der Wechsel doppelt so groß als die der Folgen; thun wir aber eben so mit einer entsprechenden Bezeichnung der aufeinander folgenden meteorologischen Tageswerte, so bleibt die Zahl der Wechsel weit hinter der doppelten Zahl der Folgen zurück, zweiter Beweis, dass das Steigen und Fallen der meteorologischen Werte von Tag zu Tag nicht den reinen Zufallsgesetzen gehorcht. Man vervollständigt und verschärft diese Untersuchung, die ich für jetzt nur andeute, um in einem späteren Kapitel darauf zurückzukommen, dadurch, dass man, um auch die Abweichungen von jenen Gesetzen des reinen Zufalls, welche streng nur für unendliches m gelten, durch unausgeglichene Zufälligkeiten zu berücksichtigen, auch die von der Endlichkeit des m abhängigen wahrscheinlichen und mittleren Abweichungen von der Aussage der Gesetze bestimmt, wofür sich in der That Formeln aufstellen lassen.

Aus einer eingehenden Untersuchung hat sich mir nun ergeben[1], dass, während die meteorologischen Werte aufeinander folgender Tage desselben Monates die angegebenen Merkmale der Abhängigkeit in eminentem Grade zeigen, selbst die Monatsabweichungen aufeinander folgender Jahre derselben nicht ganz entzogen sind, wenn schon sie so schwach und wenig entschieden zeigen, um bei Benutzung derselben keine erhebliche Störung der Zufallsgesetze besorgen zu dürfen; und es verdient aber dieser Gegenstand unstreitig eine noch eingehendere und ausgedehntere Untersuchung seitens Fachmeteorologen mit Hilfe jener Kriterien im Interesse der Meteorologie selbst, als ich

1) [Hierzu werden im XXIII. Kap. Belege gegeben.]

ihm hier habe zu Teil werden lassen, wo es nur in dem Interesse geschah, zu ermitteln, welcherlei K.-G. sich überhaupt zur Prüfung und Anwendung der reinen Zufallsgesetze eignen.

Inzwischen ist wichtig zu bemerken, dass die nach Vorigem ausgeschlossen scheinende Möglichkeit, die Zufallsgesetze auf meteorologische Werte, welche eine Abhängigkeit der genannten Art von einander zeigen, anzuwenden, sich für den Fall wieder herstellen könnte, dass bei sehr großem m die Abhängigkeitsverhältnisse selbst zufällig wechseln.

Stellen wir uns zur Erläuterung hiervon eine Urne mit unendlich viel weißen und schwarzen Kugeln vor, welche mit Nummern bezeichnet sind, die den Abweichungsgrößen von einem gegebenen Hauptwerte entsprechen, und zwar so, dass die Zahl des Vorkommens von jeder dieser Art Kugeln der Zahl des Vorkommens der entsprechenden Abweichungswerte, wie sie für reine Zufallsgesetze bestehen, entspricht. Also im Falle symmetrischer Wahrscheinlichkeit sei das Gauss'sche Gesetz bezüglich Abweichungen vom arithmetischen Mittel, im Falle asymmetrischer Wahrscheinlichkeit unser später zu besprechendes allgemeineres Gesetz auf diese Weise repräsentiert; wobei durch weiße Kugeln positive, durch schwarze Kugeln negative Abweichungen vorgestellt werden. Geschehen nun recht viele Züge nach Zufall aus dieser Urne, so werden die gezogenen Kugeln in ihren Verhältnissen das betreffende Gesetz, abgesehen von den, wegen der immer nur endlichen Zahl der Züge noch übrig bleibenden, unausgeglichenen Zufälligkeiten, richtig repräsentieren. Aber dasselbe wird auch noch der Fall sein, wenn zwei, drei oder mehr Kugeln, welche einander in ihren Werten nahestehen, sei es nach einer bestimmten Regel oder ohne solche, zusammengeklebt sind, so dass man sie nur zusammen herausziehen kann; nur wird eine größere Zahl der Züge, ein größeres m, dazu gehören, um eine gleich gute Befriedigung der betreffenden Gesetze zu erlangen, als es bei losen Kugeln der Fall ist.

Natürlich kann die Frage, ob es sich mit den meteorologischen Tageswerten nach Analogie hiervon verhält, nicht nach dieser Analogie als abgemacht angesehen werden, welche bloß zeigt, dass es sich möglicherweise so verhalten könnte. Doch fügt sich nicht nur das Quetelet'sche Beispiel (Lettres p. 78) mit $m = 310$ (in Wirklichkeit vielmehr wegen Fehlens eines Beobachtungstages 309) bei näherer Untersuchung durch die Verteilungsweise seiner x ganz gut einer solchen Voraussetzung, sondern auch thermische und barometrische Beispiele mit weit größerem m, die ich selbst in Untersuchung gezogen (vergl. Kap. XXVII), sprechen für dieselbe, so dass sie mindestens mit größter Wahrscheinlichkeit als gültig angesehen werden kann, was nicht nur für unsere Lehre, sondern auch für die Meteorologie von Interesse sein dürfte. Quetelet selbst ist auf die Frage nicht eingegangen.

§ 21. Übrigens ist sehr erwünscht, dass doch ein meteorologisches Beispiel zu Gebote stehe, in welchem sich das Vorkommen zahlreicher Einzelfälle mit fehlender Abhängigkeit der successiven Fälle von einander verbindet. In der Bibliothèque universelle de Genève (Archives des sciences physiques et naturelles) findet sich in jedem Monatshefte eine meteorologische Tabelle für Genf[1]), worin unter anderen Kolumnen, welche für Thermometer, Barometer u. s. w. gelten, auch eine Kolumne mit der Überschrift: »Eau tombée dans les 24 heures« gegeben ist, welche für jeden stattgehabten Regentag des betreffenden Monates im betreffenden Jahre die Höhe des gefallenen Wassers in Millimetern angiebt. Nun folgen allerdings gemeinhin mehrere nasse wie trockene Tage hinter einander, aber — und das ist es, worauf es uns ankommt, und wovon das Analoge nicht bei den aufeinander folgenden thermischen oder barometrischen Tageswerten der Fall ist, — die im Regenmesser aufgefangenen Regenhöhen auf einander folgender Tage verraten keine Größenabhängigkeit von einander. In der That sieht man schon beim oberflächlichsten Blick die Regenhöhen der betreffenden Kolumne auf das Unregelmäßigste wechseln und nicht selten auf die gewaltige Regenhöhe eines Tages eine ganz niedrige des nächsten Tages oder umgekehrt folgen. Entscheidend aber in betreffender Hinsicht sind unsere obigen zwei Kriterien; und es ist bemerkenswert, welch andere

1) Eine andere, ganz entsprechend eingerichtete Tabelle für die meteorologische Station auf dem St. Bernhard.

Resultate sie in Bezug auf die in vorigem Sinne verstandenen täglichen Regenhöhen als auf die thermischen und barometrischen Tageswerte geben, wozu man später (Kap. XXIII) Belege finden wird.

Ich habe mich demgemäß die Mühe nicht verdrießen lassen, die in der Genfer Zeitschrift enthaltenen Data für die Genfer Regenhöhen aus sämtlichen Jahrgängen, durch welche sie reichen, auszuziehen, und habe nach den 12 Monaten 12 Abteilungen daraus gebildet, deren jede einen besonders zu behandelnden K.-G. darstellt. Darin sind z. B. als Exemplare *a* des Januar nicht nur alle Regenhöhen (unstreitig meist aus geschmolzenem Schnee), welche in einem Januarmonat vorgekommen sind, sondern welche in den Januarmonaten aller Jahre, durch welche die Regenhöhen verfolgt sind, stattgefunden haben, zusammengenommen, und hierdurch wird für jeden Monat ein sehr beträchtliches *m* erhalten. Nun ließ sich freilich besorgen, dass diese Mühe für unseren Zweck vergeblich war, weil sich ja gar nicht a priori behaupten ließ, dass die Regenhöhen überhaupt sich denselben Verteilungsgesetzen fügen wie Rekrutenmaße, Schädelmaße u. dgl.; aber im Gegenteil hat sie sich dadurch gelohnt, daß die Regenhöhen mit den Dimensionen der Galleriegemälde bisher das einzige Material liefern, woran sich unser logarithmisches Verteilungsgesetz durchschlagend bewähren ließ, indem sie mit einer ungeheueren Asymmetrie, welche die Hauptwerte weit auseinander fallen macht, zugleich im Verhältnisse zu den Hauptwerten sehr starke mittlere Abweichungen bieten, wodurch sie sich der Anwendbarkeit der arithmetischen Behandlungsweise entziehen (s. Kap. XXI, sowie XXVI und XXVII). Und unstreitig hat es sein besonderes Interesse, dass so verschiedene Dinge wie Gemäldedimensionen und Regenhöhen sich so bestimmten und eigentümlichen Verteilungsgesetzen, als wir aufzustellen haben werden, gemeinsam unterordnen.

Sehr möglich übrigens giebt es noch einen anderen Fall meteorologischer Tageswerte von entsprechender Successionsunabhängigkeit, um diesen kurzen Ausdruck zu gebrauchen, als die täglichen Regenhöhen zeigen, auf den um so mehr nötig ist, etwas näher einzugehen, als er unter die empirischen Unterlagen unserer Untersuchung mitfällt und von Quetelet selbst zu den seinigen in einer meines

Erachtens freilich nicht triftigen Weise zugezogen ist, in welcher Beziehung mehrfach von mir darauf zurückzukommen sein wird. Das sind die sog. Variations diurnes von Quetelet, wovon Quetelet in seinen Lettres p. 174 fg., mit Tabellen p. 408 bis 411 handelt, indes ich selbst in dem Kap. XXVII näher darauf zu sprechen komme; hier aber bloß die Natur derselben vorläufig feststelle und mit Bezug auf die fragliche Unabhängigkeit ins Auge fasse.

Es ist oben gesagt worden, dass Quetelet die Temperatur aller Tage jedes Monates als Mittel zwischen Maximum- und Minimumtemperatur jedes Tages (für Brüssel) festgestellt und dies durch 10 Jahre fortgeführt hat. Die Abweichung zwischen beiden Temperaturen, als deren Mittel die Tagestemperatur gilt, ist nun das, was Quetelet »variation diurne« (tägliche Variation) nennt. Dabei muss man sich wohl vergegenwärtigen, dass diese Abweichung der beiden Tagesextreme von einander groß oder klein bei derselben Mitteltemperatur dazwischen, also derselben Tagestemperatur, sein kann, dass mithin die Successionsabhängigkeit, welche die Tagestemperaturen zeigen, sich gar nicht notwendig auf die Variations diurnes zu erstrecken braucht. In der That kann dieselbe Tagestemperatur, z. B. von 10°, als Mittel aus 9,5° und 10,5°, aus 8° und 12°, aus 5° und 15° hervorgehen, was Variationen resp. von 1°, 4°, 10° giebt; ja, wenn an einem Tage die Temperatur ganz konstant bliebe, so könnte sie noch so hoch oder niedrig sein, und die Variation würde doch null sein. Wie nun Quetelet die Temperatur der Tage jedes Monates durch 10 Jahre verfolgt hat, die man als Exemplare eines K.-G. behandeln kann, so die zugehörigen Variations diurnes, worin man Exemplare eines anderen K.-G. sehen kann. Zwar hat Quetelet die Variations diurnes nicht für alle Tage jedes Monates spezialisiert, was Tabellen von gewaltiger Ausdehnung erfordert haben würde, ohne die Möglichkeit der übersichtlichen Zusammenfassung zu gewähren, aber er hat p. 410, 411 Tabellen gegeben, worin für jeden Monat angegeben ist, wie oft während 10 Jahren die Variation diurne zwischen 0° und 1°, zwischen 1° und 2°, zwischen 2° und 3° u. s. w. betragen hat, kurz reduzierte Intervalltafeln im Sinne unseres späteren (VIII.) Kapitels.

Wenn nun, wie oben bemerkt, die Variations diurnes ihrer Größe nach wesentlich unabhängig von der Größe der zwischen ihnen liegenden Tagestemperaturen erscheinen, mithin die Successionsabhängigkeit derselben nicht notwendig zu teilen brauchen, so scheint auch einer solchen Abhängigkeit zu widersprechen, dass die Tabellen der monatlichen Variations diurnes bei einem m, was für die einzelnen Monate zwischen 282 (Februar) und 309 bis 310 (Januar und August) schwankt, einen so regelmäßigen Gang und eine so gute Übereinstimmung mit den sonst gültigen Gesetzen asymmetrischer Verteilung zeigen, als man bei vorhandener Successionsabhängigkeit kaum erwarten möchte; indessen zeigt die von Quetelet p. 78 gegebene Tabelle der Tagestemperaturen des Juli, verglichen mit der zugehörigen Tabelle der Variations diurnes p. 411, dass der Gang der z in beiden Tabellen ähnlich und gleich regelmäßig ist, so dass man auch ohne Annahme der betreffenden Unabhängigkeit schon nach dem erst besprochenen Prinzip diese Tabelle würde als brauchbar in dem Sinne ansehen können, wie es von uns geschehen wird.

§ 22. Hiernach noch folgende allgemeine Bemerkungen:

Im allgemeinen werde ich Punkte, wodurch sich K.-G., selbst bei hinreichend großem m, also abgesehen von unausgeglichenen Zufälligkeiten, der Bewährung unserer Gesetze entziehen können, als Ungehörigkeiten oder Abnormitäten, Gegenstände aber, welche davon frei sind, als einwurfsfreie bezeichnen. Die Abnormitäten sind, wie man sieht, verschiedener Art und können die Gültigkeit der Gesetze in sehr verschiedener Hinsicht und sehr verschiedenem Grade beeinträchtigen. Es kann zu den allgemeinen Aufgaben der Kollektivmaßlehre gerechnet werden, den Einfluss dieser Abnormitäten festzustellen, was teils theoretisch mit Rücksicht auf die an den fehlerfreien Gegenständen erkannten Verteilungsgesetze, teils empirisch geschehen kann, und zwar letzteres auf einem doppelten Wege. Einmal kann man den Erfolg der Abnormitäten an den abnormen Beispielen selbst, welche die Wirklichkeit bietet, verfolgen; zweitens, und dies scheint mir der zugleich fruchtbarere und zur Kontrolle des ersten Weges selbst mit zuzuziehende Weg, man kann künstlich Verteilungstafeln mit gegebenen Elementen konstruieren, welche den fehlerlosen Verteilungsgesetzen genau entsprechen, dann diese oder jene Abnormität daran anbringen und den Erfolg auf die Werte der Elemente und deren Verhältnisse daraus entnehmen.

Hier liegt noch ein Feld der Untersuchung für andere vor, da ich dasselbe über der schon so weitschichtigen Aufgabe, die Verhältnisse der K.-G. unter der Voraussetzung der Fehlerlosigkeit festzustellen, keineswegs hinreichend erledigt habe.

In jeder Hinsicht vollkommen fehlerfreie Gegenstände mit großem m sind bei der Mannigfaltigkeit möglicher Fehler wohl kaum zu beschaffen, und es sind daher bei den Gegenständen, welche empirischerseits zur Feststellung oder Bewährung der fundamentalen Gesetze der K.-G. dienen sollen, außer den Abweichungen von den idealen gesetzlichen Verteilungsverhältnissen wegen Endlichkeit des m und Größe des i noch Abweichungen wegen mangelnder Erfüllung der Requisiten oder kurz wegen Fehlerhaftigkeit insoweit zuzulassen, als sie sich in hinreichend engen Grenzen halten, um nicht gegen die Gültigkeit der aufgestellten Fundamentalgesetze selbst Bedenken zu erwecken, worüber freilich dem subjektiven Ermessen immer ein gewisser Spielraum bleibt. Bestimmungen und Verhältnisse, die sowohl den Abweichungen wegen der Endlichkeit des m, als wegen Größe des i, als wegen mangelnder Erfüllung der Requisiten entzogen sind, nenne ich hiernach, außer dem schon gebrauchten Ausdrucke f u n d a m e n t a l e, auch n o r m a l e oder i d e a l e, sofern sie in der Wirklichkeit nur in Annäherungen vorkommen.

Übrigens ersieht man aus Vorigem, worin für die Kollektivmaßlehre, trotzdem dass sie sich aus den im Vorworte angegebenen Gesichtspunkten zu den exakten Lehren rechnen kann, die Schwierigkeit liegt, es in ihren Anwendungen zu ganz sicheren Resultaten zu bringen. Es sind andere Punkte, als für die Physiologie und Psychophysik in dieser Hinsicht bestehen; aber sie haben einen ähnlichen Erfolg. Immerhin bleibt es ein Vorzug aller dieser Lehren als exakter, einmal die Sicherheit im einzelnen doch so weit als möglich zu treiben, zweitens zu allgemeinen Gesetzlichkeiten zu führen.

§ 23. Die bisherigen Bemerkungen betrafen Requisiten, welche die in Untersuchung zu nehmenden K.-G. selbst zu erfüllen haben;

aber es giebt auch Requisiten, welche die Untersuchung zu erfüllen hat. Die Verteilungstafeln können in mehr oder weniger zweckmäßiger oder brauchbarer Form aufgestellt werden, worüber in Kap. VII und VIII Näheres gesagt ist. Die unausbleiblichen Fehler, welche bei Messung der Exemplare begangen werden, müssen unerheblich genug sein, um nicht störend in die Bewährung der Gesetze einzugreifen, und die Messungsgenauigkeit wird daher im allgemeinen so weit zu treiben sein, dass die Messungsfehler gegen die Kollektivabweichungen vernachlässigt werden können. Bei den Messungen pflegen die auf dem Maßstabe angegebenen Abteilungen noch durch Schätzung untergeteilt zu werden; und hierbei ist sehr gewöhnlich, dass die ganzen und halben Abteilungen bevorzugt werden, was ich den Fehler der ungleichförmigen Schätzung nenne, und wovon ich Beispiele bez. der Rekrutenmaße und Schädelmaße in Kap. VII anführe. Solche Fehler können für die genaue Bestimmung der Elemente nachteilig sein, und es gilt daher dagegen auf der Hut zu sein und, wo solche vorliegen, sie durch eine angemessene Reduktion möglichst unschädlich zu machen, worüber künftig das Nähere. Bei der Menge der zu nehmenden Maße sind Versehen in der Maßnahme selbst oder deren Aufzeichnung nur zu leicht möglich, und es giebt vielleicht kein anderes Mittel, sie sicher zu vermeiden, als die Messungen zweimal unabhängig von einander vorzunehmen und dadurch zu kontrollieren, wie von mir bei Messung der Roggenähren geschehen; da aber die mühselige Arbeit dadurch verdoppelt wird, wird man sich schwerlich überall dazu verstehen. Noch schwerer ist es, Rechenversehen bei Verwertung einer großen Menge von Maßen für Bestimmung der Elemente und Bewährung der Gesetze zu vermeiden; und mindestens bezüglich jedes auffälligen oder wichtigen Resultates ist eine Kontrolle durch Wiederholung der Rechnung nicht zu ersparen.

Im allgemeinen giebt es zur Bestimmung der Elemente sichere und unsichere Wege, und natürlich sind die ersten an sich vorzuziehen; da aber überhaupt nur Approximationen an die idealen Werte der Elemente erreichbar sind, so kann es sein, dass ein kleiner Vorteil in dieser Hinsicht nicht gegen die Erleichterung in Betracht kommt, welche ein etwas minder sicherer Weg gewährt, und so kann aus praktischem Gesichtspunkte ein solcher doch vorzuziehen sein, wenn er genügt, ein Resultat, was man im Auge hat, noch mit zufriedenstellender Sicherheit zu konstatieren. Astronomische Genauigkeit und Sicherheit lässt sich nun einmal in diesem Falle nicht erzielen, und es kann sein, dass durch den vergeblichen Anspruch, eine solche doch erzielen zu wollen, eine Untersuchung überhaupt undurchführbar wird.

V. Gauss'sches Gesetz der zufälligen Abweichungen (Beobachtungsfehler) und dessen Verallgemeinerungen.

§ 24. Nachdem GAUSS[1]) das Grundgesetz der sog. Beobachtungsfehler, d. i. der zufälligen Abweichungen von Beobachtungsmitteln, nicht nur theoretisch aufgestellt hat, sondern auch dasselbe von BESSEL[2]) an astronomischen Daten empirisch bewährt worden ist, liess sich vermuten, dass es bloß gelte, dies Gesetz auf die zufälligen Abweichungen der Exemplare a eines K.-G. von ihrem arithmetischen Mittel A, also auf die Θ bezüglich dazu, zu übertragen, um dafür das Entsprechende wie für die Beobachtungsfehler zu haben, d. h. damit ein Gesetz zu haben, welches gestattet, nach empirischer Feststellung des arithmetischen Mittels und eines Hauptabweichungswertes bezüglich dazu, als wie der mittleren Abweichung $\varepsilon = \Sigma\Theta : m$, die ganze Verteilung eines K.-G. nach Maß und Zahl zu bestimmen, d. i. zu bestimmen, in welchem Verhältnisse zur Gesamtzahl m (vorausgesetzt, dass diese nicht zu klein ist) Exemplare in irgend welchen Größengrenzen der Abweichung vom Mittel vorkommen.

Da wir nun bei der Aufgabe, ein allgemeines Verteilungsgesetz für K.-G. zu finden, jedenfalls von dem GAUSS'schen Gesetze (kurz G. G.) werden auszugehen, wiederholt darauf zurück zu kommen haben, und es in der That in gewisser Beschränkung für K.-G. annähernd zulänglich finden, nur schließlich einem allgemeineren Gesetze sich unterordnen werden sehen, so wird hier Einiges über dies

1) [Theoria motus corporum coelestium, 1809. Lib. II, Sect. III. — Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae; Commentationes societ. reg. Scient. Götting. rec. Vol. V. 1823.]

2) [Fundamenta astronomiae, 1818; Sect. II.]

Gesetz vorauszuschicken sein. Fach-Astronomen und Physikern ist es zwar längst bekannt und geläufig, indem sie auf Grund desselben den bei Bestimmung eines Beobachtungsmittels gemachten wahrscheinlichen Fehler berechnen; aber ich habe hier auch andere Kreise der Leser und andere Verwendungsweisen des Gesetzes vorauszusetzen und gehe deshalb zunächst, anstatt von dem unpopulären Integralausdrucke des Gesetzes, von dem leicht verständlichen tabellarischen Ausdrucke aus, in den sich dasselbe übersetzen lässt und für die praktische Verwertung ohnehin überall übersetzt werden muss. Später (Kap. XVII) wird auf dasselbe im Ausgange von seinem Integralausdrucke zurückgekommen werden; für jetzt wird das Folgende genügen.

Was darin vom Gesetze ausgesagt wird, sind nur wesentliche Bestimmungen desselben in dem, § 4, besprochenen Sinne; denen man aber, insoweit überhaupt das Gesetz besteht, um so näher zu kommen erwarten darf, je mehr sich die Zahl der Werte und mithin Abweichungen, worauf es bezogen wird, vervielfältigt. Besprechen wir nun dasselbe gleich in seiner Anwendung auf Kollektivabweichungen. Nach der Konvention, § 10, kann der allgemeine Ausdruck Θ in Bezug auf A mit Δ, und ε mit η vertauscht werden; doch bleiben wir hier bei den allgemeinen Ausdrücken stehen.

§ 25. Der allgemeine Sinn des Gauss'schen Gesetzes ist nach schon oben gemachter Andeutung der, unter Voraussetzung einer symmetrischen Wahrscheinlichkeit der Abweichungen bez. des arithmetischen Mittels A und eines großen, streng genommen unendlichen m, was der Ableitung des A zu Grunde liegt, die relative oder absolute Zahl der Abweichungen Θ und hiermit abweichenden a zu bestimmen, welche zwischen gegebenen Abweichungsgrenzen enthalten ist, mit Rücksicht, dass diese Bestimmung empirisch durch unausgeglichene Zufälligkeiten um so mehr alteriert werden kann, je kleiner das der Ableitung des A zu Grunde liegende m und hiermit das m dieser Abweichungen selbst ist.[1]) Kurz das G. G. ist ein Verteilungs-

1) Es kann auch der Fall vorkommen, dass das A aus einem großen m abgeleitet ist, aber die Verteilungsverhältnisse nur für eine kleine Zahl von Abweichungen untersucht werden, doch abstrahiere ich hier von diesem uns wenig interessierenden, zusammengesetzten Fall.

gesetz der Abweichungen und hiermit abweichenden a unter obigen Voraussetzungen.

Man habe also einen vielzahligen K.-G. vor sich, welcher den im vorigen Kapitel angegebenen Requisiten genügt, habe aus den, bemerktermaßen mit a zu bezeichnenden, Exemplaren das arithmetische Mittel $A = \Sigma a : m$ gezogen, habe die positiven und negativen Abweichungen $\pm \Theta$ aller einzelnen a von A genommen und aus der Gesamtheit der Θ ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen, d. i. aus ihren absoluten Werten, das Mittel $\varepsilon = \Sigma \Theta : m$ gezogen, so hat man darin nach schon früher gegebenen Erklärungen die sog. einfache mittlere Abweichung bez. A, die hier als mittlere Abweichung schlechthin gilt.

§ 26. Um nun die Anwendung des Gesetzes zuerst an seiner Aussage für einen bestimmten Fall zu erläutern, so soll die Zahl der Abweichungen gefunden werden, welche von A an, d. i. von $\Theta = 0$ bis zu einer Abweichungsgrenze $\Theta = 0{,}25\ \varepsilon$ reicht, oder, was sachlich dasselbe ist, welche von $\Theta : \varepsilon = 0$ bis $\Theta : \varepsilon = 0{,}25$ reicht, so findet sich diese Zahl nach einer Tabelle, in welche sich das G. G. übersetzen lässt, gleich 15,81 p. C. der Gesamtzahl m oder $= 0{,}1581\ m$, wobei vorausgesetzt ist, dass die Zahl nach beiden Seiten von A bis zur selben Grenze verfolgt und für beide Seiten zusammengezählt wird. Für jede andere Abweichungsgrenze als $\Theta : \varepsilon = 0{,}25$ giebt dieselbe Tabelle eine andere relative Abweichungszahl; aber erläutern wir zunächst die vorige Bestimmung an einem konkreten Beispiel.

Nehmen wir an, wir hätten 10000 Rekruten, hätten deren A und ε bestimmt, ersteres $= 71{,}7$ Zoll, letzteres $= 2{,}0$ Zoll gefunden (wie es nahehin für die Leipziger Studentenrekrutenmaße gilt), so würden unter Voraussetzung, dass das G. G. dafür gelte, 1581 Rekruten zwischen $A + 0{,}25\ \varepsilon$ einerseits und $A - 0{,}25\ \varepsilon$ andererseits, d. i. zwischen 71,2 und 72,2 Zoll fallen. Sei in demselben Sinne die Grenzabweichung Θ, bis zu der man von $\Theta = 0$ an zählt, gleich $0{,}5\ \varepsilon$ genommen, mithin $\Theta : \varepsilon = 0{,}5$, so wird nach der Tabelle des Gesetzes die Zahl der von $\Theta = 0$ bis dahin nach beiden Seiten zugleich reichenden Abweichungen und mithin abweichenden Werte a,

d. i. die Zahl zwischen 70,7 und 72,7 Zoll, 31,01 p. C. der Gesamtzahl oder 0,3101 m betragen. Und so wird es nach dem Gesetze eine entsprechende Bestimmung für jeden beliebigen Wert $\Theta:\varepsilon$ als Grenzwert, bis zu dem man von $\Theta:\varepsilon = 0$ an zählt, geben. Insofern sich aber doch nicht alle möglichen Werte $\Theta:\varepsilon$ mit den zugehörigen Prozent- oder Verhältniszahlen in die Tabelle des Gesetzes eintragen lassen, findet man in einer hinreichend ausgeführten Tabelle jene äquidistant und einander so nahe genommen, dass sich dazwischen interpolieren lässt. Die folgende Tabelle nun giebt sie freilich nicht in einer zur genauen Interpolation hinreichenden Nähe, wozu man sich an eine vollständigere Tabelle halten muss, aber doch für das Verständnis und die hier anzuknüpfenden Erörterungen genügend. Dabei bemerke ich, dass ich die Zahlen wie 0,1581 und 0,3101 kurz Verhältniszahlen nennen und mit Φ bezeichnen werde, und zwar mit $\Phi\,[\Theta:\varepsilon]$, wenn sie, wie in folgender Tabelle, als Funktionen von $\Theta:\varepsilon$ ausgedrückt sind. Durch Multiplikation der Verhältniszahl Φ mit der Totalzahl m, kurz durch $m\Phi$, erhält man die absolute Zahl von $\Theta:\varepsilon = 0$ bis zu gegebener Grenze $\Theta:\varepsilon$. Umgekehrt erhält man, wenn die absolute Zahl zwischen diesen Grenzen bekannt ist, die Verhältniszahl Φ durch Division der absoluten mit m.

§ 27. $\Phi[\Theta:\varepsilon]$-Tabelle oder kurz ε-Tabelle des Gauss-schen Gesetzes.

$\Theta:\varepsilon$	$\Phi[\Theta:\varepsilon]$	$\Theta:\varepsilon$	$\Phi[\Theta:\varepsilon]$
0,00	0,0000	2,75	0,9718
0,25	1581	3,00	9833
0,50	3101	3,25	9905
0,75	4504	3,50	9948
1,00	5751	3,75	9972
1,25	6814	4,00	9986
1,50	7686	4,25	9993
1,75	8374	4,50	9997
2,00	8895	4,75	9998
2,25	9274	5,00	9999
2,50	9539	5,25	1,0000

In dieser Tabelle sind angegebenermaßen die Verhältniszahlen Φ stets für den Ausgang von $\Theta : \varepsilon = 0$ bis zu einem gegebenen Grenzwerte $\Theta : \varepsilon$ bestimmt. Um aber Verhältniszahlen für Intervalle zwischen zwei verschiedenen $\Theta : \varepsilon$ im Laufe der Abweichungen von A zu erhalten, sagen wir zwischen $\Theta : \varepsilon = \alpha$ und $\Theta : \varepsilon = \beta$, braucht man bloß die Differenz der dazugehörigen Φ-Werte, also $\Phi[\beta] - \Phi[\alpha]$ zu nehmen, welche allgemein φ heißen möge, wonach z. B. laut voriger Tabelle zum Intervall zwischen $\Theta : \varepsilon = 0{,}25$ und $\Theta : \varepsilon = 1{,}00$ die mit $\varphi[1{,}00 - 0{,}25]$ zu bezeichnende Verhältniszahl $0{,}5751 - 0{,}1581 = 0{,}4170$ gehört. Folgende Tabelle enthält die φ-Werte für gleich große, sich unmittelbar aneinander anschließende Intervalle zwischen den aufeinanderfolgenden $\Theta : \varepsilon$ der vorigen ε-Tabelle vom Anfange herein.

φ-Tabelle des GAUSS'schen Gesetzes.

Successive gleiche Intervalle zwischen $\Theta : \varepsilon$	φ	Successive gleiche Intervalle zwischen $\Theta : \varepsilon$	φ
0,00—0,25	0,1581	2,75—3,00	0,0115
0,25—0,50	1520	3,00—3,25	0072
0,50—0,75	1403	3,25—3,50	0043
0,75—1,00	1247	3,50—3,75	0024
1,00—1,25	1063	3,75—4,00	0014
1,25—1,50	0872	4,00—4,25	0007
1,50—1,75	0688	4,25—4,50	0004
1,75—2,00	0521	4,50—4,75	0001
2,00—2,25	0379	4,75—5,00	0001
2,25—2,50	0265	5,00—5,25	0001
2,50—2,75	0179		

Auch diese Zahlen φ sind mit der Gesamtzahl m zu multiplizieren, um die absoluten Zahlen für die betreffenden Intervalle zu erhalten.

Bezeichnet man die $\Theta : \varepsilon$ der Φ-Tabelle, welche immer von $\Theta : \varepsilon = 0$ als erster Grenze ausgehen, kurz als lim., so sieht man, dass innerhalb kleiner Werte von lim. die verhältnismäßigen Zahlen Φ den lim. fast proportional gehen; ja geht man nach einer vollständigeren Φ-Tabelle, als hier mitgeteilt ist, mit den lim. bis unter 0,25 herab, so findet eine noch größere Annäherung an die Proportionalität statt, die innerhalb unendlich kleiner Werte von lim. als genau angesehen werden kann; wogegen bei Aufsteigen zu großen Werten lim. die betreffende Proportionalität gänzlich fehl schlägt; und eine Folge davon ist, dass in der φ-Tabelle die Verhältniszahlen φ, welche den ersten der aufeinander folgenden gleichen Intervalle zwischen den lim. zugehören, fast gleich sind; hiergegen in um so stärkerem Verhältnisse, kurz um so rascher abnehmen, je weiter man vorgeht; wie denn für die gleich großen Intervalle der $\Theta : \varepsilon$ von 0 bis 0,25; 0,75 bis 1,0; 3,0 bis 3,25 u. s. w. die Werte φ resp. 0,1581; 0,1247; 0,0072 u. s. w. betragen.

§ 28. Zur Beurteilung der Gültigkeit und Anwendbarkeit des G. G. auf die Empirie ist darauf zurück zu kommen, dass demselben die Voraussetzung einer symmetrischen W. der beiderseitigen Abweichungen Θ bez. A zu Grunde liegt, der Art, dass unter Voraussetzung eines großen, streng genommen unendlichen m für jedes Θ auf positiver Seite ein gleich großes Θ auf negativer Seite zu erwarten ist; und die Verhältniszahlen Φ und φ sind als Ausdruck für die W. des Vorkommens der Exemplare bis zu gegebenen Grenzen ihrer Abweichung von A oder in gegebenen Intervallen dieser Abweichung anzusehen.

Dies schliesst nun schon bemerktermaßen nicht aus, dass trotz der prinzipiellen Gültigkeit des Gesetzes unter den von ihm vorausgesetzten Bedingungen mehr oder weniger große empirische Abweichungen von seinen Forderungen vorkommen, weil die Bedingung eines unendlichen m empirisch nicht zu erfüllen ist; und es können also Abweichungen von seinen Forderungen nur insofern gegen dasselbe geltend gemacht werden, als die Vergrößerung des m nichts hilft, diese Abweichungen dem Verschwinden näher zu bringen, kurz nur insofern, als sie nicht auf unausgeglichene Zufälligkeiten wegen Endlichkeit des m geschoben werden können, worüber es nicht an Anhaltspunkten fehlt, die an ihrem Orte zu besprechen sind. Aber gehen wir zunächst den Folgerungen des Gesetzes unter Voraussetzung seiner prinzipiellen Gültigkeit nach.

Im Vorigen ist angegeben, wie die Verhältniszahl Φ und absolute Zahl $m\Phi$ für beide Seiten zusammen von dem Werte $\pm\Theta:\varepsilon$ abhängt, bis zu dem man sie nach beiden Seiten verfolgt. Geschieht dies bloß nach einer Seite, so wird nach der vorausgesetzten symmetrischen W. die absolute Zahl bis zu gegebenen Grenzen jederseits halb so groß anzunehmen sein, als wenn sie für beide Seiten bis zu derselben Abweichungsgrenze verfolgt wäre. Indem aber auch die Totalzahl beider Seiten zusammen bei großem, streng genommen unendlichem m sich nach derselben symmetrischen W. auf $\frac{1}{2}m$ reduziert, bleiben die, nach dem G. G. zu berechnenden, Verhältniszahlen jeder Seite, resp. Φ' und $\Phi_{,}$, gleich mit der totalen Verhältniszahl Φ, wogegen die einseitigen absoluten Zahlen $\frac{1}{2}m\Phi'$ und $\frac{1}{2}m\Phi_{,}$ nach dem G. G. für halb so groß anzunehmen sind als die beiderseitige Zahl $m\Phi$ bis zur selben Grenze $\pm\Theta$.

Empirisch freilich trifft die Gleichheit der beiderseitigen absoluten Zahlen bis zur selben Grenze wegen unausgeglichener Zufälligkeiten nicht zu; aber das G. G. abstrahiert eben von diesen Zufälligkeiten und setzt den Fall voraus, dass der Unterschied $m' - m_{,} = u$ gegen m verschwindet. Es würde also auch unrecht sein, wenn man ε für die Berechnung von Φ' gleich $\Sigma\Theta' : m'$ und für die von $\Phi_{,}$ gleich $\Sigma\Theta_{,} : m_{,}$ nähme, sondern für Φ' und $\Phi_{,}$ muss ebenso als für Φ der aus der Totalität zu berechnende Wert $\varepsilon = \Sigma\Theta : m$ dienen, da man sonst der Voraussetzung symmetrischer W., welche dem G. G. zu Grunde liegt, widersprechend auf beiden Seiten bis zu denselben Abweichungsgrenzen verschiedene Abweichungszahlen erhalten würde. Auch hat QUETELET bei seinen Vergleichstabellen zwichen Rechnung nach dem G. G. und Beobachtung dies nicht anders gefasst. Anders freilich, wo eine asymmetrische W. der Abweichungen bez. A besteht, wie es thatsächlich bei Kollektivabweichungen der Fall ist, wo das G. G. überhaupt nur mit einer weiterhin zu besprechenden Modifikation anwendbar ist; aber vor allem gilt es doch, vom rein gefassten G. G. selbst auszugehen, und so verfolgen wir dessen Konsequenzen noch weiter.

Aus der voraussetzlichen symmetrischen W. der Θ bez. A folgt nun weiter unmittelbar, dass der Zentralwert C, bez. dessen die

Zahl der beiderseitigen Abweichungen gleich ist, wesentlich mit dem arithmetischen Mittel A, bez. dessen die Summe der beiderseitigen Abweichungen gleich ist, zusammenfällt, d. h. dass beide nur durch unausgeglichene Zufälligkeiten von einander abweichen können. Denn wenn nach symmetrischer W. für jedes positive Θ einerseits ein gleich großes Θ andererseits zu erwarten ist, so muss mit gleicher Summe auch gleiche Zahl der Abweichungen nach beiden Seiten zu erwarten sein. Es ist aber die Forderung, dass vermöge symmetrischer W. der Unterschied $u = \pm (m' - m_{,})$ zwischen der Zahl der positiven und negativen Abweichungen mit wachsendem m mehr und mehr verschwinde, nicht auf die absolute Größe von u, sondern sein Verhältnis zur Totalzahl m, d. i. $u : m$ zu beziehen, weil u selbst nach bekannten Gesetzen des Zufalles bei vergrößertem m im Verhältnisse von $\sqrt{m}$ wächst, dieser Wert aber gegen m um so mehr verschwindet, je größer m ist, und bei unendlichem m ganz verschwindet. Auch bleibt bei dem absoluten Wachstume von u im Verhältnisse von $\sqrt{m}$ die Richtung des Unterschiedes an sich unbestimmt.

Dass unter Voraussetzung der Gültigkeit des G. G. auch der dichteste Wert D wesentlich mit A zusammenfällt, folgt nach dem Anblicke der φ-Tabelle daraus, dass die Zahl der Abweichungen und mithin abweichenden Werte a nach beiden Seiten für gleiche Intervalle um so größer ist, je näher die Intervalle dem A kommen, am größten also in den an A selbst grenzenden und dasselbe zwischen sich fassenden Intervallen, wie klein man diese auch nehme.

§ 29. Hiernach noch die Bemerkung, dass die Tabelle des G. G. nicht daran gebunden ist, die Grenzen, zwischen denen Θ zu bestimmen, als Funktionen des einfachen Mittelfehlers auszudrücken. In den gebräuchlichen Tabellen ist aus formellen Gründen statt $\Theta : \varepsilon$ vielmehr $\Theta : \varepsilon \sqrt{\pi}$ oder $\Theta : w$ [1]) gewählt, was andere Tabellen giebt als die obige, von mir kurz als ε-Tabelle bezeichnete, und auch wir werden uns aus gleich anzugebenden Gründen in den künftig zu machenden Anwendungen vielmehr an eine Tabelle mit Bezug auf

1) [Eine solche, auf den wahrscheinlichen Fehler w bezogene Tabelle findet sich am Schlusse des Berliner Astronom. Jahrbuches für 1834 (herausgeg. von ENCKE) als Tafel II; auszugsweise wird sie in § 108 mitgeteilt.]

p. 235

$\Theta : \varepsilon\sqrt{\pi}$ als die obige bez. $\Theta : \varepsilon$ halten; und da man $\Theta : \varepsilon\sqrt{\pi}$ gewöhnlich mit t bezeichnet, so werde ich eine solche, auf t bezogene Tabelle kurz die t-Tabelle nennen und eine ausgeführte t-Tabelle im Anhang § 183 mitteilen. Vom Anfange herein gestaltet sie sich für einen Auszug daraus so:

t	$\Phi[t]$
0,00	0,0000
0,25	0,2763
0,50	0,5205
0,75	0,7112

u. s. w.

Übrigens ist eine solche Tabelle ganz entsprechend als die ε-Tabelle zu benutzen, wie am obigen Beispiel zu erläutern, wo $A = 71{,}7$, $\varepsilon = 2{,}0$ Zoll angenommen ist. Vor allem hat man ε mit $\sqrt{\pi}$, d. i. 1,77245 zu multiplizieren, giebt 3,5449 und wird nun nach der t-Tabelle z. B. die Zahl der Θ und mithin a, die zwischen $A + 0{,}25 \cdot 3{,}5449$ und $A - 0{,}25 \cdot 3{,}5449$, d. i. zwischen $71{,}7 + 0{,}25 \cdot 3{,}5449$ und $71{,}7 - 0{,}25 \cdot 3{,}5449$, kurz zwischen 72,5862 und 70,8138 enthalten ist, $= 0{,}2763\, m$ finden.

Der Grund, uns künftig nicht an die ε-Tabelle zu halten, was doch am einfachsten schiene, ist der, dass eine ε-Tabelle in entsprechender Ausführung als die t-Tabelle bisher noch gar nicht vorliegt, und daher nur einfachster Erläuterung halber von der ε-Tabelle der Ausgang genommen wurde, welche übrigens, wenn sie ausgeführt vorläge, nur den Vorteil böte, die Multiplikation von ε mit $\sqrt{\pi}$ überall zu ersparen.

Eine ausgeführte t-Tabelle aber findet sich an verschiedenen Orten, z. B. am Schlusse des Berliner Astronom. Jahrbuches für 1834 und in QUETELET's Lettres sur la théorie des probab. p. 389 flg., beidesfalls bloß bis $t = 2{,}00$ ausgeführt. Eine, mir zu Gebote stehende, lithographierte Tabelle, die aber nicht mehr im Buchhandel ist, giebt die Ausführung bis $t = 3{,}00$ mit 7 Dezimalen für Φ[1]). Die obige

1) [Eine entsprechende Tabelle von gleicher Ausdehnung findet sich bei A. MEYER, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung (deutsch bearbeitet von

ε-Tabelle aber ist von mir durch Interpolation mit zweiten Differenzen aus der t-Tabelle, so weit diese reicht, erhalten und für noch höhere Werte direkt berechnet worden.

§ 30. Hiernach komme ich zu den Gründen, welche Anlass sind, bei Kollektivabweichungen über das einfache G. G., wie es bisher erläutert worden ist, hinauszugehen.

Von GAUSS selbst ist das Gesetz nicht für Kollektivabweichungen, als Abweichungen der einzelnen Exemplargrößen a von ihrem arithmetischen Mittel, sondern bemerkter- und bekanntermaßen für Beobachtungsfehler, als Abweichungen der einzelnen Beobachtungswerte eines Gegenstandes von ihrem arithmetischen Mittel aufgestellt; und an sich ist nichts weniger als selbstverständlich, dass eine Übertragbarkeit des Gesetzes von letzteren auf erstere stattfinde. In der That ist es doch von vornherein etwas sehr Anderes, Abweichungen vor sich zu haben, die wegen mangelnder Schärfe der Messinstrumente oder Sinne und zufälliger äußeren Störungen bei wiederholter Messung eines einzelnen Gegenstandes vom arithmetischen Mittel der Maße erhalten werden, und Abweichungen, welche die vielen Exemplare eines K.-G. von ihrem arithmetischen Mittel aus Gründen darbieten, welche in der Natur der Gegenstände selbst und der sie beeinflussenden äußeren Umstände gelegen sind. Es ließ sich also auch durchaus nicht a priori voraussagen, dass die Natur in diesen Abweichungen vom Mittel das Gesetz der Beobachtungsfehler befolgt, sondern galt erst, eine direkte Prüfung desselben an K.-G. selbst vorzunehmen.

Inzwischen, da man von vornherein leicht wahrnahm, dass bei

CZUBER), Leipzig 1879, S. 545—549, wo t durch γ ersetzt ist. Auf Grund derselben hat KÄMPFE die im Anhang § 183 mitgeteilte, in den Philosophischen Studien (herausgeg. von WUNDT), Band IX, S. 147—150, zuerst publizierte Tabelle berechnet, in welcher die Funktionswerte Φ auf 4 Dezimalen abgekürzt, die Argumente t resp. γ jedoch zwischen den Grenzen 0 und 1,51 auf 3 Dezimalstellen erweitert sind. Eine Tabelle von entsprechender Ausdehnung mit fünfstelligen Funktionswerten findet man gleichfalls im Anhang. — Die erste Tabelle dieser Art, auf welche wohl die genannten Tabellen als Quelle zurückzuführen sind, hat KRAMP berechnet, der die Integrale über $\exp(-t^2)dt$ von endlichen Werten t bis $t = \infty$ und die Logarithmen dieser Integrale giebt. Siehe: »Analyse des réfractions astronomiques et terrestres«; par le citoyen KRAMP, Strasbourg, l'an VII, p. 195—206.]

großem m ebenso bei Kollektivabweichungen bez. A als Beobachtungsfehlern die Zahl der Abweichungen z für einen Wert in einem mittleren Teile der Verteilungstafel ein Maximum ist, von da an aber nach den Extremen zu um so regelmäßiger abnimmt, je größer m ist, außerdem kein anderes Gesetz als das GAUSS'sche vorlag, an das man bei Aufsuchung eines Verteilungsgesetzes für K.-G. denken konnte, war es natürlich, dass man vor allem dieses der Prüfung unterzog. Und zwar sind Rekrutenmaße der erste Gegenstand gewesen und (mit Einschluss von Brustumfang und Lungenkapazität der Rekruten) bisher seitens anderer der einzige geblieben, an denen das Gesetz versucht worden ist.

Diese mehrseitig (von QUETELET, BODIO, GOULD, ELLIOTT und vielleicht noch anderen)[1]) vorgenommene Prüfung an Rekrutenmaßen verschiedener Länder schien nun zunächst überall eine Bestätigung des Gesetzes zu ergeben, indem die Abweichungen von den Forderungen des Gesetzes klein genug erschienen, um nur als unwesentlich im angegebenen Sinne zu gelten; und eine angenäherte Gültigkeit besitzt das G. G. jedenfalls für Rekrutenmaße, nur keine so weitgehende, als man bisher geglaubt hat, annehmen zu können, wie ich mich teils durch kritische Revison der bisher darüber geführten Untersuchungen, teils durch eigene Untersuchung selbstbeschaffter vielzahliger Rekrutenmaßtafeln überzeugt habe, wogegen es andere K.-G. giebt, bei denen das einfache G. G. gänzlich fehlschlägt, indes sie doch einer Verallgemeinerung dieses Gesetzes genügen.

In der That aber lassen sich nach meinen erweiterten Erfahrungen folgende zwei Gesichtspunkte angeben, welche es überhaupt von vornherein unmöglich erscheinen lassen, dem einfachen G. G. eine allgemeine Gültigkeit für K.-G. zuzugestehen. Der erste ist dieser[2]):

§ 31. Sollte das G. G. auf Kollektivabweichungen allgemein anwendbar sein, so müssten sich die Folgerungen, die aus der bei

---

1) [BODIO, La taille des recrues en Italie; Ann. de démographie intern. Paris 1878. GOULD, Investigations on the military and anthropological statistics of American soldiers; United States Sanitory Comission memoirs. New-York 1869. ELLIOTT, On the military statistics of the United States of America. Berlin 1863.]

2) [Den zweiten s. § 34 und 35.]

demselben vorausgesetzten symmetrischen W. der Abweichungen bez. A hervorgehen, allgemein bestätigen, was nicht der Fall ist, und wenn bei Rekrutenmaßen und nicht wenigen anderen Gegenständen man bei oberflächlicher Untersuchung unsicher bleiben könnte, ob nicht unausgeglichene Zufälligkeiten oder mangelnde Erfüllung der Requisiten Schuld daran sei, entziehen sich doch andere Gegenstände dieser Vermutung zu entschieden, als dass man wesentliche Symmetrie der Abweichungen bezüglich A als allgemeinen Charakter der K.-G. ansehen könnte. In der That hat schon Quetelet in seinen »Lettres sur la théorie des probabilités« p. 166 bemerkt, dass bei manchen K.-G. der Unterschied der extremen Abweichungen U', $U_,$ beider Seiten bez. A konstanter und gesetzlicher positiv, bei anderen negativ ist, als mit symmetrischer Wahrscheinlichkeit verträglich ist; und ich selbst habe noch vor Kenntnis seiner Untersuchungen hierüber in betreff einer anderen Forderung der symmetrischen W. konstatiert, dass bei manchen K.-G. die Abweichungszahlen bez. A, d. i. m' und $m_,$, nicht nur konstanter und gesetzlicher, sondern auch weiter, als durch unausgeglichene Zufälligkeiten erklärlich ist, von einander abweichen. Dabei hat sich sowohl nach Quetelet's als meiner Erfahrung gezeigt, dass je nach Art der K.-G. die Abweichung zwischen U' und $U_,$ oder die Abweichung zwischen m' und $m_,$ diese oder jene Richtung einhält; also während sie der Größe nach den Wert übersteigt, der wegen unausgeglichener Zufälligkeiten erwartet werden könnte, zugleich der Richtung nach charakteristisch für die eine oder andere Art von K.-G. ist.

Nun bezeichne ich es als Asymmetrie überhaupt, wenn eine Abweichung zwischen U' und $U_,$ oder m' und $m_,$ besteht; aber da eine solche wegen unausgeglichener Zufälligkeiten nicht leicht fehlen wird, so ist wesentliche Asymmetrie als solche, welche nicht von unausgeglichenen Zufälligkeiten abhängig gemacht werden kann, von unwesentlicher oder zufälliger Asymmetrie als solcher, welche davon abhängig gemacht werden kann, zu unterscheiden.

Empirisch mischt sich die wesentliche Asymmetrie, auch wo solche besteht, immer mit zufälliger, weil man doch immer mit endlichem m, wovon solche abhängt, zu thun hat, aber da der von wesentlicher

Asymmetrie abhängige Unterschied im Verhältnisse von m, der von zufälliger abhängige bloß im Verhältnisse von $\sqrt{m}$ wächst, so verschwindet letzterer Wert gegen ersteren um so mehr, je mehr m wächst, und treten die von wesentlicher Asymmetrie abhängigen Bestimmungen um so reiner hervor, je größer m ist, und kann es selbst als Merkmal wesentlicher Asymmetrie angesehen werden, wenn der bei großem m gefundene Unterschied zwischen U' und $U_{,}$ oder m' und $m_{,}$ bei weiterer Vergrößerung dieselbe Richtung behält. Auf andere Merkmale aber werden wir später[1]) kommen, welche es unzweifelhaft erscheinen lassen, dass man im Gebiete der K.-G. nicht überall mit der Annahme bloß zufälliger Asymmetrie auskommt.

§ 32. Nun tritt zunächst folgende Alternative auf.

1) Es ließe sich denken, dass in der Asymmetrie, auch wo sie als wesentlich anzuerkennen, nur eine Störung des G. G. je nach der Art der K.-G. im einen oder anderen Sinne zu sehen sei, die sich selbst keinem bestimmten, mathematisch formulierbaren Gesetze füge.

2) Es ließe sich denken, dass die wesentliche Gültigkeit des G. G. für Kollektivabweichungen vom arithmetischen Mittel doch die Regel bleibe, die Fälle aber, wo es nicht anwendbar sei, als Ausnahmen anzusehen, welche entweder unter den Fall 1) treten oder einem zwar angebbaren, aber nur ausnahmsweise gültigen, anderen Gesetze als dem Gauss'schen unterliegen.

3) Da die Abweichung zwischen U' und $U_{,}$, sowie zwischen m' und $m_{,}$ bei gegebenem m, insoweit sie von wesentlicher Asymmetrie abhängt, je nach Art der K.-G. verschiedene Größe und hiermit die wesentliche Asymmetrie verschiedene Grade annehmen kann, so lässt sich die wesentliche Symmetrie, wo eine solche vorkommt, als der besondere Fall des alle möglichen Grade umfassenden allgemeinen Falles der Asymmetrie ansehen, wo der Grad derselben auf Null herabkommt, und ließe sich denken, dass im Gebiete der K.-G. die wesentliche Asymmetrie den allgemeinen Fall in seinen verschiedenen Graden vorstelle, die wesentliche Symmetrie aber eben nur einen besonderen Fall, der, wenn er überhaupt in aller Strenge vorkommt,

---

1) [Vergl. insbesondere Kap. XII »Gründe für wesentliche Asymmetrie«.]

nur als Ausnahmefall zu betrachten ist, sofern unter den unendlich verschiedenen möglichen Graden der Asymmetrie das völlige Verschwinden eine unendlich geringe W. hat, was nicht ausschließt, dass die schwächeren Grade der Asymmetrie, welche empirisch leicht mit einer nur durch unausgeglichene Zufälligkeiten gestörten, wesentlichen Symmetrie verwechselt werden können, häufiger sind als die stärkeren, welche sich der Möglichkeit einer solchen Verwechslung entziehen. In Beziehung zu dieser Auffassung aber ließe sich denken, dass es auch ein für den allgemeinen Fall gültiges allgemeines Gesetz gebe, welches das G. G. nur als den besonderen Fall unter sich fasst, dass die asymmetrische W. in symmetrische übergeht.

Welche von diesen drei Möglichkeiten, und namentlich ob eine von den beiden ersten, die nur Modifikationen von einander sind, oder die dritte die richtigere sei, ließ sich nun nicht ohne weiteres entscheiden, sondern es gehörte dazu einmal die Entscheidung der Frage, ob eine Verallgemeinerung des G. G. für den Fall wesentlicher Asymmetrie nach denselben Prinzipien, nach denen es für den besonderen Fall der wesentlichen Symmetrie abgeleitet ist, wirklich möglich sei, zweitens ob die zur empirischen Prüfung geeigneten K.-G., wofür die Requisiten im vorhergehenden Kapitel besonders angegeben sind, sich dem so ableitbaren Gesetze wirklich fügen. Ich habe die Untersuchung nach beiden Seiten angestellt, und beide Fragen haben sich in guter Zusammenstimmung zu Gunsten des dritten Falles der Alternative bejahen lassen. Aber dazu gehört freilich eine Ausführung theoretischer und empirischer Untersuchungen, die sich nicht auf einmal und in kurzem geben lässt, sondern folgenden Kapiteln vorbehalten bleibt, und nur vorgreiflich bemerke ich, dass das Fundamentalste der theoretischen Untersuchungen im XIX. Kapitel, die durch die Empirie gebotenen Gründe, dass das Vorhandensein wesentlicher Asymmetrie wirklich als der allgemeine Fall im Gebiete der K.-G. anzusehen sei, im XII. Kapitel enthalten sind. Zunächst aber dürfte es ein Interesse haben, wenn ich die wesentlichsten Bestimmungen der Verallgemeinerung des G. G. von symmetrischer auf asymmetrische W., hiermit von symmetrischer auf asymmetrische Verteilung bei großem m, zu welchen mich die

Verbindung von Theorie und Empirie geführt hat, hier vorläufig beweislos zusammenstelle, und zwar führe ich diese Bestimmungen wegen mehrfach darauf zu nehmenden Rückbezuges als Spezialgesetze der asymmetrischen W. oder Verteilung unter besonderen Bezeichnungen, wie folgt, auf, Gesetze, bei denen man sich begnügen kann, solange nicht eine beträchtliche verhältnismäßige Schwankung der K.-G. in dem (§ 9 S. 19) besprochenen Sinne Anlass giebt, eine weitere Verallgemeinerung in Rücksicht zu ziehen, von welcher nachher die Rede sein wird, die aber nicht zu einer Verwerfung, sondern nur Verschärfung der folgenden Gesetze führt.

§ 33. Von diesen Spezialgesetzen sind die wichtigsten die ersten drei, welche zwar hier besonders aufgestellt werden, aber aus den mathematischen Grundvoraussetzungen der kollektiven Asymmetrie in solidarischem Zusammenhange folgen, wie im XIX. Kapitel zu zeigen. Die übrigen sind teils unmittelbar einleuchtende Korollare derselben, teils mathematisch aus denselben zu folgern, wie ebenfalls später darzuthun.

Spezialgesetze wesentlich asymmetrischer Verteilung für K.-G. bei nicht zu starker verhältnismäßiger Schwankung derselben.

1) Ausgangsgesetz. Die Abweichungen sind statt vom arithmetischen Mittel A von dem im Falle wesentlicher Asymmetrie auch wesentlich von A abweichenden dichtesten Werte D zu rechnen, um überhaupt zu einer unter eine einfache Regel fassbaren und der Erfahrung entsprechenden Verteilung zu gelangen, eine Regel, die für den Fall, dass die wesentliche Asymmetrie verschwindet, wo D wesentlich mit A zusammenfällt, auf die Regel des G. G. zurückführt.

2) Zweispaltiges GAUSS'sches Gesetz. Die Verteilung der Abweichungen bez. D befolgt, kurz gesagt, nach jeder beider Seiten insbesondere dieselbe Regel, als bei symmetrischer W. bez. A für beide Seiten gemeinschaftlich befolgt wird. Es tritt nur dabei an die Stelle von m, Θ, $\varepsilon = \Sigma\Theta : m$ bez. A positiverseits m', Θ', $\varepsilon' = \Sigma\Theta' : m'$, negativerseits $m_,$, $\Theta_{,,}$ $\varepsilon_, = \Sigma\Theta_, : m_,$ bez. D; mit dieser

Rücksicht sind noch dieselben Tabellen, die ε-Tabelle und t-Tabelle, für die Verteilungsrechnung nach jeder Seite insbesondere brauchbar, als für Berechnung nach dem G. G. bei symmetrischer W. bez. A gemeinsam für beide Seiten anzuwenden wären. Ersetzen wir nun im Sinne der § 10 getroffenen Konvention die allgemeinen Bezeichnungen m', $m_,$, $\Sigma\Theta'$, $\Sigma\Theta_,$, ε', $\varepsilon_,$, die bez. beliebiger Hauptwerte gelten, durch m', $m_,$, $\Sigma\partial'$, $\Sigma\partial_,$, e', $e_,$, sofern es sich um Beziehung zu D handelt, so gehen damit auch die positiven und negativen verhältnismäßigen Abweichungszahlen Φ' und $\Phi_,$, sowie absoluten Zahlen $\Phi'm'$ und $\Phi_,m_,$, desgleichen φ' und $\varphi_,$, $\varphi'm'$ und $\varphi_,m_,$ jederseits in Funktionen dieser Bezeichnungen über.

3) Proportionsgesetz. Die beiderseitigen Abweichungszahlen m', $m_,$ bez. des dichtesten Wertes verhalten sich wie die einfachen mittleren Abweichungen e', $e_,$, d. i. wie $\Sigma\partial' : m'$ und $\Sigma\partial_, : m_,$ bez. D, mithin

$$m' : m_, = e' : e_, = \frac{\Sigma\partial'}{m'} : \frac{\Sigma\partial_,}{m_,},$$

wovon folgendes Korollare sind.

a) Die Quadrate der beiderseitigen Abweichungszahlen, d. i. m'^2, $m_,^2$ verhalten sich wie die beiderseitigen Abweichungssummen $\Sigma\partial'$, $\Sigma\partial_,$, also:

$$m'^2 : m_,^2 = \Sigma\partial' : \Sigma\partial_,.$$

b) Der dichteste Wert D kann selbst als der Wert bestimmt werden, dessen beiderseitigen Abweichungszahlen und mittleren Abweichungen dem Proportionsgesetze genügen. Ja ich halte dies, allgemein gesprochen, für seine zwar nicht bequemste, aber genaueste Bestimmungsweise und gebe später (Kapitel XI) an, wie sie auszuführen ist. Kürze halber mag sie die proportionale heissen und das so bestimmte D, wenn es gilt, auf diese Bestimmungsweise ausdrücklich hinzuweisen, mit D_p bezeichnet werden. Dies D_p kann man dann mit dem empirisch direkt bestimmten D, d. i. dem Werte, auf den das Maximum der Zahl z in einer Verteilungstafel fällt, vergleichen, und daraus, dass es doch nur in den Grenzen der zuzugestehenden Unsicherheit davon abweicht, einen der Beweise für die Triftigkeit unserer asymmetrischen Gesetzlichkeit finden.

4) Die Abstandsgesetze. Die Abstände zwischen den drei Hauptwerten bestimmen sich so. Sei m'' die Gesamtzahl, $\Sigma\partial''$ die Gesamtsumme, $e'' = \Sigma\partial'' : m''$ das Mittel der mit C oder A (je nachdem man den Abstand des C oder A von D sucht) gleichseitigen Abweichungen bez. D, d. h. welche nach derselben Seite von D abgehen, nach welcher C oder A davon abliegt, mag dies die positive oder negative Seite sein, indes der Index von zwei Strichelchen unten die entsprechende Bedeutung für die ungleichseitigen Werte haben mag, so findet sich nach § 131:

$$C - D = t''e''\sqrt{\pi},$$

worin t'' den Wert von t bedeutet, der in der Tabelle der t zu

$$\Phi = \frac{m'' - m_{''}}{2m''},$$

kurz zu Φ'' gehört. Ferner:

$$A - D = \frac{\Sigma\partial'' - \Sigma\partial_{''}}{m}$$

ein Wert, der nach dem Proportionalgesetze mit $2\,\Phi''e''$ übereinkommt, wie in § 131 zu zeigen, wonach man auch setzen kann:

$$A - D = 2\,\Phi''e'' = \frac{(m'' - m_{''})e''}{m''}.$$

Hiernach ist $A - C$ als Differenz der beiden vorigen Abstände:

$$A - C = (A - D) - (C - D) = (2\,\Phi'' - t''\sqrt{\pi})\,e'',$$

worin Φ'' und t'' in angegebener Weise bestimmt sind.

5) Die π-Gesetze. Für den in der Regel stattfindenden Fall, dass der Abstand des C von D ein kleines (streng genommen unendlich kleines) Verhältnis zur mittleren Abweichung e' oder e, der Seite, nach welcher C von D abliegt, kurz zu e'' hat, hat man merklich:

$$\frac{C-D}{A-D}, \text{ kurz } p = \frac{\pi}{4} = 0{,}785\,40 \quad (\log = 0{,}895\,09 - 1)$$

$$\frac{A-C}{A-D} = \frac{4-\pi}{4} = 0{,}214\,60 \qquad (\log = 0{,}331\,63 - 1)$$

$$\frac{C-D}{A-C} = \frac{\pi}{4-\pi} = 3{,}659\,79 \qquad (\log = 0{,}563\,46 \qquad)$$

Abgesehen von unausgeglichenen Zufälligkeiten und Abnormitäten, deren in Kap. IV gedacht ist, wodurch diese Verhältnisse, wie alle hier aufgestellten Gesetze alteriert werden können, würden diese Verhältnisse streng gelten, wenn $(C-D)^2 : 3\pi e''^2$ gegen 1 völlig vernachlässigt werden könnte, überhaupt also $C-D$ klein gegen e'' ist. Insofern aber dies Verschwinden doch nie vollständig stattfindet, sind den obigen π-Funktionen von D, C, A resp. eigentlich zu substituieren:

$$\frac{\pi}{4}\xi; \quad \frac{4-\pi\xi}{4}; \quad \frac{\pi\xi}{4-\pi\xi},$$

worin ξ ein positiver Wert ist, welcher 1 in kleinem Verhältnisse übersteigt.

Die theoretisch ableitbare Bedingung, dass unter Voraussetzung verhältnismäßiger Kleinheit von $C-D$ gegen e'' der Wert

$$p = \frac{C-D}{A-D}$$

approximativ $= \frac{1}{4}\pi = 0{,}78540$ sein muss, gehört bei der Allgemeinheit, in der er sich empirisch wiederfindet, zu den schlagendsten Bewährungen unserer asymmetrischen Verteilungsgesetze, und der Wert p wird daher künftig in den Tafeln der Elemente der von mir behandelten Gegenstände besonders angegeben werden, um sich von der Approximation desselben an $\frac{1}{4}\pi$ zu überzeugen. Eine genaue Übereinstimmung damit ist prinzipiell nicht zu fordern, der Theorie nach sollte er, wie oben bemerkt, um eine Kleinigkeit größer als $\frac{1}{4}\pi$ aus den Versuchen hervorgehen, aber dies kleine theoretische Übergewicht kann leicht durch unausgeglichene Zufälligkeiten überboten werden, und so hat er sich (nach möglichst genauer proportionaler Bestimmung von D als D_p) in den aus den verschiedensten Gebieten entnommenen K.-G., die sich in Bezug auf die Gültigkeit vorstehender Gesetze untersuchen ließen (Schädelmaßen, Rekrutenmaßen, botanischen, meteorologischen Maßen), bei den verschiedensten Reduktionsstufen und Reduktionslagen der Verteilungstafeln zwischen 0,6 und 0,9 gefunden.

Statt sich an p zu halten, könnte man sich auch an die beiden anderen π-Funktionen halten, nur dass wegen des kleineren Verhältnisses, was $A - C$ gegen $C - D$ und vollends gegen $A - D$ hat, diese anderen Funktionen in stärkerem Verhältnisse von unausgeglichenen Zufälligkeiten affiziert werden können.

Aus der dritten π-Gleichung, wonach

$$\frac{C-D}{A-C} = 3{,}66,$$

lässt sich ein sehr einfacher Weg ableiten, D approximativ noch auf einem anderen Wege als direkt empirisch oder proportional zu bestimmen, welcher darin besteht, dass, nachdem man A und C bestimmt hat, man den Abstand des gesuchten D von C 3,66 mal so groß nimmt, als der Abstand des A von C gefunden ist. In Kürze mögen wir den so bestimmten D-Wert als D_π bezeichnen. — Inzwischen ist diese Bestimmung zu unsicher, um ihr überhaupt Wert beizulegen; zumal außer der mühsamen Bestimmung des D als D_p noch ein anderer verhältnismäßig einfacher Weg sehr approximativer Bestimmung als sog. D_i zu Gebote steht, wovon in Kap. XI. die Rede sein wird.

Um statt bloß approximativer, genaue Bestimmungen der drei Abstandsverhältnisse zu erhalten, hat man auf die genauen Werte der drei Abstände selbst zurückzugehen, welche unter den Abstandsgesetzen angeführt sind, wonach:

$$\frac{C-D}{A-D} = \frac{m''t''\sqrt{\pi}}{m''-m_{,,}} = \frac{t''\sqrt{\pi}}{2\,\Phi''};$$

$$\frac{C-D}{A-C} = \frac{t''\sqrt{\pi}}{2\,\Phi'' - t''\sqrt{\pi}};$$

$$\frac{A-C}{A-D} = \frac{2\,\Phi'' - t''\sqrt{\pi}}{2\,\Phi''} = 1 - \frac{t''\sqrt{\pi}}{2\,\Phi''}.$$

Diese Verhältnisse haben zwei Grenzwerte, zwischen welchen sie sich halten, wovon der erste dem Falle $m'' = m_{,,}$, d. i. dem Falle verschwindender Asymmetrie, wo $\xi = 1$, entspricht; der zweite dem Falle, wo $m_{,,}$ gegen m'' verschwindend klein, mithin $= 0$ gesetzt werden kann. Dies giebt für

	1. Grenze:	2. Grenze:
$\frac{C-D}{A-D}=p$	0,785 40	0,845 35
$\frac{A-C}{A-D}$	0,214 60	0,154 65
$\frac{C-D}{A-C}$	3,659 79	5,466 09.

Der Wert p kann also normaler Weise überhaupt nicht unter 0,785 40 fallen und nicht über 0,845 35 steigen.

6) Lagengesetz. Der Zentralwert C und das arithmetische Mittel A liegen nach derselben Seite vom dichtesten Werte D ab, und zwar so, dass C zwischen A und D fällt (s. § 134).

7) Umkehrgesetz. Die Asymmetrie der Abweichungen bez. D hat das entgegengesetzte Vorzeichen als die der Abweichungen bez. A, d. i., wenn $m' - m_,$ bez. A (d. i. $\mu' - \mu_,$) positiv ist, so ist $m' - m_,$ bez. D (d. i. $m' - m_,$) negativ, und umgekehrt (s. § 134). Ferner hat der Unterschied zwischen den extremen Abweichungen bez. A, d. i. $U' - U_,$, das entgegengesetzte Vorzeichen als der Unterschied zwischen den Abweichungszahlen, d. i. $u = \mu' - \mu_,$ (s. § 142).

8) Die Extremgesetze. [Ist die Anzahl der oberhalb resp. unterhalb D liegenden Abweichungen gleich m' resp. $m_,$, so besteht die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{2m'}{\sqrt{\pi}} \Phi[t']^{m'-1} \exp[-t'^2]dt'$$

dafür, dass:

$$U' = t'e'\sqrt{\pi}$$

den extremen Wert der oberen Abweichungen dartselle. Entsprechend ist die W. dafür, dass:

$$U_, = t_, e_, \sqrt{\pi}$$

das Extrem der unteren Abweichungen sei, gleich:

$$\frac{2m_,}{\sqrt{\pi}} \Phi[t_,]^{m_,-1} \exp[-t_,^2]\, dt_,.$$

Hiernach ist der wahrscheinliche Wert der oberen resp. unteren extremen Abweichung gleich:

$$U' = t'e' \sqrt{\pi} \text{ resp. } U_{,} = t_{,}e_{,}\sqrt{\pi},$$

wenn t' und $t_{,}$ mittelst der t-Tabelle aus:

$$\Phi[t'] = \sqrt[m']{\tfrac{1}{2}} \text{ resp. } \Phi[t_{,}] = \sqrt[m_{,}]{\tfrac{1}{2}}$$

bestimmt werden. (Vergl. Kap. XX.)][1])

Abgesehen von den π-Gesetzen 6) und Extremgesetzen 8), welche ich erst der Theorie verdanke, nachher aber auch empirisch bewährt fand, sind die vorigen Gesetze von mir zuerst rein empirisch gefunden worden, wonach diese Gesetze auch eine empirische Gültigkeit rücksichtslos auf alle Theorie in Anspruch nehmen können und gegenseits für eine damit zusammentreffende Theorie Zutrauen erwecken können. Vergeblich freilich würde man durch rohe Bestimmung aus primären, mit großen Unregelmäßigkeiten durchsetzten Tafeln eine genaue Bestimmung des D und der damit in Beziehung stehenden Werte zu erlangen und hiermit eine Kontrolle der vorigen Gesetze zu gewinnen suchen; es wird also noch zu besprechen sein, wie man durch angemessene Reduktion und Interpolation der Verteilungstafeln zum Zwecke kommt.

§ 34. Ausdrücklich ist erwähnt worden, dass die vorigen Gesetze für den Fall nicht zu starker verhältnismäßiger Schwankung der K.-G. (im Sinne von § 9 S. 19) als genügend angesehen werden können, bei starker verhältnismäßiger Schwankung aber eine weitere Verallgemeinerung des G. G. fordern. Nun ist noch anzugeben, was hierzu Anlass geben kann, und wie diese Verallgemeinerung zu fassen.

Das G. G. kann seiner Natur nach selbst bei unendlichem m nur ein Annäherungsgesetz sein und ist von GAUSS selbst nur dafür erklärt worden[2]); denn es setzt der Größe der Abweichungen von A nach beiden Seiten keine Grenze, sondern lässt nur die W. der Abweichungen mit wachsender Größe derselben immer mehr abnehmen.

---

1) [Durch die eckigen Klammern werden, wie in den »Vorbemerkungen« bereits erwähnt wurde, die Ergänzungen und Zusätze des Herausgebers kenntlich gemacht.]

2) Theoria motus corporum coelestium; Lib. II. Sect. III. artic. 178. Theoria combinationis observ. error. minim. obnoxiae; Pars prior, art. 17; Comment. societ. Götting. rec. Vol. V.

Es leuchtet aber ein, dass, wenn die Abweichungen von A ins Negative größer als A selbst werden sollten, die abweichenden Werte a kleiner als Null werden, was unmöglich ist. Also kann das G. G. von vornherein keine unbeschränkte Gültigkeit in Anspruch nehmen, wenn schon mit größter Approximation für Fälle gültig bleiben, wo die Abweichungen vom arithmetischen Mittel, mindestens die an Zahl weit überwiegenden, in dessen Nähe und durchschnittlich sehr klein bleiben. Dasselbe aber, was in dieser Hinsicht betreffs der negativen Abweichungen von A nach dem reinen G. G. gilt, gilt nicht minder von den negativen Abweichungen bez. D und der vorigen Verallgemeinerung und hiermit Modifikation des G. G., und es giebt K.-G., bei denen die verhältnismäßige Schwankung um D so groß ist, dass man mit dem vorigen Prinzip der Verallgemeinernng nicht mehr ausreicht.

Hiernach ist eine Verallgemeinerung des G. G. zur Anwendbarkeit auf K.-G. nach zwei Richtungen oder in doppeltem Sinne zu unterscheiden: 1) sofern Kollektivabweichungen nicht die den Beobachtungsfehlern zugeschriebene symmetrische W. bezüglich des arithmetischen Mittels zeigen, der Fall der Asymmetrie aber als der allgemeinere angesehen werden kann, welcher den der Symmetrie nur als besonderen Fall unter sich begreift; 2) sofern Kollektivabweichungen, wenn auch bei der Mehrzahl der K.-G., doch nicht bei allen die den Beobachtungsfehlern zukommende geringe verhältnismäßige Schwankung um die Hauptwerte zeigen.

Da nun die K.-G., bei welchen man mit einer Verallgemeinerung des G. G. in erster Richtung auskommt, nicht nur bei weitem zahlreicher, sondern auch viel einfacher zu behandeln sind als die, bei welchen es nötig ist, die noch weitere Verallgemeinerung in zweiter Richtung Platz greifen zu lassen, und da durch Vorwegnahme der Verallgemeinerung in erster Hinsicht sich die Darstellung des Prinzips der Verallgemeinerung in zweiter Hinsicht erleichtert, so ist diese Vorwegnahme hier geschehen, nun aber doch, um unserer Untersuchung überhaupt die erforderliche Allgemeinheit zu geben, auf die Verallgemeinerung in zweiter Hinsicht einzugehen, und zwar begegnen sich von vornherein zwei Gesichtspunkte, dem Gedanken eine

Richtung zu geben, wie diese Verallgemeinerung zu fassen sein möchte.

§ 35. Bisher haben wir immer bloß arithmetische Abweichungen bezüglich irgend welcher Hauptwerte im Auge gehabt, d. h., welche als positive und negative Unterschiede davon gefasst werden können, und gewöhnlich werden solche, wie auch hier ferner geschehen wird, unter Abweichungen schlechthin verstanden. Ich bezeichne sie angegebenermaßen allgemein mit Θ. Aber man kann auch von Verhältnisabweichungen bezüglich gegebener Hauptwerte sprechen, d. h. Verhältnissen, in welchen ein gegebener Hauptwert H überstiegen oder unterstiegen wird, die wir allgemein mit ψ bezeichnen wollen. Wenn also $\Theta = a - H$ eine arithmetische Abweichung ist, ist $\psi = a : H$ eine Verhältnisabweichung, und während wir Θ' und $\Theta_{,}$ als positive und negative arithmetische Abweichungen unterscheiden, je nachdem $a > H$ oder $< H$, unterscheiden wir aus demselben Gesichtspunkte ψ' und $\psi_{,}$ als obere und untere Verhältnisabweichungen.

Während nun starke arithmetische Abweichungen von einem Hauptwerte ins Negative bis unter die Größe des Hauptwertes hinabführen und hiermit unmöglich werden, gilt dies nicht von starken unteren Verhältnisabweichungen, die vielmehr, so weit sie nach unten gehen mögen, nur bis zu immer kleineren Bruchwerten des Hauptwertes führen, welche aber eben so positiv als der Hauptwert selbst bleiben, auf den sie sich beziehen; denn negative Verhältnisabweichungen giebt es überhaupt nicht, sondern nur positive, welche 1 übersteigen, und solche, welche (als echte Brüche) 1 nicht erreichen. Wonach sich daran denken liess, dass das Verteilungsgesetz, um auf verhältnismäßig stark schwankende K.-G. nach unten noch eben so anwendbar zu bleiben als auf schwach schwankende, prinzipiell überhaupt statt auf arithmetische Abweichungen auf Verhältnisabweichungen beziehbar sein möchte.

Mit diesem mathematischen Gesichtspunkte aber trifft folgender empirischer in derselben Richtung zusammen.

Beobachtungsfehler sind, allgemein gesprochen, wenigstens bezüglich der Messung von Raumlängen, wesentlich unabhängig von der

Größe des zu messenden Gegenstandes, insofern nicht mit dessen Größe die Maßmittel sich ändern, sich zusammensetzen, komplizieren; denn freilich die Beobachtungsfehler bei Messung einer Meile werden größer sein als bei Messung einer Fußlänge, aber nur, weil mehr und zusammengesetztere Operationen zur Messung der ersteren gehören; indes die Beobachtungsfehler bei Messung eines hohen Thermometer- oder Barometerstandes allgemein gesprochen nicht größer sind als bei Messung eines niedrigen.

Hiergegen variieren K.-G. im allgemeinen in wesentlicher Abhängigkeit von ihrer Größe, wenn dies im Sinne folgender Beispiele verstanden wird. Ein Floh ist durchschnittlich ein kleines Wesen, und so sind auch die Abweichungen der einzelnen Flohexemplare vom mittleren Floh durchschnittlich nur klein, nur Bruchteile von dessen mittlerer Größe, und der ganze Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Floh bleibt nur klein. Die Maus ist durchschnittlich viel größer als der Floh, das Pferd wieder viel größer als die Maus, ein Baum viel größer als ein Kraut u. s. w., und überall kehrt eine entsprechende Bemerkung wieder. Die Abweichungen der einzelnen Mäuseexemplare von der mittleren Maus sind durchschnittlich größer als die der einzelnen Flohexemplare vom mittleren Floh u. s. f. Auch lässt sich diese Abhängigkeit der durchschnittlichen Größe der Variationen von der durchschnittlichen Größe des Gegenstandes daraus verstehen, dass die inneren und äußeren ändernden Ursachen auf große Gegenstände mehr Angriffspunkte finden als auf kleine. Zwar auch die Qualität der Gegenstände hat durch die größere oder geringere Leichtigkeit, mit der sie den ändernden Einflüssen nachgiebt, Einfluss; ferner kann die Zugänglichkeit für äußere ändernde Einflüsse nach Umständen verschieden sein. Also ist eine genaue Proportionalität der mittleren Größe der Abweichungen mit der mittleren Größe der Gegenstände von vornherein nicht zu erwarten. Aber jedenfalls bleibt die Größe der Gegenstände ein Hauptfaktor für die Größe ihrer Änderungen, und wenn schon deren durchschnittliche Größe bei verschiedenen K.-G. nicht der Mittelgröße der Gegenstände rein proportional ist, bleibt doch sehr denkbar, dass für jeden insbesondere bei der für ihn gegebenen Leichtigkeit, den ändernden

Einflüssen zu folgen, und Zugänglichkeit zu denselben das einfachst mögliche Verteilungsgesetz der Abweichungen sich vielmehr auf Verhältnisabweichungen als arithmetische Abweichungen beziehe.

§ 36. Zunächst freilich tritt diesem Gedanken die scheinbare Schwierigkeit entgegen, dass das G. G. seiner Natur nach nur auf Abweichungen beziehbar ist, welche als positive und negative Unterschiede von ihrem Ausgangswerte fassbar sind, hiernach nicht als besonderer Fall unter ein Gesetz treten kann, welches sich auf Verhältnisabweichungen bezieht, und doch suchen wir ein Gesetz, welches für den Fall verschwindender Asymmetrie und schwacher verhältnismäßiger Schwankung in das G. G. übergeht oder dessen Verteilungsweise wiedergiebt. Aber übersetzen wir die Verhältnisabweichungen $\psi = a : H$ in ihre Logarithmen, $\log \psi = \log a - \log H$, die wir kurz als logarithmische Abweichungen mit λ bezeichnen mögen, und bemerken dazu:

1) dass die logarithmischen Abweichungen $\lambda = \log a - \log H$ den Charakter der arithmetischen Θ teilen, sich als positive und negative Unterschiede von einem gegebenen Ausgangswerte fassen zu lassen, nur dass dieser selbst ein logarithmischer, nicht mehr H, sondern $\log H$ ist;

2) dass, solange die arithmetischen Abweichungen verhältnismäßig klein gegen ihren Hauptwert sind, also eine verhältnismäßig geringe Schwankung um denselben stattfindet, wie es beim G. G. vorausgesetzt ist, die Verhältnisse der arithmetischen Abweichungen mit denen der zugehörigen logarithmischen merklich übereinstimmen, was nicht nur mathematisch beweisbar, sondern auch empirisch an den Logarithmentafeln nachweisbar ist, indem man die Differenzen der Logarithmen mit denen der zugehörigen Zahlen vergleicht.

Also würden wir auch bei verhältnismäßig schwacher Schwankung von dem logarithmischen Prinzip, als dem allgemeinst zulänglichen, mit Vorteil Gebrauch machen können, nur dass dieser Vorteil bei verhältnismäßig schwacher Schwankung zu gering ist, um die vermehrte Mühe zu lohnen, welche die logarithmische Behandlung mitbringt, indes er bei verhältnismäßig starker Schwankung entschieden hervortritt, wozu die empirischen Belege folgen werden; denn freilich ohne empirische Belege könnte die vorige Auffassung überhaupt nur als eine in die Luft gebaute Hypothese erscheinen. Die Anwendung der logarithmischen Behandlung auf die Empirie aber ist diese.

Man reduziere die gegebenen Einzelmaße a des K.-G. auf ihre Logarithmen $\mathfrak{a} = \log a$, suche in derselben Weise, als es bei Aufsuchung des dichtesten Wertes D aus den a geschieht, worauf später bestimmter einzugehen, den dichtesten Wert dieser $\mathfrak{a}$, welcher $\mathfrak{D}$ heiße, und der, wie später bestimmter zu erläutern, nicht mit $\log D$ zu verwechseln ist, nehme von diesem Werte $\mathfrak{D}$ die logarithmischen Abweichungen $\lambda = \mathfrak{a} - \mathfrak{D} = \log a - \mathfrak{D}$, welche teils positiv, teils negativ sein werden, suche von den λ nach jeder Seite insbesondere, d. i. λ' und $\lambda_{,}$, die einfachen arithmetischen Mittel oder sog. mittleren logarithmischen Abweichungen $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_{,}$ respektive:

$$\mathfrak{e}' = \frac{\Sigma \lambda'}{\mathfrak{m}'}, \quad \mathfrak{e}_{,} = \frac{\Sigma \lambda_{,}}{\mathfrak{m}_{,}},$$

wobei $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{m}_{,}$ die Zahl der positiven und negativen Abweichungen, nicht wie früher der a von D, sondern der $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{D}$ bedeuten, und bestimme dann die Verteilung der logarithmischen Abweichungen λ', $\lambda_{,}$ auf jeder Seite insbesondere ebenso in Bezug auf $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_{,}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}_{,}$ nach zwiespältigem G. G., wie es oben (§ 33) unter 2) angegeben ist, nur dass $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_{,}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}_{,}$ hier in angegebener Weise logarithmisch, statt wie früher arithmetisch bestimmt sind.

Aus diesen für die logarithmischen Abweichungen geltenden Bestimmungen folgen dann durch Übersetzung derselben in die nach den Logarithmentafeln zugehörenden Zahlen Bestimmungen für die Verhältnisabweichungen und deren Hauptwerte, worauf aber für jetzt nicht einzugehen, indem die erforderlichen Ausführungen darüber einem späteren Kapitel vorbehalten bleiben, welches überhaupt auf die logarithmische Behandlung der K.-G. näher eingeht (Kap. XXI).

Außer dem logarithmisch dichtesten Werte $\mathfrak{D}$ kann man dann auch das logarithmische Mittel $\mathfrak{G}$ als $\Sigma \mathfrak{a} : m$, d. h. als arithmetisches Mittel der Logarithmen von a, und den logarithmischen Zentralwert $\mathfrak{C}$, als den Wert von $\mathfrak{a}$, der gleichviele $\mathfrak{a}$ über sich und unter sich hat, bestimmen.

Von den logarithmischen Werten kann man ferner zu den Zahlwerten, die ihnen nach den Logarithmentafeln zugehören, übergehen, und besondere Bezeichnungen dafür festsetzen, was nicht müßig ist, da diese Werte ihre beachtenswerte Bedeutung haben. So lässt sich der zu $\mathfrak{D}$ gehörige Zahlwert mit $\mathcal{T}$ als dichtester Verhältniswert bezeichnen, indem er die Bedeutung hat, dass in gleichem Verhältnisabstande von ihm nach jeder Seite mehr Werte a und mithin α vereinigt sind als in demselben Verhältnisabstande von irgend einem anderen a.

Der zu dem logarithmischen Zentralwerte $\mathfrak{C}$ gehörige Zahlwert stimmt mit dem arithmetisch bestimmten C überein; denn wenn ein Wert von a, d. i. C, gleichviel a über sich und unter sich hat, so hat auch der Logarithmus von C, d. i. $\mathfrak{C}$, gleichviel Logarithmen der a, d. i. gleichviel α, über sich und unter sich.

Der mit G zu bezeichnende, welcher als Zahlwert zu $\mathfrak{G}$ gehört, stellt das geometrische Mittel der a dar.

§ 37. Wir haben also folgende drei allgemeine Gesetze oder Prinzipe zu unterscheiden, von denen jedes folgende als eine Verallgemeinerung und zugleich Verschärfung des vorhergehenden betrachtet werden kann, und deren wesentliche Unterschiede hierbei kurz resumiert werden sollen.

1) Das reine, einfache, ursprüngliche Gauss'sche Gesetz oder Prinzip, für die Voraussetzung symmetrischer Wahrscheinlichkeit der beiderseitigen arithmetischen Abweichungen Θ', Θ, vom arithmetischen Mittel. Hierbei wird der Ausgang vom arithmetischen Mittel A genommen, die beiderseitigen Abweichungen davon als arithmetische bestimmt, die mittlere Abweichung $\varepsilon = \Sigma\Theta : m$ für beide Seiten gemeinsam als Quotient der Summe der beiderseitigen Abweichungen nach absolutem Werte durch die Gesamtzahl derselben direkt (oder nach einer bekannten Formel aus der Summe der Abweichungsquadrate als $\varepsilon = q\sqrt{2 : \pi}$) berechnet und nach der t-Tabelle die Verteilung bestimmt. Zur ausdrücklichen Unterscheidung der Beziehung der Abweichungen auf A ersetze ich die allgemeinen Bezeichnungen m, Θ, ε durch μ, Δ, η.

2) Die arithmetische Verallgemeinerung des G. G., für die Voraussetzung asymmetrischer W. der Abweichungen Θ', Θ, vom

arithmetischen Mittel, allgemein gültig für die verschiedensten Grade der Asymmetrie, doch nur zureichend für verhältnismäßig schwache Schwankung um die Hauptwerte, wie sie den meisten K.-G. zukommt. Hier wird der Ausgang von dem arithmetisch dichtesten Werte D genommen, der aus den Maßwerten a in später zu betrachtender Weise[1]) erhalten wird, ohne sie vorher in Logarithmen übersetzt zu haben. Die beiderseitigen Abweichungen Θ', $\Theta_{,}$ werden als arithmetische nach beiden Seiten von D besonders genommen, ihre mittleren Werte $\varepsilon' = \Sigma\Theta' : m'$ und $\varepsilon_{,} = \Sigma\Theta_{,} : m_{,}$ bestimmt, und nun für jede Seite insbesondere die Verteilung nach dem zweispaltigen G. G. (§ 33) unter Setzung von $t' = \Theta' : \varepsilon'\sqrt{\pi}$ für positive Seite und von $t_{,} = \Theta_{,} : \varepsilon_{,}\sqrt{\pi}$ für negative Seite nach der t-Tabelle bestimmt. Zur ausdrücklichen Unterscheidung der Beziehung der Abweichungen auf D ersetze ich die allgemeinen Bezeichnungen m, Θ, ε durch $\boldsymbol{m}$, ∂, e.

3) Die logarithmische Verallgemeinerung des vorigen Gesetzes oder Prinzips, gültig für beliebig große Asymmetrie und beliebig große verhältnismäßige Schwankung. Hiernach sind von allen einzelnen Maßwerten a die Logarithmen $\alpha = \log a$ zu nehmen, hieraus der dichteste Wert $\mathfrak{D}$ zu bestimmen, die logarithmischen Abweichungen λ', $\lambda_{,}$ nach beiden Seiten zu nehmen, hieraus die Mittel derselben e', $e_{,}$ zu nehmen und auf α, $\mathfrak{D}$, λ', $\lambda_{,}$, e', $e_{,}$ ganz entsprechende Bestimmungen anzuwenden als nach der vorigen, der arithmetischen Verallgemeinerung auf a, D, ∂', $\partial_{,}$, e', $e_{,}$. Von den logarithmischen Werten lässt sich dann auf die Verhältniswerte als nach den Logarithmentafeln zugehörige Zahlen kommen.

Als prinzipiell streng sehe ich nun eigentlich bloß die logarithmische Verallgemeinerung des G. G., d. i. 3) an; aber sie ist in ihrer Anwendung sehr umständlich, und bei verhältnismäßig schwacher Schwankung kann man sehr wohl nach der arithmetischen Verallgemeinerung 2) verfahren, wie sich erfahrungsmäßig beweisen wird. Am wenigsten genügt überall das einfache G. G. 1), indes es am einfachsten anwendbar ist, weil der arithmetische Mittelwert A als Ausgangswert der Abweichungen leichter als die dichtesten Werte

---

1) [S. Kap. XI.]

D und $\mathfrak{D}$ mit verhältnismäßiger Genauigkeit zu bestimmen ist; bei schwacher Asymmetrie aber weichen die Resultate von 1), 2) und 3) wenig von einander ab.

Je nachdem ich nun folgends die Behandlung eines Gegenstandes unter Voraussetzung symmetrischer W. der Abweichungen bez. A, also nach erstem Prinzip, oder unter Voraussetzung asymmetrischer W. bez. A, also nach zweitem oder drittem Prinzip im Auge habe, werde ich kurz von Behandlung nach symmetrischem oder asymmetrischem Prinzip sprechen; und je nachdem ich die Behandlung mit Anwendung arithmetischer Abweichungen, also nach erstem oder zweitem Prinzip, oder mit Anwendung logarithmischer Abweichungen, also nach drittem Prinzip, im Auge habe, werde ich von arithmetischer oder logarithmischer Behandlung sprechen.

Im allgemeinen findet man für das Folgende die Behandlung der Gegenstände und Aufstellung der Sätze nach arithmetischem Prinzip geführt; der Übergang zum logarithmischen Prinzip und die Behandlung der eine solche wesentlich fordernden Gegenstände wird aber dem Kapitel XXI besonders vorbehalten.

VI. Charakteristik der Kollektivgegenstände durch ihre Bestimmungsstücke oder sog. Elemente.

§ 38. Gehen wir auf die schon früher (Kap. II) bezüglich der Charakteristik der K.-G. gemachten allgemeinen Bemerkungen jetzt etwas bestimmter ein.

Sollte ein K.-G. vollständig nach Maß und Zahl bestimmt sein, so würde es überhaupt gelten, nicht nur alle gegenwärtigen, sondern auch gewesenen und künftigen Exemplare desselben zu zählen und von jedem das Maß nach den Hinsichten zu nehmen, die einer quantitativen Bestimmung Raum geben, als wie Größe nach den drei Hauptdimensionen, Gewicht, Dichtigkeit, Dauer. Dies ist im allgemeinen unmöglich. Die Menge der Exemplare eines gegebenen Gegenstandes ist überhaupt meist unbestimmbar groß, und von dieser unbestimmbar großen Menge steht meist nur eine sehr beschränkte Anzahl für Maßnahmen daran zu Gebote. Dazu erhellt, dass, wenn z. B. das Gehirngewicht des Europäers und Negers verglichen werden soll, dies nicht dadurch geschehen kann, dass man die Gewichte von tausend europäischen Gehirnen den Gewichten von tausend Negergehirnen gegenüberstellt. Es gilt ein einheitliches Resultat. Also wird es zwar nach schon früher gemachten Bemerkungen gelten, so viele Exemplare der zu untersuchenden und zu vergleichenden Gegenstände als möglich ohne willkürlichen Ausschluss gewisser Größen zu messen, worin man nicht zu viel thun kann, um unausgeglichenen Zufälligkeiten nicht zu viel Raum zu geben, die erhaltenen Maße in angegebener Weise nach Zahl und Größe in Verteilungstafeln zu ordnen, und, da dies aber doch erst dazu führt, den Gang der

Werte im allgemeinen übersehen zu lassen, aus diesen Verteilungstafeln gewisse Werte, die sog. Bestimmungsstücke oder Elemente des K.-G. abzuleiten, welche eine Charakteristik des Gegenstandes und Möglichkeit seines Vergleiches mit anderen Gegenständen nach quantitativer Beziehung gewähren. In der That hat man hierin die Frucht der vielen einzelnen Maßbestimmungen zu sehen und zu bieten.

Begnügt man sich nun, wie es häufig der Fall ist, mit der Angabe des arithmetischen Mittels eines K.-G., so hat man darin allerdings einen wichtigen und in keinem Falle zu vernachlässigenden Bestimmungswert und Vergleichswert mit anderen Gegenständen; aber es können zwei K.-G. ganz oder nahe darin übereinstimmen und doch nach anderen Beziehungen sehr auseinander weichen. Nun konnte es früher genug erscheinen, auch die mittlere Schwankungsgröße und ganze Schwankungsweite eines K.-G. durch Angabe der mittleren Abweichung vom arithmetischen Mittel und der Extreme zu berücksichtigen, um die wesentliche Charakteristik damit erschöpft zu haben, und in der That ist dies mitunter geschehen. Aber mit der Erkenntnis der den K.-G. in so großer Allgemeinheit und in so verschiedenem Grade nach einer oder der anderen Richtung zukommenden Eigenschaft der Asymmetrie ist das bisher nicht gefühlte Bedürfnis eingetreten, die K.-G., die man überhaupt einer eingehenden Untersuchung und Vergleichung wert hält, auch nach dieser Richtung zu charakterisieren, d. i. die verschiedenen Hauptwerte, deren Unterscheidbarkeit durch die Asymmetrie bedingt ist, und die Abweichungswerte bezüglich derselben ins Auge zu fassen, womit nicht gesagt ist, dass jeder Gegenstand an sich Interesse genug hat, um sich auf eine solche Erweiterung seiner Charakteristik einzulassen, indes jedenfalls in einer allgemeinen Kollektivmaßlehre darauf eingegangen werden muss.

§ 39. Wenn nun schon die allgemeine Kollektivmaßlehre nicht bei der früher gewohnten, beschränkten Berücksichtigung von A und der dazu in Beziehung stehenden Abweichungen stehen bleiben kann, und doch, wie schon oben zugegeben, nicht jeder K.-G. auf eine Berücksichtigung aller möglichen Bestimmungsstücke, die im II. Kapitel angegeben sind, Anspruch machen kann, so wird überhaupt nicht leicht Anlass sein, auf eine allseitige Berücksichtigung derselben einzugehen, es sei denn bei einem K.-G., dem man eine ganz besondere Wichtigkeit beilegt, und der als Beispiel für die Durchführbarkeit der allseitigen Berücksichtigung selbst dienen soll. Also kann man leitende Gesichtspunkte für eine zu treffende Auswahl wünschen.

Alles zusammengenommen nun glaube ich, dass, wo man mit Bestimmungen sparen will, und es eine Konvention gilt, an welchen Hauptwert man sich vorzugsweise zur charakteristischen Unterscheidung gegebener K.-G. halten soll, dem arithmetischen Mittel mit seinen Abweichungen immer der ihm bisher gewahrte Vorzug bleiben wird, nur dass man mit Übergehung der übrigen Bestimmungsstücke zugleich an Einsicht in die quantitative Konstitution der K.-G. verliert und Charaktere derselben außer Acht lässt, die an sich nicht minder bedeutsam sind, als die sich an das arithmetische Mittel knüpfen, und auf die Aufstellung eines allgemeinen Verteilungsgesetzes emporheben. Zur Klarstellung hiervon wird auf die schon oben (Kap. II) angegebenen Eigenschaften der verschiedenen Hauptwerte mit erweiternder und erläuternder Betrachtung zurückzukommen sein.

[Dies wird ausführlich im X. Kap. geschehen. Während aber dort die Eigenschaften jedes einzelnen Hauptwertes für sich vorgeführt werden, handelt es sich hier um eine vergleichende Beurteilung der Hauptwerte selbst rücksichtlich ihrer Leistungen zur Charakteristik der K.-G. Aus diesem Grunde kommen bloß der arithmetische Mittelwert A, der Zentralwert C und der dichteste Wert D in Betracht; denn der Scheidewert R, sowie der schwerste Wert T und der Abweichungsschwerwert F sind von vornherein wegen ihrer geringeren Bedeutung bei einer zu treffenden Auswahl bei Seite zu lassen. Dabei ist jedoch ein Unterschied dazwischen zu machen, ob jene drei Hauptwerte mit Rücksicht auf ein als gültig vorausgesetztes Verteilungsgesetz oder ohne Rücksicht auf ein solches betrachtet werden sollen, da je nachdem eine ganz verschiedene Wertschätzung derselben Platz greift.]

§ 40. [Lässt man nämlich die Voraussetzung fallen, dass ein Verteilungsgesetz den Gang der z-Werte einer Verteilungstafel regelt, so ist die letztere prinzipiell nur als eine regellose Ansammlung von

Werten aufzufassen, und es kann darum den Hauptwerten nur die Bedeutung zukommen, als Mittelwerte jenen regellosen Komplex in mehr oder minder zutreffender Weise zusammenzufassen und zu vertreten. Dann ist aber keinem Zweifel unterworfen, dass die Bestimmung des *A* wertvoller ist als diejenige des *C* oder des *D*. Denn *A* stellt als arithmetisches Mittel den Durchschnittswert dar, der thatsächlich an Stelle jedes einzelnen Wertes gesetzt werden kann, wenn dieselben zu einer Summe zusammengefasst werden sollen. *C* dagegen giebt bloß die Wertmitte an, die eben so oft überschritten als unterschritten wird, und repräsentiert somit die Tafelwerte mit geringerer Zuverlässigkeit, weil es nicht wie *A* von der Summe, sondern nur von der Anzahl der beiderseitigen Abweichungen abhängt. *D* schließlich kann gar nicht als stellvertretender Mittelwert zugelassen werden, da es nur den empirisch dichtesten Wert in seiner durch kein Gesetz geregelten Zufälligkeit bezeichnet und seiner Lage nach nicht rechnerisch bestimmt, sondern bloß durch den Anblick der Tafel gefunden werden kann. Überhaupt ist sein thatsächliches Vorhandensein in einer regellos verlaufenden Tafel nur als ein glücklicher Zufall anzusehen, dem keine Wichtigkeit beizumessen ist.]

[Anders ist es, wenn das Bestehen eines Verteilungsgesetzes angenommen wird. Dann behält zwar *A* die Bedeutung als Durchschnittswert, die es auch in der regellosen Tafel hat, ohne direkt etwas zu gewinnen. Die Bedeutung von *C* dagegen wird größer, da es, mit Rücksicht auf die nunmehr in Kraft tretenden Wahrscheinlichkeitsbegriffe, als Wertmitte den wahrscheinlichen Wert darstellt. In den Mittelpunkt des Interesses rückt aber *D*, da es als empirisch dichtester Wert, wenigstens angenähert, d.h. von den unausgeglichenen Zufälligkeiten abgesehen, denjenigen Wert bezeichnet, dem die größte W. zukommt. *D* steht somit in solidarischem Zusammenhange mit dem Verteilungsgesetze, dessen Maximalwert prinzipiell mit ihm zusammenfallen muss. Auch erhellt unmittelbar, dass nach Aufstellung eines zutreffenden Verteilungsgesetzes ein doppelter Weg zur Bestimmung von *D* offen steht: der eine auf Grund des Gesetzes, dessen Maximalwert theoretisch den wahrscheinlichsten Wert bezeichnet; der andere auf Grund der Tafel, deren dichtester Wert empirisch den wahrscheinlichsten Wert angiebt. Dabei ist es gleichgültig, ob der Gang der z in der Tafel den dichtesten Wert direkt oder nur die Tendenz zur Erzeugung eines solchen erkennen lässt. Denn infolge des in Kraft getretenen Gesetzes stehen die a und die z in funktionalem Zusammenhange, so dass nach bekannten Regeln das dichteste z durch Interpolation aus den gegebenen Tafelwerten berechnet werden kann, wenn seine rohe Bestimmung aus dem unmittelbaren Anblick der Tafel versagt oder ungenau erscheint. Insofern nun aber diese empirische Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes mit jener theoretischen übereinstimmen soll, müssen dem D alle die Eigenschaften beigelegt werden, die den Maximalwert des Verteilungsgesetzes auszeichnen, so dass einesteils die Berechnung des D durch Interpolation ein Mittel bietet, die Triftigkeit eines aufgestellten Verteilungsgesetzes zu erhärten, anderenteils, vor Kenntnis des aufzustellenden Gesetzes, die Erkenntnis der Eigenschaften des empirisch konstatierten D der Tafeln Fingerzeige zur Auffindung eines Verteilungsgesetzes geben kann.]

§ 41. [Dieser solidarische Zusammenhang zwischen den Eigenschaften des dichtesten Wertes D und dem Verteilungsgesetze, der dem D den unbedingten Vorrang vor jedem anderen Hauptwerte sichert, tritt auch in der physikalischen und astronomischen Fehlertheorie zu Tage. Dieselbe betrachtet bekanntlich als den wahren Beobachtungswert das arithmetische Mittel der beobachteten Werte, deren Abweichungen von jenem die Beobachtungsfehler sind. Der wahre Wert ist aber nichts anderes als der wahrscheinlichste Wert, der in einer Fehlerreihe, die hinreichend groß ist, um einen gesetzmäßigen Gang erkennen zu lassen, als empirisch dichtester Wert sich zu erkennen giebt. Es wird also durch Aufstellen des Prinzips, dass der wahre oder wahrscheinlichste Wert das arithmetische Mittel A sei, dem A die Bedeutung zugelegt, zugleich der dichteste Wert D zu sein. Diese Forderung des prinzipiellen Zusammenfallens von A und D führt nun zum Gauss'schen Fehlergesetz, wie das z. B. aus Encke's[1]) Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate zu ersehen

1) [Berliner astronomisches Jahrbuch für 1834, S. 264 fg.]

ist. Auf Grund desselben folgt dann weiterhin auch die prinzipielle Übereinstimmung des Zentralwertes C mit A und mit D, deren vereinigte Lage für den Gang der Tafel Symmetrie bez. A bedingt, während ihr Auseinanderweichen Asymmetrie zur Folge hat.]

[Jenes Prinzip muss natürlich durch die Erfahrung Bestätigung finden. Damit wird jedoch nicht verlangt, dass für Fehlerreihen, deren Ausdehnung in den Stand setzt, einen dichtesten Wert durch den unmittelbaren Anblick der Reihe oder durch interpolationsmäßige Berechnung anzugeben, derselbe genau mit A zusammenfalle; denn man wird stets auf unausgeglichene Zufälligkeiten Rücksicht zu nehmen haben, die ein empirisches Auseinanderweichen der Hauptwerte verursachen können, ohne zugleich die Gültigkeit des aufgestellten Prinzips in Frage zu stellen. Überdies wird man eine Bewährung des Prinzips vielmehr in der Übereinstimmung des in der Fehlerreihe thatsächlich vorliegenden Ganges der Werte mit dem durch das Gesetz geforderten Gange, als in dem empirischen Zusammenfallen von A und D suchen und finden; wie denn auch z. B. Bessel in den »Fundamenta astronomiae« durch Gegenüberstellen des Ganges der Fehler nach der Theorie und nach der Erfahrung eine Bewährung des G. G. gegeben hat. Es werden nämlich die unausgeglichenen Zufälligkeiten, insbesondere bei hinreichender Reduktion der Fehlertabelle, den Gang der Tafelwerte im ganzen wenig beeinflussen, während zu erwarten ist, dass sie die Lage einzelner Werte mitunter erheblich stören und leicht ein verhältnismäßig beträchtliches Auseinanderweichen der Hauptwerte, deren Zusammenfallen von der Theorie verlangt wird, verursachen können.]

Insofern aber ein solches Auseinanderweichen stattfindet, behält das arithmetische Mittel den Vorzug, sei es, dass man nach Gaussschen Prinzipien als den wahrscheinlichsten Wert denjenigen ansieht, bezüglich dessen die Summe der Abweichungsquadrate die kleinstmögliche ist, oder bezüglich dessen die Summe der Abweichungen nach beiden Seiten gleich ist; beide Werte aber fallen im arithmetischen Mittel zusammen, mag Symmetrie oder Asymmetrie bezüglich desselben stattfinden. Also bleibt der Vorzug für das arithmetische Mittel auch da, wo es nicht mit den anderen Hauptwerten zusammenfällt, in der physikalischen und astronomischen Maßlehre nach den Zwecken derselben jedenfalls entschieden.

[Dies gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass prinzipiell das arithmetische Mittel als der wahrscheinlichste Wert zu betrachten sei. Verliert dieses Prinzip seine Geltung, so verliert auch A seine bevorzugte Stellung; denn es behält zwar seine ursprüngliche Bedeutung als Durchschnittswert, aber mit Rücksicht auf das Verteilungsgesetz tritt jetzt derjenige Wert an seine Stelle, der dem nunmehr aufzustellenden Prinzipe gemäß die Rolle des wahrscheinlichsten Wertes übernimmt und prinzipiell mit dem dichtesten Werte zusammenfällt. Wird beispielsweise der Zentralwert C oder ein anderer »Potenzmittelwert«, bezüglich deren Aufstellung und Erörterung auf die Abhandlung[1]: »Über den Ausgangswert der kleinsten Abweichungssumme« zu verweisen ist, als der Wert angesehen, dem die größte W. zukommen soll, so tritt im Zusammenhange damit jedesmal ein anderes Verteilungsgesetz in Kraft, durch dessen Bestehen der zu Grunde gelegte wahrscheinlichste Wert ganz ebenso die Vorherrschaft erhält wie bei Geltung des G. G. das arithmetische Mittel.]

§ 42. [Für die Kollektivmaßlehre ist nun in gleicher Weise der dichteste Wert von fundamentalem Interesse, sobald das die Verteilung der Exemplare eines K.-G. beherrschende Wahrscheinlichkeitsgesetz in Frage kommt. Betreffs der Feststellung der Eigenschaften des dichtesten Wertes und der auf dieselben zu gründenden Ableitung jenes Gesetzes kann aber hier nicht das Prinzip des arithmetischen Mittels oder irgend ein anderes Prinzip a priori aufgestellt werden. Denn die K.-G. sind nur durch die Erfahrung gegeben, und es besteht von vornherein nicht einmal Sicherheit darüber, dass für dieselben insgesamt ein bestimmter Wert als wahrscheinlichster Wert zu finden ist, oder dass — mit anderen Worten — der empirisch dichteste Wert bei den verschiedenen K.-G. durch die nämlichen

---

1) Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wissensch. Band XI, 1878. (Insbesondere Abschnitt VI: »Bemerkungen zur Gültigkeitsfrage des Prinzips des arithmetischen Mittels« und Abschnitt VII: »Wahrscheinlichkeitsgesetze der Abweichungen bez. der verschiedenen Potenzmittel unter Voraussetzung der Gültigkeit ihres Prinzips.)

Eigenschaften charakterisiert werden kann. Es ist darum als ein grundlegendes Resultat der Erfahrung anzusehen, dass die verschiedensten K.-G., die in Untersuchung genommen wurden, in der That die Bestimmung eines wahrscheinlichsten Wertes gestatten, und dass der letztere nahe genug mit demjenigen Werte zusammentrifft, für den das Verhältnis der beiderseitigen mittleren Abweichungen ($e' : e_,$) gleich ist dem Verhältnisse der beiderseitigen Abweichungszahlen ($m' : m_,$). Der dichteste Wert ist somit in der Kollektivmaßlehre von dem arithmetischen Mittel prinzipiell verschieden und steht vielmehr in prinzipiell geforderter Übereinstimmung mit dem durch die Proportion $e' : e_, = m' : m_,$ definierten Werte. Der letztere (welcher nach der in Kap. II getroffenen Festsetzung mit D_p zu bezeichnen ist, während D_i den interpolationsmäßig berechneten, empirisch dichtesten Tafelwert benennt) beansprucht mithin hier die nämliche Beachtung wie der arithmetische Mittelwert in der Fehlertheorie. Auch hat er die ganz entsprechende Bedeutung; denn auf Grund des Prinzips, dass der wahrscheinlichste Wert eines K.-G. die Proportion $e' : e_, = m' : m_,$ erfüllen, oder dass $D_p = D_i$ sein soll, findet man als Verteilungsgesetz das im vorigen Kapitel bereits vorgreiflich aufgestellte erweiterte G. G. in ähnlicher Weise, wie auf Grund des Prinzips, dass der wahrscheinlichste Wert das arithmetische Mittel, oder dass $A = D_i$ sein soll, das einfache G. G. als Fehlergesetz sich ergiebt.]

[Nur insofern kann A auch hier die Vorherrschaft behaupten, als es bei den mit schwacher Asymmetrie begabten K.-G. so nahe mit D_p zusammenfällt, dass es genügt, approximativ das einfache G. G. an Stelle des zweispaltigen in Anwendung zu bringen.]

§ 43. Nicht unberücksichtigt darf bei der Wahl zwischen den verschiedenen Hauptwerten der Grad der Leichtigkeit und Bestimmtheit bleiben, mit dem sie zu gewinnen sind. Kommt es auf bloß rohe Bestimmung an, so ist die des dichtesten Wertes entschieden die einfachste und leichteste, da man ja in einer Verteilungstafel bloß nach dem a zu sehen braucht, welchem das größte z zugehört; demnächst folgt in dieser Hinsicht die Bestimmung des Zentralwertes, wozu es nur einer Abzählung der a oder Θ von beiden Seiten nach der Mitte bis zur erlangten Gleichheit von m' und $m_,$ bedarf; am umständlichsten die des A, da die Addition aller einzelnen a einer vielzahligen Verteilungstafel oder, was auf dasselbe herauskommt, die Bildung und Addition der Produkte za zur Erlangung der Summe Σa, welche mit m zu dividieren ist, eine bei großem m langwierige und mühsame Operation ist.

Aber anders, ja gerade umgekehrt, stellt sich das Verhältnis, wenn man zu scharfen, den idealen sich möglichst nähernden Bestimmungen übergehen will. Von der rohen Bestimmung des dichtesten Wertes nach dem auf ihn fallenden Maximal-z ist überhaupt nur eine sehr unsichere Approximation an den Idealwert zu erwarten; die schärfstmögliche aber, auf das Verhältnis $m' : m_, = e' : e_,$ zu gründende, ist zwar auf eine bestimmte und nicht schwierig zu führende Rechnung zu bringen, aber wird in der Ausführung unstreng, fordert Reduction und Interpolation, die zuletzt noch einen kleinen Spielraum für das zu rechnende Resultat lassen. Auch die scharfe Bestimmung des C, obwohl viel einfacher als die des D, kann ohne solche Hilfsmittel nicht auskommen, wogegen die Bestimmung des A solcher nicht bedarf. Die Umständlichkeit der Bildung der Produkte za kann durch ein später (Kap. IX) anzugebendes Verfahren vermieden werden.

§ 44. Nach voriger Besprechung der Eigenschaften und Leistungen der verschiedenen Hauptwerte wird noch etwas von den Gesichtspunkten zu sagen sein, aus denen die Extreme und Abweichungsfunktionen in Rücksicht kommen.

Es können zwei K.-G. ganz oder nahe in ihren Hauptwerten übereinstimmen und doch noch die Schwankungsweite und der mittlere Schwankungswert der Exemplare um ihre Hauptwerte sehr verschieden sein, worin keineswegs gleichgültige Unterscheidungsmerkmale liegen. So kann die Mitteltemperatur einer Insel mitten im Oceane und einer Örtlichkeit mitten in einem Kontinente dieselbe sein; aber die Abweichungen der einzelnen Temperaturen von der Mitteltemperatur halten sich bei der ersten in engeren Grenzen und sind im Durchschnitte kleiner als bei der zweiten, wonach wir Seeklima und Kontinentalklima unterscheiden.

[Man wird nun geneigt sein, derartige Unterschiede durch Angabe des größten und des kleinsten Wertes, d. i. des E' und des $E_{,}$, die in einer Reihe von Exemplaren eines K.-G. vorkommen, in einfachster Weise zu charakterisieren.]

So empfehlenswert aber die Angabe der extremen Werte E' und $E_{,}$ ist, um erkennen zu lassen, in welchen Grenzen die Größe der Exemplare geschwankt hat, so ist doch der Nutzen davon aus mehr als einer Beziehung prekär und beschränkt. Einmal unterliegen diese Werte großen Zufälligkeiten, so dass man nicht darauf rechnen kann, wenn man die Extreme und extreme Schwankung aus einer neuen Serie von Exemplaren mit demselben m bestimmt, dieselben Werte wieder zu finden; zweitens hat die Angabe derselben überhaupt nur für die Anzahl der Exemplare, das m, woraus dieselben abgeleitet sind, einen Wert, indem bei größerem m der Spielraum der Veränderungen größer wird, so dass man bei größerem m im allgemeinen weiter auseinanderliegende Extreme, ein kleineres $E_{,}$, ein größeres E' und mithin eine größere extreme Schwankung $E' - E_{,}$ erhält als bei kleinerem m. Gesetzt nun z. B. man will einen Maßstab für die absolute und relative Veränderlichkeit eines K.-G. in dem Werte $E' - E_{,}$ oder $(E' - E_{,}) : A$ suchen, wie es wohl geschieht, und danach verschiedene K.-G. vergleichen, so wird man die größten Irrtümer begehen, wenn die Gegenstände ein verschiedenes m haben, und ich bin Irrtümern dieser Art, die auch zu irrigen Folgerungen führten, wirklich anderwärts begegnet.[1])

Besser als die Schwankungs**weite** $E' - E_{,}$ eignet sich daher die **mittlere** Schwankung, identisch mit mittlerer Abweichung, zum Maße der Veränderlichkeit eines Gegenstandes, da sie ziemlich unabhängig von m ist und durch eine geeignete Korrektion vollends unabhängig davon gemacht werden kann. Allerdings ändert sich dies Maß nach dem Hauptwerte, von dem man die Abweichungen rechnen will, und ist, allgemein gesprochen, für positive und negative Seite verschieden. Der Berücksichtigung letzterer Verschiedenheit aber

1) [Dieser Absatz ist einem Exposé FECHNER's über mittlere Abweichungen und Extreme entnommen, das im Jahre 1868 Herrn Prof. WELCKER mitgeteilt und von diesem mir zur Verfügung gestellt wurde.]

entgeht man, wenn man überall die Totalsumme der Abweichungen nach beiden Seiten, dividiert mit der Totalzahl der Abweichungen nach beiden Seiten, dazu verwendet, also nach unserer allgemeinen Bezeichnung als mittlere Schwankung oder mittlere Abweichung schlechthin bezüglich eines gegebenen Hauptwertes setzt:

$$\varepsilon = \frac{\Sigma\Theta' + \Sigma\Theta_{,}}{m' + m_{,}} = \frac{\Sigma\Theta}{m}.$$

Ob man dazu die Abweichungen des einen oder anderen Hauptwertes verwenden will, kommt darauf an, auf welchen man sich überhaupt beziehen will, und eins schließt das andere nicht aus. Wie man sieht, ändert sich das Maß bei gegebenem m nach der Totalsumme der beiderseitigen Abweichungen bezüglich der verschiedenen Hauptwerte; bis jetzt hat man bloß von den Abweichungen des arithmetischen Mittels Gebrauch gemacht, und bleiben wir zunächst dabei stehen, so erhalten wir als mittleren Schwankungswert im Sinne obiger Bezeichnung:

$$\eta = \frac{\Sigma\Delta' + \Sigma\Delta_{,}}{m} = \frac{\Sigma\Delta}{m}.$$

Nun ist allerdings η nicht ganz unabhängig von der Größe des m, sondern es verhält sich so: Der Wert A, von dem die Abweichungen genommen werden, ändert sich etwas je nach der Zahl der a, mithin des m derselben, woraus er das Mittel bildet; und das genauest mögliche A könnte nur aus einem unendlichen m erhalten werden. Mit der Größe des endlichen m, also jedenfalls ungenauen A aber ändert sich auch die Größe der Abweichungen und mithin die Summe derselben, durch deren Division mit m der Wert η gewonnen wird, und zwar lehrt Theorie und Erfahrung[1]), dass $\Sigma\Delta$ und mithin $\eta = \Sigma\Delta : m$ bei wachsendem m durchschnittlich im Verhältnisse $\sqrt{m : (m - 1)}$ wächst, wonach man $\Sigma\Delta$, sowie η auf den Normalfall, dass die Bestimmung des A mit seinen Abweichungen

1) In beider Hinsicht vergl. meine Abhandlung in den Berichten der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Band XIII, 1861 [»Über die Korrektionen bezüglich der Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen, der Bestimmung der Schwankung meteorologischer Einzelwerte um ihren Mittelwert und der psychophysischen Maßbestimmungen nach der Methode der mittleren Fehler«].

aus einem unendlichen m geschehen wäre, zurückführen kann, indem man $\Sigma\Delta$ resp. η mit $\sqrt{m:(m-1)}$, merklich $= 2m:(2m-1)$, multipliziert, was man die Korrektion wegen des endlichen m nennt. Das so korrigierte η heiße η_c, und findet sich also:

$$\eta_c = \frac{\Sigma\Delta}{m}\sqrt{\frac{m}{m-1}} = \frac{\Sigma\Delta}{\sqrt{m(m-1)}}.$$

Diese Korrektion trifft zwar nicht in jedem einzelnen Falle, aber im Durchschnitte der Fälle zu, und da man kein Mittel hat, sie für jeden einzelnen Fall zutreffend genau zu bestimmen, muss man sich an den Wert halten, der doch im Durchschnitte der Fälle zutrifft, und kann sich also, wenn man die kleine Mühe der Korrektion nicht scheut, auch in der Kollektivmaßlehre lieber an η_c als an η halten.

Soll die mittlere Schwankung bezüglich C oder D bestimmt werden, so hat man ohne Korrektion erstenfalls $\varepsilon = \Sigma\Theta : m$, zweitenfalls $e = \Sigma\partial : m$, die Korrektion aber würde, so viel ich übersehe, dieselbe bleiben. Die mittlere Schwankung bezüglich C hat das Interesse, dass sie kleiner als bezüglich A und D, überhaupt die kleinstmögliche ist, weil nach schon früher gemachter Angabe die Summe der Abweichungen bezüglich C überhaupt die kleinstmögliche ist, und dies sich auf ihren Quotienten durch m überträgt.

Allgemein gesprochen, obwohl dies Ausnahmen erleiden kann, und eine genaue Proportionalität nicht statt findet, wächst die mittlere Schwankung mit der Größe der Gegenstände, und so kann es von Interesse sein, diesen Einfluss so weit als möglich dadurch zu eliminieren, dass man die mittlere Schwankung durch die Größe des schwankenden Gegenstandes dividiert, hiermit das relative außer dem absoluten Schwankungsmittel in Betracht zieht.

§ 45. Eine wichtigere Bedeutung als zum Maße der Schwankung eines Gegenstandes um seine Hauptwerte gewinnt die mittlere Abweichung als Mittelglied für Bestimmung der Verteilung des Gegenstandes. Die physikalische und astronomische Maßlehre macht zu diesem Zwecke von der mittleren Abweichung ε bezüglich A oder dem zu ε in Beziehung stehenden Werte $q = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ Gebrauch, was aber nur für die in dieser Lehre vorausgesetzte symmetrische W. der

Beobachtungsfehler zulässig ist, wogegen die Kollektivmaßlehre nach der für sie thatsächlich bestehenden allgemeineren Voraussetzung der Asymmetrie nur von der mittleren Abweichung bezüglich D, und zwar nicht gemeinschaftlich für beide Seiten, sondern jede Seite insbesondere Gebrauch machen kann (vergl. § 33), also von:

$$e' = \frac{\Sigma \partial'}{m'} \text{ und } e_{,} = \frac{\Sigma \partial_{,}}{m_{,}}.$$

Auch hierbei ist streng genommen eine Korrektion wegen des endlichen m anzubringen; aber die korrigierten Werte sind nicht, wie man meinen könnte, zu setzen:

$$e'_c = \frac{\Sigma \partial'}{m'}\sqrt{\frac{m'}{m'-1}},\quad e_{,c} = \frac{\Sigma \partial_{,}}{m_{,}}\sqrt{\frac{m_{,}}{m_{,}-1}},$$

sondern:

$$e'_c = \frac{\Sigma \partial'}{m'}\sqrt{\frac{m}{m-1}},\quad e_{,c} = \frac{\Sigma \partial_{,}}{m_{,}}\sqrt{\frac{m}{m-1}}.$$

In der That würde sonst die auf die Abweichungssummen bezügliche Korrektion der beiden Seiten nicht mit der gemeinsamen Korrektion der Totalsumme derselben stimmen.

Für die Totalsumme hat man nämlich:

$$\Sigma \partial_c = (\Sigma \partial' + \Sigma \partial_{,})\sqrt{\frac{m}{m-1}}.$$

Wollte man nun für die beiderseitigen Abweichungssummen besonders setzen:

$$\Sigma \partial'_c = \Sigma \partial'\sqrt{\frac{m'}{m'-1}},\quad \Sigma \partial_{,c} = \Sigma \partial_{,}\sqrt{\frac{m_{,}}{m_{,}-1}},$$

so würde man durch Summierung dieser Werte erhalten:

$$\Sigma \partial_c = \Sigma \partial'_c + \Sigma \partial_{,c} = \Sigma \partial'\sqrt{\frac{m'}{m'-1}} + \Sigma \partial_{,}\sqrt{\frac{m_{,}}{m_{,}-1}},$$

was mit obigem Werte für $\Sigma \partial_c$ nicht stimmt.

§ 46. Endlich ist noch einiger Werte zu gedenken, welche zu den schon wiederholt berührten, doch erst später eingehend zu besprechenden, sehr wichtigen Asymmetrieregeln in Beziehung stehen. Vorläufig nur folgendes über diese Werte.

Es ist zunächst der Unterschied $\mu' - \mu_, = u$ zwischen der Zahl der positiven und negativen Abweichungen von A und der Unterschied $U' - U_, = (E' - A) - (A - E_,) = E' + E_, - 2A$ zwischen der Größe der positiven und negativen extremen Abweichung von A, welche in dieser Hinsicht in Betracht kommen. Noch wichtiger aber als diese absoluten Unterschiede sind die relativen:

$$\frac{\mu' - \mu_,}{m} \text{ und } \frac{U' - U_,}{U' + U_,}.$$

Hier nur vorläufig in Rücksicht anf den später davon zu machenden Gebrauch folgendes darüber.

Von einem Unterschied zwischen der Summe der positiven und negativen Abweichungen von A, d. i. $\Sigma\Delta'$ und $\Sigma\Delta_,$, kann natürlich nicht die Rede sein, da ja A ausdrücklich so bestimmt wird, dass beide Summen gleich werden; aber das führt noch nicht mit, dass zugleich beide Abweichungszahlen μ', $\mu_,$ einander gleich werden, und höchstens zufällig wird man es einmal finden. Was man aber allgemein oder nur mit zufälliger Ausnahme, jedenfalls im Durchschnitt bei den Kollektivabweichungen bezüglich A findet, ist, dass $\mu' - \mu_,$ mit der Größe von m wächst.

Unter Voraussetzung gleicher W. positiver und negativer Abweichungen lehrt nämlich die Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Zurückführung des Falles auf die Urne mit der gleichen Zahl schwarzer und weißer Kugeln, dass $\mu' - \mu_,$ seinem absoluten Werte nach durchschnittlich im Verhältnisse von $\sqrt{m}$ steigt. Je mehr aber m steigt, desto kleiner wird das Verhältnis von $\sqrt{m} : m$, so dass, bei unendlichem m, $\frac{\mu' - \mu_,}{m} = \frac{u}{m}$ Null und $\frac{\mu'}{\mu_,}$ Eins wird.

Ein Folge daraus ist, dass man bei der später folgenden Untersuchung, ob die positiven und negativen Abweichungen bez. A wirklich eine gleiche W. haben, sich nicht einfach an den absoluten Unterschied u halten darf, der im allgemeinen auch bei gleicher W. nicht fehlt, sondern an sein Verhältnis zu m, das eine gewisse Größe nicht übersteigen darf, soll die gleiche W. nicht sehr unwahrscheinlich werden, worüber später mehr zu sagen sein wird.

Bisher haben wir die Ungleichheit der beiderseitigen Zahl der Abweichungen bez. A d. i. μ', $\mu_{,}$ als Merkmal und in gewisser Rücksicht als Maßstab der Asymmetrie angenommen. Natürlich könnte von einer Asymmetrie wegen Ungleichheit der Abweigungssumme $\Sigma\varDelta'$, $\Sigma\varDelta_{,}$ bez. A nicht die Rede sein, weil es im Begriffe von A liegt, dass $\Sigma\varDelta' = \Sigma\varDelta_{,}$, also A so bestimmt werden muss, dass diese Gleichheit eintritt; andererseits könnte auch ein Merkmal oder Maßstab der Asymmetrie nicht auf eine Ungleichheit der Zahl der Abweichungen bez. C gegründet werden, weil es im Begriffe von C liegt, dass die beiderseitige Zahl der Abweichungen in Beziehung dazu gleich ist; hiergegen würde an sich nichts hindern, die Asymmetrie statt in Bezug auf den arithmetischen Mittelwert A auf den dichtesten Wert D nach der Ungleichheit der Abweichungszahlen m', $m_{,}$ zu bestimmen, im Falle beide Hauptwerte genügend aus einander weichen; mit dem Vorteil, in Bezug auf D ein in den Gesetzen der Asymmetrie begründetes stärkeres Auseinanderweichen der Abweichungen m', $m_{,}$ von einander, als der Abweichungen μ', $\mu_{,}$ bez. A von einander zu erhalten; und die m', $m_{,}$ mit dem zweiseitigen G. G. in Beziehung setzen zu können, während bei stattfindender Asymmetrie gegen A weder das einfache, noch zweiseitige G. G. bezüglich der Abweichungszahl von A mehr gültig ist. Wobei zu beachten, dass, wenn bez. A μ' über $\mu_{,}$ übergreift, umgekehrt $m_{,}$ über m' übergreift. Da aber A und hiernach μ', $\mu_{,}$ viel leichter zu bestimmen sind als D und hiernach m', $m_{,}$, und von einer größeren oder geringeren Asymmetrie bez. A immer auf eine größere oder geringere, nur in jedem Falle die Asymmetrie bez. A übersteigende Ungleichheit bez. D von entgegengesetzter Richtung geschlossen werden kann, so erscheint es im allgemeinen praktischer, sich zunächst an die Ergebnisse der Bestimmung der Asymmetrie durch $\mu' - \mu_{,}$ bez. A zu halten, insofern daraus schon auf die Ungleichheit von m' und $m_{,}$ bez. D geschlossen werden kann; sofern es aber um genaue Bestimmung zu thun, ist diese noch besonders nach Theorie und Empirie zu untersuchen.

VII. Primäre Verteilungstafeln.

§ 47. [In den vorhergehenden Kapiteln wurden die Hauptpunkte der Untersuchung vorgreiflich dargelegt. Jetzt gilt es, die Untersuchung thatsächlich zu führen. Da dieselbe nicht auf hypothetischen Annahmen fußt, sondern völlig auf die Erfahrung sich gründet, so kann sie nur von den empirisch gegebenen K.-G. selbst ausgehen. Die letzteren sind aber in ihrer ursprünglichen Form weder zur Ableitung, noch zur Bewährung der theoretisch gültigen Gesetze geeignet. Es muss daher vor allem ihre rechnerische Behandlung gelehrt werden. Dieselbe befasst sich einesteils mit der Herstellung einer zur Untersuchung tauglichen Darstellungsform durch Aufstellung primärer und reduzierter Verteilungstafeln (Kap. VII und VIII); anderenteils giebt sie Regeln zur Berechnung der Hauptwerte und Abweichungsfunktionen, in welchen die charakteristischen Merkmale und Eigenschaften der K.-G. sich darbieten (Kap. IX—XI). Hierbei wird einfachheitshalber bloß von der arithmetischen Behandlung der K.-G. die Rede sein; denn die logarithmische Behandlung, mit welcher erst die volle Allgemeinheit der Untersuchungsmethode erreicht wird, stimmt mit der arithmetischen der Hauptsache nach überein, indem nur die Logarithmen der Maße an Stelle der Maße selbst treten.]

[Ist nun hiermit eine geeignete Unterlage für die theoretische Untersuchung gewonnen, so bietet sich zunächst die Aufgabe dar, die **Asymmetrie** der K.-G. zu erörtern und Kriterien zur Unterscheidung wesentlicher und unwesentlicher Asymmetrie aufzustellen (Kap. XII—XVI). Dann aber sind die bei wesentlicher Symmetrie und wesentlicher Asymmetrie gültigen **Verteilungsgesetze** zu entwickeln (Kap. XVII—XX). Dabei wird der in der Regel stattfindende Fall geringer verhältnismäßiger Schwankung der Einzelwerte um die Hauptwerte vorausgesetzt.]

[Diesem Hauptteile der Untersuchung schließt sich die Besprechung der Modifikationen an, die durch den Übergang zum logarithmischen Verteilungsgesetz bedingt werden. Eine logarithmische Behandlung erfordern in erster Linie die K.-G. mit starker verhältnismäßiger Schwankung, aber auch die Verhältnisse zwischen den verschiedenen Dimensionen der K.-G. bedürfen einer solchen (Kap. XXI und XXII). Anhangsweise werden schließlich die Abhängigkeitsverhältnisse der K.-G. erörtert (Kap. XXIII).]

§ 48. [Will man einen K.-G. in Untersuchung nehmen, so sind zunächst die einzelnen Exemplare desselben in der zufälligen, räumlichen oder zeitlichen Ordnung, in der sie sich darbieten, zu messen und die mit a zu bezeichnenden Maße in einer Urliste zu verzeichnen. Hierbei ist darauf zu achten, dass die in Kap. IV angegebenen Requisiten erfüllt werden, also insbesondere eine genügende Anzahl von Maßen unter Ausschluss von Abnormitäten zusammengebracht wird.]

[Eine solche Urliste ist, wie bereits (§ 3) bemerkt wurde, zur rechnerischen Behandlung noch nicht geeignet. Sie ist jedoch in anderer Hinsicht wertvoll, da sie die Feststellung ermöglicht, ob die Exemplare der K.-G. unabhängig von einander variieren oder in einem Abhängigkeitsverhältnisse stehen. Diesbezüglich wurden in § 20 Regeln angegeben, die in Kap. XXIII eine weitere Ausführung erhalten werden. Im Interesse der rechnerischen Behandlung aber muss man die Maße ihrer Größe nach ordnen und hiermit aus der Urliste eine Verteilungstafel herstellen. Sie wird zur Unterscheidung von der reduzierten Tafel, deren Herstellung und Behandlung im nächsten Kapitel gelehrt wird, primäre Verteilungstafel genannt. In derselben bilden die Maße a eine von den kleineren zu den größeren Werten fortschreitende Kolumne, die jedes a nur einmal enthält, während eine beigegebene Kolumne die zugehörigen Anzahlen z aufführt, die angeben, wie oft jedes einzelne a vorkommt.]

[Diese primäre Tafel bildet nun den Ausgangspunkt der ganzen Untersuchung. Sie ist jedoch meist noch mit starken Unregelmäßigkeiten behaftet und besitzt gewöhnlich eine solche Ausdehnung, dass ihre Mitteilung einen zu großen Raum beanspruchen würde. Man wird darum beiden Nachteilen durch Vornahme von Reduktionen zu begegnen suchen und dann im allgemeinen auf die Vorführung der Tafel in ihrer reduzierten Form sich beschränken. Hier handelt es sich aber darum, die Beschaffenheit der primären Tafeln kennen zu lernen und einen Einblick in die möglicherweise auftretenden Besonderheiten zu gewinnen; es sollen deshalb von vier, als Beispiele dienenden K.-G. die primären Tafeln vorgeführt werden.]

§ 49. [Die beiden ersten Tafeln I und II geben die Maße für den Vertikal- und Horizontalumfang von 450 europäischen Männerschädeln. Dabei ist zu bemerken, dass die hier und im folgenden durchweg festgehaltene Bezeichung »Vertikalumfang« genauer durch »Länge des Scheitelbogens« zu ersetzen wäre, indem nicht der totale Umfang, sondern nur der über Stirn, Scheitel und Hinterhaupt bis zum Vorderrande des Markloches sich erstreckende Bogen, mithin der um die Schädelbasis verminderte Vertikalumfang in der Tabelle angegeben wird. Wie bereits im III. Kapitel bemerkt, wurden die Maße von Prof. Welcker zur Verfügung gestellt, der ein reichhaltiges, gleichmäßig behandeltes Material unter Festhalten eines und desselben Messungsverfahrens gesammelt hat.[1]) Die Maßeinheit ist das Millimeter. Zur Messung diente ein Bandmaß. Die Maße selbst beziehen sich nach Welcker's Angabe auf »normale« männliche Schädel. Schädel mit Nahtabnormitäten, selbst Stirnnahtschädel wurden ausgeschlossen.]

[Tafel III enthält die Rekrutenmaße von 2047 zwanzigjährigen Leipziger Studenten aus den 20 Jahrgängen 1843—1862. Von der Urliste dieser Maße ist zu bemerken, dass sie durch eine in ihrer Herstellungsweise beim Aushebungsgeschäfte begründete, reine Zufälligkeit in der Folge der Maßgrößen ausgezeichnet ist, weshalb dieselbe in Kap. XX zur Bewährung der Extremgesetze verwendet wird. Die Maßeinheit ist der sächsische Zoll = 23,6 mm; es wurden jedoch nicht nur die ganzen, sondern auch halbe und viertel Zoll gemessen.]

1) [Vergl. H. Welcker, Wachstum und Bau des menschlichen Schädels, Leipzig 1862; ferner: Die Kapazität und die drei Hauptdurchmesser der Schädelkapsel bei den verschiedenen Nationen; Archiv für Anthropologie, Bd. XVI.]

[In Tafel IV sind die Maße für das oberste Glied (Internodium) von 217 sechsgliedrigen Roggenhalmen verzeichnet. Genauere Angaben über die Gewinnung dieses Materiales finden sich im zweiten Teile, Kap. XXV. Mit dem eben dort beschriebenen Messungsverfahren hängt es zusammen, dass als Maßeinheit das halbe Zentimeter auftritt.]

§ 50. [Die vier Tafeln lauten der Reihe nach:[1])]

Tafel I. 450 europ. Männerschädel; Vertikalumfang.

$\vartheta = 1$ mm; $m = \Sigma z = 450$; $A_1 = 408{,}5$.

a	z	a	z	a	z
368	1	400	13	425	8
371	2	401	12	426	7
376	1	402	13	427	3
378	1	403	6	428	4
379	1	404	10	430	3
380	2	405	18	431	3
381	1	406	8	432	2
382	2	407	8	433	5
383	3	408	16	434	5
384	3	409	13	435	4
385	8	410	20	438	1
386	2	411	9	440	3
387	6	412	15	442	1
388	4	413	8	443	1
389	5	414	12	447	1
390	7	415	21	448	1
391	7	416	6		
392	7	417	5		
393	2	418	16		
394	8	419	9		
395	12	420	15		
396	4	421	8		
397	7	422	7		
398	14	423	5		
399	3	424	12		

1) [Da weder die Urlisten, noch die primären Tafeln der hier behandelten K.-G. sich vorfanden (vergl. Anmerkung zu Kap. III), so mussten die obigen

Tafel II. 450 europ. Männerschädel; Horizontalumfang.

$\mathfrak{E} = 1$ mm; $m = \Sigma z = 450$; $A_1 = 522{,}2$.

a	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*
481	1	510	13	535	10
484	2	511	12	536	11
485	2	512	14	537	5
486	1	513	7	538	8
488	1	514	6	539	9
489	2	515	13	540	14
490	2	516	11	541	6
491	1	517	7	542	3
492	1	518	9	543	4
493	2	519	10	544	3
494	4	520	15	545	4
495	5	521	6	546	3
496	1	522	8	547	2
497	4	523	14	548	2
498	1	524	17	549	3
499	2	525	21	550	6
500	8	526	9	552	1
501	4	527	8	553	1
502	3	528	7	554	4
503	6	529	8	555	2
504	9	530	13	558	1
505	8	531	5	561	1
506	4	532	6	567	2
507	3	533	7	576	1
508	6	534	8		
509	7				

Tafeln rekonstruiert werden. Tafel I und III konnten aus den fünf resp. vier Reduktionslagen, die im folgenden Kapitel (§ 64 und 65) verzeichnet sind, wieder hergestellt werden. Für Tafel II und IV lagen die entsprechenden Bearbeitungen nicht in hinreichender Vollständigkeit vor. Indessen fanden sich für Tafel IV die Logarithmen der *a*-Werte. Die Werte der Tafel II dagegen wurden aus den von Prof. Welcker mir übermittelten Maßen von 500 europäischen Männerschädeln gewonnen. Dabei mussten aber 63 Maße nach ihrer wahrscheinlichen Zugehörigkeit zu den entsprechenden Vertikalmaßen ergänzt werden, da nur so eine Übereinstimmung mit der reduzierten Tafel des folgenden Kapitels (§ 58) erzielt werden konnte. Die hierdurch möglicherweise bedingten, geringfügigen Abweichungen beeinträchtigen jedoch das Bild der Tafel nicht, die überdies im folgenden nicht wesentlich in Betracht kommt.]

Tafel III. Studentenrekrutenmaße.

$\mathcal{E} = 1$ Zoll, $m = \Sigma z = 2047$; $A_1 = 71{,}77$.

a	z	a	z	a	z
60,00	1	70,00	70	76,00	24
64,00	2	70,25	65	76,25	17
64,75	4	70,50	71	76,50	9
65,00	6	70,75	61	76,75	7
65,25	3	71,00	78	77,00	14
65,50	5	71,25	75	77,25	9
65,75	5	71,50	81	77,50	7
66,00	8	71,75	89	77,75	3
66,25	6	72,00	79	78,00	3
66,50	9	72,25	81	78,25	2
66,75	19	72,50	82	78,50	3
67,00	7	72,75	63	79,00	1
67,25	11	73,00	79	79,50	2
67,50	25	73,25	79	80,00	1
67,75	15	73,50	68	80,75	1
68,00	35	73,75	56	82,50	1
68,25	27	74,00	64		
68,50	37	74,25	42		
68,75	34	74,50	55		
69,00	43	74,75	33		
69,25	48	75,00	43		
69,50	57	75,25	26		
69,75	54	75,50	25		
		75,75	17		

Tafel IV. Das oberste Glied von 217 sechsgliederigen Roggenhalmen.

$\mathcal{B} = 0{,}5$ cm; $m = \Sigma z = 217$; $A_1 = 86{,}54$.

a	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*
42,9	1	75,6	1	85,4	1	91,7	1	99,0	2
49,7	1	75,8	2	85,5	1	91,9	2	99,2	1
52,8	1	76,1	1	85,7	1	92,0	2	99,3	1
55,6	1	76,2	2	85,8	1	92,3	1	99,4	1
57,6	1	76,4	2	85,9	1	92,8	1	99,5	1
58,9	1	76,7	1	86,0	2	93,0	2	100,3	1
59,0	1	77,0	1	86,2	1	93,1	1	100,5	1
61,4	1	77,2	1	86,3	1	93,3	1	100,8	1
61,9	1	77,5	1	86,8	2	93,4	1	100,9	1
62,2	1	77,6	1	86,9	1	93,5	2	101,0	1
62,3	1	77,7	1	87,0	3	93,7	1	101,1	1
63,0	1	77,9	1	87,1	2	94,4	1	101,3	1
64,1	1	78,0	1	87,4	2	94,6	2	101,5	1
64,3	1	78,1	2	87,5	1	94,7	1	101,9	1
65,5	1	78,4	1	87,8	1	95,7	1	102,2	1
67,4	1	78,8	1	87,9	2	95,8	2	102,3	1
67,7	1	79,0	1	88,0	2	95,9	1	102,7	1
67,8	1	79,4	1	88,3	1	96,0	1	102,8	1
68,1	1	80,0	2	88,6	1	96,1	1	103,3	1
68,3	1	80,4	1	88,8	1	96,2	1	103,4	1
68,9	1	80,7	1	88,9	2	96,3	1	104,0	1
69,6	1	80,9	2	89,2	2	96,5	1	104,2	1
69,9	1	81,3	1	89,3	2	96,8	1	104,4	1
70,5	1	81,9	1	89,4	1	96,9	1	105,3	1
71,4	1	82,0	2	89,7	2	97,0	1	105,5	1
72,0	2	82,1	2	89,9	2	97,1	1	105,6	1
72,1	1	82,3	3	90,0	1	97,5	2	105,8	1
72,5	1	82,4	1	90,2	3	97,6	1	106,0	1
72,9	1	82,8	1	90,4	1	97,7	1	106,2	1
73,7	1	83,0	1	90,5	1	97,8	1	106,3	1
73,9	1	83,1	1	90,6	1	97,9	1	108,0	1
74,1	1	83,4	1	90,7	3	98,0	1	110,0	1
74,8	2	83,7	4	91,2	1	98,2	1	111,2	1
75,1	2	83,9	2	91,3	1	98,6	1	112,0	1
75,2	1	84,6	1	91,4	1	98,8	1	112,2	1

§ 51. [Ein vergleichender Blick auf diese Tafeln zeigt ebenso bezüglich des Ganges der z wie bezüglich der Aneinanderreihung der a eine wesentliche Verschiedenheit der drei ersten Tafeln von der letzten. Die ersteren besitzen nämlich einen mittleren Hauptbestand, dessen z gegen die Tafelmitte zu im allgemeinen wachsen, und dessen a, von einzelnen Unterbrechungen gegen die Enden zu abgesehen, eine äquidistante Reihe bilden. So erstrecken sich in I die äquidistanten a in ununterbrochener Folge von 378 bis 428 und von 430 bis 435, während gleichzeitig die z, allerdings mit ständig wiederkehrenden Schwankungen, erst wachsen und dann wieder abnehmen. In II geht die Reihe der äquidistanten a von 488 bis 550 und setzt sich, nach Unterbrechung durch das fehlende $a = 551$, von 552 bis 555 fort, während wiederum die z einen ähnlichen Gang zeigen. Tafel III schließlich zeichnet sich bei entsprechendem Verhalten der z zwischen den Grenzen 64,75 und 78,50 durch eine ungestörte Äquidistanz der a aus. Diesem Hauptbestande schließt sich in jeder der drei Tafeln zu Anfang und zu Ende eine verhältnismäßig geringe Anzahl von a-Werten an, deren Distanzen regellos wechseln, und deren z überwiegend gleich 1 sind: sie stellen Endabteilungen mit zerstreuten a dar. In der vierten Tafel dagegen schreiten die a durchweg in unregelmäßigen Intervallen vor, und es lässt sich nur bemerken, dass die kleineren Intervalle häufiger in der Mitte als an den Enden sich finden; zugleich ist die überwiegende Mehrzahl der z gleich 1. Man kann somit Tafeln, die einen Hauptbestand äquidistanter a neben Endabteilungen mit zerstreuten a besitzen, und solche, deren a durch die ganze Tafel durch unregelmäßig sich zerstreuen, unterscheiden. Als Repräsentanten des ersten Typus haben die Tafeln I bis III zu gelten; den zweiten Typus stellt die Tafel IV dar. Beide Typen sind wesentlich von einander verschieden; denn es wird sich zeigen, dass Tafeln vom zweiten Typus einer viel weiter gehenden Reduktion bedürfen als solche vom ersten, falls ihre Behandlung Erfolg haben soll.]

[Bei der Abgrenzung des Hauptbestandes einer Tafel ist nun aber zu berücksichtigen, dass er sich nicht in scharfer Bestimmtheit von den Endabteilungen loslöst. Man könnte zwar jeder Unbestimmtheit durch Aufstellen der Regel begegnen, dass der Hauptbestand sich genau so weit erstrecken solle, als die Äquidistanz der a reicht. Es ist jedoch von vornherein klar, dass so keine wesentliche Bestimmung getroffen würde. Denn vielfach kann der Fall eintreten, dass selbst gegen die Mitte der Tafel zu die Äquidistanz durch ein fehlendes a gestört wird; noch häufiger wird von der Mitte aus gegen Anfang oder gegen Ende auf ein fehlendes a nochmals eine Reihe äquidistanter a folgen, wie dies thatsächlich für I und II infolge des Fehlens von $a = 429$ resp. $a = 551$ zutrifft. In solchen Fällen würde der Hauptbestand bei Festhalten der obigen Regel entweder übermäßig beschränkt oder völlig in Frage gestellt. Andererseits ist es auch möglich, dass die a zwar lückenlos verlaufen, der Gang der z aber ihre Ausschließung vom Hauptbestande als wünschenswert erscheinen lässt. Es muss daher die Bestimmung des Hauptbestandes innerhalb eines gewissen Spielraumes der Willkür überlassen bleiben, da eine Regel nur insoweit sich aufstellen lässt, dass die Äquidistanz der a-Werte nicht erheblichen Störungen unterworfen und bezüglich der z, wenigstens im ganzen, ein Wachstum gegen die Mitte zu erkennbar sein soll. So kann man denn als Grenzen des Hauptbestandes für I 378 und 435, für II 488 und 555, für III 64,75 und 78,50 festsetzen, mit der Bemerkung jedoch, dass diese Grenzen sehr wohl eine Verschiebung gestatten.]

[Übrigens kann die Äquidistanz der a wenigstens formal auch im Falle fehlender a hergestellt werden, wenn die fehlenden a, mit einem $z = 0$ versehen, in die Tafel aufgenommen werden. Es soll dies als Einschieben leerer a bezeichnet werden. Beispielsweise wird der Hauptbestand von I und II in dieser Weise durchweg äquidistant, wenn in I 429, in II 551 mit einem $z = 0$ eingeschoben wird.]

[Was ferner den Gang der z im Hauptbestande der Tafeln I—III betrifft, so wurde bereits bemerkt, dass die Zunahme gegen die Mitte zu ständigen Schwankungen unterworfen ist. Nun ist allerdings ein ununterbrochenes Wachsen und Wiederabnehmen schon wegen der nie fehlenden unausgeglichenen Zufälligkeiten gar nicht zu erwarten. Sollte aber hierin allein die Ursache liegen, so bliebe die unverkennbar hervortretende Periodizität in dem Schwanken der z unerklärlich. Es muss daher noch eine andere Ursache zu Grunde liegen. Dieselbe erhellt aus folgenden Bemerkungen.]

[Im Hauptbestande von I treten im ganzen 18 relative Maxima, 17 dazwischen liegende Minima auf; 8 Maxima fallen auf solche a, die ganze oder halbe Zentimeter darstellen, während kein einziges Minimum einem solchen a zugehört. Von den 17 Maxima des Hauptbestandes von II fallen 10, von den 16 Minima keines auf a der bezeichneten Art. Dies zeigt zur Genüge, dass bei der Messung der Schädel mittelst des Bandmaßes, wobei offenbar die Millimeter durch Schätzung gewonnen wurden, ganze und halbe Zentimeter bevorzugt wurden; denn anderenfalls müssten sich der Wahrscheinlichkeit gemäß die Maxima und Minima gleichmäßig auf die Unterabteilungen des Zentimeters verteilen. In der ungleichförmigen Schätzung, d. h. in der Bevorzugung der ganzen und halben Abteilungen des benutzten Maßstabes, findet man somit die Quelle der periodisch wiederkehrenden Unregelmäßigkeiten im Gange der z. Dies bestätigt sich an der Tafel III. Von den 19 Maxima ihres Hauptbestandes fallen 9 auf ganze, 7 auf halbe Zoll; von den 18 Minima gesellen sich nur 2 ganzzolligen Werten zu, während die übrigen $^1/_4$- oder $^3/_4$-zolligen Werten zugehören.]

[Man wird sich daher bei der Bearbeitung der Verteilungstafeln vor den Fehlern wegen ungleichförmiger Schätzung zu hüten haben und auf ihre Beseitigung durch eine angemessene Reduktion bedacht sein müssen. Dies führt dazu, die Tafeln, der Periode der ungleichförmigen Schätzung entsprechend, in Hauptabteilungen zu gliedern. Dieselben müssen beispielsweise in den Tafeln I und II von 5 zu 5 mm, in der Tafel III nach halben Zoll oder besser nach ganzen Zoll fortschreiten. Im allgemeinen wird man diese Hauptabteilungen mit dem Hauptbestande der Tafel beginnen lassen. Man kann es dann vorteilhaft finden, den Hauptbestand so zu umgrenzen, dass er gerade eine volle Anzahl von Hauptabteilungen fasst. Dann müssen z. B. in Tafel I drei Werte von dem wie oben definierten Bestande abgeschnitten und etwa die Werte 380 und 434 als Grenzen gewählt werden, zwischen welchen 11 Hauptabteilungen Platz finden, wie in der Tafel selbst angedeutet wurde.]

§ 52. [Schließlich sind noch folgende, für jede Verteilungstafel in ihrem ganzen Umfange gültige Punkte zu erwähnen. Jeder Messung sind Grenzen der Genauigkeit gestellt, so dass die a niemals kontinuierlich sich aneinanderreihen können, sondern durch ein Intervall, dessen Größe von dem Genauigkeitsgrade der Messung abhängt, getrennt verlaufen müssen. Dieses Intervall soll das primäre Intervall heißen und mit i bezeichnet werden. Es ist für die Erstreckung der ganzen Tafel konstant, da es ja nur durch den Maßstab, nicht durch die Größe der gemessenen Gegenstände bedingt wird.]

[In seiner Existenz hat man den Grund dafür zu suchen, dass ein äquidistanter Hauptbestand in den Verteilungstafeln überhaupt möglich ist. Denn das Intervall des Hauptbestandes ist eben nichts anderes als jenes primäre i, das nicht unterschritten werden kann, sondern nur um so deutlicher hervortritt, je größer die Anzahl der gemessenen Exemplare des K.-G. — das m der Tafel — wird. Das primäre i ist aber natürlich auch für Tafeln ohne Hauptbestand aus den a-Werten direkt zu ersehen. Für Tafel IV z. B. ist es gleich dem zehnten Teile von $\mathcal{E}$, d. i. $= 0{,}05$ cm.]

[Die wesentliche Bedeutung des Vorhandenseins eines primären Intervalles besteht nun aber darin, dass es die Zugehörigkeit der z zu den a, welchen jene in den Tafeln beigeschrieben werden, in das richtige Licht setzt. Man erkennt nämlich, dass die a bloß als Vertreter der primären Intervalle aufzufassen sind, deren Mitten sie darstellen; es sind darum auch die z nicht als den a, sondern als den durch die a bezeichneten, primären Intervallen zugehörig aufzufassen und innerhalb der letzteren gleichmäßig verteilt zu denken, da es an jedem Anhalte für eine anders gestaltete, gesetzmäßige Verteilung fehlt. Insofern so das primäre Intervall das a umschließt oder umkreist, soll es das Umkreisintervall des a genannt werden. Seine beiderseitigen Grenzen sind $a - \frac{1}{2}i$ und $a + \frac{1}{2}i$; dieselben schließen sich durch die ganze Tafel durch unmittelbar aneinander, so dass die erste Grenze eines beliebigen Intervalles mit der zweiten des vorhergehenden zusammenfällt.]

[Die a- und z-Werte sind somit mittelst des zugehörenden Umkreisintervalles aneinander gebunden. Soll diese Verbindung gelöst und das a für sich allein betrachtet und aufgefasst werden, so soll es als **nacktes** a bezeichnet werden.]

[Die soeben erläuterte Zugehörigkeit der z zu den a gestattet nun auch eine zutreffende geometrische Darstellung der Verteilungstafeln. Es sind nämlich die a in einer Abscissenlinie aufzutragen und durch Markieren der Werte $a - \frac{1}{2}i$ und $a + \frac{1}{2}i$ die Umkreisintervalle derselben beizufügen; sodann sind auf den letzteren Rechtecke zu errichten, deren Inhalte die den a der Tafel beigeschriebenen z repräsentieren müssen; hierbei kann natürlich sowohl der Abmessung der a, als auch der Konstruktion der Rechtecke ein beliebiger Maßstab zu Grunde gelegt werden, da es nur gilt, ein Bild von den Verhältnissen der Tafelwerte zu gewinnen.]

[Man erhält so z. B. folgende Darstellung des mittleren Teiles von Tafel I:]

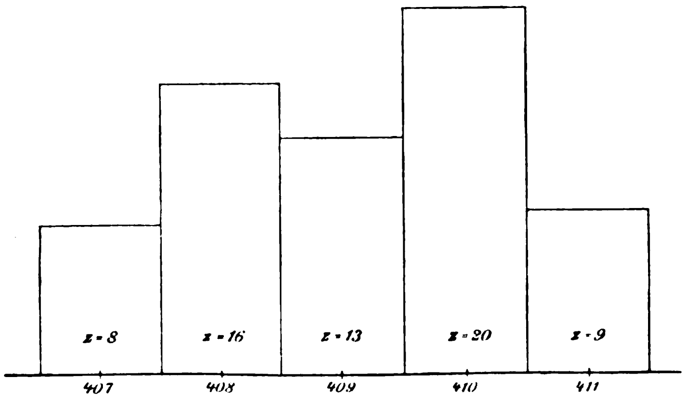


Fig. 1.

VIII. Reduzierte Verteilungstafeln.

§ 53. Teils um die Verteilungstafeln mehr ins Enge zu ziehen und damit einen kleineren Raum für sie in Anspruch zu nehmen, teils die Unregelmäßigkeiten im Gange ihrer Werte auszugleichen und etwaige Ungleichförmigkeiten der Schätzung unschädlich zu machen, teils die Berechnung der Bestimmungsstücke oder sog. Elemente des K.-G. zu erleichtern, hat man von den primären Verteilungstafeln zu den reduzierten überzugehen und diese für jene eintreten zu lassen, und ungeachtet nach gewissen Beziehungen eine primäre Tafel durch keine reduzierte ganz ersetzt werden kann, behält doch faktisch in angegebenen Beziehungen die reduzierte Tafel Vorteile vor der primären voraus, und wird es nötig, sich mit ihrer Aufstellungsweise, ihren Verhältnissen und ihrer Verwertungsweise zu beschäftigen.

Fassen wir zuerst die Reduktion von solchen primären Tafeln ins Auge, welche so wie I bis III einen Hauptbestand mit äquidistanten a von Endabteilungen mit zerstreuten a unterscheiden lassen. Um aus einer primären Tafel dieser Art eine reduzierte herzustellen, teilt man, wie dies schon oben in § 50 vorgreiflich geschehen ist, den Hauptbestand derselben in Abteilungen, welche in ihrer a-Spalte eine gleiche Anzahl äquidistanter (nötigenfalls durch Einschiebung leerer a äquidistant gemachter), sog. nackter a enthalten, und summiert die z jeder dieser Abteilungen insbesondere. Hiernach gilt als reduziertes i die Größe des ganzen Intervalles, in welchem die Anzahl der primären a, einschließlich ihrer Umkreisintervalle, zusammengefasst wird, als reduziertes z die Summe der z, welche auf die in dem reduzierten Intervalle enthaltenen a fallen, als reduziertes a, welchem das reduzierte z beizuschreiben ist, das Mittel zwischen den gesamten nackten a oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Mittel aus den extremen nackten a, welche in das Intervall eingehen.

Zur Erläuterung diene die Reduktion einer bestimmten Abteilung des Hauptbestandes der primären Tafel I, als wie:

nackte a	380	381	382	383	384
primäre z	2	1	2	3	3

Durch Summierung der primären z erhalten wir als reduziertes z die Zahl 11, indes das reduzierte a das Mittel aus den 5 primären nackten a der betreffenden Abteilung oder, was wegen Aquidistanz derselben auf dasselbe herauskommt, das Mittel aus den äußersten a, 380 und 384, mithin 382 ist, welchem das reduzierte $z = 11$ beizuschreiben. Die Grenzen des reduzierten i aber sind nicht die äußersten nackten a 380 und 384, und mithin das reduzierte Intervall nicht $384 - 380 = 4$, weil ja in das reduzierte Intervall auch die Umkreisintervalle der Grenz-a mit eingehen, wodurch sich das ganze Intervall nach einer und der anderen Seite um ein primäres $\frac{1}{2}i$ erweitert; da nun das primäre $i = 1$ ist, so sind die Grenzen des reduzierten Intervalles nach einer Seite $380 - \frac{1}{2} = 379{,}5$, nach der anderen $384 + \frac{1}{2} = 384{,}5$, und die Größe des ganzen reduzierten Intervalles der Unterschied beider $= 5$.

Während man also das reduzierte a selbst als Mittel der äußersten primären nackten a erhält, welche in die zu reduzierende Abteilung eingehen, kann man die Größe des reduzierten Intervalles nicht als Abstand zwischen beiden Grenz-a erhalten, sondern nur unter Erweiterung dieses Abstandes nach jeder Seite um ein halbes, mithin im ganzen um ein ganzes primäres i. Dies ist wohl zu beachten und nicht überall richtig beachtet worden, wie weiterhin zu bemerken.

Wenn n äquidistante nackte a und hiermit n i in jeder Hauptabteilung der primären Tafel vereinigt sind, so ist auch das i der reduzierten Tafel das n-fache des i der primären Tafel. Nun sind in jeder Hauptabteilung von Tafel I und II je 5, in III je 4 nackte a

in jeder Hauptabteilung enthalten; das primäre i bei I und II ist 1 mm, bei III $\frac{1}{4}$ Zoll; also das i der reduzierten Tafeln bei I und II gleich 5 mm, bei III gleich 1 Zoll.

§ 54. Entsprechend als bei den primären Tafeln hat man bei den reduzierten nicht anzunehmen, dass das reduzierte a selbst so oftmal vorkommt, als das ihm beigeschriebene reduzierte z besagt, sondern dass sich auf das Intervall, was durch das reduzierte a repräsentiert wird, z Werte a verteilen, welche sich zwischen den Grenzen des reduzierten Intervalles halten; und sofern auch die a der primären Tafeln im Grunde ein ganzes Intervall repräsentieren, auf welches sich ihr z verteilt, nur ein kleineres als die reduzierten a, besteht im Grunde zwischen primären und reduzierten a nur ein relativer Unterschied. Anstatt des reduzierten a aber kann in den reduzierten Tafeln auch das Intervall selbst angegeben werden, was dadurch vertreten wird, und es kommt in den bisher vorliegenden reduzierten Tafeln das eine und das andere vor, wonach ich a-Tafeln und Intervalltafeln unterscheide. Bloß wegen der etwas kürzeren Darstellung ziehe ich meist die Form der a-Tafel vor; ein sachlicher Unterschied aber besteht nicht zwischen a-Tafeln und Intervalltafeln, und man kann leicht von der einen Form auf die andere kommen, sofern das reduzierte a der a-Tafel das Mittel zwischen den Grenzen der reduzierten Intervalle ist, indes die Grenzen der Intervalle ebenso wie bei den primären Tafeln $a - \frac{1}{2}i$, $a + \frac{1}{2}i$ sind, nur dass hierbei reduzierte a und i an die Stelle der primären treten, wie sich an folgendem Beispiele erläutert, worin die Reduktion nach angegebenem Prinzip durch eine Abteilung weiter fortgesetzt ist, und man hiermit folgende zu einander gehörige a-Spalte und Intervallspalte erhält:

red. a	red. Intervalle
382	379,5—384,5
387	384,5—389,5

Setzen wir nun in unserem Beispiele die Reduktion nach denselben Prinzipien weiter durch Tafel I fort, so erhalten wir zu einander gehörig folgende reduzierte a- und Intervalltafel:

a	Intervalle	z
382	379,5—384,5	11
387	384,5—389,5	25
392	389,5—394,5	31
397	394,5—399,5	40
402	399,5—404,5	54
407	404,5—409,5	63
412	409,5—414,5	64
417	414,5—419,5	57
422	419,5—424,5	47
427	424,5—429,5	22
432	429,5—434,5	18

Man sieht in diesem Beispiel, dass die Intervalle der reduzierten Tafel sich durch Zusammenfallen der zweiten Grenze jedes Intervalles mit der ersten Grenze des folgenden Intervalles ebenso aneinander schließen als die respektiven Intervallgrenzen der primären Tafeln (s. § 52).

Nicht überall aber findet man anderwärts die Intervallgrenzen nach voriger Regel richtig angegeben, sondern mit Vernachlässigung der Umkreisintervalle die Grenz-*a* der reduzierten Abteilungen selbst als Intervallgrenzen angegeben, so in den sonst so schätzbaren belgischen Rekrutenmaßtafeln, was allerdings insofern berechtigt scheint, als die Erfahrung unmittelbar doch nur diese Grenz-*a* giebt, von denen man bei Verwertung der Tafeln leicht auf die wahren Intervallgrenzen übergehen kann; doch möchte es rätlicher erscheinen, gleich die wahren Grenzen selbst nach voriger Regel in den Tafeln zu geben. Sollte die Bezeichnung der Intervallgrenzen im Sinne der belgischen Tafeln bei unseren Tafeln geschehen, so würden wir in unserem vorigen Beispiel, die *a*-Tafel mit der Intervalltafel verbindend, zu setzen haben:

a	Intervalle	z
382	380—384	11
387	385—389	25
392	390—394	31

u. s. w.

Aber es tritt uns hier gleich der Nachteil dieser Bezeichnungsweise entgegen, dass die Intervalle sich nicht aneinander schließen, sondern Lücken von je einer Maßeinheit zwischen sich lassen, in welche in Wirklichkeit doch auch Maße fallen, von denen die Tabelle keine Rechenschaft giebt. Man hebt jedoch diesen Übelstand und kann ihn auch bei den belgischen Maßtabellen dadurch heben, dass man durch Mittelziehung aus den Grenzen der aufeinander folgenden Intervalle diese Grenzen zusammenfallend macht.

§ 55. Was wir nun vorstehends an einem Beispiel der Schädelmaßtafeln erläutert haben, wird auf alle Tafeln Anwendung finden, welche überhaupt einen Hauptbestand mit äquidistanten *a* haben. Machen wir aber diese Anwendung auf die Studentenmaßtafel III, so tritt eine Unbequemlichkeit ein, der sich in anzugebender Weise durch ein Verfahren begegnen lässt, das ich die **Reduktion mit geteilten** z nennen will. Halten wir uns dabei zur Erläuterung an die ersten zwei Abteilungen des Hauptbestandes der primären Tafel III. Sie sind:

nackte a	65,0	65,25	65,5	65,75	66,0	66,25	66,5	66,75
primäre z	6	3	5	5	8	6	9	19

wobei $i = 0{,}25$ Zoll.

Reduzieren wir nun diese Abteilungen nach den bisherigen Regeln auf das Vierfache des primären i, so erhalten wir folgende mit höchst unbequemen Brüchen behaftete a- und Intervalltafel:

reduziert

a	Intervalle	z
65,375	64,875—65,875	19
66,375	65,875—66,875	42

In der That ist das reduzierte $a = 65{,}375$ das Mittel aus den primären Grenz-a 65 und 65,75 und die reduzierten Intervallgrenzen 64,875 und 65,875 sind gleich dem reduzierten $a = 65{,}375 \mp$ dem halben reduzierten i.

[Um dieser Unbequemlichkeit zu begegnen, beachte man, dass der Hauptbestand einer Tafel mit äquidistanten a sich nicht in scharfer Abgrenzung von den Endabteilungen mit zerstreuten a darbietet. So könnte man den Hauptbestand der Tafel III statt mit 65,0 ebensowohl mit 64,75 oder auch, nach Einschiebung leerer a, mit 64,5 oder 64,25 beginnen lassen. Eine solche Verschiebung des Hauptbestandes um ein, zwei oder drei ganze primäre i würde jedoch nicht zum Ziel führen; denn auch nach der Verschiebung würden sowohl die reduzierten a als auch die Grenzen der reduzierten Intervalle in die Mitte zwischen je zwei benachbarte primäre a fallen und nach wie vor mit den unbequemen Brüchen behaftet sein. Man beachte darum ferner, dass, wie schon mehrfach bemerkt wurde, das z der Tafel nicht dem beigeschriebenen a direkt angehört, sondern auf das ganze Umkreisintervall des a sich verteilt. Es ist somit gestattet, das primäre i zu teilen und den Teilintervallen proportionale Anteile an dem z zu überweisen. Insbesondere kann man das primäre i halbieren, so dass an Stelle des Intervalles mit den Grenzen $a - \frac{1}{2}i$, $a + \frac{1}{2}i$ zwei Intervalle mit den Grenzen $a - \frac{1}{2}i$, a und a, $a + \frac{1}{2}i$ treten, deren jedem $\frac{1}{2}z$ zugehört. Geschieht letzteres in der primären Tafel III, so erhält man beispielsweise an Stelle von:

primär

Intervalle	z
64,875—65,125	6
65,125—65,375	3
65,375—65,625	5

u. s. w.

folgende zusammengehörige Intervall- und z-Reihe:

primär (halbiert)

Intervalle	z
64,875—65,0	3
65,0 —65,125	3
65,125—65,25	1,5
65,25 —65,375	1,5
65,375—65,5	2,5
65,5 —65,625	2,5

u. s. w.

Verschiebt man jetzt den Hauptbestand statt um ein ganzes um ein halbes primäres i, und lässt man denselben mit 65,0 statt mit 64,875 beginnen, wobei diese Werte Intervallgrenzen und nicht a-Werte bedeuten, so erhält man folgende a- und Intervalltafel:

reduziert

a	Intervalle	z
65,5	65,0—66,0	20
66,5	66,0—67,0	41,5

Lässt man jedoch den Hauptbestand mit 64,5 als Intervallgrenze beginnen, so erhält man:

reduziert

a	Intervalle	z
65,0	64,5—65,5	15,5
66,0	65,5—66,5	26

Auf diese Weise, durch Verschiebung und Teilung der Intervalle, kann stets erreicht werden, dass mindestens die Intervallgrenzen oder die a-Werte der reduzierten Tafel ganzzahlig werden, falls nur das reduzierte i gleich der zu Grunde liegenden Maßeinheit oder ein Vielfaches derselben ist.]

§ 56. Nun giebt es aber auch Tabellen, wie Tafel IV für die Roggenähren, wo die Maße sich durch die ganze Tabelle sehr zerstreuen, wo ein Hauptbestand mit äquidistanten a von vornherein nicht vorhanden ist und nur durch eine praktisch kaum durchführbare Einschaltung unzähliger leerer a hergestellt werden könnte. Dann wird man wie folgt zu verfahren haben.

Zunächst hat man sich nach den alsbald (§ 60) aufzustellenden Gesichtspunkten zu entscheiden, auf ein wie großes i man reduzieren will. Um einen nahehin regelmäßigen Gang der Werte z zu erhalten, wird man bei unserer Tafel mit i nicht unter vier Maßeinheiten gehen dürfen. Gehen wir nun, um das erste primäre $a = 42{,}9$ noch in das erste reduzierte Intervall einzuschließen, mit dessen erster Grenze so weit zurück, dass dieser Zweck erreicht wird, wozu genügt, die erste Grenze des ersten red. Intervalles $= 42$ anzunehmen, indem dann 42,9 in das erste Intervall 42—46 fällt[1]). Das reduzierte z dieses Intervalles ist dann die Summe der primären z, die in das Intervall 42—46 fallen, d. i. 1, das red. a die Mitte zwischen 42 und 46, also 44. Das zweite red. Intervall ist hiernach 46—50, worein wieder nur ein z fällt, mithin das red. $z = 1$ ist, u. s. f., was von vornherein folgende reduzierte Tafel giebt:

reduziert

a	Intervalle	z
44	42—46	1
48	46—50	1
52	50—54	1
56	54—58	2

Wenn eine der Intervallgrenzen zufällig mit einem a der primären Tafel zusammenfällt, so ist nur das halbe primäre z dieses a in das reduzierte z des Intervalles einzunehmen, indem das andere halbe z (wie nach der Methode der geteilten z) dem Nachbarintervall angehört.

§ 57. Kommen wir jetzt auf Verteilungstafeln wie I, II, III zurück, in denen sich ein Hauptbestand mit äquidistanten a der a-Spalte von Endabteilungen mit zerstreuten a unterscheiden lässt, so ist noch anzugeben, wie mit letzteren zu verfahren. Dies kann in doppelter Weise geschehen. Entweder α) macht man die a der Endabteilungen durch Einschaltung leerer a ebenso äquidistant, als es in den Hauptabteilungen der Fall ist, und reduziert sie hiernach ganz nach vorigen Prinzipien, da sie sich danach von den Hauptabteilungen prinzipiell nicht mehr unterscheiden; oder β) man setzt die Reduktion durch die Endabteilungen nicht fort, sondern begnügt sich mit Bauschangaben darüber. Letzteres Verfahren ist, soviel ich sehe, bisher das allein übliche, das erstere aber das aus anzugebenden Gründen vorzuziehende und künftig von mir allein befolgte.

1) Zu demselben Zwecke könnte man auch noch weiter mit der ersten Grenze zurückgehen, bis 41, bis 40, bis 39, wo dann die ersten Intervalle respektiv sein würden 41—45, 40—44, 39—43. In jedes derselben aber fiele 42,9. Dies giebt verschiedene Reduktionslagen, wovon nachher; jedenfalls aber genügt schon 42 als erste Intervallgrenze dem Zwecke.

So sieht man überall nach Verfahren β) bei Rekrutenmaßen dem reduzierten Hauptbestande die Bauschangabe der Zahl von Maßen vorangehen, welche kleiner als die erste Grenze des reduzierten Hauptbestandes sind, und die Tabelle mit der Bauschangabe der Zahl von Maßen schließen, welche größer als die zweite Grenze des reduzierten Hauptbestandes sind, ohne Spezifikation dieser Maße: worauf man sich aber doch nicht beschränken sollte, da man danach zwar noch den Zentralwert, aber nicht mehr das arithmetische Mittel bestimmen kann, anderer Nachteile nicht zu gedenken; vielmehr sollte, wenn man überhaupt auf die Durchführung der Reduktion durch die Endabteilungen verzichten will, außer der Summe der Anzahl der Maße auch die Summe der Maße selbst, welche in den Endabteilungen enthalten sind, angegeben werden, und nicht unzweckmäßig wird man die primären Extreme hinzufügen. Bezeichnen wir also einerseits als Vorzahl v und Vorsumme V die Zahl (Σz) und Summe (Σaz) der primären a, welche kleiner als die erste Grenze des reduzierten Hauptbestandes sind, andererseits als Nachzahl n und Nachsumme N die Zahl und Summe der primären a, welche größer als die zweite Grenze dieses Bestandes sind, als $E_{\prime}$ und E' das kleinste und größte a der ganzen primären Tafel überhaupt, so ist der reduzierte Hauptbestand noch durch Angabe von v, V, n, N, $E_{\prime}$, E' zu ergänzen, wodurch man die Tabelle brauchbarer macht, aber freilich dafür an dem Vorteil der Kürze, den nur das reine β-Verfahren gewährt, einbüßt.

Das Verfahren α) aber ist nicht nur methodischer, indem sich danach die Reduktion der ganzen primären Tafel ohne die immer etwas willkürliche Abgrenzung zwischen Hauptbestand und Endabteilungen und ohne eine Ergänzung letzter Art nach demselben Prinzip durchführen lässt, sondern streng genommen sind auch nur so reduzierte Tafeln für die vorzunehmenden Verteilungsrechnungen brauchbar.

Führe ich nun nach diesem Prinzip die Reduktion auf ein $i = 5$ mm durch die ganzen Tafeln I und II durch, mit Rücksicht, durch Einschaltung leerer a nicht nur die a der ganzen Tabelle äquidistant zu machen, sondern auch dem ersten primären geltenden a so viele leere *a* vorangehen zu lassen, dass das erste primäre *a* (bei I 368, bei II 481) noch in das erste reduzierte Intervall hineinfällt, so kann man zur Erfüllung dieser Bedingung je nach der gewählten Reduktionslage 1, 2, 3 oder 4 leere *a* vorangehen lassen und wird, wenn man beispielsweise zwei vorangehen lässt, die ersten durch leere *a* ergänzten Abteilungen der primären Tafel I so zu schreiben haben:

primäre *a*	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375
primäre *z*	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0

u. s. w.

Das erste red. Intervall ist hiernach, mit Rücksicht auf die Umkreisintervalle der primären Grenz-*a*, $366 - \frac{1}{2}$ bis $370 + \frac{1}{2}$, d. i. $365\frac{1}{2} - 370\frac{1}{2}$, das zweite $370\frac{1}{2} - 375\frac{1}{2}$; das red. *a* des ersten Intervalles ist 368 als Mitte zwischen 366 und 370, das zweite 373; und das durch Summierung der primären *z* jeder Abteilung erhaltene reduzierte *z* ist für die erste Abteilung 1, für die zweite 2, was als Anfang der reduzierten Tafel giebt:

reduziert

a	Intervalle	*z*
368	365,5—370,5	1
373	370,5—375,5	2

u. s. w.

Entsprechend werden wir bei Tafel II die zwei ersten durch leere *a* ergänzten Abteilungen so zu schreiben haben:

primäre *a*	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489
primäre *z*	0	1	0	0	2	2	1	0	1	2

hiernach als Anfang der reduzierten Tafel:

reduziert

a	Intervalle	*z*
482	479,5—484,5	3
487	484,5—489,5	6

§ 58. Führen wir nun diese Reduktion durch die ganzen Tafeln I und II durch, so erhalten wir unter Beschränkung auf die Form der a-Tafeln folgende reduzierte Tafeln, deren jeder eine für späteren Gebrauch sehr nützliche Spalte $S_{,}$ beigefügt ist, welche dadurch entsteht, dass man die z der z-Spalte vom Anfang herein bis zu dem a (inkl.) der a-Spalte, wozu das betreffende $S_{,}$ gefügt ist, summiert:

Reduktion der primären Tafeln I (Vertikalumfang) und II (Horizontalumfang) mit red. $i = 5$ mm.

I			II		
a	z	$S_{,}$	a	z	$S_{,}$
368	1	1	482	3	3
373	2	3	487	6	9
378	5	8	492	10	19
383	17	25	497	13	32
388	24	49	502	30	62
393	36	85	507	28	90
398	41	126	512	52	142
403	59	185	517	50	192
408	**65**	250	522	**60**	252
413	**65**	315	527	53	305
418	51	366	532	39	344
423	40	406	537	43	387
428	17	423	542	30	417
433	19	442	547	14	431
438	4	446	552	12	443
443	2	448	557	3	446
448	2	450	562	1	447
			567	2	449
			572	0	449
			577	1	450

Der Vergleich vorstehender reduzierter Tafeln mit den primären, aus denen sie entstanden sind, giebt zu folgenden Bemerkungen von allgemeiner Tragweite Anlass.

Verstehe ich überhaupt unter einem regelmäßigen Gange der z einen solchen, dass sie mit aufsteigenden a ohne Unterbrechung durch

Absteigen bis zu einem Maximum wachsen, von da an aber ebenso ohne Unterbrechung durch Aufsteigen wieder abnehmen, hiermit eine glatte Verteilungskurve im Sinne von § 17 geben, so zeigen sämtliche reduzierte Tafeln auf den ersten Blick gegen die primären, aus denen sie abgeleitet sind, den auffälligsten Vorteil der Regelmäßigkeit. Und erst nachdem der Gang der Werte durch die Reduktion mindestens um die Mitte herum regelmäßig geworden ist, wird sich von einer Gesetzlichkeit derselben sprechen, dieselbe bestimmen oder eine voraussetzliche Gesetzlichkeit daran prüfen lassen.

Dass I zwei benachbarte gleiche Maximal-z zeigt, ist nur zufällig und steht dem regelmäßigen Gange nicht im Wege, wie es der Fall sein würde, wenn sie durch zwischenliegende a mit kleinerem z geschieden wären. II hat, wie gewöhnlich, nur ein Maximal-z. Näher zugesehen, zeigt I nur noch nach einem Ende hin eine unbedeutende Ausnahme vom regelmäßigen Gange, sofern die $z = 17$ und 19 ihre Größe vertauschen müssten, um sich richtig zu folgen; und selten fehlt es gegen die Enden hin ganz an solchen kleinen Unregelmäßigkeiten, ohne dass bei Verwertung der Tafeln viel darauf ankommt, um so mehr, wenn solche in der Gegend des dichtesten a, d. h. was das größte z hat, stattfinden; und verstehen wir der Kürze halber unter Kern der Tafel das dichteste a mit seinen zwei höheren und zwei tieferen Nachbar-a, so werden wir vorzugsweise von diesem Kerne Regelmäßigkeit zu fordern haben, um unsere Normalgesetze der Verteilung mit befriedigender Approximation bestätigt zu finden. Während nun der Kern von I, der sich wegen des doppelten Maximal-z auf sechs a erstreckt, der Bedingung der Regelmäßigkeit genügt, ist dies bezüglich II nach oben hin (nach den kleineren Maßen zu) nicht der Fall, und auch nach unten zu folgt die Zahl 43 unrichtig gegen die Grenzzahl 39 des Kernes.

Hiernach lässt sich von vornherein schließen, dass die Tafel II für Horizontalumfang sich der normalen Verteilungsweise weniger gut fügen und weniger geeignet zur Bewährung der Normalgesetze sein wird, als Tafel I für Vertikalumfang.

§ 59. Nun aber reicht es hin, Tafel I und II auf das doppelte i als vorhin, statt auf 5 mm auf 10 mm zu reduzieren, um beide Tafeln ausnahmslos regelmäßig zu machen, was sehr einfach dadurch geschehen kann, dass man je zwei successive a der auf $i = 5$ mm reduzierten Tafeln zu ihrem Mittel und ihre zugehörigen z zur Summe vereinigt. Geschieht dies mit der Tafel I (§ 58) von oben herein, so bleibt wegen der unpaaren Zahl der nackten a dieser Tabelle das $a = 448$ mit $z = 2$ übrig; es hindert aber nichts, die a-Tafel über 448 hinaus konsequent fortzuführen, indem man zu dem $a = 448$ ein um 5 mm größeres $a = 453$ mit $z = 0$ hinzufügt; das mittlere a zwischen 448 und 453 giebt dann ein reduziertes $a = 450{,}5$ mit einem reduzierten $z = 2$. In der That erhält man folgende Tafeln:

Die Tafeln I und II, auf $i = 10$ mm reduziert.

I

a	z	$S_{,}$
370,5	3	3
380,5	22	25
390,5	60	85
400,5	100	185
410,5	130	315
420,5	91	406
430,5	36	442
440,5	6	448
450,5	2	450

II

a	z	$S_{,}$
484,5	9	9
494,5	23	32
504,5	58	90
514,5	102	192
524,5	113	305
534,5	82	387
544,5	44	431
554,5	15	446
564,5	3	449
574,5	1	450

Aus den vorigen Tafeln wird man, nach demselben Prinzip, auf $i = 20$ mm reduzierte Tafel ableiten können, u. s. f., was ich als verschiedene Reduktionsstufen bezeichne. Mit jeder neuen Reduktionsstufe verkleinert sich die Tafel, bis man zuletzt auf ein einziges red. a mit einem einzigen red. z kommt.

Um dies nur für Tafel I durchzuführen, so erhält man bei Reduktion respektiv auf 20, 40 mm u. s. f. aus der Reduktion für $i = 5$ mm folgende a-Tafeln:

20 mm		40 mm		80 mm		160 mm	
a	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*
375,5	25	385,5	185	405,5	448	445,5	450
395,5	160	425,5	263	485,5	2		
415,5	221	465,5	2				
435,5	42						
455,5	2						

Und so wird man überhaupt, wenn bei Reduktion auf ein gegebenes i noch kein regelmäßiger Gang der Werte z zu erlangen ist, durch Vergrößerung des i zu einem solchen gelangen oder sich doch demselben nähern können. Und, wie leicht zu erachten, besteht gleich von vornherein die Möglichkeit der Reduktion auf ein verschieden großes i. Wir hätten ja bei I und II das primäre i gleich bei der ersten Reduktionsstufe um mehr oder weniger als das fünffache, bei III um mehr oder weniger als das vierfache i steigern können, indem wir mehr oder weniger äquidistante (resp. durch Einschieben leerer a äquidistant gemachte) primäre a dazu zusammennahmen. Es handelt sich also um Gesichtspunkte, welche die Wahl in dieser Hinsicht bestimmen können. Ganz allgemeine und feste für jeden sich darbietenden besonderen Fall lassen sich nun nicht wohl geben, doch folgende aufstellen, welche die Wahlfreiheit bis zu gewissen Grenzen beschränken und regeln können.

§ 60. Es findet ein gewisser Konflikt zwischen den Vorteilen und Nachteilen der Vergrößerung oder Verkleinerung des Reduktions-i statt. Aus gewissen Gesichtspunkten ist es am vorteilhaftesten, das i möglichst klein zu halten, weil nach schon früher (§ 5) gepflogener Erörterung die idealen Verteilungsgesetze streng genommen diesen Fall voraussetzen, und in dieser Hinsicht verdient sogar die primäre Tafel den Vorzug vor jeder reduzierten, die stets ein Vielfaches des primären i enthält; ja am besten wäre, wenn man das i der primären Tafel selbst auf unendliche Kleinheit reduzieren könnte, was nun freilich nicht geht. Auch trägt folgender Umstand bei, unter sonst gleichen Umständen die Reduktion auf kleine i der Reduktion auf größere vorziehen zu lassen. Soll der Umstand, dass die auf ein gegebenes a geschriebene Zahl z eigentlich einem ganzen Intervall zugehört, welches bei primären wie reduzierten Tafeln mit der Größe des i wächst, bei Bestimmung der Elemente erforderlich berücksichtigt werden, so muss, was später (Kap. IX) auszuführen, Interpolation des betreffenden Intervalles zu Hilfe genommen werden, und muss man womöglich die Intervalle klein genug halten, dass man mit einfacher Interpolation ausreicht; denn die Kollektivmaßlehre würde praktisch fast undurchführbar werden, wenn man zur Bestimmung aller Elemente und der Vergleiche zwischen Rechnung und Beobachtung überall Interpolation mit zweiten Differenzen zuziehen müsste. Und obschon ich das Verfahren dazu später angeben werde, habe ich doch im allgemeinen nicht davon Gebrauch gemacht, nachdem ich bei Beschränkung auf die angewandten Größen des i keinen die Mühseligkeit des Gebrauches und Umständlichkeit der Darstellung vergeltenden Vorteil davon zu erlangen vermochte.

Dem entgegen kann die Ausgleichung der Zufälligkeiten, welche den regelmäßigen Gang der z in der primären Tafel stören und dem Vergleiche mit dem gesetzlich geforderten Gange im Wege stehen, doch nur durch Reduktion und hiermit Vergrößerung des i erzielt werden, und ein nicht zu großes i schadet in dieser Beziehung viel weniger als eine zu große Unregelmäßigkeit. Hiernach wird man im ganzen am besten thun, das i so groß und doch nicht größer zu nehmen, als dass ein regelmäßiger Gang mindestens innerhalb des Kernes der reduzierten Tafel stattfindet; denn Unregelmäßigkeiten im Gange der äußersten kleinen z haben überhaupt auf die Bestimmung der Elemente und gesetzlichen Verhältnisse keinen erheblich störenden Einfluss. Wo nun aber, wie bei unseren drei ersten Beispielstafeln, zu den Unregelmäßigkeiten wegen unausgeglichener Zufälligkeiten noch solche wegen ungleichförmiger Schätzung treten, tritt noch die besondere Bedingung hinzu, das i nicht kleiner und mithin die Zahl der zusammenzufassenden äquidistanten a nicht geringer zu nehmen, als es der Periode der ungleichförmigen Schätzung entspricht, und bei Vergrößerung des i dieses nur nach ganzen Multiplis davon zu thun, weil nur unter dieser Bedingung auf Ausgleichung der Fehler wegen ungleichförmiger Schätzung zu rechnen ist. Nun kehren bei den Schädelmaßen der Tab. I und II nach § 51 die Maximalmaß-z nach je 5 um 1 mm fortschreitenden a, bei den Studentenrekrutenmaßen der Tab. III nach je 4 um 0,25 Zoll fortschreitenden a der primären Tafel wieder, also kann die Reduktion auf das kleinste statthafte i bei I und II nur auf $i = 5$ mm, bei III nur auf 1 Zoll geschehen, wie das in den Tabellen (§ 58 und § 62) der Fall ist; auf ein größeres i aber einzugehen, hätte man nur dann Anlass, wenn damit noch kein regelmäßiger Gang der reduzierten z zu erzielen wäre.

§ 61. Obwohl man nun aus angegebenen Gründen keinen Anlass finden wird, bei Bearbeitung unserer Beispielstafeln zu diesen höheren Reduktionsstufen fortzuschreiten, kann es doch ein Interesse haben, an denselben zu sehen, wiefern überhaupt von einem solchen Fortschritt eine Anderung der Elemente zu erwarten ist, und ich gebe hiernach zuvörderst für Tafel I folgende Tabelle der wichtigsten Elemente je nach ihrer Ableitung aus verschiedenen Reduktionsstufen. Die Bestimmung von D_p ist wegen ihrer Umständlichkeit bloß für die zwei ersten Reduktionsstufen geschehen. Nach Änderung der Hauptwerte ändern sich natürlich auch die davon abhängigen Abweichungsfunktionen; u, $\boldsymbol{u}$ und p haben die früher (§ 10 und § 33) angegebene Bedeutung, woraus μ', $\mu_,$, m', $m_,$ mit Zuziehung der Totalzahl m in angegebener Weise zu folgern ist. Die Ableitung von m', $m_,$ und demgemäß von $\boldsymbol{u}$, sowie von e', $e_,$ ist überall von D_p aus, nicht von D_i aus geschehen. Das aus der primären Tafel abgeleitete A, d. i. A_1, ist in der Überschrift mit angegeben. Alle Elemente sind nach der sog. scharfen Methode der Kap. IX und X mit einfacher Interpolation des Eingriffsintervalles abgeleitet. Ganz entsprechend sind alle weiter folgenden Tafeln der Elemente zu verstehen.

Elemente der Tafel I, je nach Ableitung aus verschiedenen Reduktionsstufen.

$\mathfrak{E} = 1\,\text{mm}$; $m = 450$; $A_1 = 408{,}5$.

i	$5\,\mathfrak{E}$	$10\,\mathfrak{E}$	$20\,\mathfrak{E}$	$40\,\mathfrak{E}$
A_2	408,2	408,1	408,2	409,2
C_2	408,6	408,6 [1])	409,1	411,6
D_p	409,7	410,1	—	—
D_i	410,5	409,8	410,6	414,7
u	+ 10	+ 12	+ 20	+ 31
$\mathbf{u}$	— 29	— 40	—	—
$e_{,}$	11,9	12,4	—	—
e'	10,4	10,4	—	—
p	0,74	0,75	—	—

Man sieht, dass, abgesehen von der letzten hier berücksichtigten Reduktionsstufe, auf $i = 40$, wo die reduzierte Tafel auf drei Werte zusammenschrumpft, die Hauptwerte je nach der Reduktionsstufe nur um zu vernachlässigende und zufällig scheinende Größen von einander abweichen; wogegen u, $\mathbf{u}$ und mithin $\mu_{,}$, μ', $m_{,}$, m' sich nicht unerheblich danach ändern, woraus zu folgern ist, dass, wenn es sich nur um Bestimmung der Hauptwerte handelt, auf die Reduktionsstufe nicht viel ankommt, wenn man nur nicht bis zu den höchsten Graden damit geht; wogegen die Verteilungsrechnungen von den Reduktionsstufen wesentlich influiert werden müssen, und man also auch aus diesem Grunde wohl thun wird, sofern es gilt, beobachtete mit berechneter Verteilung zu vergleichen, bei der möglichst niedrigen Stufe, welche noch eine regelmäßige Verteilung im Kerne giebt, stehen zu bleiben. Wo nun die niedrigste Stufe nicht durch Rücksicht auf eine etwa vorhandene ungleichförmige Schätzung bedingt

1) Es könnte als Versehen erscheinen, dass C_2 für $i = 10$ ganz denselben Wert als für $i = 5$ erhalten hat. [Es rührt dies jedoch daher, dass das Intervall, in welches C_2 für $i = 10$ fällt, ein doppelt so großes z besitzt als das Intervall, in welches C_2 für $i = 5$ fällt, was durch die beiden benachbarten gleichen Maximal-z der Reduktionsstufe $i = 5$ bedingt wird.]

ist, wie bei Tafel I, II und III, ist man auch nicht gebunden, das erst gewählte i gerade zu verdoppeln, um zum Zwecke eines regelmäßigen Kernes zu gelangen, was nur den formalen Vorteil hat, dass man die höhere Stufe einfach aus der vorherigen niederen Stufe ableiten kann. Wenn man aber einen regelmäßigen Kern mittelst einer schwächeren Reduktion als durch Verdoppelung des vorherigen i erlangen kann, so wird man nicht zu dieser Verdoppelung greifen, muss aber dann zur Ableitung der betreffenden Reduktion auf die primäre Tafel zurückgehen.

§ 62. Um nun zu sehen, wie sich diese Resultate bei anderen K.-G. unter anderen Bedingungen wiederfinden, wenden wir uns von Tafel I, welche für Schädelmaße mit $m = 450$ gilt[1]), zu Tafel III für Studentenrekrutenmaße mit $m = 2047$.

Bei Tafel I waren wir durch das Verhalten der ungleichförmigen Schätzung genötigt, das primäre $i = 1$ mm bei der ersten Stufe auf das Fünffache zu reduzieren; bei Tafel III sind wir aus demselben Grunde gehalten, das primäre $i = 0{,}25$ Zoll auf das Vierfache, d. i. 1 Zoll zu reduzieren, wobei aus dem oben § 55 angegebenen Grunde das Verfahren mit geteilten z anzuwenden ist. Dies giebt, wenn wir von einer solchen Lage der ersten Reduktion ausgehen[2]), dass die a derselben ohne Bruch auftreten, folgende Verteilungstafeln und Elemente.

---

1) Tafel II übergehe ich, nicht nur, weil sie analoge Verhältnisse als I darbietet, sondern auch, weil sie wegen Unregelmäßigkeit im Kerne der primären Tafel weniger sicheren Anhalt bietet.

2) Die Möglichkeit verschiedener Reduktionslagen wird weiterhin besprochen.

Auf verschiedene Stufen reduzierte Tafel III.

$\mathfrak{E} = 0{,}25$ Zoll; $m = 2047$; $A_1 = 71{,}77$.

$i = 1$ Zoll		$i = 2$ Zoll		$i = 4$ Zoll		$i = 8$ Zoll	
a	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*
60	1	60,5	1	61,5	1	63,5	98,5
61	0	62,5	0	65,5	97,5	71,5	**1815**
62	0	64,5	17,5	69,5	823	79,5	133,5
63	0	66,5	80	73,5	**992**	87,5	0
64	2	68,5	280	77,5	129,5		
65	15,5	70,5	543	81,5	4		
66	26	72,5	**626,5**	85,5	0		
67	54	74,5	365,5				
68	108	76,5	113				
69	172	78,5	16,5				
70	253	80,5	3				
71	290	82,5	1				
72	**330,5**	84,5	0				
73	296						
74	223,5						
75	142						
76	75						
77	38						
78	13						
79	3,5						
80	2						
81	1						
82	0,5						
83	0,5						

Elemente der Tafel III nach Ableitung aus verschiedenen Reduktionsstufen.

$\mathfrak{S} = 1$ Zoll; $m = 2047$; $A_1 = 71{,}77$.

i	$1\,\mathfrak{S}$	$2\,\mathfrak{S}$	$4\,\mathfrak{S}$	$8\,\mathfrak{S}$
A_2	71,75	71,76	71,77	71,64
C_2	71,81	71,83	71,91	71,58
D_p	71,99	72,06	—	—
D_i	72,04	71,98	72,16	71,54
u	+ 39	+ 41	+ 70	— 29
u	— 120	— 147	—	—
$e_{\prime}$	2,16	2,26	—	—
e'	1,92	1,96	—	—
p	0,75	0,77	—	—

Wie man sieht, bestätigen sich durch diese Tabelle die aus den Reduktionsstufen für I gezogenen Schlüsse.

§ 63. Was Tafel IV bezüglich der Roggenähren mit $m = 217$ anlangt, so habe ich durch mehrfache Versuche gefunden, dass man, um zu einem regelmäßigen Kern zu gelangen, nicht wohl unter ein reduziertes $i = 4\,\mathfrak{S}$ herabgehen kann, wo $\mathfrak{S} = 0{,}5$ cm ist; was, bei Beginn der Tafel mit einem reduzierten $a = 42$, folgende Resultate giebt:

Auf verschiedene Stufen reduzierte Tafel IV.

$\mathfrak{E} \doteq 0{,}5$ cm; $m = 217$; $A_1 = 86{,}54$.

$i = 4\,\mathfrak{E}$	
a	*z*
42	1
46	0
50	1
54	2
58	3
62	5
66	6
70	8
74	15
78	20
82	25
86	25
90	**32**
94	19,5
98	24,5
102	15,5
106	10
110	3
114	1,5
118	0

$i = 8\,\mathfrak{E}$	
a	*z*
44	1
52	3
60	8
68	14
76	35
84	50
92	**51,5**
100	40
108	13
116	1,5

$i = 16\,\mathfrak{E}$	
a	*z*
48	4
64	22
80	85
96	**91,5**
112	14,5

$i = 32\,\mathfrak{E}$	
a	*z*
56	26
88	**176,5**
120	14,5

Hieraus begnüge ich mich, nur die Hauptwerte abzuleiten, welche ebenfalls eine sehr geringe Änderung je nach der Reduktionsstufe zeigen.

Hauptwerte der Tafel IV nach Reduktion auf verschiedene Stufen.

$\mathfrak{E} = 0{,}5$ cm; $m = 217$; $A_1 = 86{,}54$.

i	$4\,\mathfrak{E}$	$8\,\mathfrak{E}$	$16\,\mathfrak{E}$	$32\,\mathfrak{E}$
A_2	86,48	86,67	86,67 [1])	86,30
C_2	87,60	87,60 [1])	87,53	86,96
D_p	90,25	—	—	—
D_i	89,44	88,76	89,25	87,41

§ 64. Inzwischen außer der Wahl zwischen den Reduktionsstufen handelt es sich nach schon gemachter Bemerkung noch um die Wahl zwischen den Reduktionslagen.

Die Verschiedenheit der Reduktionslagen beruht darauf, dass, je nachdem man den Ausgangswert des Zusammennehmens der primären nackten a ändert, die reduzierte Tafel verschieden ausfällt. Betrachten wir dies zuerst in Bezug auf den Hauptbestand der primären Tafel I. Das Zusammennehmen der a begann im Beispiele § 53 mit dem ersten $a = 380$ der ersten Hauptabteilung, und wir erhielten damit als reduziertes a 382 mit dem reduzierten $z = 11$. Gehen wir nun konsequent damit vor, so wird die Reduktion der zweiten Hauptabteilung mit den fünf nackten a 385, 386 flg. ein reduziertes $a = 387$ mit dem reduzierten $z = 25$ geben. Nun hindert aber nichts, den Anfang des Zusammennehmens von je fünf nackten a um ein a vorzuschieben, womit andere zu reduzierende Abteilungen entstehen, nämlich, um bei den zwei ersten stehen zu bleiben:

nackte a	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
primäre z	1	2	3	3	8	2	6	4	5	7

woraus folgt:

1) [Die Übereinstimmung der Werte von A_2 für $i = 8$ und $i = 16$, sowie von C_2 für $i = 4$ und $i = 8$ ist durch die Beschaffenheit der Tafel IV begründet, und zwar folgt die Gleichheit der beiden A_2 daraus, dass in der Reduktionsstufe $i = 8$ die Summe des ersten, dritten, fünften z u. s. w. zufällig gleich der Summe des zweiten, vierten z u. s. w. ist, während die gleichzahligen z der Stufe $i = 4$ (für $a = 82$ und 86) die Gleichheit der beiden C_2 bedingen.]

reduziert

a	Intervalle	z
383	380,5—385,5	17
388	385,5—390,5	24

u. s. w.

Dies giebt, wie man sieht, eine andere reduzierte Tafel des Hauptbestandes als die vorige, welche primär mit $a = 380$, reduziert mit 382 anhob, statt dass diese primär mit 381, reduziert mit 383 anhebt. Weiter könnte man auch, statt mit primärem $a = 380$ oder 381 anzuheben, mit 382, 383 oder 384 anheben, und erst wenn man mit 385 den Anfang machte, würde man in die erste Reduktionsweise zurückfallen, indem diese, mit 380 beginnend, die mit 385 beginnende als Fortsetzung einschließt.

Im ganzen sind so viele Reduktionslagen möglich, als die Zahl der primären a oder i beträgt, welche in dem i der Reduktionsstufe zusammengefasst werden. Sofern nun das $i = 1$ mm der primären Tafel I in der ersten Reduktionsstufe auf $i = 5$ mm gesteigert ist, sind hier fünf Reduktionslagen möglich, bei Reduktion auf 10 mm würden zehn Lagen möglich sein u. s. f. Und wenn wir im Sinne der Methode α) die primären Endabteilungen durch Ergänzung mit leeren a in einheitlichem Zusammenhange mit den Hauptabteilungen behandeln, so dehnt sich die betreffende Zahl der Reduktionslagen mit auf diese aus.

Um nun die möglichen Reduktionslagen einer gegebenen Reduktionsstufe zu erschöpfen, haben wir nicht nur die Lücken zwischen den primären a durch leere a zu ergänzen, sondern auch hinter das erste geltende a so weit und in so vieler Weise mit leeren a zurückzugehen, dass das erste geltende a noch unter den zusammenzunehmenden a mit enthalten ist, d. i. bei fünf möglichen Lagen je nach der Lage respektive mit vier, mit drei, mit zwei, mit einem leeren a. Also werden wir in Tafel I, wo 368 das erste geltende a mit $z = 1$ ist, für die erste Lage zu setzen haben:

a	364	365	366	367	368
z	0	0	0	0	1

mit red. $a = 366$ als Mitte zwischen 364 und 368, und red. $z = 1$ als Summe der in dem red. Intervall enthaltenen z; bei der zweiten mit Vorschiebung um ein a:

a	365	366	367	368	369
z	0	0	0	1	0

mit red. $a = 367$, red. $z = 1$, u. s. f., was durchgeführt folgende fünf Lagen giebt:

Tafel I (Vertikalumfang) in fünf Reduktionslagen
mit $i = 5$ mm; $\mathcal{E} = 1$ mm; $m = 450$.

a	z	a	z	a	z	a	z	a	z
366	1	367	1	368	1	369	3	370	3
371	2	372	2	373	2	374	1	375	1
376	2	377	3	378	5	379	5	380	7
381	9	382	11	383	17	384	18	385	22
386	23	387	25	388	24	389	29	390	30
391	28	392	31	393	36	394	33	395	33
396	45	397	40	398	41	399	49	400	55
401	47	402	54	403	59	404	55	405	50
406	60	407	63	408	**65**	409	**66**	410	**73**
411	**65**	412	**64**	413	**65**	414	62	415	52
416	60	417	57	418	51	419	53	420	55
421	44	422	47	423	40	424	39	425	35
426	34	427	22	428	17	429	13	430	12
431	13	432	18	433	19	434	16	435	14
436	10	437	5	438	4	439	4	440	5
441	5	442	5	443	2	444	2	445	2
446	2	447	2	448	2	449	2	450	1

Um die verschiedenen Lagen zu unterscheiden, dürfte man sich am einfachsten der Bezeichnung durch den Anfang der reduzierten Tafel, d. i. des kleinsten reduzierten a oder reduzierten $E_{,}$ bedienen, wonach also die erste der obigen Reduktionslagen durch $E_{,} = 366$, die zweite durch $E_{,} = 367$ u. s. f. zu bezeichnen ist.

[Der Einfluss der Reduktionslage auf die Werte der Elemente wird aus folgender Tabelle ersichtlich:]

Elemente der Tafel I (Vertikalumfang) bei Reduktion auf fünf verschiedene Lagen.

$\mathfrak{S} = 1$ mm; $i = 5$ mm; $m = 450$; $A_1 = 408{,}5$.

$E_{,}$	366	367	368	369	370	Mittel
A_2	408,6	408,7	408,2	408,5	408,6	408,5
C_2	409,1	409,1	408,6	408,9	409,1	409,0
D_p	410,7	410,5	409,7	410,4	410,3	410,3
D_i	411,0	410,1	410,5	410,2	410,1	410,4
$m_{,}$	246	244	240	244	242	243
m'	204	206	210	206	208	207
$e_{,}$	12,3	12,1	11,9	12,1	12,1	12,1
e'	10,2	10,3	10,4	10,2	10,4	10,3
u	+13	+10	+10	+11	+16	+12
u	−42	−38	−30	−38	−34	−36
p	0,76	0,78	0,73	0,79	0,71	0,75

Man bemerke, dass das A_1 der primären Tabelle gleich 408,5, und dass die A_2 bei sämtlichen fünf Lagen hiervon und mithin von einander nur wenig abweichen, im Mittel aber ganz mit A_1 stimmen. Ebenso zeigen die anderen Hauptwerte je nach der verschiedenen Lage nur wenig Verschiedenheit; etwas abweichender zeigen sich die Abweichungszahlen und Abweichungssummen und daraus folgenden mittleren Abweichungen.

Doch kann man schon bemerken, dass, so wenig sich die Werte A, C, D derselben Lage unterscheiden, sie doch bei allen Reduktionslagen in derselben Ordnung auftreten. Es ist nämlich D größer als A, und C fällt zwischen beide Werte, wie es durch die Asymmetriegesetze gefordert wird. Auch tritt die Asymmetrie schon dadurch deutlich hervor, dass überall $m_{,} > m'$ ist; ja es erfüllt sich auch die für den Fall der Asymmetrie geltende Forderung, dass $p = (D - C) : (D - A)$ sehr approximativ $= \frac{1}{4}\pi = 0{,}785$ ist.

§ 65. Während wir nun solchergestalt bei Tafel I vermöge Steigerung des primären i auf das Fünffache die Möglichkeit von fünf verschiedenen reduzierten Tafeln erhalten, erhalten wir bei III wegen Steigerung auf das Vierfache die Möglichkeit von vier Reduktionslagen.

Tafel III in vier Reduktionslagen

mit $i = 1$ Zoll; $\mathcal{B} = 1$ Zoll; $m = 2047$.

a	z	a	z	a	z	a	z
59,5	0,5	59,75	1	60	1	60,25	1
60,5	0,5	60,75	0	61	0	61,25	0
61,5	0	61,75	0	62	0	62,25	0
62,5	0	62,75	0	63	0	63,25	0
63,5	1	63,75	2	64	2	64,25	4
64,5	8	64,75	11,5	65	15,5	65,25	18,5
65,5	20	65,75	22,5	66	26	66,25	35
66,5	41,5	66,75	43,5	67	54	67,25	60
67,5	72	67,75	94	68	108	68,25	123,5
68,5	137	68,75	151,5	69	172	69,25	192
69,5	215,5	69,75	237,5	70	253	70,25	263,5
70,5	271	70,75	280	71	290	71,25	309
71,5	323,5	71,75	327	72	330,5	72,25	318
72,5	305	72,75	304	73	296	73,25	285,5
73,5	274,5	73,75	248,5	74	223,5	74,25	205,5
74,5	183,5	74,75	165	75	142	75,25	119
75,5	101,5	75,75	87,5	76	75	76,25	62
76,5	52	76,75	43	77	38	77,25	35
77,5	27,5	77,75	18,5	78	13	78,25	9,5
78,5	7	78,75	5	79	3,5	79,25	3
79,5	3	79,75	3	80	2	80,25	1,5
80,5	1,5	80,75	1	81	1	81,25	0,5
81,5	0	81,75	0	82	0,5	82,25	1
82,5	1	82,75	1	83	0,5	83,25	0

Elemente der Tafel III nach Reduktion in vier Lagen.

$\mathfrak{G} = 1$ Zoll; $i = 1$; $m = 2047$; $A_1 = 71,77$.

$E_{\prime}$	59,5	59,75	60	60,25	Mittel
A_2	71,76	71,75	71,75	71,76	71,755
C_2	71,79	71,80	71,81	71,80	71,80
D_p	71,91	71,96	71,99	71,97	71,96
D_i	71,74	71,92	72,04	71,97	71,92
n	+ 21	+ 33	+ 39	+ 28	+ 30
u	— 76	— 104	— 120	— 106	—101,5
η	2,05	—	2,04	—	2,045
$e_{\prime}$	2,12	2,14	2,16	2,15	2,14
e'	1,97	1,93	1,92	1,94	1,94
p	0,80	0,76	0,75	0,81	0,78

Man sieht, dass sich die Resultate der vorigen Tabelle I durch die der Tabelle III bestens bestätigen. Auch hier zeigt sich D_i überall mit D_p fast genau stimmend, mit Ausnahme der Lage $E_{\prime} = 59,5$, wo ganz exceptionell D_i nicht nur verhältnismäßig stark von D_p abweicht, sondern auch entgegen der Richtung der wesentlichen Asymmetrie kleiner als A_2 und C_2 ist.

§ 66. [Da für Tafel IV das durch ihre Unregelmäßigkeiten bedingte reduzierte $i = 4\,\mathfrak{G}$, das primäre i aber $= 0,1\,\mathfrak{G}$ ist, so sind hier im Grunde 40 Reduktionslagen möglich. Von denselben sollen die folgenden vier Lagen ausgewählt werden:

Tafel IV in vier Reduktionslagen

mit $i = 4\vartheta$; $\vartheta = 0{,}5$ cm; $m = 217$.

a	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*
41	1	42	1	43	1	44	1
45	0	46	0	47	0	48	1
49	1	50	1	51	2	52	1
53	1	54	2	55	1	56	2
57	3,5	58	3	59	3	60	4
61	5	62	5	63	7	64	6
65	3,5	66	6	67	7	68	8
69	9	70	8	71	9	72	9
73	11	74	15	75	17,5	76	21,5
77	23,5	78	20	79	18,5	80	15,5
81	19	82	25	83	21	84	24
85	23	86	25	87	**30**	88	**33,5**
89	**35,5**	90	**32**	91	**30**	92	27,5
93	22	94	19,5	95	22,5	96	23,5
97	24	98	24,5	99	22	100	18,5
101	18	102	15,5	103	13,5	104	13,5
105	12	106	10	107	8	108	4
109	2	110	3	111	4	112	3,5
113	3	114	1,5	115	0	116	0

Elemente der Tafel IV nach Reduktion in vier Lagen.

$\vartheta = 0{,}5$ cm; $i = 4$; $m = 217$; $A_1 = 86{,}54$.

$E_{,}$	41	42	43	44	Mittel
A_2	86,50	86,48	86,59	86,52	86,52
C_2	87,90	87,60	87,87	87,85	87,805
D_p	90,19	90,25	91,31	90,58	90,58
D_i	88,92	89,44	89,00	88,45	88,95
u	− 41	− 41	− 52	− 45	− 45
$e_{,}$	11,70	11,86	12,28	11,82	11,915
e'	8,01	8,09	7,56	7,76	7,855
p	0,62	0,70	0,73	0,67	0,68

Auch diese Tabelle zeigt bei stärkerem Auseinanderweichen der Hauptwerte als in I und III die relative Konstanz der Hauptwerte und Abweichungsfunktionen in den verschiedenen Lagen, die Gesetzmäßigkeit in der Aufeinanderfolge von A, C und D, sowie die Nähe von D_i und D_p. Indessen ist p durchweg kleiner als der theoretisch geforderte Wert 0,785.]

§ 67. Es entsteht nun die Frage, an welche der verschiedenen Reduktionslagen man sich bei Ableitung der Elemente oder Prüfung der aufgestellten Gesetze zu halten habe, worüber sich wieder ganz allgemeine, feste Regeln nicht geben lassen dürften, wohl aber folgendes allgemein zu sagen sein wird.

Zunächst lässt sich an dem Aussehen unserer Tafeln selbst zeigen, dass bei so großen m, als unseren Tafeln unterliegen, die Änderungen der Elemente je nach der Reduktionslage nur unerheblich und im allgemeinen von der Ordnung der Unsicherheit sind, die an der Bestimmung der Elemente überhaupt zulässig ist, so dass es mit Rücksicht hierauf ziemlich gleichgültig erscheint, an welche Reduktionslage man sich halten wird, und nur die Regel zu beobachten hat, alle Elemente, die in Untersuchung genommen werden sollen, aus derselben Reduktionslage zu bestimmen. Mitunter aber kommt es vor, dass unter verschiedenen Reduktionslagen die eine oder andere einen Nachteil gegen die übrigen in betreff des regelmäßigen Ganges der z zeigt, wie denn z. B. unter unseren fünf Tafeln I (§ 64) die letzte mit $E_1 = 370$ eine Abweichung von der Regelmäßigkeit giebt, sofern sie die Folge der reduzierten z: 55, 50, 73 erhält, statt dass die z bis zum Maximum 73 ununterbrochen steigen sollten. Alle übrigen vier Tafeln zeigen dagegen nichts der Art und sind daher jener vorzuziehen. Dies macht nun darauf aufmerksam, dass man, wenn man zufällig einen Kern mit unregelmäßigem Gange getroffen hat, nachsehen kann, ob man nicht mit einer anderen Lage besser fahre. Überhaupt wird beim Vergleiche verschiedener Reduktionslagen diejenige zu wählen sein, welche die geringste Abweichung von den allgemeinen Verteilungsgesetzen zeigt. Jeder Wahl könnte man sich übrigens dadurch entschlagen, dass man die möglichen Reduktionslagen sämtlich in Rechnung bringt und das Mittel aus den Resultaten zieht, nur dass dies mühsam durchzuführen ist und wenig lohnende Umständlichkeiten mit sich führen würde.

Werfen wir jetzt einen vergleichenden Blick auf den Wert primärer und daraus abgeleiteter reduzierter Tafeln, so ergiebt sich, dass für vollständige Behandlung eines K.-G. beide sich vielmehr zu ergänzen als zu ersetzen haben, wonach nur zu bedauern ist, dass der große Raum, den primäre Tafeln im allgemeinen einnehmen, meist nötigt, auf ihre Mitteilung zu verzichten und sich bei reduzierten zu begnügen. Jedenfalls hat man in der primären Tafel die direkte erfahrungsmäßige Unterlage für die ganze Behandlung eines gegebenen K.-G., und da die Reduktion nach der Größe des i, der Lage der Intervalle, nach ganzen und halbierten z so oder so vorgenommen werden kann, bleibt jedem bei Vorliegen der primären Tafel noch freigestellt, welche Wahl er treffen will, und behält er die Möglichkeit, eine schon getroffene Wahl danach noch abzuändern und zu kontrollieren. Auch kann der arithmetische Mittelwert durch keine reduzierte Tafel ebenso sicher erhalten werden als aus der primären, mag auch der Unterschied bei vielzahligen Gegenständen zu vernachlässigen sein. Hiergegen kann man bei Verfolgung des gesetzlichen Ganges der Werte eines K.-G. eine allgemeine Reduktion der Tafel und bei Bestimmung der Elemente, welche an lokalen Unregelmäßigkeiten in besonderer Weise beteiligt werden, eine lokale Reduktion überhaupt nicht entbehren, und die Reduktion der Tafel wird jedenfalls den Vorteil haben, eine Regelmäßigkeit zum Vorscheine zu bringen, die in der primären Tafel nicht sichtbar ist.

IX. Bestimmung von Σa, $\Sigma a_{,}$, $\Sigma a'$, $m_{,}$, m', $\Sigma\Theta_{,}$, $\Sigma\Theta'$.

§ 68. Zur Erläuterung der Anwendung der folgends zu gebenden Regeln könnte jede der bisherigen Verteilungstafeln dienen. Es vereinfacht und hiermit erleichtert sich aber die Anwendung der Regeln mit der Kürze der Tafeln, und so lasse ich zunächst eine kleine, nur nach dem allgemeinen Schema einer Kollektivverteilungstafel, übrigens willkürlich, aus bloß acht a der a-Spalte konstruierte Tafel folgen, an welche sich die folgenden Erläuterungen knüpfen mögen, die, richtig gefasst, dann auch auf jede wirkliche Kollektivverteilungstafel Anwendung finden können. Die Spalten $S_{,}$, S' sind Hilfsspalten, welche sofort ihre Erläuterung erhalten werden.

Kleine, willkürlich aufgestellte Verteilungstafel.

$i = 2$; $m = 80$; $\Sigma a = 912$.

a	Intervalle	z	$z.a$	$S_{,}$	S'
3	2— 4	1	3	1	80
5	4— 6	2	10	3	79
7	6— 8	5	35	8	77
9	8—10	10	90	18	72
11	10—12	30	330	48	62
13	12—14	20	260	68	32
15	14—16	10	150	78	12
17	16—18	2	34	80	2
Summe		80	912	304	416

In voriger Tafel ist die Bedeutung der Werte in den Spalten a, Interv., z, $z.a$ nach den früheren Erklärungen bekannt, die der Werte

$S_,$, S' aber erläutert sich so: Das erste $S_,$ ist gleich dem ersten z, das zweite $S_,$ gleich dem ersten + zweiten z, das dritte gleich dem ersten + zweiten + dritten z u. s. f., so dass das letzte gleich der Summe aller z und hiermit $= m$ wird. Hiernach wird jedes, einem gegebenen a zugehörige $S_,$ durch Summierung des zum vorangehenden a gehörigen $S_,$ mit dem z des betreffenden a erhalten.

In der Spalte der S' ist dasselbe Verfahren, aber mit Summierung von unten in entgegengesetzter Richtung angewandt.

§ 69. Nun ist, abgesehen von der Totalsumme Σa und der Totalzahl $m_,$, eine rohe und eine scharfe Bestimmung der betreffenden Werte in dem schon früher angegebenen Sinne zu unterscheiden; eine rohe, sofern man so rechnet, als wenn die Zahl z, die auf jedes a einer primären oder reduzierten Tafel geschrieben ist, demselben ganz angehöre; eine scharfe, sofern darauf Rücksicht genommen wird, dass sie eigentlich in dem Umkreisintervall jedes a verteilt zu denken ist, wonach der Wert der zu bestimmenden Elemente in dem Intervall, worin die Bestimmung derselben eingreift, kurz dem Eingriffsintervall, interpolationsmäßig zu bestimmen ist, wie im Folgenden gezeigt wird. Bisher ist man hierauf nicht eingegangen; im Folgenden wird darauf einzugehen sein und der Vorteil davon bewiesen werden.

Das bei scharfer Bestimmung zu interpolierende Intervall, sog. Eingriffsintervall, werde ich seiner Lage und Größe nach allgemein mit I bezeichnen. In unserer Beispielstabelle ist es, übereinstimmend mit dem durch die Tabelle durchgehenden i seiner Größe nach $= 2$, indes seine Lage nach Beschaffenheit der Aufgabe wechseln kann. Allgemein sei seine, aus der Spalte der Intervalle sich ergebende erste Grenze mit g_1, seine zweite mit g_2 bezeichnet; also, wenn 10—12 das Eingriffsintervall ist, $g_1 = 10$, $g_2 = 12$.

Sei ferner allgemein:

z_0 der Wert z, welcher auf das Eingriffsintervall I fällt,

a_0 der in der Spalte der a dem betreffenden I zugehörige Wert von a, welcher die Mitte von I ist,

$z_0.a_0$ das demgemäße Maßprodukt, welches auf I fällt,

v die sog. Vorzahl, d. i. die Summe der z und $\mathfrak{V}$ die Summe der

$z.a$, welche vom Anfange der Tabelle herein bis zum Anfange von I reicht,

n die sog. Nachzahl und $\mathfrak{N}$ Nachsumme, welche vom Schlusse des I bis zum Schlusse der Tabelle reicht,

$x = H - g_1$, Eingriffsmaß, der Wert, um welchen der in I fallende Hauptwert H den Anfang von I, d. i. g_1, überreicht,

$y = m_{,} - v$, Eingriffszahl, die Zahl, um welche die vom Anfange herein bis H reichende Zahl die bis zum Anfange von I reichende überreicht,

Y Eingriffssumme, die Summe der a, welche vom Anfange des I bis zu H reicht.

Allgemein hat man:

$$v + n + z_0 = m,$$
$$\mathfrak{V} + \mathfrak{N} + z_0 a_0 = \Sigma a = \Sigma z a.$$

Sofern nun für die folgende Erläuterung das Intervall 10—12 unser I vorstellen wird, haben wir:

$$\begin{array}{lll} m = 80; & \Sigma a = \Sigma z a = 912; & \\ g_1 = 10; & g_2 = 12; & \\ z_0 = 30; & a_0 = 11; & z_0 a_0 = 330; \\ v = 18; & \mathfrak{V} = 138; & \\ n = 32; & \mathfrak{N} = 444; & \\ \multicolumn{3}{l}{x = H - 10;\ y = m_{,} - 18.} \end{array}$$

Als H kann jeder beliebige Wert auftreten, doch werden wir die Erläuterung vorzugsweise an den arithmetischen Mittelwerth der Tafel als H knüpfen, welcher sich durch Division von $\Sigma z a = 912$ mit $\Sigma z = 80$ gleich 11,4 findet, und mithin $x = 1{,}4$ giebt; doch soll auch der Centralwert als H dienen.

§ 70. Bestimmung einer Wertsumme Σa.

Diese Bestimmung geschieht direkt durch Summierung der $z a$, so dass Σa mit $\Sigma z a$ gleichbedeutend gebraucht wird.

Bei so kleinen Tafeln als unserer Beispielstafel macht nun die Bildung und Summierung der $z a$ keine Schwierigkeit; aber wenn eine Tafel weit ausläuft, die a der a-Spalte und hiermit zu bildenden Maßprodukte za sehr zahlreich sind, was namentlich die primären Tafeln trifft, wird diese Bildung und Summierung außerordentlich umständlich und unterliegt leicht Rechenversehen. Man versuche es nur mit irgend einer unserer primären Tafeln; und selbst bei den reduzierten Tafeln macht sich dieselbe Beschwerlichkeit, wenn auch in vermindertem Grade, noch geltend. Demnach ist sehr erwünscht, dass eine auf primäre wie reduzierte Tafeln jeder Stufe und Lage gleich anwendbare Methode zu Gebote steht, Σa (und hiernach A) mit ganz demselben Werte, aber in weit bequemerer Weise als nach dem vorigen Verfahren zu finden, welches ich das der za nennen will, indes ich das folgends auseinanderzusetzende das der S nenne. Es gehört nur dazu, was für das Verfahren der za nicht wesentlich ist, dass die Tafeln, auf welche das Verfahren der S Anwendung finden soll, äquidistant oder durch Einschaltung leerer a äquidistant gemacht sind, wonach man sich darauf beschränken kann, die unbequeme Methode der za auf die Fälle zu beschränken, wo die Aquidistanz doch nicht hergestellt ist.

Man kann sich nun beliebig der $S_{,}$ oder S' zur Bestimmung der Summe Σa bedienen. Erstenfalls geschieht die Bestimmung nach folgender Formel:

$$\Sigma a = mE' - Z_{,} i; \tag{1}$$

zweitenfalls nach der Formel:

$$\Sigma a = mE_{,} + Z' i. \tag{2}$$

Darin haben die Buchstaben folgende Bedeutung. Unter m wird die gesamte Zahl der a verstanden, deren Summe zu nehmen ist, d. i. Σz, unter E' das größte a oder obere Extrem (was freilich in der Tabelle unten steht), unter $E_{,}$ das kleinste a oder untere Extrem unter diesen a, welche Werte, wann etwa die zu summierenden a bloß ein Stück einer ganzen Verteilungstafel ausmachen sollten, nur auf das Stück, nicht auf die ganze Tafel zu beziehen sind. Ferner sei $Z_{,}$ die Totalsumme der $S_{,}$, welche den zu summierenden a zugehören, weniger dem $S_{,}$, das zu E' gehört, oder, was dasselbe sagt, die Totalsumme der $S_{,}$ exklusive des extremen $S_{,}$; ferner Z' die

Totalsumme der S' exklusive dessen, was zu $E_{,}$ gehört; i die konstante Differenz, um welche die a der a-Spalte auseinanderweichen.

Sei nun das Σa der ganzen Beispielstafel zu nehmen, so ist das $m = \Sigma z$ derselben 80; $E' = 17$; $E_{,} = 3$; $Z_{,} = 304 - 80 = 224$; $Z' = 416 - 80 = 336$; $i = 2$. Mag man nun die erste oder zweite Formel anwenden, so wird man nach diesen Werthen $\Sigma a = 912$, übereinstimmend mit der direkt bestimmten Summe der za finden, welche unter der Spalte der za steht.

Ganz auf dieselbe Weise lässt sich die Summe Σa für jedes Stück der Beispielstafel finden, nur dass die Werte m, E', $E_{,}$, $S_{,}$, S' sich demgemäß abzuändern haben, wie denn, wenn die Summierung bloß für die vier a der a-Spalte von 5 bis 11 zu geschehen hätte, man hätte: $m = \Sigma z = 47$, $E' = 11$, $E_{,} = 5$, $i = 2$. Die Spalten der $S_{,}$, S' aber wären so zu bilden:

	$S_{,}$	S'
	2	47
	7	45
	17	40
	47	30
Summe:	73	162

mithin $$Z_{,} = 73 - 47 = 26;\ Z' = 162 - 47 = 115,$$

was giebt: $$\Sigma a = 465.$$

Bei sehr langen Reihen kann man es unbequem finden, im Fortschritte zu sehr großen Werten von S aufsteigen zu müssen; welchem sich aber leicht abhelfen lässt, indem man die ganze Reihe in zwei oder mehr Abteilungen teilt, und deren Σa auf vorigem Wege besonders sucht, um schließlich dieselben zu vereinigen. Als noch praktischer aber empfiehlt sich die vereinigte Anwendung der Spalte $S_{,}$ und S' in folgender Weise.

Man sondere irgendwo, am praktischsten ungefähr um die Mitte der Tafel, einen Wert a aus, welcher c heiße, führe die Spalte der $S_{,}$ bis zu diesem c, exkl. desselben, und ebenso die Spalte der S' exkl. c fort, summiere die so erhaltenen $S_{,}$ wie S' besonders; erstere Summe heiße wie früher $Z_{,}$, die zweite Z', dann hat man:

$$\Sigma a = mc + (Z' - Z_{,})i, \tag{3}$$

woraus:

$$A = c + \frac{Z' - Z_{,}}{m} i, \tag{4}$$

wobei m die Totalzahl aller zu summierenden a ist.

§ 71. Ich habe das S-Verfahren in einer amerikanischen Abhandlung über Rekrutenmaße (von ELLIOTT)[1]) angeführt gefunden ohne Angabe, wie der Verf. dazu gekommen ist, und ohne Beweis seiner Allgemeingültigkeit. Nun lässt sich dieser Beweis wohl führen, ist aber, obwohl elementar[2]), doch ziemlich umständlich und mühsam zu verfolgen; ich übergehe ihn daher, da das Verfahren jede empirische Probe besteht, füge aber demselben zur Sicherung seiner Anwendung noch folgende Bemerkungen hinzu.

1. Natürlich hängt die Richtigkeit der Bestimmung von Σa und folgeweis von A von der Richtigkeit der S-Columnen ab. Ist ein S in der Reihenfolge falsch, so werden alle folgenden ebenfalls falsch, weil jedes frühere S in alle späteren eingeht, und bei Aufsteigen zu hohen Werten von S kann leicht ein Versehen vorkommen. Man hat aber ein leichtes und nie zu versäumendes Mittel der Kontrolle darin, dass bei Anwendung einer S-Spalte das extreme S, was in Z nicht eingeht, mit m übereinstimmen muss; bei dem kombinierten Verfahren von $S_{,}$ und S' aber die letzten, in Z nicht mit eingehenden Werte von $S_{,}$ und S', zu denen man gelangt, mit dem z-Werte von c die Totalzahl m geben müssen.

2. Das S-Verfahren ist zwar gleich anwendbar auf Tafeln mit und ohne eingeschaltete leere a, und die Bildung der S-Spalte

---

1) [E. B. ELLIOTT, On the military statistics of the United States of America. Berlin 1863. (International statistical congress at Berlin). S. Note on the construction of certain tables, p. 40.]

2) [In der That ist bloß nötig, Σza ausführlicher durch $z_1 a_1 + z_2 a_2 + z_3 a_3 + \ldots z_n a_n$ darzustellen und die äquidistanten $a_2, a_3, \ldots a_n$ durch $a_1 + i$, $a_1 + 2i$, $\ldots a_1 + \overline{n-1}\, i$ zu ersetzen, um durch geeignetes Zusammenziehen der Glieder die transformierte Summe in der Form: $a_1 (z_1 + z_2 + \ldots z_n) + i (z_2 + z_3 + \ldots z_n) + i (z_3 + \ldots z_n) + \ldots i z_n$ und damit die Summenformel: $E_{,} m + Z' i$ zu erhalten. In ähnlicher Weise erhält man $E' m - Z_{,} i$, wenn man $a_1, a_2, a_3 \ldots a_{n-1}$ resp. durch $a_n - \overline{n-1}\, i$, $a_n - \overline{n-2}\, i$, $a_n - \overline{n-3}\, i \ldots a_n - i$ ersetzt.]

geschieht beidesfalls nach derselben Regel; aber es wird doch nützlich sein, die Anwendung der Regel für den Fall vorkommender leerer a mit $z = 0$ noch besonders zu erläutern, um etwaigen Missverständnissen und hieraus folgenden Versehen zum voraus zu begegnen. Nach der angegebenen Regel wird jedes zu einem gegebenen a der a-Spalte gehörige S als Summe des zum vorangehenden a gehörigen S mit dem z des betreffenden a erhalten. Ist nun letzteres a ein leeres mit $z = 0$, so ist selbstverständlich nach voriger Regel sein S eine bloße Wiederholung des vorhergehenden S, und so viele leere a hinter einander folgen, so oft wiederholt sich das S des ihnen vorangehenden geltenden a. Unsere beiden Beispielstafeln (in § 68 und § 70) geben zur Erläuterung hiervon keinen Anlass, da sie, wie die meisten reduzierten Tafeln, keine leeren a enthalten; desto mehr Gelegenheit bieten dazu die primären Tafeln, insbesondere in ihren Endabteilungen. Zur kurzen Erläuterung aber stellen wir auch hier eine kleine Tafel mit einigen leeren a willkürlich auf und klammern dabei die den leeren a zugehörigen, wiederholten S zur leichteren Unterscheidung von den anderen ein, ohne dass sie aber bei Bildung von ΣS und mithin Z von der Summierung ausgeschlossen werden dürfen, da sie vielmehr dabei ganz wie die anderen mitzählen:

a	z	$S_{,}$	S'
3	2	2	50
5	0	(2)	(48)
7	0	(2)	(48)
9	10	12	48
11	30	42	38
13	5	47	8
15	0	(47)	(3)
17	3	50	3
Summe	50	204	246

Wenn, wie häufig, in den Endabteilungen primärer Tafeln eine größere Anzahl leerer a und mithin wiederholter eingeklammerter S hinter einander folgen, wird man es am einfachsten finden, diese gleich in Summa einzuklammern, nur dass man sich zu hüten hat, das darauf folgende S dann nicht als Summe dieser Summe von S mit dem neuen z, sondern als Summe des der Einschaltung vorhergehenden, nackten S mit dem neuen z zu bestimmen. So wird die Reihe der $S_{,}$ voriger Tafel folgende Gestalt annehmen:

2, (4), 12, 42, u. s. w.,

also das zu $a = 9$ mit $z = 10$ gehörige $S_{,} = 12$ nicht durch Zufügung von 10 zum vorangehenden summierten (4), sondern zu dem der Einschaltung vorangehenden nackten 2 zu bilden sein; eine Regel, die wohl zu beachten ist. Wenden wir nun dies auf den Eingang unserer primären Tafel I (Kap. VII) an, so wird sich nach erforderlicher (in Gedanken ausführbarer) Einschaltung der leeren a, deren zwei zwischen 368 und 371, vier zwischen 371 und 376, eins zwischen 376 und 378 fallen, die Reihe der $S_{,}$ so gestalten:

1, (2), 3; (12); 4, (4), 5, 6 u. s. w.

In der primären Tafel III, wo $i = 0{,}25$ Zoll ist, fallen zwischen die zwei ersten geltenden a, d. i. 60 und 64 ganze Zoll respektiv mit $z = 1$ und 2, gar 15 leere a, weiter zwischen 64 und 64,75 zwei, und gestaltet sich der Anfang der $S_{,}$-Reihe so:

1, (15), 3, (6), 7 u. s. f.

Es ist wichtig, sich mit dieser Verwendung der leeren a wohl vertraut zu machen und die richtige Vornahme derselben in jedem Falle wirklichen Gebrauchs durch sorgfältige Revision zu kontrollieren, weil man sich nur zu leicht darin versieht, und weil die obige Kontrolle der richtigen Bildung der S-Kolumnen, dass ihr letzter Wert mit m übereinstimme, auch bei Einschaltung der leeren a noch zutreffen muss, also nicht zu vernachlässigen ist, aber auch, wenn sie zutrifft, nicht gegen eine falsche Verwendung der leeren a sicherstellt.

§ 72. Bestimmung der unteren und oberen Summen, resp. $\Sigma a_{,}$ und $\Sigma a'$, bezüglich eines gegebenen Hauptwertes H.

Sei beispielsweise A der Hauptwert, in unserer Beispielstabelle 11,4, so hat man nach roher Bestimmung alle a, welche kleiner als

11,4 sind, also von $a = 3$ bis inkl. $a = 11$ zu summieren, d. h. die entsprechenden za zu summieren, um $\Sigma a_{,}$ zu haben; indes man $\Sigma a'$ durch Summierung der za von $a = 13$ bis zum Schluss erhält, d. i. $\Sigma a_{,} = 468$, $\Sigma a' = 444$. Außer durch direkte Summierung der betreffenden za kann man diese Summen in angegebener Weise nach dem S-Verfahren erhalten.

Zur scharfen Bestimmung hat man die Summe $\Sigma a_{,}$ aus zwei Teilen zusammengesetzt zu denken, der Vorsumme $\mathfrak{V}$, welche vom Anfange der Tabelle herein bis zum Anfange des Eingriffsintervalles I reicht, und der Eingriffssumme Y, welche von da bis zu H, unseren Falles bis A, reicht und durch einfache Interpolation erhalten wird, indem man setzt, dass sich die Eingriffssumme Y zur Totalsumme des Intervalles I, d. i. zu $z_0 a_0$, verhält wie das Eingriffsmaß x zum totalen Intervall I; mithin:

$$Y : z_0 a_0 = x : I, \tag{5}$$

also:

$$Y = \frac{x}{I} z_0 a_0 ; \tag{6}$$

hiernach:

$$\Sigma a_{,} = \mathfrak{V} + \frac{x}{I} z_0 a_0 . \tag{7}$$

In unserer Beispielstabelle ist $\mathfrak{V} = 138$, $z_0 a_0 = 330$, $x = 1{,}4$, $I = 2$; mithin:

$$\Sigma a_{,} = 369 ; \; \Sigma a' = \Sigma a - \Sigma a_{,} = 912 - 369 = 543 ,$$

was von den rohen Bestimmungen sehr abweicht.

Sollte statt A irgend ein anderer Hauptwert H eintreten, so würden die vorigen Formeln dieselben bleiben, nur dass x statt $= A - g_1$, vielmehr $= H - g_1$, zu nehmen wäre. Sei z. B. das scharf bestimmte C als H genommen. Nach § 82 findet es sich für unsere Tabelle, mit Abrundung in der letzten Dezimale, wenig, doch etwas abweichend von A, gleich 11,467, mithin $x = 1{,}467$; giebt:

$$\begin{aligned} \Sigma a_{,} &= 138 + \frac{1{,}467}{2} \cdot 330 = 380 + 0{,}055 \\ \Sigma a' &= 912 - \Sigma a_{,} \qquad\quad = 532 - 0{,}055 , \end{aligned}$$

wo die kleinen Zusätze zu 380 und 532 wegfallen müssen, weil sie bloß von Abrundung des C in der letzten Dezimale abhängen.

[Wollte man nun, um eine noch genauere Bestimmung der Eingriffssumme Y zu erhalten, an Stelle der einfachen Interpolation eine schärfere, durch Zuziehen zweiter Differenzen, treten lassen, so wäre dies nicht zulässig. Denn die hierbei als erste Differenzen zu Grunde zu legenden Produkte az stellen die Summe der auf ein Intervall i fallenden Werte a nur unter der Voraussetzung dar, dass diese Werte sich gleichmäßig auf das ganze Intervall verteilen. Es ist somit durch diese Vorstellungsweise die Abhängigkeit der Eingriffssumme Y von dem Eingriffsmaße x bereits geregelt und insbesondere einer Beeinflussung durch die dem interpolierten Intervalle vorangehenden oder folgenden Produktwerte az, wie sie bei der Zuziehung zweiter oder noch höherer Differenzen vorausgesetzt werden müsste, entzogen. Will man daher aus dem nämlichen Gesichtspunkte, dem die Summierung aller auf ein ganzes Intervall fallenden a unterliegt, die Eingriffssumme Y mit größtmöglicher Schärfe bestimmen, so muss man die an der Bildung der Eingriffssumme beteiligten Werte a, deren Anzahl die Eingriffszahl y ist und im folgenden Paragraph gleich $z_0 x : I$ gefunden wird, in der Mitte des als Eingriffsmaß x bezeichneten Teilintervalles, d. i. in $g_1 + \frac{1}{2}x$, vereinigt denken und somit

$$Y = \frac{x}{I} z_0 \left(g_1 + \frac{x}{2}\right) \tag{8}$$

statt, wie oben, gleich $z_0 a_0 x : I$ setzen. Die Summe der $a_{,}$ findet man alsdann gleich:

$$\Sigma' a_{,} = \mathfrak{Y} + \frac{x}{I} z_0 \left(g_1 + \frac{x}{2}\right), \tag{9}$$

wo der dem Summenzeichen beigefügte Index zur Unterscheidung von der Formel (7) dienen mag. Bei proportionaler Bestimmung von Y wird demnach $\Sigma a_{,}$ um den Betrag

$$\frac{x(I - x)}{2I} \cdot z_0$$

zu groß in Rechnung gezogen, so dass die genauere Bestimmungsweise (8) im allgemeinen einen in Betracht kommenden Vorteil gewähren wird. In der That erhält man für das $A = 11{,}4$ unserer Beispielstabelle $\Sigma' a_{,} = 362{,}7$ gegenüber $\Sigma a_{,} = 369$.]

[Genügt aber die so erreichbare Genauigkeit nicht, so ist nicht nur Y, sondern auch $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{N}$ auf Grund der Vorstellung zu bestimmen, dass an Stelle der gleichmäßigen Verteilung der a innerhalb der einzelnen Intervalle eine, durch Berücksichtigung der benachbarten Intervalle bedingte, kontinuierlich sich verändernde tritt. So erreicht man den nächst höheren Grad von Genauigkeit, wenn man die Zuziehung der Nachbarintervalle auf eines der beiden direkt angrenzenden Intervalle, z. B. auf das, beim Fortschreiten von den kleineren zu den größeren a unmittelbar folgende Intervall beschränkt. Dann sind die bisherigen Bestimmungen durch folgende zu ersetzen.]

[Bezeichnet z_1 die Anzahl der Werte, die auf das dem Eingriffsintervalle folgende Intervall fallen, und fügt man, um die Werte des ersten, dem Extreme $E_{,}$ zugehörenden, und die Werte des letzten, das Extrem E' einschließenden Intervalles nicht in Rechnung ziehen zu müssen, am Anfange und Ende der Tafel ein leeres Intervall mit $z = 0$ hinzu, so bestimmt sich die Summe der a des ganzen Eingriffsintervalles gleich $a_0 z_0 - \frac{1}{12} I(z_0 - z_1)$, die Vorsumme gleich $\mathfrak{V} + \frac{1}{12} I z_0$, die Nachsumme gleich $\mathfrak{N} - \frac{1}{12} I z_1$, wo $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{N}$ wie oben zu berechnen sind, und die Gesamtsumme der a ist somit gleich dem wie oben berechneten Σa. Zur Berechnung der Eingriffssumme ferner dient die Formel:

$$Y = \frac{x}{I}\left(z_0 + \frac{(z_0 - z_1)(I - x)}{2I}\right)\left(g_{,} + \frac{x}{2}\right) - \frac{z_0 - z_1}{12 I^2} x^3, \qquad (10)$$

aus welcher schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma a_{,} = \mathfrak{V} + \tfrac{1}{12} I z_0 + \frac{x}{I}\left(z_0 + \frac{(z_0 - z_1)(I - x)}{2I}\right)\left(g_{,} + \frac{x}{2}\right) \\ - \frac{z_0 - z_1}{12 I^2} x^3 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

folgt.]

§ 73. Bestimmung der Abweichungszahlen $m_{,}$, m'.

Nach roher Bestimmung findet sich $m_{,}$ leicht durch Zusammenzählen der Werte z, welche zu den Werten a gehören, die kleiner als H sind; und nehmen wir in unserer Beispielstabelle $A = 11{,}4$ für H, so giebt dies $\mu_{,} = 48$ und $\mu' = m - \mu_{,} = 80 - 48 = 32$.

Gilt es die scharfe Bestimmung, so setzt sich $m_{,}$ zusammen aus der Vorzahl v, welche bis zum Anfange von I reicht, und der Eingriffszahl y, welche von da bis H reicht. Diese aber wird nach Kenntnis von $x = H - g_1$ durch Interpolation nach Ansatz der Proportion erhalten:

$$y : z_0 = x : I, \tag{12}$$

mithin:

$$y = \frac{x}{I} z_0 \tag{13}$$

und hiernach:

$$m_{,} = v + \frac{x}{I} z_0. \tag{14}$$

Nehmen wir für H den Wert $A = 11{,}4$ und hiernach die obigen Werte $v = 18$; $x = 1{,}4$; $z_0 = 30$; $I = 2$, so erhalten wir $\mu_{,} = 39$ $\mu' = 80 - 39 = 41$, eine Bestimmung, die wiederum von der rohen sehr abweicht, ja das Übergewicht auf die entgegengesetzte Seite fallen lässt.

Soll m' nicht durch Abzug des $m_{,}$ von m, sondern direkt bestimmt werden, was zur Kontrolle nützlich sein kann, so hat man scharf allgemein:

$$m' = n + \frac{I - x}{I} z_0, \tag{15}$$

was bei Setzung von $H = A$ vermöge $n = 32$ zu

$$\mu' = 32 + \frac{2 - 1{,}4}{2} \cdot 30 = 41$$

zurückführt.

Sei statt A vielmehr C als H genommen. Nach scharfer Bestimmung im X. Kap. findet es sich für unsere Beispielstabelle wenig, doch etwas abweichend von A, gleich $11{,}467$, mithin $x = 1{,}467$ indes die übrigen Werte dieselben als für A bleiben. Dies giebt:

$$m_{,} = 18 + \frac{1,467}{2} \cdot 30 = 40 + 0,005$$

$$m' = 32 + \frac{0,533}{2} \cdot 30 = 40 - 0,005\,.$$

Beide Werte sind, wie es dem Begriffe des Zentralwertes entspricht, einander gleich, gleich $\frac{1}{2} m = 40$, indem der kleine positive und negative Zusatz dazu wieder nur von Abrundung des C in Dezimalen abhängt.

[Diese Bestimmung der Eingriffszahl y durch einfache Interpolation hat als exakt zu gelten, so lange die Verteilung der a innerhalb der einzelnen Intervalle als gleichförmig angenommen werden darf. Ist dies jedoch nicht der Fall, so kann durch scharfe Interpolation, unter Benutzung zweiter und höherer Differenzen jeder beliebige Grad von Genauigkeit erreicht werden. Denn das intervallweise Zusammenfassen der Anzahlen der a zu den z-Werten, die der Interpolation als erste Differenzen zu Grunde zu legen sind, ist nicht wie das entsprechende Zusammenfassen der Summen der a zu den za-Werten von einer bestimmten Voraussetzung über die Verteilung der a innerhalb der zugehörigen Intervalle abhängig. So erhält man denn bei Zuziehung zweiter Differenzen, d. h. bei Mitberücksichtigung des auf das Eingriffsintervall unmittelbar folgenden Intervalles, dessen z wie oben gleich z_1 gesetzt werde, die Formel:

$$y = \frac{x}{I} z_0 + \frac{x(I - x)}{2 I^2} (z_0 - z_1)\,. \tag{16}$$

Berücksichtigt man aber überdies auch noch das unmittelbar vorangehende Intervall, dessen z durch z_{-1} ausgedrückt werde, so dient zur Berechnung von y die Formel:

$$y = \frac{x}{I} z_0 - \frac{x(I - x)}{4 I^2} \left(z_1 - z_{-1} + \frac{I - 2x}{3 I} (2 z_0 - z_1 - z_{-1}) \right) \tag{17}$$

in welcher dritte Differenzen zugezogen sind. Dabei ist zu beachten, dass eine derartige Verschärfung in der Berechnung von y die entsprechende Verschärfung in der Berechnung von Y, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{M}$ bedingt. Insbesondere hat die Benutzung der Formel (16) das Inkrafttreten der Formeln (10) und (11) zur Folge.]

§ 74. Bestimmung der beiderseitigen Abweichungssummen $\Sigma\Theta'$, $\Sigma\Theta_,$ bez. eines gegebenen Hauptwertes H.

Direkt erhalten wir die positive Abweichungssumme $\Sigma\Theta'$ bez. eines beliebigen Ausgangswertes H, wenn wir die einzeln bestimmten Differenzen $\Theta' = a' - H$ summieren; die folgends immer nach absolutem Werte zu nehmende negative Abweichungssumme $\Sigma\Theta_,$, wenn wir die einzeln bestimmten Differenzen $\Theta_, = H - a_,$ summieren; aber die Einzelbestimmung der vielen Differenzen ist mühsam und unterliegt leicht einzelnen Rechenversehen; beidem begegnet man durch Bestimmung nach folgender Formel:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\Theta' &= \Sigma a' - m'H \\ \Sigma\Theta_, &= m_,H - \Sigma a_, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

In der That, die Summe der positiven Θ, d. i. $\Sigma\Theta'$, wird dadurch gewonnen, dass der Wert H von jedem der m' Werte a', d. i. der a, welche größer als H sind, also im ganzen m'-mal H von $\Sigma a'$ abgezogen wird[1]); was die erste obiger Gleichungen giebt. Andererseits wird die Summe der negativen Θ nach absolutem Werte erhalten, wenn die Summe der $m_,$ Werte $a_,$, d. i. der Werte a, welche kleiner als H sind, von $m_,$-mal H abgezogen wird, was die zweite der obigen Gleichungen giebt.

Diese Formeln gelten sowohl für rohe als scharfe Bestimmung, nur mit dem Unterschiede, dass für rohe Bestimmung $m_,$ und m', $\Sigma a_,$ und $\Sigma a'$ roh, für scharfe Bestimmung scharf bestimmt werden. Nehmen wir nun wieder A als Hauptwert für unsere Beispielstabelle, in welchem Falle sich μ für m, Δ für Θ substituiert, so können wir uns für rohe wie scharfe Bestimmung der schon vorhin bestimmten Werte bedienen, wonach roh $\mu_, = 48$; $\mu' = 32$; $\Sigma a_, = 468$; $\Sigma a' = 444$; giebt:

$$\text{roh}\begin{cases} \Sigma\Delta_, = 48 \cdot 11{,}4 - 468 = 79{,}2 \\ \Sigma\Delta' = 444 - 32 \cdot 11{,}4 = 79{,}2 \end{cases}$$

---

1) Nicht von $m'a$, was nur dann geschehen könnte, wenn alle a dieselbe Größe hätten.

Beide Summen sind gleich wie es dem Begriffe des arithmetischen Mittels entspricht. Nach scharfer Bestimmung hat man $\mu_, = 39$; $\mu' = 41$; $\Sigma a_, = 369$; $\Sigma a' = 543$; hiernach:

$$\text{scharf} \begin{cases} \Sigma \Delta_, = 39 \cdot 11{,}4 - 369 = 75{,}6 \\ \Sigma \Delta' = 543 - 41 \cdot 11{,}4 = 75{,}6 \end{cases}$$

Also wieder Gleichheit beider Summen, nur dass die scharf bestimmten Summen kleiner als die roh bestimmten sind. [Legt man jedoch an Stelle der proportionalen Berechnung von Y die oben angegebene genauere zu Grunde, setzt man also $\Sigma' a_, = 362{,}7$; $\Sigma' a' = 549{,}3$, so erhält man, wenn auch hier zur Unterscheidung von den obigen Abweichungssummen dem Summenzeichen ein Index beigefügt wird:

$$\text{scharf} \begin{cases} \Sigma' \Delta_, = 39 \cdot 11{,}4 - 362{,}7 = 81{,}9 \\ \Sigma' \Delta' = 549{,}3 - 41 \cdot 11{,}4 = 81{,}9, \end{cases}$$

mithin zwei einander gleiche Summen, die größer als die roh bestimmten sind.]

Dies Resultat ist bez. A als H genommen überhaupt allgemein, und zwar ist:

1) für den Fall, dass $A > a_0$, mithin $x > \frac{I}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{scharf } \Sigma \Delta_, = \text{roh } \Sigma \Delta_, - \frac{z_0}{I}(I - x)\left(x - \frac{I}{2}\right) = \text{roh } \Sigma \Delta_, - k \\ [\text{scharf } \Sigma' \Delta_, = \text{roh } \Sigma \Delta_, + \frac{z_0}{2I}(I - x)^2 = \text{roh } \Sigma \Delta_, + \varkappa] \end{array}\right\} \quad (19)$$

2) für den Fall, dass $A < a_0$, mithin $x < \frac{I}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{scharf } \Sigma \Delta_, = \text{roh } \Sigma \Delta_, - \frac{z_0}{I} x \left(\frac{I}{2} - x\right) = \text{roh } \Sigma \Delta_, - l \\ [\text{scharf } \Sigma' \Delta_, = \text{roh } \Sigma \Delta_, + \frac{z_0}{2I} x^2 = \text{roh } \Sigma \Delta_, + \lambda] \end{array}\right\} \quad (20)$$

Den etwas umständlichen und penibeln Beweis[1]) hiervon übergehe ich, man kann aber die Richtigkeit der Formel an beliebigen selbst

---

1) [Er folgt, zugleich mit der Erweiterung für jeden beliebigen Hauptwert H, bezüglich dessen die unteren und oberen Abweichungssummen $\Sigma \Theta_,$ resp. $\Sigma \Theta'$ bestehen, durch direkte Rechnung aus den Formeln:

gemachten Beispielen, z. B. an unserer Beispielstabelle bestätigen. Hier ist $A = 11{,}4$; $a_0 = 11$, mithin $A > a_0$, zugleich ist $I = 2$, $x = 1{,}4$, mithin $x > \frac{1}{2} I$. Also liegt der erste Fall vor. Nun hatten wir roh $\Sigma\Delta_, = 79{,}2$. Der hiervon abzuziehende Wert k, um zu $\Sigma\Delta_,$ scharf zu gelangen, aber berechnet sich nach obigem Ausdruck mit Rücksicht, dass $z_0 = 30$, zu $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 3{,}6$ und dies von $79{,}2$ abgezogen, giebt $75{,}6$ wie oben nach der Formel gefunden. [Der Wert $\varkappa$ ferner, der zu $\Sigma'\Delta_,$ scharf führt, findet sich nach obiger Bestimmung gleich $\frac{1}{4} \cdot 30 \cdot 0{,}6^2 = 2{,}7$ und dies zu $79{,}2$ addiert giebt $81{,}9$, wie es sein soll.]

Nur in dem Spezialfalle verschwindet der Unterschied zwischen $\Sigma\Delta_,$ roh und $\Sigma\Delta_,$ scharf, wo A mit einer der beiden Grenzen des I oder mit dessen Mitte zusammenfällt, wo $x = 0$ oder $= I$ oder $= \frac{1}{2} I$; wogegen nach einer Maximumgleichung der Unterschied der größtmögliche wird, wenn erstenfalls $x = \frac{3}{4} I$, zweitenfalls $= \frac{1}{4} I$, indem er beidesfalls den Wert $\frac{1}{16} \cdot z_0 I$ erhält. [Es verschwindet ferner der Unterschied zwischen $\Sigma\Delta_,$ roh und $\Sigma'\Delta_,$ scharf, falls A mit einer der beiden Grenzen des I zusammenfällt, wogegen dieser Unterschied seinen Maximalwert $\frac{1}{8} z_0 I$ erhält, wenn A in die Mitte von I fällt.] Also schwebt der ganze Unterschied k oder l zwischen 0 und $\frac{1}{16} z_0 I$ [der Unterschied $\varkappa$ oder λ zwischen 0 und $\frac{1}{8} z_0 I$]; überhaupt aber steht der Unterschied bei gleichem I und x in einfachem Verhältnisse zu z_0.

Man sieht nun, dass sich das scharfe $\Sigma\Delta_,$ [resp. $\Sigma'\Delta_,$] auch dadurch bestimmen lässt, dass man erst das einfacher zu findende rohe bestimmt, hiernach k oder l davon abzieht [resp. $\varkappa$ oder λ dazu addiert], je nachdem $A > a_0$ oder $A < a_0$.

Wenn H nicht gleich A, so hat man statt Gleichheit beider

$$\text{roh } \Sigma\Theta_, = (v + z_0) H - (\mathfrak{Q}' + a_0 z_0), \text{ wenn } H > a_0$$
$$= v H - \mathfrak{Q}', \text{ wenn } H < a_0;$$

$$\text{scharf } \Sigma\Theta_, = \left(v + \frac{x}{I} z_0\right) H - \left(\mathfrak{Q}' + \frac{x}{I} a_0 z_0\right)$$

$$\text{scharf } \Sigma'\Theta_, = \left(v + \frac{x}{I} z_0\right) H - \left(\mathfrak{Q}' + \frac{x}{I} z_0 \left(g_1 + \frac{x}{2}\right)\right),$$

denen analoge Formeln für die oberen Abweichungssummen zur Seite stehen.]

Summen vielmehr Ungleichheit zu erwarten. Nehmen wir z. B. C. Die Formen für Bestimmung desselben sind hier:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\Theta_{,} &= \frac{m}{2}C - \Sigma a_{,}\\ \Sigma\Theta' &= \Sigma a' - \frac{m}{2}C.\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Nach Kap. X. wird sich C für unsere Beispielstabelle nach scharfer Bestimmung $= 11{,}467$ ergeben, indes $\frac{1}{2}m = 40$ ist. Und bestimmen wir nun auch $\Sigma a_{,}$ und $\Sigma a'$ nach angegebener Regel scharf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Sigma\Theta_{,} &= 40 \cdot 11{,}467 - 380 &&= 78{,}7\\ \Sigma\Theta' &= 532 - 40 \cdot 11{,}467 &&= 73{,}3\end{aligned}$$

$$[\text{resp. } \begin{aligned}\Sigma'\Theta_{,} &= 40 \cdot 11{,}467 - 374{,}13 = 84{,}5\\ \Sigma'\Theta' &= 537{,}87 - 40 \cdot 11{,}467 = 79{,}2.]\end{aligned}$$

§ 75. Machen wir jetzt die Anwendung von vorigen Bestimmungsweisen an einem unserer K.-G. und untersuchen wir, in wie fern die scharfe Bestimmung Vorteile vor der rohen in betreff der Übereinstimmung der Elemente bei Ableitung aus verschiedenen Reduktionslagen gewährt, so zeigt sich, dass sie in betreff der Bestimmung von $\mu_{,}$ (woraus $\mu' = m - \mu_{,}$ folgt) höchst bedeutend, in betreff von $\Sigma\Delta_{,}$ (womit $\Sigma\Delta'$ gleich ist) aber fehlt oder zweifelhaft bleibt, [in betreff von $\Sigma'\Delta_{,}$ dagegen beachtenswert hervortritt].

Ich habe den ziemlich mühsamen Vergleich an den 5 Reduktionslagen der Verteilungstafel des Schädelvertikalumfanges vorgenommen, welche in § 64 ausgeführt sind, und deren scharf bestimmte Elemente ebendort verzeichnet sind.

Vergleich zwischen den roh und scharf bestimmten Werten von $\mu_{,}$ und $\Sigma\Delta_{,}$.

$E_{,}$	366	367	368	369	370	Mittel	Σ diff.
A	408,6	408,7	408,2	408,5	408,6	408,5	0,7
$\mu_{,}$ roh	217	230	250	193	201	218,2	87,2
$\mu_{,}$ scharf	218	220	220	219	217	218,8	5,2
$\Sigma\Delta_{,}$ roh	2531	2509	2471	2492	2531	2506,8	101,2
$\Sigma\Delta_{,}$ scharf	2528	4292	2465	2479	2509	2494,6	95,6
$\Sigma'\Delta_{,}$ scharf	2531	2513	2505	2518	2540	2521,4	56,4

Die Spalte Σ diff. giebt die Summe der Abweichungen der 5 einzelnen Bestimmungen von der mittleren Bestimmung, und hiermit eine Art Maßstab für die Variation je nach der Lage. Der Nachteil roh gegen scharf für $\mu_{,}$ ist hiernach in der That ungeheuer, für $\Sigma\varDelta_{,}$ zu gering, um nicht zweifelhaft zu bleiben [für $\Sigma'\varDelta_{,}$ dagegen hinreichend groß, um das Befolgen der genaueren Bestimmungsweise vorteilhaft erscheinen zu lassen]. Übrigens kann man bemerken, dass die Lage $E_{,} = 370$ vielleicht besser vom Vergleiche ausgeschlossen bliebe, weil die Verteilungstafel dieser Lage nach § 67 eine anormale Unregelmäßigkeit im Kerne zeigt, die sie nicht wohl anwendbar zur Berechnung der Elemente macht.

Die primäre Tafel ist zum Vergleiche nicht zugezogen, weil sie bei der großen Unregelmäßigkeit und Ungleichförmigkeit der Schätzung überhaupt keine sichere Bestimmung zulässt. Indes könnte man fragen, ob nicht doch das A derselben $= 408{,}5$ zur Ableitung aller $\mu_{,}$ und $\Sigma\varDelta_{,}$ in den 5 Lagen vorzuziehen, da die Reduktion keinen Vorteil, sondern vielmehr eine etwas größere Unsicherheit in die Bestimmung des A bringt. Indes halte ich dies aus folgenden Gründen nicht für sachgemäß.

Für die Ableitung der anderen Hauptwerte als A ist jedenfalls der Nachteil der Unregelmäßigkeit und Schätzungsgleichheit der primären Tafel überwiegend, und muss man sich doch an eine reduzierte Tafel halten, und dann meines Erachtens konsequenterweise auch A aus derselben Reduktionsstufe und Lage ableiten, welche zur Reduktion angenommen ist, um die Verhältnisse der verschiedenen Hauptwerte nicht durch die Inkonsequenz in dieser Hinsicht zu alterieren. Ohnehin liegt gewöhnlich nur eine reduzierte Tafel zur Ableitung des A wie der anderen Elemente vor. Da übrigens das A der reduzierten Tafeln nach dem Ergebnisse der Zusammenstellungen § 64—66 von dem primären A im allgemeinen wenig abweicht, lässt sich auch kein bedeutender Unterschied von dem Befolgen des einen und anderen Verfahrens erwarten. Ich habe in dieser Hinsicht wenigstens $\mu_{,}$ vergleichsweise an derselben Tabelle untersucht, welche die vorigen Resultate bei Anwendung der 5 speziellen A für Ableitung des $\mu_{,}$ gegeben hat, indem ich dasselbe überall vom primären $A = 408{,}5$ ableitete, und erhielt dabei folgende Resultate, wonach sich $\mu_{,}$ roh gegen vorhin nirgends verändert hat, hiergegen $\mu_{,}$ scharf so geändert hat, dass die Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Lagen dadurch etwas gemindert ist, sofern Σ diff. vorhin nur 5,2 war, folgends 11,6 ist, was unstreitig nur zum Nachteil der durchgeführten Anwendung des primären A gegenüber der speziellen Anwendung der reduzierten A gedeutet werden kann.

$E_{,}$	366	367	368	369	370	Mittel	Σ diff.
$\mu_{,}$ roh	217	230	250	193	201	218,2	87,2
$\mu_{,}$ scharf	217	217	224	219	216	218,6	11,6

Die mittlere Abweichung anlangend, so hat man durch Verdoppelung von $\Sigma\Delta_{,}$ zunächst $\Sigma\Delta$ und hiernach:

$$\eta = \frac{\Sigma\Delta}{m} \quad \text{und} \quad \eta_c = \eta\sqrt{\frac{m}{m-1}}\,. \tag{22}$$

Untriftig wäre es, wie Elliott in seiner Abhandlung über amerikanische Rekrutenmaße gethan, η als Mittel von $\eta_{,} = \Sigma\Delta_{,} : \mu_{,}$ und $\eta' = \Sigma\Delta' : \mu'$ d. i. $= \frac{1}{2}(\eta_{,} + \eta')$ bestimmen zu wollen; denn nicht nur läuft das wider den Sinn der ursprünglichen Gauss'schen Regel, sondern man vernachlässigt auch dabei die verschiedenen Gewichte, welche dem $\eta_{,}$ oder η' je nach ihrer Ableitung aus $\mu_{,}$ und μ' Werten zukommen; wonach das richtige Mittel:

$$\eta = \frac{\mu_{,}\eta_{,} + \mu'\eta'}{m} = \frac{\Sigma\Delta_{,} + \Sigma\Delta'}{m} = \frac{\Sigma\Delta}{m} \tag{23}$$

ist.

X. Zusammenstellung und Zusammenhang der Haupteigenschaften der drei Hauptwerte A, C, D, ferner R, T, F.

§ 76. Außer den im ganzen von mir bevorzugten drei Hauptwerten, dem arithmetischen Mittel A, dem Zentralwert C und dem dichtesten Wert D werden folgends noch drei nebensächlich von mir berücksichtigt werden, die ich als Scheidewert R, schwersten Wert T und Abweichungsschwerwert F aufführe.

Übersichtlich nach ihren Hauptunterschieden zusammengestellt, sind es folgende.

Scheidewert R, der Wert a, bezüglich dessen $\Sigma a' = \Sigma a_, = \frac{1}{2} \Sigma a$, mithin die Summe der größeren Werte gleich der Summe der kleineren und mithin jeder von beiden gleich der halben Gesamtsumme der a ist.

Arithmetisches Mittel A, der Wert a, bezüglich dessen $\Sigma \Theta' = \Sigma \Theta_,$, d. h. die Summe der positiven Abweichungen gleich der Summe der negativen ist; und bez. dessen $\Sigma \Theta^2$ ein Minimum ist.

Zentralwert C, der Wert a, bezüglich dessen $m' = m_,$, d. h. die Zahl der positiven Abweichungen gleich der Zahl der negativen Abweichungen, und $\Sigma \Theta$ ein Minimum ist.

Dichtester Wert D, der Wert a, bezüglich dessen sich die Abweichungszahlen beider Seiten $m_, : m'$ wie die mittleren Fehler derselben $e_, : e'$ verhalten, und die Maßzahl z ein Maximum ist.

Schwerster a-Wert T, der Wert a, dessen Maßprodukt za ein Maximum ist.

Abweichungsschwerwert F, der Wert a, bezüglich dessen $z\Theta$ ein Maximum ist.

Ich werde jedoch diese Werte nicht in der vorigen Reihenfolge, sondern nach der Folge A, C, D, R, T, F behandeln.

Abgesehen von A sind die vorigen Werte wie die Werte des vorigen Kapitels einer rohen und scharfen Bestimmung fähig, indes bei A sich eine solche nicht unterscheiden lässt. Dieselbe kleine Verteilungstabelle wird hier wie dort zur Erläuterung der Ableitung dienen, und die dabei gebrauchten Bezeichnungen werden in dem, § 9 und 10 angegebenen Sinne zu verstehen sein. Bez. A gehen auch hier $m_{,}$, m', in $\mu_{,}$, μ', und $\Theta_{,}$, Θ' in $\varDelta_{,}$, $\varDelta'$ über.

§ 77. Arithmetischer Mittelwert A.

Der arithmetische Mittelwert einer Reihe von Werten a vereinigt folgende drei Eigenschaften in sich:

1) Die Eigenschaft selbst, wonach er definirt wird, dass er der Quotient der Summe der a durch die Zahl derselben m ist, also:

$$A = \frac{\Sigma a}{m} \tag{1}$$

oder, insofern Σa durch Summierung der za zu gewinnen, $= \Sigma az : m$;

2) dass die Summe der positiven Abweichungen $\varDelta'$ von ihm gleich der Summe der negativen $\varDelta_{,}$ nach absolutem Werte ist, also:

$$\Sigma\varDelta' = \Sigma\varDelta_{,} \text{ oder } \Sigma\varDelta' - \Sigma\varDelta_{,} = 0\,; \tag{2}$$

3) dass die Summe der Quadrate der Abweichungen von ihm kleiner als von jedem anderen Werte ist, kurz:

$$\Sigma\varDelta^2 = \Sigma\varDelta'^2 + \Sigma\varDelta_{,}^2 = \text{Minimum.} \tag{3}$$

Die vorigen Eigenschaften des A hängen so solidarisch zusammen, dass mit der einen zugleich die anderen gegeben sind, und er nach jeder derselben mit identischem Resultate abgeleitet werden kann, nur dass die Ableitung nach der ersten Eigenschaft die praktischste bleibt. Auch sind sie unabhängig von einem bestimmten Verteilungsgesetze der a und gelten über die Kollektivmaßlehre hinaus nicht bloß für eine als unendlich angenommene ideale, sondern auch jede endliche Reihe von a in willkürlicher Verteilung.

Der Zusammenhang des zweiten und dritten Satzes mit dem durch die Definition gegebenen ersten findet sich so.

Zweiter Satz. Jede positive Abweichung von A ist $a' - A$, jede negative nach absolutem Werte $A - a_,$, hiernach entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\varDelta' &= (a' - A) + (a'' - A) + \cdots \\ \Sigma\varDelta_, &= (A - a_,) + (A - a_{,,}) + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

mithin, wenn μ' die Zahl der positiven, $\mu_,$ die der negativen Abweichungen ist,

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\varDelta' &= \Sigma a' - \mu' A \\ \Sigma\varDelta_, &= \mu_, A - \Sigma a_, \end{aligned}\right\}$$

$$\Sigma\varDelta' - \Sigma\varDelta_, = \Sigma a' + \Sigma a_, - (\mu' + \mu_,) A \tag{5}$$

oder, weil $\Sigma a' + \Sigma a_, = \Sigma a$ und $\mu' + \mu_, = m$,

$$\Sigma\varDelta' - \Sigma\varDelta_, = \Sigma a - m A, \tag{6}$$

und weil $A = \Sigma a : m$

$$\Sigma\varDelta' - \Sigma\varDelta_, = \Sigma a - \Sigma a = 0. \tag{7}$$

Dritter Satz. Sei der Wert, bez. dessen $\Sigma\varDelta^2$ ein Minimum ist, zunächst als unbekannt $= x$ gesetzt, so haben wir:

$$\Sigma\varDelta^2 = (a' - x)^2 + (a'' - x)^2 + \cdots + (a_, - x)^2 + (a_{,,} - x)^2 + \cdots \tag{8}$$

Zwar sollte, sofern wir die negativen Abweichungen nach absolutem Werte als positiv nehmen, jede negative Abweichung statt $a_, - x$ u. s. w. vielmehr $x - a_,$ u. s. w. gesetzt werden; aber $(a_, - x)^2$ ist gleich $(x - a_,)^2$, was gestattet, den vorigen Wert von $\Sigma\varDelta^2$ in angegebener Weise zu entwickeln. Nun erhalten wir den Minimumwert von $\Sigma\varDelta^2$ durch Setzen des Differentials seines Ausdruckes bez. x gleich Null; dies giebt:

$$2[(a' - x) + (a'' - x) + \cdots + (a_, - x) + (a_{,,} - x) + \cdots] dx = 0 \tag{9}$$

mithin durch Summierung aller a und $-x$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma a - m x &= 0, \\ x = \frac{\Sigma a}{m} &= A. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

§ 78. Wenn schon der arithmetische Mittelwert für die Kollektivmaßlehre nicht ein gleich überwiegendes Interesse in Anspruch nehmen kann als für die physikalische und astronomische Maßlehre, so gewährt ihm doch die Verbindung seiner drei Haupteigenschaften auch für jene ein an sich mathematisches Interesse, was um so mehr dadurch wächst, dass durch ihn eine Beziehung zwischen beiden Lehren hergestellt wird. Gegen *D* steht er noch insbesondere durch die größere Leichtigkeit und Einfachheit seiner genauen Bestimmung im Vorteil; von *C* wird er darin zwar noch übertroffen, aber dass in die Gleichheitsbestimmung seiner zweiten Eigenschaft mit der Zahl zugleich die Größe der Abweichungen eingeht, giebt ihm ein gewichtigeres Interesse als dem *C*. Auch lässt sich Folgendes bemerken. Wenn man eine beliebige Reihe von *a* nach der zufälligen Ordnung, wie sie in der Urliste enthalten sind, in eine gegebene Zahl Fraktionen aus gleichviel *a* geteilt hat und aus jeder derselben das *A* besonders bestimmt, so stimmt das arithmetische Mittel dieser *A* mit dem allgemeinen Mittel der ganzen Reihe von *a* überein. Verfährt man aber entsprechend mit der Bestimmung von *C*, so stimmt weder der Centralwert, noch Mittelwert der verschiedenen spezialen *C* allgemein gesprochen mit dem aus der Totalität der *a* gewonnenen *C* überein. Verfährt man entsprechend mit dem *D*, so stimmt zwar das *D*, aber nicht der Mittelwert der spezialen *D* mit dem *D* der Totalität der *a* überein.

Endlich knüpft sich an die Bestimmung von *A* folgender praktische Vorteil. Hat man das *A* eines K.-G. aus einer Verteilungstafel mit nicht zu kleinem *m* bestimmt, so wird man nicht nur die Gesamtgröße »Gr.« des Gegenstandes für diese Tafel durch Multiplikation des *A* mit dem *m*, sondern auch nach Wahrscheinlichkeit die Gesamtgröße des Gegenstandes für jedes größere oder kleinere *m* durch Multiplikation jenes erst bestimmten *A* mit dem neuen *m* erhalten, nur mit einem um so größeren wahrscheinlichen Fehler dabei, je kleiner das *m* ist, und je weiter das *m*, auf das man schließt, von demselben abweicht. Umgekehrt wird man auf die Zahl von Exemplaren *m*, welche dazu gehört, eine gegebene Gesamtgröße Gr. zu geben, nach Wahrscheinlichkeit schließen können, indem man setzt $m = \text{Gr.} : A$; da ja $\Sigma a = mA = \text{Gr.}$, mithin $m = \text{Gr.} : A$.

Diese Sätze können z. B. von Nutzen sein, wenn man den Raum bestimmen will, der eine gegebene Anzahl Menschen von zufällig wechselnder Größe fasst. Weder der Centralwert, noch der dichteste Wert lassen eine entsprechende Verwendung zu.

§ 79. Es kann sein, dass man aus den A verschiedener K.-G. oder auch den besonders bestimmten A verschiedener Abteilungen desselben K.-G. ein gemeinsames Mittel ziehen will, und hat, wenn diese A aus verschiedenen m erhalten sind, zu unterscheiden, ob das definitive Mittel ohne oder mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der m gezogen werden soll. Seien A_1, A_2, $A_3 \ldots$ besondere Mittel, respektiv aus m_1, m_2, $m_3 \ldots$ Maßen gezogen. Ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit der m wird das Mittel der betreffenden A sein:

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots}{N}, \tag{11}$$

wo N die Anzahl der A; mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der m aber wird es sein:

$$\frac{m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \tag{12}$$

und mit dem Mittel übereinkommen, welches man erhält, wenn man die Gesamtsumme aller a mit der Gesamtsumme aller m dividiert.

Ersteres Mittel heiße das singuläre, letzteres das summarische. Je nach der Natur der Aufgabe kann die eine oder andere Art der Mittelziehung vorzuziehen sein. Gesetzt das Mittel aus der Körperlänge der Chinesen, Neger, Malaien, Amerikaner und Europäer kaukasischer Rasse soll bestimmt werden; aber von den Europäern liegen dazu 1000 Maße, von jeder der anderen Rassen nur 10—20 Maße vor; so würde die zweite, die summarische Art der Mittelziehung unzulässig sein; denn, wie leicht zu erachten, würde die mittlere Körperlänge dieser verschiedenen Rassen wegen des unverhältnismäßig überwiegenden Gewichtes, was die Europäer durch ihr großes m erhalten, fast ganz mit dem der Europäer übereinkommen, und überhaupt das definitive Mittel vorwiegend durch das Spezialmittel mit dem größten m bestimmt werden, was der Natur der Aufgabe widerspricht. Hier ist nur die erste, die singuläre Art der Mittelziehung brauchbar; und dass nicht alle m dieselbe Größe haben, vermindert bloß die Sicherheit der Bestimmung gegen den Fall, dass die Gesamtheit der m sich gleich zwischen alle A verteilt. Überhaupt werden disparate Gegenstände (vgl. § 14) mehr Anlass zur ersten als zweiten Mittelbestimmung geben; wogegen die Spezial-A aus verschiedenen Abteilungen eines einstimmigen Gegenstandes nach dem Prinzip der zweiten Mittelbestimmung zu kombinieren sind.

Es kann auch sein, dass man, statt aus verschiedenen A ein arithmetisches Mittel aus verschiedenen C oder D zu ziehen hat, und es gilt dann dafür die entsprechende Unterscheidung zwischen singulärem und summarischem Mittel, und gelten dieselben Gesichtspunkte der Bevorzugung des einen oder anderen.

§ 80. Zentralwert C.

Den drei Haupteigenschaften des arithmetischen Mittels A gegenüber vereinigt der Zentralwert C folgende drei Haupteigenschaften:

1. Die durch seine Definition gegebene Eigenschaft, ebensoviel größere a' über sich als kleiner $a_{,}$ unter sich zu haben.

2. Die Eigenschaft, gleich viel positive und negative Abweichungen von sich abhängig zu haben, so dass $m' = m_{,} = \frac{1}{2}m$.

3. Die Eigenschaft, dass die Summe der positiven und negativen Abweichungen von ihm nach absolutem Werte kleiner als von jedem anderen Werte, mithin bez. desselben $\Sigma\Theta$ ein Minimum ist.

Auch diese Eigenschaften sind unter einander solidarisch und gelten für jede beliebige Reihe von a, rücksichtslos auf ein besonderes Verteilungsgesetz, entsprechend wie es von den drei Haupteigenschaften des A gilt.

Die Folgerung der zweiten Eigenschaft aus der ersten ist selbstverständlich und bedarf keiner Erläuterung. Der Zusammenhang der dritten damit aber folgert sich so.

Sei der Wert, von dem die dritte Eigenschaft gilt, zunächst als unbekannt $= x$ gesetzt, so ist die Summe der Abweichungen bezüglich x nach absolutem Werte so anzusetzen:

$$\Sigma \Theta = (a' - x) + (a'' - x) + \cdots + (x - a_,) + (x - a_{,,}) + \cdots \quad (13)$$

Um das Minimum dieser Summe zu erhalten, haben wir das Differential derselben bez. x gleich o zu setzen; das giebt:

$$- m' dx + m_, dx = 0 , \quad (14)$$

mithin:

$$m' = m' , \quad (15)$$

was dem Begriffe des Zentralwertes entspricht.

Ich habe diese Eigenschaft des Zentralwertes zuerst in einer Abhandlung [1]) über denselben bewiesen und durch Verallgemeinerung des Weges, welcher dazu führt, allgemeinere Folgerungen gezogen, auf die ich jedoch hier keinen Anlass habe einzugehen.

§ 81. Man kann dem Zentralwert folgende Bedeutung für die Kollektivmaßlehre beilegen.

Dächte man sich alle Exemplare eines K.-G. in eine große Urne gethan, wofür man die Welt selbst ansehen kann, und nach Zufall ein Exemplar herausgezogen, so würde die Wahrscheinlichkeit gleich stehen, ein größeres und ein kleineres Exemplar als C herauszuziehen, und bei sehr vielen Zügen würde wirklich diese gleiche Wahrscheinlichkeit sich bewähren, wogegen bezüglich größerer Werte als C die Wahrscheinlichkeit des Herausziehens eines kleineren Gegenstandes, bezüglich kleinerer Werte als C die Wahrscheinlichkeit des Herausziehens eines größeren Exemplares überwiegt. Hiernach kann man C in demselben Sinne den w a h r s c h e i n l i c h e n W e r t eines K.-G. nennen, wie man den wahrscheinlichen Fehler eines Beobachtungsmittels so nennt, insofern die Wahrscheinlichkeit seiner Überschreitung und Unterschreitung gleich steht.

Bei der gemeinüblichen Weise, die Verteilungstafeln von K.-G., namentlich Rekrutenmaßtafeln, so aufzustellen, dass von den Exem-

1 [Über den Ausgangswert der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung; Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. XI. Band; 1878. S. 1—76.]

plaren, die unter und über eine gewisse Größengrenze gehen, nur die Zahl, nicht die Größensumme angegeben wird, fällt die Möglichkeit weg, ein genaues arithmetisches Mittel zu ziehen; und dann kann anstatt desselben der Zentralwert, welcher sich eben nach der bloßen Zahl bestimmen lässt, dienen, Vergleiche z. B. zwischen verschiedenen Jahrgängen und Örtlichkeiten, woher die Maße stammen, zu ziehen, ein Verfahren, was mir bei Bearbeitung langjähriger belgischer Rekrutenmaße aus den verschiedenen Provinzen Belgiens gedient hat, den Gang und Parallelismus dieser Maße durch Zeit und Raum zu konstatieren.

§ 82. Die Herleitung des C aus einer Reihe von Werten a, die ihrer Größe nach geordnet sind, hat prinzipiell dadurch zu geschehen, dass man von jedem Ende der Reihe nach der Mitte zu gleichviel Werte abzählt und den Wert oder Zwischenwert zwischen zwei Werten als C nimmt, in dem beide Zählungen zusammentreffen, sofern hiermit dem Begriffe des C, nach beiden Seiten gleichviel Abweichungen und mithin gleichviel abweichende Werte über sich und unter sich zu haben, offenbar genügt ist. Es sind aber dabei zwei Fälle zu unterscheiden, erstens, wo das a, auf das man bei dieser doppelten Abzählung kommt, oder die zwei a, zwischen welchen das Resultat der Abzählung eintrifft, einfach sind, oder wo sie, wie im allgemeinen bei unseren Verteilungstafeln der Fall, mit einem $z > 1$ behaftet sind.

Fassen wir zunächst den ersten einfacher scheinenden Fall ins Auge. Für den ersten Anblick nun erscheint obige Regel hierbei darauf hinauszulaufen, dass man, wenn die Zahl der Werte m ist, $\frac{1}{2}m$ Werte, sei es von der einen oder anderen Seite her abzählt, und den $\frac{1}{2}m$ten Wert als C nimmt. Inzwischen überzeugt man sich leicht, dass diese Abzählung, je nachdem sie von der einen oder anderen Seite her geschieht, zu einem verschiedenen Werte führt. Denn sei z. B. folgende Reihe von vier Werten:

$$a\,,\;b\,,\;c\,,\;d$$

gegeben, so würde man den $\frac{1}{2}m$ten, d. i. den 2ten Wert von links herein $= b$, von rechts herein $= c$ finden. Oder nehmen wir statt eines geraden ein ungerades m, z. B. 5, indem wir folgende Reihe aufstellen:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,$$

so würde man den $2\frac{1}{2}$ten Wert von links herein zwischen b und c, von rechts herein zwischen c und d finden, indes nur c der Grundregel entspricht, nach einer Seite eben so viele größere Werte über sich, als nach der anderen unter sich zu haben. Hingegen genügt man der Forderung, von einer wie der anderen Seite her auf dasselbe C zu kommen, bei geraden wie ungeraden m, wenn man den $\frac{1}{2}(m+1)$ten Wert (d. i. das Mittel zwischen $\frac{1}{2}m$ und $\frac{1}{2}m+1$) dafür nimmt. In der That, bei unserem Beispiel mit dem geraden $m = 4$ kommt man von einer wie der anderen Seite her auf einen Wert zwischen b und c, bei dem Beispiel mit ungeradem $m = 5$ beidesfalls auf den Wert c.

Nehmen wir nun aber den zweiten, uns eigentlich allein interessierenden Fall, der bei unseren Verteilungstafeln stattfindet, dass die Zählung von beiden Seiten her in ein a eintrifft oder zwischen zwei a eintrifft, die mit einem $z > 1$ behaftet sind, so würden wir nach roher Bestimmung, indem wir diese z ganz auf die betreffenden a selbst fallend denken, auch das C erstenfalls mit jenem a selbst zusammenfallend oder zweitenfalls zwischen jene zwei a fallend und bei mangelndem bestimmten Anhalte als Mittel zwischen beiden zu nehmen haben. Und so hätte in unserer Beispielstabelle (§ 68) 11 als Zentralwert zu gelten, indem, wenn wir voriger Regel folgend $\frac{1}{2} \cdot 81 = 40\frac{1}{2}$ von beiden Seiten abzählen, diese innerhalb des dem $a = 11$ zugeschriebenen $z = 30$ eintreffen.

Aber um eine schärfere Bestimmung zu erhalten, haben wir zu berücksichtigen, dass die $z = 30$ Exemplare sich durch das ganze Intervall von 10 bis 12 verteilen, und gelangen mit Rücksicht hierauf unter Zuziehung einer Interpolation dieses als I genommenen Intervalles zu einem übereinstimmenden C durch Abzählen von beiden Seiten her nicht von $\frac{1}{2}(m+1)$, sondern von $\frac{1}{2}m$ Exemplaren, wie von vorn herein am natürlichsten erschien. In der That, um von oben herab (nach Lage der Tabelle) zum 40sten (d. i. $\frac{1}{2}m$ten) Werte zu gelangen, haben wir zu berücksichtigen, (was sich unmittelbar in der

Spalte der S, ablesen lässt) dass bis zu Ende des vorhergehenden Intervalles, mithin bis zu Anfang des I 18 Exemplare reichen; fehlen also zur Erfüllung der 40 noch 22 Exemplare, die ins Intervall I übergreifen. Nun schließen wir: wie sich diese ins Intervall übergreifenden 22 zur Totalzahl 30 des I verhalten, so der zum Anfang des I, d. i. zu 10 noch zuzufügende Wert x, sog. Eingriff in I, zur Größe von I, d. i. zu 2, mithin:

$$22 : 30 = x : 2,$$

d. i.

$$x = \frac{44}{30} = 1,467$$

$$C = 10 + 1,467 = 11,467\,.$$

Gehen wir jetzt mit der Abzählung von unten aufwärts, so reichen 32 Exemplare bis an das Intervall I, fehlen also zu 40 noch 8, die in das Intervall I selbst fallen, und zwar den Teil $I - x$ davon einnehmen, der von x bis zur zweiten Grenze des I, d. i. bis zu 12 reicht. Nun schließen wir wieder:

$$I - x : I = 8 : 30.$$

Da nun $I = 2$, hat man

$$30\,(2 - x) = 16,$$

woraus sich der Zuwachs x zur ersten Grenze 10 wie oben $= 1,467$ bestimmt, was zu $C = 11,467$ zurückführt.

Da nun die zweite Bestimmungsweise nach $\frac{1}{2}m$ von unten herauf zu demselben Resultate führt als die erste, diese aber einfacher ist, so können wir uns zur Bestimmung von C bei dieser begnügen, und erhalten zur Bestimmung von C folgende Formel[1]):

$$C = g_1 + \frac{y}{x_0}\,I = g_1 + \frac{\frac{m}{2} - r}{x_0}\,I, \tag{16}$$

1) [Sollte an Stelle der einfachen Interpolation die schärfere, unter Benutzung 2ter Differenzen, treten, so müsste $x = C - g_1$ durch Auflösen der Gleichung (16) des Kap. IX statt wie oben durch Auflösen der Gleichung (13) ebendesselben Kapitels gewonnen werden.]

wobei g_1 wie früher den Anfangswert oder die erste Grenze des zu interpolierenden Intervalles, z_0 das z dieses Intervalles, y den Zahleneingriff in dasselbe, d. h. die Zahl bedeutet, um welche die Vorzahl v noch vermehrt werden muss, um $\frac{1}{2}m$ zu geben.

§ 83. Dichtester Wert D.

Definieren wir den dichtesten Wert zunächst kurz als den, der unter einer Reihe von a am häufigsten vorkommt, oder auf den das größte z fällt, so kann ein solcher Wert nicht wie die beiden vorigen Hauptwerte aus jeder beliebigen Reihe von a abgeleitet werden und hat überhaupt nur für die Kollektivmaßlehre eine in Betracht kommende, für sie aber sehr wichtige Bedeutung[1]). In der That, stellen wir z. B. willkürlich folgende Reihe von fünf a auf:

$$1, 3, 4, 6, 16,$$

so werden wir als arithmetisches Mittel haben $A = \Sigma a : m = 30 : 5 = 6$; als Zentralwert (durch Zusammentreffen der Abzählung von rechts und links) $C = 4$. Aber welchen Wert sollen wir als dichtesten Wert nehmen, da jeder Wert nur einmal vorkommt, also alle z nur 1 sind. Andere Reihen lassen sich willkürlich aufstellen, in denen zwar verschiedene z bei verschiedenen a vorkommen, dasselbe Maximal-z sich aber bei mehreren a wiederholt, wonach nicht zu entscheiden, welches als D anzusehen. Aber bei Verteilungstafeln von K.-G. mit großem m, die den zu einer erfolgreichen Untersuchung erforderlichen Requisiten genügen, kommen entweder solche Fälle überhaupt nicht vor oder lassen sich, wenn es bei primären Tafeln doch der Fall ist, wovon man Beispiele in den Tafeln Kap. VII finden kann, durch erforderliche Reduktion in der Art beseitigen, dass das Maximal-z nur auf eins der reduzierten a fällt. Dabei ist

1) Sollte freilich die bis jetzt nicht beanstandete Annahme, dass die Beobachtungsfehler bei einwurfsfreien Beobachtungen eine symmetrische W. bez. des arithmetischen Beobachtungsmittels haben, irrig sein, so würde sich die große Wichtigkeit des D auch auf die physikalische und astronomische Maßlehre erstrecken. [Hierüber vergl. Kap. XXVIII.]

freilich nicht zu vergessen, dass man damit, dass man das ganze Maximal-z auf das reduzierte a, dem es beigeschrieben wird, bezieht, nur eine rohe Bestimmung des dichtesten Wertes erlangt, welche nur mehr oder weniger approximativ zu der idealen ist, die man unter Voraussetzung eines unendlich großen m bei unendlich kleinem i erlangen würde, und der man sich in später anzugebender Weise möglichst zu nähern suchen muss. Im allgemeinen kann man nur sagen, dass dieser Wert innerhalb des Intervalles zu suchen ist, das sich in der Intervalltafel für das reduzierte a als dessen Umkreisintervall substituiert.

Dass bei symmetrischer W. der Abweichungen bez. A der dichteste Wert D wesentlich mit A und C zusammenfällt, ist mehrfach erwähnt; nach der Verallgemeinerung des G. G. für die asymmetrische W. der K.-G. aber weicht er allgemein gesprochen davon ab und besitzt dann keine von den drei Grundeigenschaften sei es des A noch des C; hingegen die in § 33 aufgezählten Eigenschaften, wovon die wichtigsten solidarisch zusammenhängenden die sind: 1) dass er eben der dichteste im angegebenen Sinne ist, 2) dass das Proportionsgesetz, und 3) dass das zweispaltige G. G. bezüglich desselben besteht, wovon dann weiter abhängt, dass, um ein einfaches Verteilungsgesetz für Kollektivabweichungen zu gewinnen, die Abweichungen vielmehr von ihm, als von A oder C abhängig gemacht werden müssen. Man kann noch hinzufügen, dass D den wahrscheinlichsten Wert eines K.-G. aus folgendem Gesichtspunkte darstellt.

Greift man aus der Gesamtheit der a eines K.-G. ein Exemplar nach Zufall heraus, so wird der Wert D wahrscheinlicher als jeder andere getroffen werden, und die ihm nahen a mit einer, der seinigen nahe gleich kommenden, doch verschiedenen W., je nachdem sie auf die eine oder andere Seite von D fallen.

Hiernach überbietet die Wichtigkeit des D für K.-G. aus mehr als einem Gesichtspunkte die jedes anderen Hauptwertes, ohne jedoch damit zu hindern, dass diese nach den Eigenschaften, welche er nicht mit ihnen teilt, beachtenswert bleiben und zur vollständigen Charakteristik eines K.-G. gehören; auch steht er insofern im Nachteile gegen alle anderen, dass seine möglichst genaue Darstellung umständlich ist und eine Rechenarbeit fordert, deren es für die anderen nicht bedarf. Hierauf wäre nun näher einzugehen; aber ich verspare lieber die ziemlich umständlichen Erörterungen über seine Ableitung überhaupt auf ein besonderes Kapitel, um noch die folgenden drei Hauptwerte zu besprechen.

§ 84. Scheidewert R.

Der Wert, der eine gleiche Summe von a über sich als unter sich hat, und welcher also die Scheidegrenze zwischen den ihrer Größe nach geordneten kleineren und größeren a zu bilden hat, wenn durch Summierung der kleineren a dieselbe Gesamtgröße erzeugt werden soll, als durch Summierung der größeren a.

[Er liegt oberhalb C. Denn die Anzahl der oberhalb und unterhalb C gelegenen a ist beidesfalls, dem Begriffe des C gemäß, gleich $\frac{1}{2}m$; es ist daher:

$$\Sigma a_{,} < \frac{m}{2}\, C < \Sigma a',$$

so dass eine Gleichheit der unteren mit der oberen Summe nur für einen Wert, der größer als C ist, erreicht werden kann. Er liegt somit zugleich oberhalb A oder oberhalb D, je nachdem A oder D kleiner als C ist, wogegen er möglicherweise unterhalb des einen oder des anderen dieser beiden Hauptwerte liegen kann, wenn der eine oder der andere größer als C ist. Um jedoch seine Lage zunächst mit Rücksicht auf das in der Regel als bereits bekannt vorauszusetzende A zu bestimmen, werde angenommen, dass R oberhalb A liege.]

Seien nun $\Sigma a_{,}$, $\Sigma a'$ die Summen unterhalb und oberhalb R, $\Sigma a_{,,}$ und $\Sigma a''$ die Summen unterhalb und oberhalb A, so zähle man $\sigma = \frac{1}{2}(\Sigma a'' - \Sigma a_{,,})$ nach oben, d. i. nach den größeren Werten zu von A ab, um zu R zu gelangen.

Beweis. Nach Anschauung des Linienschemas

ist die untere Summe der a bez. R gleich der unteren Summe bez. A plus der Summe zwischen A und R, welche σ heiße, d. i.

$$\Sigma a_{,} = \Sigma a_{,,} + \sigma.$$

Die obere Summe bez. R aber ist gleich:

$$\Sigma a' = \Sigma a'' - \sigma,$$

also, da

$$\Sigma a_{,} = \Sigma a', \ \Sigma a_{,,} + \sigma = \Sigma a'' - \sigma,$$

$$\sigma = \frac{\Sigma a'' - \Sigma a_{,,}}{2}. \tag{17}$$

Da

$$\Sigma a_{,,} = \mu_{,} A - \Sigma \varDelta_{,}$$
$$\Sigma a'' = \mu' A + \Sigma \varDelta',$$

so hat man auch:

$$\sigma = \frac{(\mu' - \mu_{,})\, A + \Sigma \varDelta}{2}. \tag{18}$$

Diese Bestimmungsweisen gelten rücksichtslos auf ein besonderes Verteilungsgesetz, nur dass eine rohe und scharfe Bestimmung dabei in gewohnter Weise unterschieden werden kann. [Sie behalten ihre Geltung auch für den Fall, dass A oberhalb R liegt; σ wird jedoch alsdann negativ und ist daher, seinem absoluten Werte nach genommen, nach unten d. i. nach den kleineren Werten zu von A abzuzählen, um zu R zu gelangen.]

In unserem Erläuterungsbeispiel ist nach früherer Bestimmung $A = 11{,}4$; $\Sigma a_{,,} = 369$; $\Sigma a'' = 543$, mithin unser jetziges $\sigma = 87$; diese Summe haben wir von 11,4 an aufwärts, d. i. nach den größeren a zu, zu zählen, um zu R zu gelangen und dazu das Intervall 10—12 mit $z a = 330$ zu interpolieren, was dazu führt, $2 \,.\, 87 : 330 = 0{,}527$ zu 11,4 zu fügen; giebt $R = 11{,}927$. [Setzt man jedoch wie früher (§ 72) $\Sigma' a_{,,} = 362{,}7$; $\Sigma' a'' = 549{,}3$, mithin $\sigma = 93{,}3$, so ist konsequenterweise die Differenz $R - A = x$ aus der Gleichung: $93{,}3 = (11{,}4 + \frac{1}{2}x) \cdot 15x$ mit dem Werte 0,533 zu finden; giebt mit obigem Werte wesentlich übereinstimmend $R = 11{,}933$.]

[Statt nun, wie hier geschehen, R in Abhängigkeit von A zu bestimmen, kann es ganz ebenso in Abhängigkeit von C oder von D gefunden werden; dann sind natürlich $\Sigma a_{,,}$, $\Sigma a''$ und entsprechend die Abweichungszahlen und Abweichungssumme bez. C oder D statt bez. A zu nehmen. Man erhält so beim Ausgange von C die

Bestimmung: $\sigma = \frac{1}{2}\Sigma\Theta$ (bez. C); beim Ausgange von D dagegen: $\sigma = \frac{1}{2}(m' - m_,)\, D + \frac{1}{2}\Sigma\partial$. Überdies kann R auch direkt, ohne Anlehnung an einen vorbestimmten anderen Hauptwert gefunden werden. Es geschieht dies, indem man durch Addieren der a von beiden Enden der Verteilungstafel das Intervall aufsucht, in welches R zu liegen kommt, und dann in diesem Eingriffsintervall die Eingriffssumme Y der Art bestimmt, dass die Vorsumme vermehrt um die Eingriffssumme gleich der halben Gesamtsumme der a ist. Dies führt, unter Benutzung der (§ 69) definierten Bezeichnungen, zu der Formel:

$$R = g_1 + (\tfrac{1}{2}\Sigma a - \mathfrak{V}) \cdot \frac{I}{a_0\, \varkappa_0} \tag{19a}$$

oder zu

$$R = \sqrt{g_1^2 + \frac{I}{\varkappa_0}\,(\Sigma a - 2\mathfrak{V})}\,, \tag{19b}$$

je nachdem, im Einklange mit den § 72 getroffenen Bestimmungen, das Eingriffsmaß x, d. i. der Wert, um welchen R die untere Grenze g_1 des Intervalles I überragt, nach der Proportion

$$x : I = Y : a_0\, \varkappa_0$$

oder genauer nach der Gleichung:

$$Y = \left(g_1 + \frac{x}{2}\right) \frac{\varkappa_0\, x}{I}$$

berechnet und zu g_1 hinzugefügt wird.]

[Schließlich verdient noch erwähnt zu werden, dass die Lage von R in anderer Weise als diejenige von A, C und D von den a der Verteilungstafel abhängt. Vermehrt man nämlich jedes a um einen und denselben Betrag, so wird auch A, C und D um den nämlichen Betrag größer, so dass die Lage innerhalb der Tafel erhalten bleibt; dagegen bewirkt die angegebene Vermehrung eine Annäherung des R an C der Art, dass bei unbegrenzter Vermehrung R mit C zusammenfällt. Dies folgt unmittelbar daraus, dass die zwischen C und R gelegene Summe der a, d. i. σ, beständig gleich $\frac{1}{2}\Sigma\Theta$ (bez. C) ist und sich somit bei größer werdenden a auf ein immer kleiner werdendes Intervall verteilt.]

§ 85. Der schwerste Wert T.

Jeder Wert a einer zu unseren Untersuchungen tauglichen Verteilungstafel giebt, allgemein gesprochen, je nach seiner Größe und dem z, wie oft er vorkommt, ein verschiedenes Produkt za, und man kann nun nach dem a fragen, für welches dieses Produkt ein Maximum ist. Zunächst lässt sich daran denken, dass es mit dem dichtesten Werte zusammenfalle. Aber bei diesem kommt es bloß auf die Größe des z, nicht des za an. Es giebt Werte a, die größer sind als D, und obwohl sie seltener vorkommen als D, giebt ihnen doch bis zu gewissen Grenzen die Größe des a betreffs des za, was sie liefern, einen Vorteil.

In jedem Falle kann T bloß nach positiver Seite von D abliegen, weil beim Herabgehen der Werte a unter D sowohl a als z abnehmen. Nach roher Bestimmung würde in unserer Beispielstabelle T mit D zugleich auf $a = 11$ fallen, sofern sich hierfür das Maximal-$za = 330$ findet. Nach scharfer Bestimmung aber fallen beide aus einander, und hat man dazu, wenn das zweiseitige G. G. als zutreffend vorausgesetzt wird, nach unten folgendem Beweise überhaupt folgende Formel zu benutzen:

$$T = \frac{D + \sqrt{D^2 + 2\pi e'^2}}{2}. \qquad (20)$$

Aus unserer Beispielstabelle § 68 findet sich nach dem im nächsten Kapitel auseinander zu setzenden Proportionsverfahren

$$D = 11{,}6;\; e' = 1{,}9;$$

hiernach

$$T = 12{,}1.$$

Nun kann man fragen, was hat es für eine empirische Bedeutung, dass auf den so bestimmten Wert von T das Maximum von za fällt. In dieser Hinsicht hat man sich zu erinnern, dass nach scharfer Betrachtung jedes a einer Verteilungstafel eigentlich ein ganzes Intervall von der Größe des i dieser Tafel repräsentiert, wovon das betreffende a die Mitte ist. Also ist mit dem Werte $T = 12{,}1$ für unsere Verteilungstafel, deren $i = 2$ ist, gesagt, dass unter allen

Intervallen dieser Tafel von der Größe 2 das Intervall, dessen Mitte $T = 12,1$ ist, also das Intervall 11,1—13,1 ein größeres za enthält, als jedes andere Intervall von der Größe 2.

[Dies findet sich nun aber nicht bestätigt; denn das za des Intervalles 11,1—13,1 ist gleich 296, während das za des Intervalles 10—12 gleich 330 ist. Dadurch wird jedoch nicht die Unrichtigkeit der obigen theoretischen Bestimmungsweise von T nachgewiesen, sondern nur nahe gelegt, dass die theoretisch geforderte Lage des schwersten Wertes nicht mit seiner, in der Tafel empirisch dargebotenen Lage genau übereinstimmt, was übrigens von vornherein nicht anders zu erwarten ist. Dass dies auch bei den Tafeln empirisch gegebener K.-G. nicht wesentlich anders ist, erhellt aus folgendem Beispiel.]

Die Verteilungstafel für den vertikalen Schädelumfang mit $i = 5$ mm (§ 58) giebt nach Bestimmung des D mittelst des Proportionsverfahrens:

$$D = 409,7\,;\quad T = 410,1\,;$$

wonach hier auf das Intervall 407,6—412,6 das größte za fällt. Ob sich dies nun wirklich findet, lässt sich empirisch an der Verteilungstabelle prüfen, und wählen wir zum Vergleich das Intervall des dichtesten Wertes 409,7, d. i. nach entsprechender Bestimmung 407,2—412,2.

Da die za der betreffenden Intervalle in der Verteilungstafel nicht unmittelbar gegeben sind, weil diese Intervalle selbst mit ihren za nicht darin gegeben sind, vielmehr das Intervall des schwersten Wertes, ebenso wie das des dichtesten Wertes, zwischen zwei Intervalle der gegebenen Tafel übergreift, so muss man interpolationsmäßig berechnen, welchen Anteil zum gesuchten za jedes beider Intervalle liefert, und durch Summierung dieser Anteile sowohl das za des Intervalles, was für D, als was für T einzustehen hat, finden, was ich hier nicht detaillieren will[1]). Hiernach fand ich für obiges Beispiel das za des dichtesten Wertes 26631, das des T gleich

1) [In dem vorliegenden Falle vereinfacht sich infolge des für $a = 408$ und $a = 413$ gemeinsamen $z = 65$ diese Rechnung, und findet man das za für D resp. T gleich $65.D$ resp. $65.T$.]

26656, also, wie zu erwarten, das letztere sehr wenig, aber, wie zu verlangen, doch etwas größer als das erstere. [Aber trotzdem ist das theoretisch aus (20) bestimmte T von dem empirisch aus der Tafel zu entnehmenden verschieden; denn für $a = 413$ ergiebt sich der noch größere Wert $za = 26845$.]

Beweis. Da T größer als D ist, so setzen wir

$$T = D + \partial, \tag{21}$$

wo ∂ eine positive Abweichung von D ist, und bestimmen ∂, indem wir

$$za = z\,(D + \partial) \tag{22}$$

setzen, diesen Wert zur Erlangung einer Maximumgleichung in Bezug auf ∂ differenzieren und das Differential gleich Null setzen, wobei wir einfachheitshalber die Strichelchen oben an z, a, ∂, e weglassen, die eigentlich anzubringen sind, um die Lage dieser Werte oberhalb D zu bezeichnen.

Wir haben also:

$$\frac{\delta(za)}{\delta\partial} = (D + \partial)\frac{\delta z}{\delta\partial} + z\,\frac{\delta\partial}{\delta\partial}, \tag{23}$$

wovon der letzte Wert z ist. Um nun $\frac{\delta z}{\delta\partial}$ zu finden, muss z als Funktion von ∂ ausgedrückt werden, was geschehen kann, indem wir nach dem zweispaltigen G. G. die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse für ∂ positiverseits von D in Anspruch nehmen. Hiernach ist bekanntlich die Wahrscheinlichkeit $\varphi\partial$ eines Wertes ∂

$$\varphi\partial = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \exp\,[-h^2\partial^2], \tag{24}$$

worin $h = 1 : e\sqrt{\pi}$. Bei dem normaler Weise vorauszusetzenden großen m aber kann $\varphi\partial$ auch durch $z : m'$ ausgedrückt werden, mithin

$$z = \frac{2m'h}{\sqrt{\pi}} \exp\,[-h^2\partial^2], \tag{25}$$

woraus folgt:

$$\frac{\delta z}{\delta\partial} = \frac{2m'h}{\sqrt{\pi}} \exp\,[-h^2\partial^2]\cdot(-2h^2\partial) \tag{26}$$

und, weil $\frac{2m'h}{\sqrt{\pi}} \exp[-h^2 \partial^2] = z$

$$\frac{\partial z}{\partial \partial} = -2zh^2\partial, \tag{27}$$

also:

$$\frac{\partial(az)}{\partial \partial} = -2zh^2\partial(D+\partial) + z = 0, \tag{28}$$

worin z als gemeinsamer Faktor wegfällt, und man mit Umkehrung der Vorzeichen und Rücksicht, dass $h = 1 : e\sqrt{\pi}$, folgende quadratische Gleichung erhält:

$$2\partial^2 + 2D\partial - \pi e^2 = 0, \tag{29}$$

aus der sich ∂ bestimmen lässt.

Dies giebt zunächst:

$$\partial = \frac{-2D \pm \sqrt{4D^2 + 8\pi e^2}}{4}, \tag{30a}$$

wovon bloß das obere Vorzeichen brauchbar ist; oder:

$$\partial = \frac{-D + \sqrt{D^2 + 2\pi e^2}}{2} \tag{30b}$$

und:

$$T = D + \partial = \frac{D + \sqrt{D^2 + 2\pi e^2}}{2}. \tag{31}$$

§ 86. Abweichungsschwerwert F.

Man kann noch von einem charakteristischen Abweichungswerte sprechen, welcher dem schwersten a-Werte analog ist und analog zu berechnen ist, hiernach der schwerste Abweichungswert heißen kann. Dort fragte man, auf welches a fällt das größte za, hier fragt man, auf welches Θ fällt das größte $z\Theta$, und sofern bei Ausgang von einem gegebenen Hauptwerte H mit Θ zugleich $a = H \pm \Theta$ gegeben ist, auf welches a fällt das größte $z\Theta$, ein Wert, der keineswegs mit dem schwersten a-Werte zusammenfällt. Inzwischen schlägt die Analogie in folgenden Punkten fehl. Das Maximum von za ist unabhängig von dem Hauptwerte, den man etwa bevorzugen will, da dieser ja an den faktischen Werten der a und darauf bezogenen z nichts ändert, nur dass eine einfache Berechnung des größten za bloß unter Ausgang von D nach unserem allgemeinen Verteilungsgesetze möglich ist. Hiergegen hängt der Wert $z\Theta$ mit von dem Hauptwerte ab, von dem an man die Abweichungen rechnen will, da die Werte Θ selbst ihrer Größe nach davon abhängen. Es bleibt sich aber mit der Berechnung des schwersten a-Wertes gleich, dass sie auch bei dem schwersten Θ-Wert nur im Ausgange von D unter Zugrundelegung unseres allgemeinen Verteilungsgesetzes geschehen, und das Zutreffen des Resultates durch mangelnde Erfüllung der Requisiten gestört werden kann. Endlich hält die Analogie insofern nicht Stich, als es normaler Weise nur ein Maximum von za in jeder Verteilungstafel geben kann; wogegen es für jede Seite des gewählten Hauptwertes ein besonderes Maximum von $z\Theta$ resp. von $z'\Theta'$ und $z_,\Theta_,$ kurz F' und $F_,$ giebt, was eben bei Ausgang von D einer ganz entsprechenden Berechnung unterliegt.

Zur Erläuterung nehmen wir die reduzierte Tabelle für den Vertikalumfang des Schädels (§ 58) mit $E_, = 368$; $i = 5$, wofür nach § 61:

$$D = 409{,}7;\ e_,\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\Sigma\partial_,}{m_,}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 14{,}9;\ e'\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\Sigma\partial'}{m'}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 13{,}0;$$

Werte, die bei der Berechnung in Betracht kommen werden; und bilden wir nach den a und Abweichungen der a von D, d. i. ∂, in jener Tabelle folgende Tabelle einander zugehöriger Werte:

$$D = 409{,}7;\quad e_,\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 14{,}9;\quad e'\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 13{,}0.$$

$a_,$	$\partial_,$	$z_,$	$z_,\partial_,$
383	26,7	17	454
388	21,7	24	521
393	16,7	36	601
398	11,7	41	480
403	6,7	59	395
405,5 — D	0 — 4,2	55	115
a'	∂'	z'	$z'\partial'$
D — 410,5	0 — 0,8	10	4
413	3,3	65	214
418	8,3	51	423
423	13,3	40	532
428	18,3	17	311

Man sieht hier, dass ∂ und z insofern einen umgekehrten Gang nehmen, als ∂ mit Annäherung seiner a an D auf jeder Seite abnimmt, z wächst; umgekehrt bei Entfernung der a von D. Sollten nun z und ∂ hierbei ein umgekehrtes Verhältnis befolgen, so würde $z\partial$ durch die ganze Reihe der Werte konstant bleiben, was aber keineswegs der Fall ist, wie man sich aus der letzten Spalte überzeugen kann, wonach für die $a_{,}$-Seite ein Maximum von $z_{,}\partial_{,}$, kurz $F_{,}$, bei $\partial_{,} = 16{,}7$ und $a_{,} = D - \partial_{,} = 393$; und auf der a'-Seite ein Maximum von $z'\partial'$, kurz F', bei $\partial' = 13{,}3$ und $a' = D + \partial' = 423$ stattfindet. [Die nämlichen Werte markieren auch bei scharfer Bestimmung mittelst einfacher Interpolation die Maxima der $z\partial$.]

Wie man nun sieht, stimmt der so empirisch bestimmte Maximumwert von $z_{,}\partial_{,} = F_{,}$ sehr nahe mit dem oben angegebenen Werte $e_{,}\sqrt{\frac{1}{2}\pi} = 14{,}9$ und der empirisch gefundene Maximumwert von $z'\partial' = F'$ auf der a'-Seite sehr nahe mit dem oben angegebenen Werte $e'\sqrt{\frac{1}{2}\pi} = 13{,}0$; und in der That ist das Resultat der nachher zu begründenden Rechnung auf Grund der Gültigkeit unseres Verteilungsgesetzes, dass

$$F_{,} = e_{,}\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad F' = e'\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{32}$$

[Bestimmt man aber interpolationsmäßig die den Werten $\partial_{,} = 14{,}9$ und $\partial' = 13{,}0$ zugehörigen $z_{,}\partial_{,}$ und $z'\partial'$ mit Rücksicht, dass $i = 5$, so findet man $z_{,}\partial_{,} = 563$; $z'\partial' = 529$, deren Vergleich mit den wirklichen Maximalwerten der Tafel den Grad der Übereinstimmung zwischen den theoretisch geforderten und empirisch dargebotenen Werten erkennen lässt.]

[Beweis. Setzt man auf Grund des als gültig vorauszusetzenden zweispaltigen G. G.:

$$z' = \frac{2\,m'h'}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h'^2\partial'^2\right], \tag{33}$$

wo $h' = 1 : e'\sqrt{\pi}$, so ist zur Erlangung der Maximumgleichung für $z'\partial'$ der Wert:

$$z'\partial' = \frac{2\,m'\,h'}{\sqrt{\pi}}\,\partial' \exp\left[-h'^2\partial'^2\right] \tag{34}$$

in Bezug auf ∂' zu differenzieren und das Differential gleich Null zu setzen. Man erhält so: .

$$\frac{2m'h'}{\sqrt{\pi}}\exp[-h'^2\partial'^2](1-2h'^2\partial'^2)=0\,, \tag{35}$$

also, da der Koeffizient von $(1-2h'^2\partial'^2)$ seiner Natur nach nicht verschwinden kann,

$$2h'^2\partial'^2=1\,,\ \text{oder}\ \partial'=\frac{1}{h'\sqrt{2}}=e'\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,. \tag{36}$$

In gleicher Weise folgt für die unteren Abweichungen:

$$\partial_{,}=\frac{1}{h_{,}\sqrt{2}}=e_{,}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,. \tag{37}$$

Es sind nun aber $e'\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ und $e_{,}\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ die beiderseitigen mittleren quadratischen Abweichungen, so dass die theoretische Bedeutung der Abweichungsschwerwerte F' und $F_{,}$ bezüglich D eben darin besteht, die quadratische mittlere Abweichung der oberen und der unteren Werte darzustellen.]

XI. Der dichteste Wert.

§ 87. [Da der dichteste Wert als Ausgangswert des für K.-G. in Anspruch zu nehmenden Verteilungsgesetzes eine fundamentale Stellung in der Kollektivmaßlehre einnimmt, so ist eine Erörterung seiner mathematischen Bedeutung und seiner, auf letztere zu gründenden rechnerischen Bestimmung notwendig. Hierbei ist es wesentlich, den als D_i bezeichneten empirisch dichtesten Wert, den die Tafel hergiebt, von dem als D_p bezeichneten theoretisch wahrscheinlichsten Wert, den das Verteilungsgesetz verlangt, zu scheiden und jeden gesondert zu behandeln.]

[Die Existenz von D_i gründet sich darauf, dass die z der Tafel, die für einen K.-G. die Anzahl der Exemplare von der Größe a angeben, nicht durchweg konstant sind, sondern steigen und fallen. So lange nun bei roher Bestimmung die z direkt als den beigeschriebenen a zugehörig aufgefasst und demgemäß die zwischen die gemessenen a der Tafel fallenden a-Werte als überhaupt nicht vorkommend angesehen werden, kann nur das mit dem größten z behaftete a selbst als dichtester Wert beansprucht werden; und es giebt alsdann kein Mittel, für den Fall, dass mehrere aufeinander folgende a das nämliche Maximal-z besitzen, den Zweifel, welches a nun in Wirklichkeit den dichtesten Wert darstelle, zu heben[1]). Wird aber berücksichtigt, dass die Intervalle zwischen den gemessenen a nur der relativ geringen Anzahl der gemessenen Exemplare und

---

1) [Das Vorkommen von zwei einander gleichen, durch Zwischenwerte getrennten Maximal-z ist nicht zu berücksichtigen, da dies das Auftreten von zwei verschiedenen dichtesten Werten bedingen und so eine Mischung disparater K.-G., auf welche die Verteilungsgesetze keine direkte Anwendung finden, anzeigen würde.]

der Ungenauigkeit der Messung ihr Dasein verdanken, während die unbegrenzte Gesamtheit der Exemplare des K.-G. sich ohne Unterbrechung auf alle, zwischen den Extremen liegende a verteilt, so hat man in den gegebenen Tafelwerten nur die Unterlage zu suchen, auf der ein funktioneller Zusammenhang zwischen den z und den a sich aufbaut. Ist derselbe hergestellt, so ergiebt sich der dichteste Wert in einfacher Weise als Maximum der konstruierten Funktion.]

[Bei der Herstellung dieses funktionellen Zusammenhanges ist nun darauf zu achten, dass — was schon durch die Ungenauigkeit der Messung und durch die daraus folgende Existenz der primären Intervalle bedingt ist — die z der Tafel nicht als Einzelwerte der gesuchten Funktion, sondern als Summenwerte, die auf die zugehörigen Intervalle zu beziehen, mithin als Integralwerte, genommen für die Grenzen der Intervalle, zu gelten haben. Im übrigen sind die Prinzipien der Interpolationsrechnung in Anwendung zu bringen, was darauf hinauskommt, die Anzahl der Exemplare von der Größe a, die allgemein mit ζ bezeichnet werde, innerhalb eines bestimmten Bereiches als eine ganze rationale Funktion von a vorauszusetzen und dann mittelst der gegebenen z der Tafel ihre Koeffizienten so zu bestimmen, dass die Summen der ζ, d. i. ihre Integrale zwischen den Grenzen der in Betracht gezogenen Intervalle, mit den gegebenen z der Tafel für eben dieselben Intervalle übereinstimmen; dabei ist die Anzahl der zu berücksichtigenden, aufeinanderfolgenden Intervalle von dem Grade der vorausgesetzten Funktion oder der Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten abhängig, und es wächst mit dem Steigen jener Anzahl zugleich der Grad der erreichten Genauigkeit.]

[Wird also vorausgesetzt, dass für den Bereich eines Wertes a, der in dem Intervall mit der Mitte a_0 und mit einem z gleich z_0 liege, ζ entweder konstant sei oder durch eine lineare Funktion von a oder durch eine solche vom zweiten Grade dargestellt werde, so ist im ersten Falle nur das z_0 des Intervalles selbst, im zweiten Falle das z eines der beiden benachbarten Intervalle, im dritten Falle das z der beiden Nachbarintervalle zu benutzen, um die Konstanten zu bestimmen. Man findet so, wenn das z des nach dem oberen Extrem zu gelegenen Intervalles mit z_1, das in entgegengesetzter Richtung liegende mit z_{-1} bezeichnet und die in Erstreckung der ganzen Tafel sich behauptende Intervallgröße nach früherer Festsetzung i genannt wird, im ersten Falle:

$$\zeta = \frac{z_0}{i}; \tag{1}$$

im zweiten Falle:

$$\zeta = \frac{z_0}{i} - (a - a_0)\frac{z_0 - z_1}{i^2} \text{ oder } = \frac{z_0}{i} + (a - a_0)\frac{z_0 - z_{-1}}{i^2}; \tag{2}$$

im dritten Falle:

$$\zeta = \frac{z_0}{i} + \frac{2z_0 - z_1 - z_{-1}}{24i} + (a - a_0)\frac{z_1 - z_{-1}}{2i^2} - (a - a_0)^2\frac{2z_0 - z_1 - z_{-1}}{2i^3}; \tag{3}$$

Formeln, deren Gültigkeitsbereich in jedem Falle über das Intervall mit den Grenzen $a_0 - \frac{1}{2}i$ und $a_0 + \frac{1}{2}i$ sich erstreckt.]

[Will man nun auf Grund der so konstruierten funktionellen Abhängigkeit das dichteste a des Intervalles bestimmen, so erweist sich bloß die Formel (3) hierzu brauchbar; denn (1) liefert durchweg konstante, (2) ständig wachsende oder ständig abnehmende Werte. Aus (3) aber ergiebt sich der Maximalwert oder dichteste Wert:

$$a = a_0 + \frac{i}{2} \cdot \frac{z_1 - z_{-1}}{2z_0 - z_1 - z_{-1}}, \tag{4}$$

sofern nur $2z_0 - z_1 - z_{-1} > 0$. Ist letzterer Wert kleiner als Null, so stellt a ein Minimum dar, ist aber $2z_0 - z_1 - z_{-1} = 0$, so wird (3) linear und zur Bestimmung eines Maximums unbrauchbar. Soll überdies, wie erforderlich, das Maximum innerhalb des untersuchten Intervalles liegen, so muss sowohl z_1 als auch z_{-1}, jedes für sich, kleiner als z_0 sein.]

[Statt auf die Mitte a_0 kann sich die Bestimmung des dichtesten Wertes auch auf die Grenzen des Intervalles: $g_1 = a_0 - \frac{1}{2}i$ und $g_2 = a_0 + \frac{1}{2}i$ beziehen. Man findet, wenn $a - g_1 = x$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} x &= i \cdot \frac{z_0 - z_{-1}}{2z_0 - z_1 - z_{-1}}; \\ i - x &= i \cdot \frac{z_0 - z_1}{2z_0 - z_1 - z_{-1}}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

woraus die einfache Proportion:

$$x:(i-x)=(z_0-z_{-1}):(z_0-z_1) \tag{6}$$

folgt.]

[Die Bestimmung von D_i erledigt sich mithin mittelst obiger Formeln, indem zunächst das Intervall mit dem Maximal-z, d. i. der roh bestimmte dichteste Wert, aufgesucht, und dann die Lage von D_i innerhalb dieses Intervalles durch den Ansatz der Proportion (6) oder aus den Gleichungen (5) oder (4) berechnet wird. Existiert nur ein Maximal-z, so ist die erreichte Genauigkeit hinreichend, und die Beiziehung schärferer Interpolationsformeln unter Berücksichtigung der z von vier oder mehr benachbarten Intervallen im allgemeinen nicht nötig. Ja man gewinnt selbst auch dann noch eine brauchbare Bestimmung, wenn zwei benachbarte Maximal-z die rohe Bestimmung des dichtesten Wertes im Ungewissen lassen. Es wird nämlich, wenn $z_0=z_{-1}$, $x=0$, und wenn $z_0=z_1$, $x=i$, so dass stets die gemeinsame Grenze der beiden, mit dem Maximal-z behafteten Intervalle als D_i in Anspruch zu nehmen ist.]

§ 88. [Auf diesem Wege wurden die Werte D_i der verschiedenen Reduktionsstufen und Reduktionslagen des VIII. Kap. berechnet. Nicht anders wird es in den späteren Kapiteln gehalten werden. Es kann indessen erwünscht sein, für den Fall, dass zwei benachbarte Maximal-z auftreten, eine schärfere Formel zur Verfügung zu haben. Ja es wäre eine solche unumgänglich, wenn — was allerdings kaum zu erwarten ist und eintretenden Falles durch Änderung der Reduktionslage vermieden werden kann — drei succedierende Maximal-z das Versagen der obigen Formeln bedingen würden. Dann ist noch ein weiteres Intervall zu den bisher berücksichtigten hinzuzunehmen, um ζ als eine Funktion dritten Grades bestimmen zu können. Es sei dies das auf das Intervall mit $z=z_1$ folgende Intervall mit $z=z_2$. Setzt man nun wie oben $a=g_1+x$ oder $=g_2-(i-x)$, wo g_1 und g_2 die untere und obere Grenze des Intervalles mit der Mitte a_0 und $z=z_0$ sind, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l}\zeta=\alpha+\beta(i-x)-\gamma(i-x)^2-\delta(i-x)^3;\\ 12\,i\alpha=7z_0+7z_1-z_{-1}-z_2;\; 12\,i^2\beta=15z_0-15z_1-z_{-1}+z_2\\ 4\,i^3\gamma=z_0+z_1-z_{-1}-z_2;\; 6\,i^4\delta=3z_0-3z_1-z_{-1}+z_2.\end{array}\right\} \tag{7}$$

Hieraus folgt als Maximalwert, wenn z. B. $z_0 = z_1$ und $z_0 > z_2 > z_{-1}$:

$$x = \frac{i}{2(z_2 - z_{-1})}\left(2z_0 + z_2 - 3z_{-1} - \sqrt{(2z_0 - z_2 - z_{-1})^2 + \tfrac{2}{3}(z_2 - z_{-1})^2}\right). \quad (8)$$

Man findet ferner:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{i}{2}\left(3 - \tfrac{1}{3}\sqrt{15}\right), \text{ wenn } z_2 = z_1 = z_0\,; \\ x &= \frac{i}{2}\left(1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{15}\right), \text{ wenn } z_{-1} = z_1 = z_0\,; \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

wonach die Lage von D_i wechselt, je nachdem man das auf die drei Maximal-z folgende oder das vorhergehende Intervall berücksichtigt. Dieser Unsicherheit kann nur durch Beiziehen der beiden Nachbarintervalle begegnet werden.]

[Geschieht dies, indem man $z_0 = z_1 = z_{-1}$ annimmt und außer dem folgenden Intervall mit $z = z_2$ noch das vorangehende Intervall mit $z = z_{-2}$ berücksichtigt, so erhält man zur Bestimmung des Maximums, für $x = a - g_1$, die Gleichung:

$$\left.\begin{gathered} \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 = 0\,; \\ 12 i^2 \alpha = -z_0 + z_{-2}\,;\ \ 8 i^3 \beta = z_{-2} - z_2\,;\ \ 6 i^4 \gamma = z_0 - z_{-2}\,; \\ 24 i^5 \delta = -2z_0 + z_2 + z_{-2}\,; \end{gathered}\right\} \quad (10)$$

mit der Bedingung:

$$2\beta + 6\gamma x + 12\delta x^2 < 0\,.]$$

§ 89. [Während so die Existenz von D_i unabhängig von dem Bestehen eines Verteilungsgesetzes ist, und seine Bestimmung in successiver Annäherung durch Interpolation erreicht werden kann, wird die Existenz von D_p gerade durch das vorausgesetzte Verteilungsgesetz, unseren Falles durch das zweiseitige G. G., gefordert, und seine Berechnung aus den gegebenen Tafelwerten ist auf Grund seiner mathematisch formulierten Eigenschaften vorzunehmen. Es würde zwar, wenn die unvermeidlichen, unausgeglichenen Zufälligkeiten ein genaues Zutreffen des Verteilungsgesetzes nicht hindern würden, der dichteste Wert von vorn herein die Eigenschaften von D_p besitzen, mithin $D_i = D_p$ sein; und es wäre alsdann kein Anlass vorhanden, neben D_i noch D_p zu berechnen, wenn nicht auch in diesem Falle die scharf formulierten Eigenschaften von D_p eine größere Sicherheit als die Annäherungen des Interpolalionsverfahrens böten. Insofern aber der Gang der Tafelwerte niemals völlig den Forderungen des Gesetzes entspricht, weichen D_i und D_p auseinander; und es muss unabhängig von D_i auch D_p bestimmt werden, um sowohl in dem Unterschiede ihrer Lage einen Maßstab für das Zutreffen des Verteilungsgesetzes zu gewinnen, als auch in D_p einen geeigneteren Ausgangswert wie in D_i zur Anwendung jenes Gesetzes zu erhalten.]

[Es wird nun D_p, in solidarischem Zusammenhange mit dem zweiseitigen G. G., durch die Eigenschaft definiert, dass die Anzahlen der unteren und oberen Abweichungen bezüglich desselben sich verhalten wie die Mittelwerte der unteren und oberen Abweichungen, oder dass:

$$m_{,} : m' = e_{,} : e' . \tag{11}$$

Da diese Eigenschaft des theoretisch wahrscheinlichsten Wertes ein Ausfluss des Verteilungsgesetzes ist, so steht unter Voraussetzung der Gültigkeit dieses Gesetzes von vornherein fest, dass ein und nur ein derartiger Wert in unseren Verteilungstafeln existiert und in der Nähe von D_i zu suchen ist. Es hat aber ein Interesse, nachzuweisen, dass D_p einerseits nicht, wie A oder C, in jeder beliebigen Tafel existiert und andererseits in mehrfacher Auflage vorkommen kann.]

[Zu diesem Zwecke setze man eine Verteilungstafel mit äquidistanten a voraus, deren z das eine Mal durchweg konstant, das andere Mal durchweg das nämliche Vielfache der zugehörigen a darstellen.]

[Im ersteren Falle sind die z gleichmäßig auf die ganze Tafel zu verteilen; es ist mithin, zwischen den Grenzen $a = b$ und $a = c$:

$$\zeta = \alpha ,$$

wo α eine Konstante bedeutet; und für ein beliebiges a findet man:

$$e_{,} = \tfrac{1}{2}(a - b) ; \quad e' = \tfrac{1}{2}(c - a)$$
$$m_{,} = \alpha(a - b) ; \; m' = \alpha(c - a) ,$$

so dass jedes a die Eigenschaft von D_p besitzt.]

[Im zweiten Falle ergiebt sich durch Interpolation die stetige Verteilung:

$$\zeta = \alpha \cdot a$$

und wählt man als Grenzen $a = 0$; $a = c$, so erhält man bezüglich eines beliebigen a:

$$e_{,} = \frac{a}{3}; \quad e' = \frac{2c^2 - ac - a^2}{3(a + c)};$$

$$m_{,} = \frac{\alpha}{2} a^2; \quad m' = \frac{\alpha}{2}(c^2 - a^2);$$

so dass als Lösungen der Gleichung:

$$e_{,}m' - e'm_{,} = 0$$

nur die beiden Werte $a = 0$ und $a = c$ resultieren, für welche $e_{,}$ und $m_{,}$ resp. e' und m' gleich Null sind. Von diesen Grenzwerten wird aber von vornherein in jeder Tafel die Bedingungsgleichung für D_p erfüllt, ohne dass man sie als D_p-Werte in Anspruch nimmt. Es giebt somit in diesem Falle kein D_p innerhalb der Tafel.]

[Infolge dieses Vorkommens kann es wünschenswert erscheinen, ein Kriterium für das Vorhandensein von D_p zu besitzen. Ein solches bietet sich in einfacher Weise durch folgende Erwägung. Ist für den Beginn der Tafel nachweisbar $e_{,} : m_{,} > e' : m'$, für das Ende $e_{,} : m_{,} < e' : m'$, so muss für einen mittleren Wert $e_{,} : m_{,} = e' : m'$ sein, da die Quotienten $e_{,} : m_{,}$ und $e' : m'$ infolge der stetigen Verteilung der z auf die einzelnen Intervalle sich mit der Lage des Wertes, auf den sie sich beziehen, stetig ändern. Nun ist aber, wenn z_α das z von $E_{,}$, z_ω dasjenige von E' darstellt und die untere Grenze des Intervalles von $E_{,}$ mit b, die obere Grenze des Intervalles von E' mit c bezeichnet wird, für den Anfang der Tafel:

$$\frac{e_{,}}{m_{,}} = \frac{i}{2 z_\alpha}; \quad \frac{e'}{m'} = \frac{A - b}{m};$$

für das Ende der Tafel:

$$\frac{e_{,}}{m_{,}} = \frac{c - A}{m}; \quad \frac{e'}{m'} = \frac{i}{2 z_\omega}.$$

Es existiert daher jedenfalls ein Wert D_p innerhalb der Tafel, wenn:

$$z_\alpha < \frac{im}{2(A-b)}; \quad z_\omega < \frac{im}{2(c-A)} \text{ ist.]} \tag{12}$$

§ 90. [Zur Berechnung von D_p kann zunächst nur die Proportion (11) dienen, da sie diesen Wert definiert. Es lassen sich jedoch auf Grund jener Proportion folgende Eigenschaften des Wertes D_p nachweisen, die in gleicher Weise zu einer Berechnung benutzt werden können:

1) Das arithmetische Mittel der unterhalb D_p gelegenen a, d. i. $\Sigma a_, : m_,$, vermehrt um das arithmetische Mittel der oberhalb D_p liegenden a, d. i. $\Sigma a' : m'$, ist gleich dem arithmetischen Mittel aller a, vermehrt um D_p selbst. Mithin:

$$\frac{\Sigma a_,}{m_,} + \frac{\Sigma a'}{m'} = A + D_p. \tag{13}$$

2) Die Differenz der Mittelwerte aus den unteren und oberen Abweichungen der a bezüglich D_p ist gleich der Differenz aus dem Werte D_p selbst und dem arithmetischen Mittel der a; somit:

$$e_, - e' = D_p - A. \tag{14}$$

Die Verbindung letzterer Gleichung mit (11) führt zu der weiteren Bestimmung:

$$e_, + e' = \frac{m}{u}(A - D_p), \tag{15}$$

wo $u = m' - m_,$. Durch Addition und Subtraktion von (14) und (15) gewinnt man ferner:

$$\left.\begin{aligned} e_, &= \frac{m_,}{u}(A - D_p) \\ e' &= \frac{m'}{u}(A - D_p) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Der Beweis von (13) wird erbracht, indem durch Substitution der Werte

$$e_, = D_p - \frac{\Sigma a_,}{m_,}; \quad e' = \frac{\Sigma a'}{m'} - D_p \tag{17}$$

in die aus der Proportion (11) sich ergebende Gleichung $e' m_, = e_, m'$ mittelst einfacher Rechnung die Gleichung:

$$m D_p = \frac{m'}{m_,} \Sigma a_, + \frac{m_,}{m'} \Sigma a' \tag{18}$$

hergeleitet und in derselben

$$\frac{m'}{m_,} = \frac{m}{m_,} - 1; \quad \frac{m_,}{m'} = \frac{m}{m'} - 1 \quad .$$

gesetzt wird. In der That folgt aus der so resultierenden Gleichung:

$$m D_p = m \frac{\Sigma a_,}{m_,} + m \frac{\Sigma a'}{m'} - \Sigma a \tag{19}$$

durch Division mit m die Formel (13). Ist aber diese Formel gewonnen, so folgt aus ihr, wenn $\Sigma a_, : m_,$ und $\Sigma a' : m'$ aus (17) durch D_p und $e_,$ resp. e' ausgedrückt werden, unmittelbar die Gleichung (14).]

§ 91. [Zur rechnerischen Bestimmung von D_p bietet nun die Gleichung (13) den bequemsten Ansatz. Hierzu ist jedoch eine Kenntnis des Intervalles, in das D_p fällt, erforderlich, da die Eigenschaften des gesuchten Wertes auf die Abweichungszahlen und Abweichungssummen sich gründen und nicht eine absolute Bestimmung, wie sie für A möglich ist, gestatten. Es muss somit, wo eine solche Kenntnis, die z. B. durch vorgängige Berechnung von D_t erworben werden kann, fehlt, versuchsweise der Ansatz für irgend ein Intervall gemacht und, wenn nicht zufällig das richtige Intervall getroffen wurde, für ein anderes Intervall wiederholt werden, wobei indessen das Ergebnis der zuerst geführten, fehlschlagenden Rechnung die Wahl des Intervalles bei der Wiederholung des Versuches zu beeinflussen hat. Bietet die Tafel keine großen Abnormitäten, so wird es sich bei diesen Versuchen nur um die Wahl zwischen benachbarten Intervallen handeln.]

[Hat man demgemäß ein bestimmtes Intervall, dessen Mitte a_0, dessen untere Grenze g_1 und dessen z gleich z_0 sei, als Eingriffsintervall gewählt und für dasselbe v, n, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{N}$ berechnet, so ist bei roher Bestimmung in Übereinstimmung mit (13):

$$D_p = \frac{\mathfrak{Y}}{v} + \frac{\mathfrak{N} + a_0 z_0}{n + z_0} - A = \frac{\mathfrak{Y}(n + z_0)^2 + v^2 (\mathfrak{N} + a_0 z_0)}{m v (n + z_0)}; \tag{20a}$$

oder:

$$D_p = \frac{\mathfrak{V} + a_0 z_0}{v + z_0} + \frac{\mathfrak{N}}{n} - A = \frac{(\mathfrak{V} + a_0 z_0)\, n^2 + \mathfrak{N}(v + z_0)^2}{m\,(v + z_0)\, n}; \quad (20\text{b})$$

je nachdem D_p kleiner oder größer als a_0. Es ist somit die erstere Formel zutreffend, wenn $a_0 - D_p < \frac{1}{2} i$, die letztere, wenn $D_p - a_0 < \frac{1}{2} i$ sich ergiebt.

Für scharfe Bestimmung ist aber von dem Ansatz:

$$D_p = \frac{\mathfrak{V} + Y}{v + y} + \frac{\mathfrak{N} + a_0 z_0 - Y}{n + z_0 - y} - A \quad (21)$$

auszugehen, wo Y die Eingriffssumme, y die Eingriffszahl bedeutet. Setzt man hier nach Kap. IX, Formel (8) und (13), wenn x das Eingriffsmaß $= D_p - g_1$ angiebt[1]):

$$Y = \frac{x}{I} z_0 \left(g_1 + \frac{x}{2}\right); \quad y = \frac{x}{I} z_0;$$

so erhält man folgende Gleichung für $x = D_p - g_1$:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0; \\ &\alpha = \frac{z_0}{2I}\left(v - n + \frac{2 z_0}{I}(A - a_0)\right); \\ &\beta = v\,(n + z_0) + \frac{z_0}{I}\left(\mathfrak{V} - \mathfrak{N} - a_0 z_0 + A\,(n + z_0 - v)\right); \\ &\gamma = \mathfrak{V}\,(n + z_0) + v\,(\mathfrak{N} + a_0 z_0) - (g_1 + A)\, v\,(n + z_0); \end{aligned}\right| \quad (22)$$

mit der Bedingung, dass x positiv und kleiner als I sei.]

[Da jedoch diese Bestimmungsweise keineswegs bequem ist, soll D_p zu irgend einem in dem nämlichen Intervall liegenden Hauptwerte H in Beziehung gesetzt werden, um auf Grund der besonderen Eigenschaften des jeweils gewählten H einfachere Gleichungen zu gewinnen.]

[Zu diesem Zwecke mögen die Anzahlen und die Summen der unterhalb und oberhalb H gelegenen a durch $m_{\prime\prime}$, m'', $\Sigma a_{\prime\prime}$, $\Sigma a''$ bezeichnet, ferner $D_p - H = x'$ und die zwischen D_p und H liegenden

1) [Wollte man die einfacher scheinende, jedoch ungenauere Formel (6) des Kap. IX, nämlich $Y = a_0 z_0 x : I$, benutzen, so würde an Stelle von (22) eine Gleichung dritten Grades für x resultieren; es hätte somit der Verlust an Genauigkeit überdies eine Einbuße an rechnerischer Bequemlichkeit zur Folge.]

a ihrer Anzahl nach gleich y', ihrer Summe nach gleich Y' gesetzt werden, so dass:

$$Y' = \frac{x'}{I} z_0 \left(H + \frac{x'}{2}\right); \quad y' = \frac{x'}{I} z_0 .$$

Man gewinnt dann aus dem Ansatze:

$$D_p = \frac{\Sigma a_{,,} + Y'}{m_{,,} + y'} + \frac{\Sigma a'' - Y'}{m'' - y'} - A \tag{23}$$

für $x' = D_p - H$ die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha' x'^2 - \beta' x' + \gamma' = 0; \\ &\alpha' = \frac{z_0}{2I}\left(m_{,,} - m'' + \frac{2 z_0}{I}(A - H)\right); \\ &\beta' = m_{,,} m'' + \frac{z_0}{I}\left(\Sigma a_{,,} - \Sigma a'' + A(m'' - m_{,,})\right); \\ &\gamma' = \Sigma a_{,,} \cdot m'' + \Sigma a'' \cdot m_{,,} - (H + A)\, m'' m_{,,}; \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

die für $H = g_1$ in (22) übergeht. Aus derselben muss sich ein x' ergeben, das entweder positiv und kleiner als $g_2 - H$ (wo g_2 die obere Grenze des Eingriffsintervalles ist), oder negativ und seinem absoluten Werte nach kleiner als $H - g_1$ ist.]

[Diese Gleichung führt nun, wenn entweder das arithmetische Mittel A oder der Zentralwert C oder der Scheidewert R in das Intervall von D_p fällt und als H gewählt wird, zu folgenden Bestimmungen:

1) Es sei: $H = A$; $x = D_p - A$; dann ist:

$$x^2 \frac{z_0}{2I}(\mu_, - \mu') - x\left(\mu_, \mu' - \frac{z_0}{I}\Sigma\Delta\right) + \tfrac{1}{2}\Sigma\Delta(\mu_, - \mu') = 0; \tag{25}$$

wo $\mu_,$ und μ' die Abweichungszahlen, $\Sigma\Delta$ die Gesamtsumme der Abweichungen bez. A vorstellen.

2) Es sei sodann: $H = C$; $x = D_p - C$; dann resultiert:

$$x^2 \frac{z_0^2}{I^2}(A - C) - x\left(\frac{m^2}{4} - \frac{z_0}{I}(\Sigma a'' - \Sigma a_{,,})\right) + \frac{m^2}{4}(A - C) = 0; \tag{26}$$

wo $\Sigma a_{,,}$ und $\Sigma a''$ auf C sich beziehen.

3) Es sei schließlich: $H = R$; $x = D_p - R$; dann ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} x^2 \frac{z_0}{2I}\left(m_{,,} - m'' + \frac{2z_0}{I}(A - R)\right) - x\left(m_{,,}m'' + \frac{z_0}{I}A(m'' - m_{,,})\right) \\ + \left(\frac{m^2}{2} - m''m_{,,}\right)A - m''m_{,,}R = 0; \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

wo $m_{,,}$ und m'' bezüglich R zu nehmen sind.]

[Der Anwendungsbereich dieser Bestimmungsweisen wird noch erweitert, wenn man für den Fall, dass D_p und der Hauptwert, auf den die Rechnung Bezug nimmt, in benachbarte Intervalle fallen, eine Verschiebung des Eingriffsintervalles vornimmt oder, mit anderen Worten, das Eingriffsintervall aus aneinanderstoßenden Teilen zweier Nachbarintervalle zusammensetzt. Das z_0 dieses zusammengesetzten Intervalles setzt sich dann aus den proportional bestimmten z seiner Teile zusammen, während die bez. des Hauptwertes geltenden Bestimmungen erhalten bleiben.]

§ 92. [Von diesen Formeln wird (26) im allgemeinen vorzuziehen sein. Denn (27) bezieht sich auf einen wenig interessierenden Hauptwert, dessen genaue Berechnung selbst schon nach Kap. X (19b) die Auflösung einer Gleichung zweiten Grades erfordert; während (25) dadurch im Nachteil steht, dass A dem Lagengesetze gemäß von D_p durch C getrennt ist und somit weniger häufig als C mit D_p im nämlichen Intervalle liegen wird. Es ist ferner nicht als Nachteil zu empfinden, dass die Gleichung (26) die Kenntnis der beiden Werte A und C erheischt, da man neben D_p stets auch A und C berechnen wird.]

[Es ist darum angezeigt, die auf die Kenntnis von C und A zu gründende Berechnung von D_p nach (26) auf eine möglichst einfache Form zu bringen.]

[Zu diesem Zwecke dividiere man (26) durch $\frac{1}{4}m^2 x$ und schreibe die Gleichung wie folgt:

$$\frac{C - A}{x} = \frac{4z_0}{Im^2}(\Sigma a'' - \Sigma a_{,,}) - 1 - \frac{4z_0^2}{I^2 m^2} x (C - A) \qquad (28)$$

Setzt man nun:

$$\xi = \frac{C - A}{x}, \text{ also } x = \frac{C - A}{\xi},$$

so erhält man:

$$\xi = \frac{4\varkappa_0}{Im^2}(\Sigma a'' - \Sigma a_{\prime\prime}) - 1 - \frac{4\varkappa_0^2 (C-A)^2}{I^2 m^2} \cdot \frac{1}{\xi}, \tag{29}$$

wodurch eine Kettenbruchdarstellung für ξ gegeben wird, die rasch konvergiert, da $2\varkappa_0(C-A):(Im)$ für unsere Tafeln kleine Werte darstellt.]

[Der Gang der Rechnung ist mithin der Art einzurichten, dass auf Grund von

$$\alpha = \frac{4\varkappa_0}{Im^2}(\Sigma a'' - \Sigma a_{\prime\prime}); \quad \beta = \frac{4\varkappa_0^2(C-A)^2}{I^2 m^2}$$

der Reihe nach:

$$\xi_1 = \alpha - 1;$$
$$\xi_2 = \alpha - 1 - \frac{\beta}{\xi_1};$$
$$\xi_3 = \alpha - 1 - \frac{\beta}{\xi_2};$$
etc.

bestimmt und, wenn die Rechnung zum Stehen gekommen, aus dem gefundenen Werte von ξ der Wert von $x = D_p - C$ hergeleitet wird. Zugleich ergiebt sich dann in einfacher Weise der Wert von

$$p = \frac{D-C}{D-A} \text{ gleich } \frac{1}{\xi + 1}.]$$

[Aus der Gleichung (26) folgt überdies, dass von den empirisch bestimmten Hauptwerten A, C und D_p bei den für unsere Tafeln geltenden Größenverhältnissen das Lagengesetz von vornherein erfüllt wird. Bringt man nämlich jene Gleichung in die Form:

$$(A-C)\left(\frac{x^2\varkappa_0^2}{I^2} + \frac{m^2}{4}\right) + x\frac{\varkappa_0}{I}\left(\Sigma a'' - \Sigma a_{\prime\prime} - \frac{Im^2}{4\varkappa_0}\right) = 0,$$

so folgt, wofern

$$\Sigma a'' - \Sigma a_{\prime\prime} > \frac{Im^2}{4\varkappa_0},$$

dass $A - C$ und x, d. i. $D_p - C$, weder gleichzeitig positiv, noch gleichzeitig negativ sein können. Es ist daher, da die angegebene Bedingung in der That von den Verteilungstafeln erfüllt wird,

entweder $A > C > D_p$ oder $A < C < D_p$,

wie das Lagengesetz es verlangt.]

XII. Gründe

dafür, dass wesentliche Asymmetrie der Abweichungen bezüglich des arithmetischen Mittels und Gültigkeit des asymmetrischen Verteilungsgesetzes bezüglich des dichtesten Wertes D im Sinne des verallgemeinerten Gauss'schen Gesetzes (Kap. V) der allgemeine Fall sei.

§ 93. Gemäß dem (§ 4) gemachten Unterschiede zwischen wesentlichen und unwesentlichen Bestimmungen kann man geneigt sein, auch eine wesentliche und unwesentliche (oder zufällige) Asymmetrie der Abweichungen bezüglich eines Hauptwertes, wie des arithmetischen Mittels oder dichtesten Wertes, zu unterscheiden. Richten wir hier die Betrachtung in dieser Hinsicht zunächst auf das arithmetische Mittel A. Gewiss ist, dass selbst bei symmetrischer W. der Abweichungen bez. A durch unausgeglichene Zufälligkeiten ein Unterschied zwischen dem Abstande der Extreme E', $E_{,}$ von A und ein Unterschied u zwischen der Zahl der beiderseitigen Abweichungen μ' und $\mu_{,}$ hervorgehen kann, und so kann man nach Merkmalen fragen, wodurch sich eine w e s e n t l i c h e Asymmetrie bez. A, die nicht von unausgeglichenen Zufälligkeiten abhängt, von einer unwesentlichen oder zufälligen, die davon abhängt, unterscheidet. Abgesehen nun von den in Kap. II angegebenen allgemeinen, etwas unbestimmten Merkmalen, wodurch wesentliche von unwesentlichen Bestimmungen zu unterscheiden sind, kann man hierbei darauf fußen, dass der durch bloße unausgeglichene Zufälligkeiten entstehende Unterschied u zwischen μ' und $\mu_{,}$ einer Wahrscheinlichkeitsbestimmung fähig ist, und dass sich die wahrscheinliche Größe desselben angeben lässt. Nach Maßgabe nun, als dieser wahrscheinliche Unterschied überschritten wird, wird es unwahrscheinlicher, dass die Asymmetrie eine bloß zufällige sei, und giebt es selbst Regeln, den Grad der Unwahrscheinlichkeit zu bestimmen, ohne dass freilich eine absolute Gewissheit hierbei erreichbar ist; worüber ich auf die Bemerkungen in § 31 (historisch) zurückweise und auf die Wahrscheinlichkeitsformeln des XIV. Kapitels verweise. Und so könnte man als leitenden Gesichtspunkt nach vorwiegender Wahrscheinlichkeit aufstellen, nur solche Fälle der Asymmetrie bezüglich A für wesentlich zu halten und eine Bewährung der Gesetze wesentlich asymmetrischer Verteilung dafür zu suchen, wo der bezüglich A sich ergebende wahrscheinliche Wert von u nicht unerheblich überstiegen wird.

In der That habe ich von vornherein die Sache so gefasst, aber mich nachmals überzeugt, wie schon in § 32 bemerkt, dass diese, zunächst so natürlich, ja geboten erscheinende Auffassung gänzlich den richtigen Gesichtspunkt verfehlt. Sie würde haltbar sein, wenn die symmetrische W. der Abweichungen bezüglich A der allgemein vorauszusetzende Fall wäre, und nur, wie man vom Anfange herein voraussetzen konnte und noch von Quetelet vorausgesetzt wird, Ausnahmen erlitte, die besonders herausgesucht und rechnend behandelt sein wollten. Anders stellt es sich aber, wenn vielmehr im Sinne der schon vorgreiflich ausgesprochenen Ansicht die wesentliche Asymmetrie der allgemeine Fall ist, welcher unter den unzähligen Graden, in welchen die Asymmetrie vorkommen kann, den, wo sie verschwindet, nur als besonderen, in aller Strenge vielleicht nie vorkommenden Fall enthält.

§ 94. Dann ist ein prinzipieller Unterschied zwischen wesentlicher und unwesentlicher Asymmetrie gar nicht zu machen; alle K.-G. dürfen, ja müssen unter der Voraussetzung der asymmetrischen W. behandelt werden, mit Rücksicht nur, dass bei endlichem m wegen unausgeglichener Zufälligkeiten die Größe und Richtung der Asymmetrie zufällig von derjenigen abweichen kann, welche bei unendlichem m sich als wesentliche herausstellen würde; und der durchschlagende Grund, es so zu fassen, ist, dass selbst in den Fällen, wo nach den vorliegenden Wahrscheinlichkeitsformeln die Asymmetrie bezüglich A möglicherweise nur zufällig sein könnte, die in § 33 angeführten Gesetze der Asymmetrie sich in einer mir selbst unerwarteten Allgemeinheit bestätigen.

Nun gestehe ich allerdings, dass es mir selbst befremdend erschienen ist, und überhaupt ein Rätsel darin gefunden werden kann, dass bei so schwacher Asymmetrie, wie sie vielfach bei den K.-G. des VII. und VIII. Kap. vorkommt, in Konflikt mit den unausweichlichen Zufälligkeiten wegen Endlichkeit des m, doch die oben aufgestellten Gesetze der Asymmetrie sich mit merkwürdiger Allgemeinheit und Approximation bestätigen.

Nehmen wir z. B. die Schädeldimensionen. 450 Exemplare europäischer Schädel geben für den Vertikalumfang (bei $i = 5$ mm $E_, = 368$) 220 negative, 230 positive Abweichungen von A_2, dieselben Schädel für den horizontalen Umfang unter entsprechenden Verhältnissen gar 226 negative, 224 positive Abweichungen, Unterschiede, die viel zu unbedeutend sind, um nicht von unausgeglichenen Zufälligkeiten überwuchert zu werden; und doch geben diese Fälle, sowie zahlreiche andere von gleicher Ordnung der Unterschiede, nicht minder gute Bestätigungen der aufgestellten Asymmetriegesetze als die Beispiele von stärkerer Asymmetrie, was ich mir bisher nur so zu erklären weiß, dass die verschiedenen Elemente, auf deren Verhältnisse sich die betreffenden Gesetze beziehen, von den unausgeglichenen Zufälligkeiten im Zusammenhange betroffen, hieraus in gleicher Richtung und nahehin um gleiche Größen oder in gleichem Verhältnis abgeändert werden, so dass vielmehr nur die absoluten Größen als die gesetzlichen Unterschiede oder Verhältnisse der Elemente darunter leiden, womit nicht behauptet ist, dass diese gleiche oder proportionale Änderung g e n a u erfolge, sondern nur so weit, dass der Spielraum, den die Gesetze noch übrig lassen, nicht überschritten wird. Diese Auffassung mag noch einer gründlicheren mathematischen Diskussion bedürftig sein; in Erwartung einer solchen bleibt jedenfalls die **Thatsache** bestehen, dass selbst die schwächsten Grade der Asymmetrie bezüglich A den aufgestellten Verteilungsgesetzen der Asymmetrie noch ihre Gültigkeit bewähren und dadurch selbst beitragen, die Allgemeinheit einer mehr als bloß zufälligen Asymmetrie zu beweisen[1]).

Besteht nun aber eine solche im angegebenen Sinne für die K.-G., so ist die Anwendung mathematischer Wahrscheinlichkeitsformeln zur Unterscheidung wesentlicher und unwesentlicher Asymmetrie eigentlich müßig. Möchte immer für Gegenstände von schwacher Asymmetrie dadurch nachweisbar sein, dass die Asymmetrie bezüglich A möglicherweise nur zufällig sein könnte; was ist damit gethan, wenn die faktische Untersuchung beweist, dass sie den Gesetzen wesentlicher Asymmetrie gehorchen; indes, da diese Formeln doch ein gewisses theoretisches Interesse für unser Gebiet behalten, will ich in den folgenden Kapiteln darauf eingehen, ohne folgends praktischen Anlass zu haben, darauf zu fußen.

§ 95. Stelle ich nun überhaupt die Gründe zusammen, welche uns zu veranlassen haben, statt einer wesentlichen Symmetrie eine wesentliche Asymmetrie bezüglich A und eine Verallgemeinerung des G. G. im Sinne der § 33 angeführten Gesetze zuzulassen, so sind es folgende.

1) Da es jedenfalls Fälle eines so großen $u:m$ giebt, bei denen man nach weit überwiegenden Wahrscheinlichkeitsgründen nicht umhin kann, das Vorhandensein wesentlicher Asymmetrie bezüglich A zuzulassen, so kann der allgemeine Fall keinesfalls in wesentlicher Symmetrie bez. A gesucht werden; wohl aber, wenn überhaupt etwas Allgemeines für K.-G. in dieser Beziehung gelten soll, in wesentlicher Asymmetrie, worunter wesentliche Symmetrie und schwache Asymmetrie als besondere Fälle treten.

2) Wenn man einen und denselben K.-G. einer vergleichenden Verteilungsrechnung nach dem für wesentliche Asymmetrie geltenden, zweispaltigen Gauss'schen Verteilungsgesetze (§ 33) und dem für wesentliche Symmetrie geltenden, einfachen Gauss'schen Vertei-

---

1) [Man vergl. hierzu die theoretische Ableitung des asymmetrischen Verteilungsgesetzes § 136, wonach die Hauptwerte sich nur um Größen von der Ordnung i oder $1:\sqrt{m}$ unterscheiden, welch letztere so klein vorauszusetzen sind, dass ihre Quadrate i^2 oder $1:m$, endlichen Größen gegenüber, vernachlässigt werden dürfen.]

lungsgesetze (§ 24 flgd.) unterzieht, so ist die erstere Verteilungsrechnung von vornherein dadurch im Vorteil, dass sie das empirisch verschiedenne m', $m_{,}$ bez. D beiderseits genau wiedergiebt, wogegen letztere für das empirisch verschiedene μ', $\mu_{,}$ bez. Δ denselben Wert $\frac{1}{2}(\mu' + \mu_{,}) = \frac{1}{2}m$ giebt, der also für die eine Seite um ebensoviel gegen die empirische Abweichungszahl zu groß als auf der anderen zu klein ausfallen muss. Dieser im Prinzip der verglichenen Rechnungsweisen begründete Vorteil für die Rechnung nach der Verallgemeinerung des G. G. für Asymmetrie würde nun zwar an sich nicht hindern, dass in den einzelnen Verteilungsbestimmungen der $m'\varphi'$ und $m_{,}\varphi_{,}$ (§ 27) sich um so größere und im ganzen überwiegende Nachteile gegen die Rechnungsweise nach dem einfachen G. G. geltend machten; aber so weit ich Vergleiche angestellt habe, ist das Gegenteil der Fall.

3) Die Gesetze der wesentlichen Asymmetrie, welche § 33 für den Fall eines hinreichend großen m und Erfüllung der in Kap. IV angegebenen Requisiten aufgestellt sind und weiterhin ihre theoretische Begründung finden werden, bestätigen sich an dem vorliegenden Untersuchungsmaterial allgemein mit solcher Annäherung an die idealen Forderungen, wie es nur bei den doch nicht ganz ausschließbaren unausgeglichenen Zufälligkeiten erwartet werden kann, und beweisen damit zugleich die Richtigkeit dieser Theorie.

So gilt es zuvörderst bezüglich des Proportionalgesetzes. Nach den gegebenen Erklärungen besteht es darin, dass bezüglich des Wertes, auf den das größte z fällt, kurz bezüglich des dichtesten Wertes, die Zahl der beiderseitigen Abweichungen sich wie die Größe ihrer mittleren Werte, d. i. $m_{,} : m' = e_{,} : e'$ verhält, wonach umgekehrt der Wert, bezüglich dessen dies Verhältnis zutrifft, mit dem durch sein z-Maximum direkt bestimmten dichtesten Werte zusammenfallen muss. Nachdem wir nun eine Verteilungstafel durch angemessene Reduktion auf einen so regelmäßigen Gang der z gebracht haben, dass eine Untersuchung seiner Gesetze und Verhältnisse überhaupt möglich ist, finden wir den daraus nach der Bedingung bestimmten Wert, dass sich bezüglich desselben $m_{,} : m' = e_{,} : e'$ verhalte, in das Intervall fallend, auf welches das größte z fällt, wie man sich überzeugen kann, wenn man einerseits das in den Tabellen der Elemente aufgeführte, überall nach jener Bedingung bestimmte D_p, andererseits die auf die Form der Intervalltafel gebrachte Verteilungstafel, aus welcher die Ableitung geschehen ist, vor Augen nimmt. Mittelst des Kap. XI angegebenen Interpolationsverfahrens aber kann man das D in dem Intervalle, worin es liegt, noch genauer bestimmen, als wenn man es direkt nach der Größe seines z zu bestimmen sucht, wonach man dann freilich in den Tabellen der Elemente nicht eine weitere Bestätigung des Proportionalgesetzes darin finden darf, dass bezüglich des darin aufgeführten dichtesten Wertes D_p sich wirklich $m_, : m' = e_, : e'$ verhält, da D_p selbst als der Wert bestimmt ist, bezüglich dessen dieses Verhältnis besteht. Nun kann allerdings ausnahmsweise dieser Wert unter dem Einflusse starker unausgeglichener Zufälligkeiten und bei ungünstiger Reduktionslage statt in das Intervall mit dem Maximal-z selbst, in das Nachbarintervall fallen; doch reicht es dann im allgemeinen hin, die Reduktionslage zu ändern, um ihn in das betreffende Intervall hineinzubringen.

Weiter aber finden wir in dem möglichst scharf auf Grund jener Proportion bestimmten Werte D_p einen Ausgangswert für Abweichungen, welche dem zweispaltigen G. G. genügen, mit zufälligen Störungen allerdings, die ja nirgends fehlen können, aber nur solchen von gleicher Ordnung, als auch bei der Verteilung der Beobachtungsfehler bezüglich des arithmetischen Mittels vorkommen und geduldet werden, wie die Bessel'schen Vergleichstabellen[1] zwischen Beobachtung und Rechnung beweisen.

Was das Lagengesetz anlangt, wonach der Zentralwert C und das arithmetische Mittel A nach derselben Seite vom dichtesten Werte in der Art abliegen, dass C zwischen A und D_p fällt, so wird man es mit seinen Konsequenzen ausnahmslos selbst bei den schwächsten $u : m$ in den Tabellen der Elemente bestätigt finden, und könnte geneigt sein, hierin den allerschlagendsten Beweis für wesentliche Asymmetrie zu finden, da bei wesenlicher Symmetrie vielmehr D_p, C, A nur durch unausgeglichene Zufälligkeiten, und dann in unbestimmter

---

1) [Fundamenta astronomiae, Sectio II, p. 19. 20.]

gegenseitiger Lage, von einander abweichen könnten. Doch ist hierauf nichts zu geben. Es lässt sich nämlich nachweisen, dass das Lagengesetz eine notwendige Konsequenz des Proportionalgesetzes ist[1], und sofern D_p in den Tabellen der Elemente durch das Proportionalgesetz bestimmt ist, muss sich dann freilich auch das Lagengesetz bezüglich desselben bestätigen, ohne damit beweisen zu können, dass dieser Wert dem Maximal-z entspricht, was fundamental immer nur durch den direkten Vergleich geschehen kann.

Hiergegen setzen die π-Gesetze, wodurch für die Abstände zwischen D_p, C, A bestimmte Werte festgestellt werden, die Gültigkeit des zweispaltigen G. G. voraus, ohne dass dieses eine notwendige Folge des Proportionalgesetzes ist, und tragen also, insofern sie sich in der Erfahrung mit solcher Annäherung bestätigen, als es unausgeglichene Zufälligkeiten gestatten, allerdings wesentlich bei, das Vorhandensein wesentlicher Asymmetrie zu beweisen, sofern solche mit dem zweispaltigen G. G. solidarisch ist.

Schließlich also kommen die aus den Tabellen der Elemente und den damit in Beziehung stehenden Vergleichstabellen zwischen beobachteter und berechneter Verteilung zu entnehmenden Merkmale für das Vorhandensein wesentlicher Asymmetrie darauf zurück: a) dass das nach dem Proportionalgesetz bestimmte D_p mit dem direkt bestimmten D_i so nahe zusammentrifft, als es unausgeglichene Zufälligkeiten gestatten; b) dass die Abweichungen von dem in ersterem Wege möglichst genau bestimmten D_p dem zweispaltigen G. G. in zufriedenstellender Weise genügen; c) dass die π-Gesetze mit hinreichender Annäherung erfüllt werden. Selbstverständlich muss bei all' dem die Erfüllung der Requisiten des Kap. IV vorausgesetzt werden, die überhaupt zu einer erfolgreichen Untersuchung der K.-G. erfüllt sein müssen. Sofern nun unter diesen Voraussetzungen die angegebenen Kriterien allgemein zutreffen, kann allerdings ein Schluss auf das allgemeine Vorkommen wesentlicher Asymmetrie daraus gezogen werden.

4) Verstehen wir verwandte K.-G. im Sinne folgender Beispiele,

---

1) [Vergl. den Schluss des vorhergehenden Kapitels.]

so giebt es nicht wenige Fälle, wo das u derselben bei dem zu Gebote stehenden m zu klein ist, um nicht bei jedem insbesondere die Möglichkeit der Abhängigkeit von bloß zufälliger Asymmetrie übrig zu lassen, in der Richtung aber bei allen so übereinstimmend, oder einer Abwandelung der Gegenstände so gesetzlich folgend, als sich nicht mit bloßer Zufälligkeit verträgt.

So habe ich bei Rekrutenmaßen ganz verschiedener Länder, so weit sie als vollzählig anzusehen sind, die Asymmetrie bezüglich A immer positiv gefunden, bei täglichen und monatlichen Regenmengen (Genf, Freiberg) für alle Monate negativ, für die verschiedensten Bauch- und Brustorgane des Menschen (nach Boyd) immer negativ gefunden. Bei den thermischen Monatsabweichungen andererseits kehrt sich die Richtung der Asymmetrie im Fortschritt der Monate durch das Jahr gesetzlich um, so dass sie in den Wintermonaten positiv, in den Sommermonaten schwächer negativ, in den Zwischenmonaten dazwischen schwankend ist. Bei den Roggenähren ist das u des obersten Gliedes positiv, schwächt sich beim Herabsteigen zu den unteren Gliedern und schlägt bei den untersten ins Negative um. Unstreitig zwar könnte das m aller dieser Fälle klein genug genommen werden, dass die Konstanz oder Gesetzlichkeit gestört würde oder verloren ginge, sofern mit der Kleinheit des m die unausgeglichenen Zufälligkeiten einen wachsenden Einfluss gewinnen; aber das m, was zu Gebote stand, hat hingereicht, es zu verhüten. Wäre aber keine wesentliche Asymmetrie vorhanden gewesen, so hätte sie auch bei keiner Größe des m ein so konstantes oder gesetzliches Übergewicht über die Zufälligkeiten gewinnen können. Das mehrfache Vorkommen solcher Fälle hat mich zuerst darauf geführt, der wesentlichen Asymmetrie überhaupt eine allgemeine Rolle im Gebiete der K.-G. zuzuschreiben; und unstreitig würden sich die Fälle dieser Art häufen, wenn nur hinreichende Untersuchungen mit hinreichendem m in Bezug darauf vorlägen.

XIII. Mathematische Verhältnisse der Verbindung von wesentlicher und unwesentlicher Asymmetrie.

§ 96. Sei irgend ein Wert H als Ausgangswert der Abweichungen genommen, und bestehe asymmetrische W. (wesentliche Asymmetrie) bezüglich desselben, so würde ohne Zutritt unausgeglichener Zufälligkeiten (zufällige Asymmetrie) der Unterschied u zwischen den beiderseitigen Abweichungen einfach proportional mit der Vergrößerung oder Verminderung resp. wachsen oder abnehmen. In der That sei er bei einem gegebenen Ausgangs-m gleich x, so würde er bei n-maliger Wiederholung der Beobachtung an jedesmal neuen Exemplaren desselben Gegenstandes denselben Wert x n-mal erreichen, mithin auch bei Zusammensetzung der n Beobachtungsreihen zu einer einzigen kontinuierlichen der Unterschied x in nx übergehen. Wenn dagegen die wesentliche Asymmetrie ganz wegfiele, und der Unterschied bloß von unausgeglichenen Zufälligkeiten abhinge, so würde, wenn wir beim Ausgangs-m den Unterschied y fänden, dieser Unterschied bei n-fachem m nicht gleich ny werden können, weil die Richtung und Größe des Unterschiedes bei den Wiederholungen zufällig wechselt, und, wenn schon allgemein gesprochen ein Übergewicht, unbestimmt nach welcher Seite, bleibt, ändert sich dieses, also der definitive Unterschied, solange man sich in großen Zahlen von Abweichungen bewegt, und durchschnittlich auch bei kleinen Zahlen, nach bekanntem Prinzip statt im Verhältnis n vielmehr im Verhältnis $\sqrt{n}$. Führen wir nun das zu ver-n-fachende m als Einheit der Ver-n-fachung ein und bezeichnen die von der Größe des n abhängigen Werte mit n als Index, so werden wir zu setzen haben[1]:

[1] Der Wert x hat hier konsequent mit obiger Bezeichnungsweise den Index 1, sofern er den beim Ausgangs-m, wo $n = 1$, stattfindenden Wert

für den Fall bloß wesentlicher Asymmetrie:

$$u_n = n x_1 \tag{1}$$

für den Fall bloß unwesentlicher Asymmetrie:

$$u_n = y_1 \sqrt{n} \tag{2}$$

und für den Fall des Zusammentreffens beider:

$$u_n = n x_1 + y_1 \sqrt{n} \tag{3}$$

wobei y_1 allgemein gesprochen mit x_1 gleichen oder ungleichen Vorzeichens sein kann; denn während x beim Übergange aus x_1 in $n x_1$ seine, sei es positive oder negative, Richtung beibehält, kann y_1 beim Übergange in $y_1 \sqrt{n}$ nach Zufall seine Richtung beibehalten oder wechseln, ohne dass eine allgemeine Entscheidung dazwischen vorliegt; und nehmen wir y_1 nach absolutem Werte, so werden wir mit Rücksicht auf diese Zweifelhaftigkeit zu setzen haben:

$$u_n = n x_1 \pm y_1 \sqrt{n} \tag{4}$$

und beim Ausgangs-m selbst, wo $n = 1$,

$$u_1 = x_1 \pm y_1 . \tag{5}$$

Setzen wir jetzt einmal $n = 100$, ein andermal $= 1 : 100$, so werden wir respektiv erhalten:

$$u_{100} = 100 x_1 \pm 10 y_1 , \tag{6}$$

$$u_{\frac{1}{100}} = \frac{x_1}{100} \pm \frac{y_1}{10} . \tag{7}$$

Also bei Verhundertfachung des Ausgangs-m ist nach (6) das Aus-

von x bezeichnet, entsprechend mit y. [Auch ist zu beachten, dass Formel (3) nur die schematische Darstellung der Mischung von wesentlicher und unwesentlicher Asymmetrie geben will, ohne zu besagen, dass y_1 denselben Wert wie in (2) repräsentiert. In der That sind beide Werte verschieden. Denn das auf unwesentlicher Asymmetrie beruhende Glied $y_1 \sqrt{n}$ ist nichts weiter als die nach W. zu erwartende durchschnittliche Schwankung des Wertes von u_n, während das in der wesentlichen Asymmetrie begründete Glied $n x_1$ den wahrscheinlichsten Wert von u_n darstellt; die durchschnittlich zu erwartende Schwankung um den wahrscheinlichsten Wert ist aber von dem letzteren abhängig und besitzt mithin verschiedene Werte, je nachdem der wahrscheinlichste Wert gleich Null ist oder eine endliche Größe darstellt. Vergl. hierzu den Zusatz zum folgenden Kap. (§ 101).]

gangs-x auf das 100fache, das Ausgangs-y bloß auf das 10fache gesteigert, und sollte n ins Unbestimmte vergrößert werden, so würde das definitive y, d. i. der von unausgeglichenen Zufälligkeiten abhängige Unterschied, gegen den von wesentlicher Asymmetrie abhängigen x ganz verschwinden; umgekehrt ist nach (7) bei Herabsetzung des Ausgangs-m auf 1 : 100 das Ausgangs-x auf 1 : 100, das Ausgangs-y bloß auf 1 : 10 herabgekommen, und ersteres würde bei weiterer Verkleinerung von m gegen letzteres merklich ganz verschwinden können, was nur insofern nicht ganz parallel mit der Vergrößerung von m geht, als m ins Unendliche vergrößert, aber nur bis auf 2 verkleinert werden kann, soll überhaupt noch ein Unterschied u bestehen. Allgemein aber folgt hieraus, dass die wesentliche Asymmetrie leichter bei großem, die unwesentliche bei kleinem m überwiegt, sofern wir jenes als ein in starkem Verhältnisse vergrößertes, dieses als ein in starkem Verhältnisse verkleinertes Ausgangs-m, welches man immer dafür nehmen möge, betrachten können, wovon natürlich das Bedürfnis abhängt, ein möglichst großes m anzuwenden, um die wesentliche Asymmetrie möglichst ungestört von unwesentlicher zu erhalten.

XIV. Formeln für den mittleren und wahrscheinlichen Wert des von rein zufälliger Asymmetrie abhängigen Unterschiedes *u*.

§ 97. Wenn schon oben Merkmale zur Unterscheidung der wesentlichen von der unwesentlichen Asymmetrie gegeben sind, ist doch zu gestehen, dass sie keinen absoluten Charakter haben. Auch kann man in der That nie absolut versichern, dass eine wesentliche Asymmetrie vorliegt, sondern nur, dass eine überwiegende Wahrscheinlichkeit für dieselbe besteht, eine um so mehr überwiegende, je mehr die oben angegebenen Unterscheidungsmerkmale von der zufälligen bestehen und zusammentreffen.

Um doch ein etwas bestimmteres Wahrscheinlichkeitsurteil zu fällen, ist es nützlich, zu wissen, welchen Unterschied man nach W. und im Durchschnitte schon bei wesentlicher Symmetrie nach bloßer Zufälligkeit zu finden erwarten kann.

Unter wahrscheinlicher Differenz verstehe ich diejenige, die in einer großen, streng genommen unendlichen Zahl von Fällen eben so oft unterschritten (nicht erreicht), als überschritten wird; unter mittlerer oder durchschnittlicher die, die man erhält, wenn man die bei oft wiederholten Versuchen mit gegebenem m erhaltenen Werte von u ohne Rücksicht auf das Vorzeichen addiert und mit der Zahl n der vorgenommenen Wiederholungen dividiert. In der That, hat man den einen oder anderen beider Werte für den Fall wesentlicher Symmetrie allgemein bestimmt, so wird man jeden, bei einer gegebenen Mittelbestimmung erhaltenen Wert von u damit vergleichen können. Überwiegt er jene Werte in starkem Verhältnisse, so wird man es sehr unwahrscheinlich zu finden haben, dass er bei Symmetrie erreicht werden konnte, weil die Unwahrscheinlichkeit davon mit der Größe dieses Übersteigens wächst, hiergegen eine wesentliche Asymmetrie vom Vorzeichen des u sehr wahrscheinlich halten dürfen. Bleibt er erheblich unter diesen Werten, so hat man mit großer W. auf Symmetrie oder geringe Asymmetrie von zweifelhaftem Vorzeichen zu schließen. Ja, man kann noch genauere Schlüsse ziehen. Die Theorie lehrt, und die Erfahrung bestätigt es, dass die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse, welche nach G. G. für die Beobachtungsfehler im Sinne des bekannten, tabellarisch darstellbaren Integrals bestehen, sich bei wesentlicher Symmetrie auf die u in der Art übertragen lassen, dass das Übersteigen des mittleren oder wahrscheinlichen u bis zu gegebenen Grenzen gleicher W. unterliegt wie das Übersteigen des einfach mittleren oder wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers.

Dies wird ausführlicher und genauer in den beiden folgenden Kapiteln theoretisch erwiesen, empirisch bewährt und die Anwendung davon gezeigt werden. Hier beschränke ich mich, vorgreiflich folgende Hauptbestimmungen daraus zu entlehnen, welche geeignet sind, den allgemeinsten Anhalt zu geben.

§ 98. Man hat dabei zwei Fälle zu unterscheiden, den eigentlich nur idealen Fall, dass die Werte $\varDelta$ vom wahren A gerechnet werden, wie es aus einer unendlichen Zahl von Einzelwerten, also im absoluten Normalfalle zu erlangen sein würde, und den Fall der Wirklichkeit, wo sie von dem in gewisser Weise unrichtigen A gerechnet werden, wie es aus einer endlichen Zahl von Werten zu erlangen ist. Erstenfalls ist gleichgültig, welchem Gesetze der Verteilung die einzelnen Werte nach Maß und Zahl gehorchen, nicht die Größe, nur die Zahl derselben bei gleicher W. der + und − kommt in Betracht, und man kann den bekannten Sack mit einer gleichen Anzahl weißer und schwarzer Kugeln statt + und − als Anhalt zur Berechnung nehmen. Letztenfalls muss für die theoretische Berechnung des mittleren und wahrscheinlichen u ein bestimmtes Gesetz der Verteilung zu Grunde gelegt werden, weil sich hiernach die durchschnittlich und wahrscheinlich zu erwartende Abweichung des falschen vom wahren A richtet, und diese wieder auf die Größe des durchschnittlichen und wahrscheinlichen u von Einfluss ist. Wir legen demgemäß zweitenfalls für die Verteilung das G. G. zufälliger Abweichungen vom Beobachtungsmittel unter, welches durch das bekannte Integral dargestellt wird, da diese Verteilung als normal für den idealen Fall eines wesentlich symmetrischen K.-G. gelten kann.

Sei nun U das mittlere, V das wahrscheinliche u in dem soeben (§ 97) angegebenen Sinne unter Voraussetzung des ersten Falles, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ unter Voraussetzung des zweiten Falles [1], so hat man, bis zu sehr kleinem m merklich zutreffend folgende Normalbestimmungen:

$$U = \sqrt{\frac{2}{\pi}(m \pm 0{,}5)} = 0{,}79788 \sqrt{m \pm 0{,}5}\,, \tag{1}$$

$$V = 0{,}67449 \sqrt{m}\,, \tag{2}$$

$$\mathfrak{U} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)} \cdot \sqrt{m \pm 1{,}5} = 0{,}48097 \sqrt{m \pm 1{,}5}\,, \tag{3}$$

$$\mathfrak{V} = 0{,}40659 \sqrt{m}\,, \tag{4}$$

$$\log 0{,}79788 = 0{,}90194 - 1\,, \quad \log 0{,}67449 = 0{,}82897 - 1\,,$$
$$\log 0{,}48097 = 0{,}68212 - 1\,, \quad \log 0{,}40659 = 0{,}60916 - 1\,.$$

In dem Werte von U und $\mathfrak{U}$ ist das obere Vorzeichen respektive von 0,5 und 1,5 bei ungeradem, das untere bei geradem m zu verwenden.

§ 99. Hierzu folgende Bemerkungen. Sämtliche vier Formeln sind prinzipiell nur als approximative für größere m hergeleitet, und bei dieser Herleitung die mit $\pm$ behafteten Korrektionen 0,5 und 1,5 der Werte U und $\mathfrak{U}$ (die füglich gegen größeres m verschwindet) nicht mit gefunden. Aber es findet sich empirisch, dass durch Anbringung derselben die betreffenden Formeln bis zu viel kleineren m — ja fast bis zu den kleinsten — herab merklich zutreffend werden als ohne sie.

Ein Erfolg der Korrektion $\pm 0{,}5$ für U ist, dass der Wert desselben für jedes ungerade und das nächst größere gerade m gleich groß ist, und ein Erfolg der Korrektion $\pm 1{,}5$ für $\mathfrak{U}$, dass der Wert für jedes ungerade und das um 3 Einheiten größere gerade m gleich

---

1) V und $\mathfrak{V}$ haben sonach hier eine andere Bedeutung als die in § 10 festgesetzte.

groß ist. Durch Rückgang auf ganz genaue Formeln für U, welche aber bei größerem m zu umständlich in der Anwendung werden, lässt sich beweisen, dass der erste Erfolg normalerweise von dem kleinsten bis zu dem größten m streng und allgemein gültig ist; was den zweiten anlangt, so kann ich dasselbe nicht mit gleicher Sicherheit, sondern nur nach den in Kap. XVI folgenden empirischen Ergebnissen behaupten, welche diesen Erfolg so nahe, als man es nach der Unsicherheit solcher Ergebnisse erwarten kann, zeigen; auch ist die theoretische Herleitung der gegebenen Formeln für $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ nicht ganz so sicher als für U und V, und da doch gerade von jenen allein für unsere jetzige Untersuchung eine praktische Anwendung zu machen ist, indes die für U und V in anderen Untersuchungen größere Wichtigkeit gewinnen, so ist diesbezüglich auf die nach einer sehr eigentümlichen, sehr mühsamen Methode von mir erlangten, empirischen Bewährungsresultate für $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ in § 115 zu verweisen.

Es wird nützlich sein zu bemerken, dass die vorigen Formeln auch für den Fall Anwendung finden können, wenn man statt des m einer einzelnen Serie das summatorische Σm mehrerer, bezüglich verschiedener Mittel erhaltener Serien, sei es mit gleichem oder verschiedenem m vor sich hat, indem sich dann dies Σm für m in vorigen Formeln substituiert; nur muss dabei die Bedingung erfüllt sein, dass die Zufälligkeiten, welche in den einzelnen Serien auf die Größe des u Einfluss haben, als ebenso unabhängig von einander angesehen werden können, und mithin bei Zusammenrechnung der verschiedenen m entsprechend zur Kompensation tendieren, als wenn man das m derselben Serie vergrößert.

§ 100. Noch möchten einige theoretische Bedenken zu heben sein, die sich bei Betrachtung der vorigen Formeln leicht aufdrängen könnten.

Nach der bei vorigen Formeln vorausgesetzten gleichen Wahrscheinlichkeit der $\varDelta'$ und $\varDelta_{\prime}$ hätte man im Sacke mit unendlich vielen weißen und schwarzen Kugeln, welche uns die $\varDelta'$ und $\varDelta_{\prime}$ vertreten können, eine gleiche Anzahl beider anzunehmen; und wenn die ganze unendliche Anzahl gezogen würde, das m des Zuges also unendlich wäre, so sollte hiernach der Unterschied u Null sein und zwar bei jeder Wiederholung eines solchen Zuges Null sein, also auch der mittlere und wahrscheinliche Unterschied Null sein, wogegen die Formeln einen mit m ins Unbestimmte wachsenden und bei $m = \infty$ unendlichen Wert von U, V, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ finden lassen.

Von anderer Seite jedoch leuchtet ein, dass mit wachsendem m auch der Spielraum eines möglichen zufälligen Unterschiedes zwischen μ' und $\mu_,$ sich vergrößert, und insofern allerdings ein Wachstum des mittleren und wahrscheinlichen Unterschiedes mit m erwartet werden kann, wovon keine Grenze abzusehen ist, hiernach bei unendlichem m in der That ein unendlicher Unterschied erwartet werden kann.

Diese scheinbare Antinomie hebt sich dadurch, dass, wenn schon der mittlere und wahrscheinliche Unterschied bei unendlichem m den Formeln gemäß an sich selbst unendlich groß wird, er doch als mit $\sqrt{m}$ proportional, als Größe zweiter Ordnung, gegen m sowohl als μ' und $\mu_,$, die selbst mit m gleicher Ordnung sind, verschwindet, so dass man aus diesem mathematischen Gesichtspunkte das größtmögliche μ', was sich ziehen lässt, immer noch gleich $\mu_,$, oder $\mu' : \mu_,$ der Einheit gleich setzen kann, wie es als Bedingung der Symmetrie festzuhalten ist, wenn schon μ' von $\mu_,$ sich um eine gegen beide verschwindende Größe unterscheidet.

Auch kann man vielleicht die Sache so fassen: Da eine Unendlichkeit mit einer Unendlichkeit multipliziert gedacht werden kann, was wieder eine Unendlichkeit giebt, so folgt daraus, dass man einfach eine unendliche Zahl Kugeln zieht, nicht, dass man die g a n z e Zahl zieht, und es könnte immerhin in der absoluten Unendlichkeit die Zahl der weißen und schwarzen Kugeln gleich sein, ohne dass bei $m = \infty$ diese Gleichheit einträte, sofern das ∞ nicht die absolute Unendlichkeit bedeutete.

Jedenfalls kann man der Erfahrung nicht anders als durch obige Gestalt der Formeln entsprechen, und rechtfertigt sich hierdurch dieselbe gegen jedes Bedenken der Theorie, was aus vorigem Gesichtspunkte übrig bleiben könnte.

Zweitens kann man aufstellen, dass, da mit wachsendem m der Unterschied zwischen dem wahren und falschen A sich mehr und mehr verkleinert und bei unendlichem m verschwindend klein wird, doch nach obigen Formeln das vom falschen A gerechnete $\mathfrak{U}$ zu dem vom wahren A gerechneten U ein bei größerem m merklich konstantes Verhältnis hat, dessen genauer Grenzwert für unendliches m statt 1 vielmehr

$$\frac{\mathfrak{U}}{U} = \sqrt{\frac{\pi - 2}{\pi}} = 0{,}6028 \tag{5}$$

ist.

Dies aber hat folgenden Grund: Die Zahl von Abweichungen, welche zwischen dem wahren und dem falschen Mittel liegen, und wovon der Unterschied zwischen U und $\mathfrak{U}$ abhängt, nimmt freilich mit der Annäherung des falschen an das wahre Mittel ab, aber mit der Größe des m zu; und insofern die Annäherung beider Mittel durch die Größe des m bedingt wird, kompensiert sich dies so, dass jenes konstante Verhältnis bei wachsendem m herauskommt; und selbst bei unendlicher Annäherung beider Mittel kann vermöge Unendlichkeit des m noch eine unendliche Menge unendlich kleiner Abweichungen zwischen beiden mathematisch liegend gedacht werden. Auch in dieser Hinsicht ist übrigens die Erfahrung entscheidend. Nach den in § 115 angeführten, mit einander vergleichbaren Werten von U und $\mathfrak{U}$ findet man für $m = 10$; 50; 100 der Reihe noch den Wert $\mathfrak{U} : U$ gleich 0,554; 0,558; 0,608, was von dem theoretischen Verhältnisse und von der Konstanz nur in den Grenzen der zu erwartenden Unsicherheit abweicht, die natürlich für das Verhältnis zweier Werte erheblich größer als für die Einzelwerte ist.

Drittens kann der folgende Umstand auffallen. Je nachdem man Abweichungen vom wahren oder falschen Mittel rechnet, fällt die Summe derselben verschieden aus, und zwar durchschnittlich um so kleiner bei Rechnung vom falschen Mittel gegen die Rechnung vom wahren Mittel, je kleiner m, und je falscher mithin das Mittel ist. Aber der Unterschied ist schon bei mäßigem m fast verschwindend, indem, wie ich in einer besonderen Abhandlung[1]) theoretisch

---

1) [»Über die Korrektionen bezüglich der Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen« etc. in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 1861.]

und empirisch gezeigt, die falsche zur wahren Summe sich durchschnittlich wie $\sqrt{m-1}$ zu $\sqrt{m}$ verhält, welches Verhältnis mit wachsendem m sich der Einheit rasch nähert. Hiergegen erscheint auffällig, dass der mittlere Unterschied zwischen der Zahl der positiven und negativen Abweichungen so beträchtlich verschieden ist, als sich nach obigem Grenzverhältnis $\mathfrak{U}: U = 0{,}6028$ ergiebt.

Dies lässt sich wie folgt verständlich machen. Wenn die Abweichungen, die man in Wirklichkeit erhält, vom wahren Mittel gerechnet werden könnten, würde bei endlichem m nicht nur die Zahl, sondern auch die Summe derselben nach beiden Seiten nach Zufall ungleich sein. Nun geschieht die Bestimmung des falschen Mittels so, dass man die Summen der Δ nach beiden Seiten künstlich gleich macht, da dies ja die Bedingung des arithmetischen Mittels ist, und man hätte hiernach zu erwarten, dass mit dem Summenunterschiede auch der Zahlenunterschied bei Rechnung von falschem Mittel ganz verschwände, wenn beide Unterschiede proportional gingen. Dies ist nun nicht der Fall; aber jedenfalls sieht man ein, dass das Verschwinden des Summenunterschiedes beim Übergange vom wahren zum falschen Mittel recht wohl mit einer so bedeutenden Reduktion des Zahlenunterschiedes zusammenhängen kann, wie sie sich im Verhältnisse $\mathfrak{U}: U$ herausstellt.

Was die wesentliche Asymmetrie anlangt, so nimmt sie an dieser Reduktion nur geringen Anteil. Wie oben (Kap. XIII) bemerkt, kann sich zwar weder wesentliche, noch unwesentliche Asymmetrie bei gar zu kleinem m recht entwickeln; indem aber die Abweichung des falschen vom wahren Mittel durchschnittlich ebenso oft im Sinne als wider den Sinn der wesentlichen Asymmetrie geschieht, findet bei großem m eine Kompensation des Einflusses hiervon für die wesentliche Asymmetrie statt.

§ 101. [Zusatz. Um schließlich noch die Modifikationen, welche die obigen Formeln für den Fall der wesentlichen Asymmetrie erleiden, anzugeben und zugleich die Triftigkeit des im vorigen Kapitel gegebenen Schemas der Mischung von wesentlicher und unwesentlicher Asymmetrie zu erweisen, ist zu beachten, dass bei wesentlich asymmetrischen K.-G. nicht vom arithmetischen Mittel, sondern vom dichtesten Werte prinzipiell auszugehen ist. Bezüglich des letzteren Wertes sind dann die Wahrscheinlichkeiten positiver und negativer Abweichungen nicht gleich, sondern, in Übereinstimmung mit der theoretischen Bestimmung des dichtesten Wertes, im Verhältnisse der beiderseitigen einfachen mittleren Abweichungen e' und $e_,$ anzunehmen. Denn die Proportion $e' : e_, = m' : m_,$ definiert den dichtesten Wert, so dass die Gesamtzahl der Exemplare sich im Verhältnisse $e' : e_,$ auf beide Seiten des dichtesten Wertes verteilt, und mithin eben dies Verhältnis die Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$ für positive und negative Abweichungen bestimmt. Es sei demgemäß für einen K.-G. mit gegebenem e' und $e_,$ bez. des dichtesten Wertes[1]):

$$p = \frac{e'}{e' + e_,}; \quad q = \frac{e_,}{e' + e_,}. \tag{6}$$

Dann ist zunächst die wahrscheinlichste Differenz zwischen positiven und negativen Abweichungen für ein beliebiges m gleich:

$$m(p - q). \tag{7}$$

Wird ferner die mittlere und wahrscheinliche Abweichung von diesem Werte in gleicher Weise durch U und V bezeichnet, wie dies oben betreffs der mittleren und wahrscheinlichen Abweichung vom Nullwerte geschah, so erhält man mit Beiseitelassen der Korrektionen:

$$U = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{4pqm} \tag{8}$$

$$V = 0{,}6745 \cdot \sqrt{4pqm}. \tag{9}$$

Es sind mithin die wahrscheinlichen Grenzen der Differenzen u gleich

$$(p - q)m \pm 0{,}6745 \cdot \sqrt{4pqm}, \tag{10}$$

d. h. es ist 1 gegen 1 zu wetten, dass ein beobachtetes u größer als $(p-q)m - 0{,}6745\sqrt{4pqm}$ und kleiner als $(p-q)m + 0{,}6745\sqrt{4pqm}$ sei.]

---

1) [Eine eingehendere Diskussion lehrt, dass bei schwacher Asymmetrie die eine arithmetische Behandlung des K.-G. gestattet, p und q nur um Größen von der Ordnung $1 : \sqrt{m}$, wo m die Gesamtzahl der Exemplare des K.-G. ist, von $\frac{1}{2}$ verschieden sind.]

[Diese Bestimmung der wahrscheinlichen Grenzen lässt zugleich die Mischungsverhältnisse der wesentlichen und unwesentlichen Asymmetrie erkennen, wenn im Einklange mit den Aufstellungen des vorhergehenden Kapitels unter wesentlicher Asymmetrie der wahrscheinlichste, von Null verschiedene Differenzwert u, unter unwesentlicher Asymmetrie die wahrscheinliche Schwankung um diesen wahrscheinlichsten Wert verstanden wird. Sie zeigt, dass man in Formel (3) des angegebenen Kapitels $x_1 = (p - q)m$; $y_1 = 0{,}6745\sqrt{4pqm}$ setzen kann, und dass man sodann in Formel (2), wo $p = q = \frac{1}{2}$ anzunehmen ist, $y_1 = 0{,}6745\sqrt{m}$ zu setzen hat.]

[Man gelangt zu den angegebenen Bestimmungen des wahrscheinlichsten u, sowie der mittleren und wahrscheinlichen Schwankung um diesen Wert, wenn man die Wahrscheinlichkeit, dass unter m Abweichungen m' positive und $m_,$ negative sich finden, dass mithin $u = m' - m_,$, gleich:

$$W[u] = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{1 \cdot 2 \cdots m' \cdot 1 \cdot 2 \cdots m_,} p^{m'} \cdot q^{m_,} \tag{11}$$

setzt und hieraus unter Voraussetzung eines großen Wertes von m den Näherungswert:

$$W[u] = \frac{1}{\sqrt{8pq\pi m}} \exp\left[- \frac{(u - (p - q)m)^2}{8pqm}\right] \tag{12}$$

ableitet.]

XV. Wahrscheinlichkeitsbestimmungen für den von rein zufälliger Asymmetrie abhängigen Unterschied u beim Ausgange vom wahren Mittel.

§ 102. Im allgemeinen findet sich bei K.-G. zwischen der Zahl der positiven und negativen Abweichungen μ', $\mu_{,}$ bez. des arithmetischen Mittels A ein Unterschied $u = \mu' - \mu_{,}$, von dem sich fragt, ob er nicht bei wesentlich gleicher W. der beiderseitigen Abweichungen bloß durch unausgeglichene Zufälligkeiten wegen Endlichkeit des m erklärlich ist, oder ob die Mitbeteiligung einer asymmetrischen W. der Abweichungen nach beiden Seiten als mitwirkend anzunehmen ist, da unausgeglichene Zufälligkeiten bei dem endlichen m, mit dem man immer zu thun hat, überhaupt nicht fehlen können, ohne dass sie aber deshalb den gefundenen Unterschied allein zu bedingen brauchen. Hierüber lassen sich Wahrscheinlichkeitsbestimmungen angeben, die zwar aus dem in § 94 angegebenen Grunde für unsere Lehre keine fundamentale Wichtigkeit, aber immerhin ein Interesse haben, was mich veranlasst, ohne diesen Gegenstand hier erschöpfen und in seiner mathematischen Tiefe verfolgen zu wollen, bis zu gewissen Grenzen darauf einzugehen.

Das Allgemeinste, was sich darüber sagen lässt, ist, dass je größer der Unterschied u dem absoluten Werte nach im Verhältnisse zur Totalzahl m ist, und je größer m selbst ist, desto unwahrscheinlicher wird die Abhängigkeit von bloßen unausgeglichenen Zufälligkeiten, oder, wie wir kurz sagen mögen, die bloße Zufälligkeit des Unterschiedes, um so wahrscheinlicher die Mitabhängigkeit von asymmetrischer W., ohne freilich eine absolute Gewissheit auf diesem Wege überhaupt erreichen zu können. Wohl aber lässt sich angeben, wie groß bei wesentlich symmetrischer W. der zufällige mittlere und wahrscheinliche Unterschied u zwischen μ' und μ, ist, der je nach dem vorhandenem m erwartet werden kann, wenn unter mittlerem Unterschiede, kurz U, der Unterschied verstanden wird, der bei oftmaliger Wiederholung der Beobachtung unter denselben Umständen mit demselben m aus immer neuen Exemplaren desselben Gegenstandes als arithmetisches Mittel der verschiedenen, dabei erhaltenen Werte von u (dem absoluten Werte nach) hervorgeht; unter wahrscheinlichem Unterschiede, kurz V, der Wert, der dabei ebenso oft überschritten als unterschritten wird, wovon der erste bezüglich der u-Werte dasselbe, als A bez. der a-Werte, der zweite dasselbe als der Zentralwert bez. der a-Werte ist. In je stärkerem Verhältnisse nun das nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmbare, rein zufällige mittlere und wahrscheinliche u in einer gegebenen Verteilungstafel, resp. U und V, von dem vorgefundenen u überschritten wird, desto unwahrscheinlicher wird die Abhängigkeit desselben von bloßer Zufälligkeit; und es lassen sich selbst nach dem Verhältnisse dieser Überschreitung Grade der Unwahrscheinlichkeit angeben, wofür die Regeln den Mathematikern bekannt sind, worauf ich aber hier nicht näher eingehen will.

Nun scheint es zunächst natürlich, bei der Feststellung der Verhältnisse der u von der bekannten Urne der Wahrscheinlichkeitsrechnung unter der Bedingung auszugehen, dass darin unendlich viele, an Zahl aber gleich viele, weiße und schwarze Kugeln enthalten sind, indem bei Ziehung von je m Kugeln eine gleich große W. für den Zug weißer und schwarzer Kugeln besteht, wonach der Zahlenunterschied u der Kugeln Null sein müsste, nach Zufall aber bei wiederholten, sagen wir n Zügen von je m Kugeln bald die Zahl der einen, bald der anderen Kugeln bald mehr, bald weniger überwiegt, kurz ein zufälliger Unterschied u von zufälliger Größe in zufälliger Richtung erhalten wird. Es lässt sich nicht nur berechnen, sondern auch durch Erfahrung bewähren, wie groß im Falle vieler (streng genommen unendlich vieler) Züge das mittlere und wahrscheinliche u dem absoluten Werte nach sind, und es liegt nahe, das Resultat hiervon auf den mittleren und wahrscheinlichen Wert des u zu übertragen, was nach bloßem Zufall zwischen der Zahl der positiven und negativen Abweichungen vom arithmetischen Mittelwerte eines K.-G. unter Voraussetzung symmetrischer W. bezüglich desselben erhalten wird. Nun wird allerdings weiterhin (§ 109) ein Umstand angegeben werden, welcher die reine Übertragung des Resultates vom einen auf den anderen Fall unthunlich macht; aber gehen wir doch von dem eben besprochenen Falle aus, wobei sich einige interessante, wenn ich nicht irre, bisher unbekannte Verhältnisse herausstellen werden, um erst später auf den verwickelteren, welchen die Kollektivabweichungen darbieten, überzugehen; kurz besprechen wir zunächst das Resultat des Zuges der Kugeln aus der Urne unter den angegebenen Verhältnissen, wobei ich mich in betreff der Resultate für größeres m auf Sätze stütze, die ich in den »Recherches sur la probabilité des jugements« von Poisson und den Abhandlungen von Hauber im 7., 8. und 9. Bande der Zeitschrift für Physik and Mathematik von Baumgartner und Ettingshausen finde, und die unstreitig auch anderwärts[1]) zu finden sind, indes ich für kleineres m, wofür meines Wissens nach keine Untersuchung vorliegt, auf eigener Untersuchung fuße.

§ 103. Nun finde ich zunächst in jenen Quellen das allgemeine Resultat begründet, dass die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse des u bei sehr großem m und n unter den angegebenen Bedingungen in ihren Beziehungen untereinander dasselbe Gesetz zufälliger Abweichungen befolgen, als die Abweichungen Δ vom arithmetischen Mittel nach dem G. G. der Beobachtungsfehler, und dass mithin, wenn Q^2 das Mittel aus den Quadraten aller möglichen u bei gegebenem m ist, auch zwischen Q, U und V bei großem m und n dasselbe Verhältnis besteht als nach G. G. zwischen q^2, ε und w, wenn q^2 das mittlere Fehlerquadrat $\Sigma\Delta^2 : m$, ε der einfache mittlere Fehler $\Sigma\Delta : m$, und w der wahrscheinliche Fehler ist. Wonach:

$$U = Q\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}79788\,Q \qquad \log 0{,}79788 = 0{,}90194 - 1 \qquad (1)$$

---

1) [Z. B. in Meyer's Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, im Zusammenhang mit der Behandlung des Bernoulli'schen Theorems; Kap. III.]

$V = 0{,}67449\ Q$ $\qquad$ $\log 0{,}67449 = 0{,}82897 - 1$ $\qquad$ (2)

$V = 0{,}84535\ U$ $\qquad$ $\log 0{,}84535 = 0{,}92703 - 1$ $\qquad$ (3)

Nach eigener Untersuchung aber finde ich folgende zwei, an sich nicht uninteressante Sätze, welche für sehr großes, streng genommen unendliches n streng gültig bleiben, mag m groß oder klein sein, also sich um so angenäherter wiederfinden werden, je öfter man den Zug von je m Kugeln wiederholt, sei es, dass es jedesmal 2 oder 10 oder 100 u. s. w. sind:

1) dass $Q^2 = m$

2) dass U ganz gleich für ein gegebenes ungerades und das um 1 größere gerade m, also für $m = 1$ und 2, 3 und 4, 99 und 100 u. s. f. ist.

§ 104. Folgendes die Weise, wie mathematischerseits auf vorige Sätze zu kommen.

Seien jedesmal m, beispielsweise 4 Kugeln aus der betreffenden Urne gezogen, so können folgende 5 Fälle eintreten:

Besondere Zahl der gezogenen weißen und schwarzen Kugeln		u
4 w.	0 schw.	+ 4
3 w.	1 schw.	+ 2
2 w.	2 schw.	0
1 w.	3 schw.	− 2
0 w.	4 schw.	− 4

Allgemein, bei gegebenen m, sind die möglichen u-Werte $m + 1$, wenn die positiven und negativen u unterschieden werden, hingegen bloß $\frac{1}{2}m + 1$ bei geradem m, $\frac{1}{2}(m + 1)$ bei ungeradem m, wenn die u nach absolutem Werte, also positive und negative als gleich gezählt werden. Für jedes nicht zu große m sind die möglichen u nach vorigem Schema leicht empirisch zu finden, und es fragt sich nun, wie oft bei sehr oftmaligen Zügen von m, also diesfalls von 4 Kugeln jedes der möglichen u im Verhältnisse zur Gesamtzahl der möglichen u vorkommt, oder kurz, welche W. jedes u hat. Sei diese W. in gleich anzugebender Weise gefunden. Multipliziert man dann jedes

u mit seiner W. und addiert diese Produkte, so hat man darin nach bekanntem Prinzip der Wahrscheinlichkeitsrechnung das genaue mittlere u, was wir U nennen. Zunächst scheint es zwar, dass die Summe jener Produkte noch mit der Summe der W. dividiert werden müsste, um das mittlere u zu erhalten; aber jede einzelne W. stellt sich als ein Bruchwert von 1 dar, und die gesamte Summe dieser Bruchwerte giebt 1, was keine besondere Division nötig macht. Ebenso erhält man das mittlere u^2, was wir Q^2 nennen, durch Summierung der Produkte der einzelnen u^2 in ihre respektive W.

Es gilt also, um U und Q^2 für ein gegebenes m zu finden, die dabei möglichen u im Sinne obigen Beispieles zu verzeichnen, die W. eines jeden wie folgt zu bestimmen, und dann die Summe der Produkte wie angegeben zu nehmen.

Um nun die W. eines u, kurz $W[u]$ oder $W[\mu' - \mu_,]$, unter Sonderung der positiven und negativen Werte für gegebenes m zu erlangen, hat man folgende, den Mathematikern bekannte Formel[1]:

$$W[u] = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu')(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu_,)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m, \tag{4}$$

wobei $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 an bis inkl. m bedeutet, entsprechend mit μ' und $\mu_,$, in dem Falle aber, dass μ' oder $\mu_, = 0$ ist, der Wert $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu'$ oder $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu_,$ gleich 1 zu setzen ist.

Wenden wir dies auf unser Beispiel $m = 4$ an, nehmen μ' für die Zahl der weißen, $\mu_,$ für die der schwarzen Kugeln, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$; so erhalten wir:

μ'	$\mu_,$	u	$W[u]$
4	0	$+4$	$\frac{1}{16}$
3	1	$+2$	$\frac{4}{16}$
2	2	0	$\frac{6}{16}$
1	3	-2	$\frac{4}{16}$
0	4	-4	$\frac{1}{16}$

1) Kürzer drückt man dieselbe Formel so aus:

$$W[u] = \frac{(m)!}{(\mu')!\,(\mu_,)!}\left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Nehmen wir nun u nach absolutem Werte rücksichtslos auf sein Vorzeichen, wie wir zu thun haben, weil U als Mittel aus den absoluten Werten gefasst wird, so verdoppelt sich bei ungeradem m die W. für jedes u, bei geradem m, wie es bei $m = 4$ ist, für jedes u mit Ausnahme von $u = 0$, und haben wir das vorige Beispiel so zu schreiben:

$\pm u$	$W[\pm u]$
4	$\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
2	$\frac{8}{16} = \frac{4}{8}$
0	$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

Die entsprechende Durchführung für das ungerade $m = 5$ und das um 1 größere gerade $m = 6$ giebt:

für $m = 5$

$\pm u$	$W[\pm u]$
5	$\frac{2}{32} = \frac{1}{16}$
3	$\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$
1	$\frac{20}{32} = \frac{10}{16}$

für $m = 6$

$\pm u$	$W[\pm u]$
6	$\frac{2}{64} = \frac{1}{32}$
4	$\frac{12}{64} = \frac{6}{32}$
2	$\frac{30}{64} = \frac{15}{32}$
0	$\frac{20}{64} = \frac{10}{32}$

[Daraus folgt aber $U = 1\frac{1}{2}$, $Q^2 = 4$ für $m = 4$; $U = 1\frac{7}{8}$, $Q^2 = 5$ für $m = 5$ und $U = 1\frac{7}{8}$, $Q^2 = 6$ für $m = 6$, so dass sich die obigen Sätze bestätigt finden, indem $Q^2 = m$ für $m = 4$, 5 und 6, und U für $m = 5$ und 6 den nämlichen Wert erhält. In gleicher Weise kann für beliebige andere m durch direkte Rechnung eine Bestätigung erzielt werden.]

[Um jedoch die beiden Sätze in ihrer allgemeinen Gültigkeit zu beweisen, bezeichne man Q und U rücksichtlich der Abhängigkeit von m durch Q_m und U_m, und setze zunächst:

$$Q_m^2 = \sum \frac{(\mu' - \mu_,)^2 \cdot (m)!}{(\mu')!\,(\mu_,)!\,2^m}, \tag{5}$$

wo die Summation über alle Wertenpaare $(\mu', \mu_,) = (m, 0)$; $(m - 1, 1)$; ... $(1, m - 1)$; $(0, m)$ auszudehnen ist, für welche $\mu' + \mu_, = m$. Somit ist $(\mu' - \mu_,)^2 = (\mu' + \mu_,)^2 - 4\mu'\mu_, = m^2 - 4\mu'\mu_,$, und man erhält durch Substitution des letzteren Wertes:

$$Q_m^2 = \sum \frac{m^2\,(m)!'}{(\mu')!'\,(\mu_,)!'\,2^m} - \sum \frac{4\,\mu'\,\mu_,\,(m)!'}{(\mu')!'\,(\mu_,)!'\,2^m}. \tag{6}$$

Da

$$\frac{\mu'\,\mu_,}{(\mu')!'\,(\mu_,)!'} = 0,$$

wenn $\mu' = 0$ oder $\mu_, = 0$, so ist die zweite Summe bloß noch über die Wertenpaare $(\mu', \mu_,) = (m-1,\ 1),\ (m-2,\ 2),\ \ldots\ (1,\ m-1)$ zu erstrecken, und man kann darum Q_m^2 in folgender Form darstellen:

$$Q_m^2 = m^2 \sum \frac{(m)!'}{(\mu')!'\,(\mu_,)!'\,2^m} - m\,(m-1) \sum \frac{(m-2)!'}{(\mu'-1)!'\,(\mu_,-1)!'\,2^{m-2}}. \tag{7}$$

Es ist nun aber die erste Summe gleich $(1+1)^m : 2^m$, die zweite gleich $(1+1)^{m-2} : 2^{m-2}$, wie unmittelbar zu erkennen, wenn die Dividenden nach dem binomischen Satze entwickelt werden, und der Wert jeder der beiden Summen ist folglich gleich Eins. Daher erhält man:

1) $Q_m^2 = m^2 - m\,(m-1) = m$.

Man setze ferner für ein gerades m, das gleich 2μ angenommen werde:

$$U_{2\mu} = \sum \frac{2\,(\mu' - \mu_,)\,(2\,\mu)!'}{(\mu')!'\,(\mu_,)!'\,2^{2\mu}} \tag{8}$$

für das um 1 kleinere ungerade $m = 2\mu - 1$:

$$U_{2\mu-1} = \sum \frac{2\,(\mu' - \mu_,)\,(2\,\mu - 1)!'}{(\mu')!'\,(\mu_,)!'\,2^{2\mu-1}} \tag{9}$$

und erstrecke erstenfalls die Summation über die Wertpare: $(\mu', \mu_,) = (2\mu,\ 0),\ (2\mu - 1,\ 1),\ \ldots\ (\mu + 1,\ \mu - 1)$; zweitenfalls über die Wertenpaare $(\mu',\ \mu_,) = (2\mu - 1,\ 0),\ (2\mu - 2,\ 1),\ \ldots\ (\mu,\ \mu - 1)$. Man kann nun im ersteren Falle $\mu' = \mu + 1 + \lambda$, $\mu_, = \mu - 1 - \lambda$, im letzteren Falle $\mu' = \mu + \lambda$, $\mu_, = \mu - 1 - \lambda$ setzen, wo beidesfalls λ die μ Werte $\mu - 1,\ \mu - 2,\ \ldots\ 0$ anzunehmen hat, so dass man folgende Darstellungsformen gewinnt:

$$\left.\begin{aligned} U_{2\mu} &= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu-1} \frac{2\,(2\,\lambda + 2)\,(2\,\mu)!'}{(\mu + 1 + \lambda)!'\,(\mu - 1 - \lambda)!'\,2^{2\mu}} \\ &= \frac{2\,(2\,\mu)!'}{(\mu)!'\,(\mu)!'\,2^{2\mu}} \sum_{\lambda} (2\,\lambda + 2)\,\frac{\mu\,(\mu-1)\ldots(\mu-\lambda)}{(\mu+1)\,(\mu+2)\ldots(\mu+\lambda+1)}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} U_{2\mu-1} &= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu-1} \frac{2(2\lambda+1)(2\mu-1)!'}{(\mu+\lambda)!'(\mu-1-\lambda)!'\,2^{2\mu-1}} \\ &= \frac{2(2\mu-1)!'}{(\mu-1)!'\,\mu!'\,2^{2\mu-1}} \sum_{\lambda} (2\lambda+1)\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\lambda)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\lambda)}\,. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Da aber für beliebige positive, ganze Zahlen μ und ν[1]):

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu-1} (2\lambda+\nu-\mu+1)\frac{\mu(\mu-1)\ldots\ldots(\mu-\lambda)}{\nu(\nu+1)\ldots\ldots(\nu+\lambda)} = \mu\,, \qquad (12)$$

so ist auch:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\lambda} (2\lambda+2)\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\lambda)}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\lambda+1)} \\ &= \sum_{\lambda} (2\lambda+1)\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\lambda)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\lambda)} = \mu \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

und man erhält durch einfache Reduction:

$$2) \qquad U_{2\mu} = U_{2\mu-1} = \frac{(2\mu-1)!'}{(\mu-1)!'(\mu-1)!'\,2^{2\mu-2}}\,.]$$

§ 105. In den beiden vorigen Sätzen ist nichts über die Zahlenbeziehung enthalten, welche in den Formeln (1), (2), (3) auf Grund der Anwendbarkeit des G. G. auf die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse der u zwischen den Werten U, Q und V aufgestellt sind, und liegt im Bisherigen noch keine [einfache] Abhängigkeit der Werte U und V von der Größe des m vor, wie wir eine solche doch brauchen. Substituieren wir nun aber in die obigen Formeln auf Grund von

---

1) [Man beweist diese Identität, indem man erst

$$\mu = \frac{\mu(\mu-1)}{\nu} + (\nu-\mu+1)\frac{\mu}{\nu}$$

setzt und dann der Reihe nach

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\lambda)}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\lambda-1)}$$

für $\lambda = 1, 2, \ldots \mu-1$ durch

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\lambda-1)}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\lambda)} + (2\lambda+\nu-\mu+1)\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\lambda)}{\nu(\nu+1)\ldots(\nu+\lambda)}$$

ersetzt.]

Satz 1) den Wert $\sqrt{m}$ für Q, so erhalten wir folgende zwei Formeln, welche das Verlangte leisten[1]):

$$U = 0{,}79788\sqrt{m} \tag{14}$$
$$V = 0{,}67449\sqrt{m}, \tag{15}$$

Formeln, die man übrigens aus allgemeinen Formeln der angezeigten Quellen ableiten kann, so dass nichts wesentlich Neues damit geboten wird; hiergegen lässt sich auf Satz 2) folgende, wie mir scheint, bisher unbekannte Korrektion der Formel (14) gründen, wozu folgendes vorauszuschicken.

---

1) [Man gelangt zu der nämlichen Formel für U, wenn man in der obigen Darstellung von $U_{2\mu}$, die der Einfachheit wegen in der unreduzierten Form

$$\frac{2\mu\cdot(2\mu)!}{(\mu)!(\mu)!\,2^{2\mu}}$$

vorausgesetzt werde, nach der STIRLING'schen Formel $(2\mu)! = (2\mu)^{2\mu}\cdot\exp[-2\mu]\cdot\sqrt{2\pi\cdot 2\mu}$ und $\mu! = \mu^{\mu}\cdot\exp[-\mu]\cdot\sqrt{2\pi\mu}$ setzt; man erhält alsdann nach erforderlicher Reduktion

$$U_{2\mu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\mu} \quad \text{oder} \quad U_{2\mu} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{2\mu}\,.$$

Da jedoch so nur eine Annäherung an den wahren Wert von $U_{2\mu} = U_{2\mu-1}$ erzielt wird, ist es angezeigt, für kleinere Werte von 2μ oder $2\mu - 1$, auf Grund der genaueren Formel

$$n! = n^n\cdot\exp[-n]\cdot\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}\right),$$

den Näherungswerten von $(2\mu)!$ und $(\mu)!$ noch den Faktor

$$\left(1+\frac{1}{24\mu}\right) \text{ resp. } \left(1+\frac{1}{12\mu}\right)$$

beizufügen; dann erhält man

$$U_{2\mu} = U_{2\mu-1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2\mu}\left(1-\frac{1}{8\mu}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{2\mu-\tfrac{1}{2}};$$

somit für gerades m die Formel:

$$U_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{m-\tfrac{1}{2}};$$

für ungerades m die Formel:

$$U_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{m+\tfrac{1}{2}}.$$

Man gewinnt somit auf diesem Wege die unter (16) angegebene Korrektion für U.]

Während die obigen Sätze 1) und 2) für beliebig kleines und großes m bei nur hinreichend großem n gültig bleiben, setzen die Formeln (14) und (15), ebenso wie die Formeln (1), (2) und (3), aus denen sie folgen, ein großes, streng genommen unendliches m voraus, ohne ein größeres n als 1 zu fordern. Wollte man sie aber auf so kleine m wie 3, 4 oder 5 anwenden, so würden sie selbst im Mittel unendlich vieler Züge, also bei unendlich großem n ein merklich falsches Resultat, hingegen schon bei einem einmaligen Zuge eines sehr großen m ein merklich richtiges Resultat geben. Ersetzen wir aber die Formel (14) durch folgende:

$$U = 0{,}79788\sqrt{m} \mp 0{,}5 \tag{16}$$

unter Anwendung des oberen Zeichens für gerades, des unteren für ungerades m, so entsprechen wir damit der Forderung des Satzes 2) und finden zugleich empirisch, dass diese Formel selbst bis zu den kleinsten m herab zwar nicht absolut, aber fast genau mit den genauen theoretischen Zahlen stimmt, die in oben angegebenem Wege prinzipiell gleich genau für kleines wie für großes m erhalten werden, nur dass für großes m die Rechnung nicht mehr durchführbar ist. In der That erhält man hiernach folgende Vergleichstabelle:

Vergleich der genauen Werte von U mit den nach (16) berechneten.

m	genau	$0{,}79788\sqrt{m} \pm 0{,}5$	diff.
1 u. 2	1,0000	0,9772	— 0,0228
3 u. 4	1,5000	1,4927	— 0,0073
5 u. 6	1,8750	1,8712	— 0,0038
7 u. 8	2,1875	2,1851	— 0,0024
9 u. 10	2,4609	2,4592	— 0,0017
11 u. 12	2,7070	2,7058	— 0,0012
15 u. 16	3,1421	3,1413	— 0,0008
25 u. 26	4,0295	4,0291	— 0,0004

Wie man sieht, weichen alle nach Formel (16) berechneten Werte von U in minus von den genauen ab, aber selbst bei $m = 1$ und 2 ist die Abweichung sehr unbedeutend, beträgt bei $m = 25$ und 26 nur noch 4 Einheiten der 4. Dezimale und nimmt mit Vergrößerung des m weiter ab. Natürlich giebt die unkorrigierte Formel (14) bei kleinem m viel größere Abweichungen von dem genauen Werte; bei $m = 25$ beträgt sie noch $-0{,}0401$, bei $m = 26$ noch $+0{,}0389$; und nur bei viel größerem m wird sie nach Formel (14) wie nach Formel (16) merklich verschwindend.

§ 106. Was den Wert V anlangt, so würde derselbe prinzipiell genau dadurch gegeben sein, dass man den Wert u bestimmte, bezüglich dessen die Wahrscheinlichkeit größerer u gleich der Wahrscheinlichkeit kleinerer u; aber versuchen wir dies auf Beispiele mit kleinem m, wie die obigen mit $m = 4$, 5 oder 6 anzuwenden, so geben dieselben keinen solchen Wert her, sondern welche Werte wir dafür nehmen wollen, so ist die Wahrscheinlichkeitssumme der größeren und kleineren u ungleich, und hätte man denselben, wenn man überhaupt einen bestimmten Wert dafür verlangt, zwischen zweien von den u zu suchen, die um je 2 auseinanderliegen, z. B. bei $m = 5$ zwischen $u = 3$ und 1, bei $m = 6$ zwischen $u = 2$ und 0, ohne dass, so viel ich sehe, ein rationelles Prinzip für eine genauere Bestimmung vorliegt, was doch nicht hindert, bei einem so großen m, dass ± 2 dagegen verschwindet, die Formel (15) dafür zulässig zu finden. Inzwischen schien mir von Interesse, eine Bestimmung auch für kleinere m nach folgendem Prinzip zu versuchen.

Die Zahl der Werte z, die auf einen Wert a eines K.-G. geschrieben wird, sei es in einer primären oder reduzierten Tafel, ist nach früheren Auseinandersetzungen eigentlich auf ein ganzes Intervall verteilt zu denken, dessen Grenzen bei äquidistanten a in die Mitte zwischen je zwei a fallen. Vergleichen wir nun die äquidistanten u mit den äquidistanten a, so lassen sich nach Analogie die Wahrscheinlichkeiten, die jedem u zukommen, auf ein Intervall von der Größe 2 verteilt denken, und hiernach ganz in derselben Weise, wie wir den Zentralwert der a durch Interpolation des Intervalles, in welches er fällt, finden (s. § 82), so den Zentralwert der u, d. i. V, durch Interpolation seines Intervalles finden. Ich sage nicht, dass diese Betrachtung streng ist; denn jene Verteilung der z bei K.-G. ist durch die Natur der Sache als notwendig gegeben, hiergegen bei den u an sich durch nichts gefordert, und eine durch Interpolation gefundene Bestimmung nicht mit einer genauen zu verwechseln. Indessen ließ sich doch der Versuch machen, was dabei herauskommt, und ließen sich die so gefundenen Werte für gegebene m mit den für großes m durch Formel (15) gegebenen vergleichen. Anstatt aber bloß Interpolation mit ersten Differenzen habe ich die genauere mit zweiten Differenzen dabei angewandt und folgende Resultate erhalten:

Vergleich der interpolierten V mit den nach (15) berechneten.

m	interpoliert	$0{,}674\,49\sqrt{m}$	diff.
2	1,0000	0,9539	— 0,0461
3	1,1716	1,1682	— 0,0034
4	1,3837	1,3490	— 0,0347
5	1,5072	1,5082	+ 0,0010
6	1,6667	1,6522	— 0,0145
7	1,7912	1,7845	— 0,0067
8	1,9117	1,9077	— 0,0040
9	2,0372	2,0235	— 0,0137
10	2,1328	2,1329	+ 0,0001
15	2,6168	2,6123	— 0,0045
20	3,0241	3,0164	— 0,0077
25	3,3733	3,3724	— 0,0009

Man sieht, dass der Vergleich in der Tat nicht erfolglos ist, indem die durch Interpolation erhaltenen V-Werte selbst bei ganz niederen Werten von m mit denen, welche der Formel (15) entsprechen, fast genau übereinkommen. Und es bleibt nur auffällig, dass die Differenzen zwischen den zusammengehörigen Werten keinen regelmäßigen Gang befolgen, und, während die meisten nach (15) berechneten Werte um eine Kleinigkeit kleiner als die interpolierten Werte sind, bei ein paar (für $m = 5$ und 10) das Umgekehrte statt findet, was nicht auf Rechenversehen beruht, wie ich mich durch sorgfältige Revision überzeugt habe.

[Gerade diese durchgängige Übereinstimmung zeigt jedoch, dass die interpolationsmäßige Bestimmung nur insoweit zutreffend ist, als die Formel (15) den wahrscheinlichen Wert von u mit hinreichender

Annäherung darstellt. Da aber dies — der Herleitung jener Formel zu folge — nur dann der Fall ist, wenn Größen von der Ordnung $1 : \sqrt{m}$ vernachlässigt werden dürfen, so wird man sich für kleinere m weder der Formel (15), noch des Interpolationsverfahrens mit Vorteil bedienen, vielmehr lieber an genauere Bestimmungen von V sich halten. Solche lassen sich in successiver Annäherung an den wahren Wert mittels der Summenformel von Mac Laurin, die auch Euler's Summenformel heißt, gewinnen. Es besteht nämlich die prinzipielle Bedeutung jener Summenformel darin, dass sie die Berechnung einer diskreten Summe, bei Erfüllung gewisser Bedingungen, auf Integration und Differentiation zurückführt und dadurch an Stelle des von Intervall zu Intervall sprungweise sich ändernden Summenwertes einen stetiger Veränderung fähigen Ausdruck setzt. Geschieht dies für die Summe der Werte $W[\pm u]$, so kann dasjenige u bestimmt werden, bis zu welchem die Summe der oberhalb und unterhalb gelegenen Werte gleich $\frac{1}{2}$ ist, wodurch eben V gefunden wird.]

[Es ergiebt sich nun, wie im ersten Zusatz (§ 110) dargelegt wird, für gerade und ungerade m:

$$V = 0{,}674\,489\sqrt{m} - 1\,; \tag{17}$$

wofern Grössen von der Ordnung $1 : \sqrt{m}$ berücksichtigt, solche von der Ordnung $1 : m$ vernachlässigt werden. Bei Mitnahme der Größen von der Ordnung $1 : m$ ferner findet man:

1) für gerades $m = 2\mu$

$$V = c\sqrt{2}\sqrt{m + \tfrac{2}{3}} - 1\,; \tag{18a}$$

2) für ungerades $m = 2\mu - 1$

$$V = c\sqrt{2}\sqrt{m - \tfrac{1}{3}} - 1\,; \tag{18b}$$

wo der Wert von c mittelst der t-Tabelle in beiden Fällen für ein gegebenes $\mu = \frac{1}{2}m$ resp. $\frac{1}{2}(m + 1)$ aus:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^c \exp[-\tau^2]\,d\tau = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8\mu}\right) \tag{18c}$$

zu finden ist. Die beiden Formeln (18a), (18b) bilden das Analogon zu (16); sie haben zur Folge, dass nahehin die V für ein gerades m und

und das nächst folgende ungerade einander gleich sind und völlig gleich würden, wenn $c\sqrt{2}$ mit Vernachlässigung des Gliedes $1:16\mu$ in (18c) gleich 0,674 49 gesetzt würde.]

[Zum Vergleiche der drei Näherungsformeln (15), (17) und (18), deren V der Reihe nach als V_1, V_2 und V_3 bezeichnet werden, dient folgende Zusammenstellung:

m	V_1	V_2	V_3
4	1,349	0,349	0,565
5	1,508	0,508	0,529
6	1,652	0,652	0,827
9	2,023	1,023	1,043
10	2,133	1,133	1,267
11	2,237	1,237	1,257
20	3,016	2,016	2,111
100	6,745	5,745	5,786
1000	21,329	20,329	20,333

§ 107. Da abgesehen von den interpolationsmäßig herzustellenden V alle vorigen Bestimmungen auf zweifelsfreien arithmetischen Prinzipien und Sätzen beruhen, so dürfte eine empirische Bewährung derselben an sich nicht nötig sein, indes will ich doch auf eine solche eingehen, teils weil die Methode der Bewährung an sich ein eigentümliches Interesse durch den Ersatz der Wahrscheinlichkeitsurne darbieten dürfte, teils weil ihre Resultate einen gewissen Anhalt geben, in wie weit man die genauen Werte von Q und U für gegebenes m, welche prinzipiell eine Bestimmung aus unendlichem n voraussetzen, bei großem, doch immer noch endlichem n, wie es empirisch zu Gebote steht, wiederzufinden erwarten kann.

Unstreitig gewährt die Urne mit unendlich vielen, an Zahl gleichen weißen und schwarzen Kugeln eine sehr geeignete Vorstellung, an welcher man die vorigen Sätze erläutern kann, aber eine solche Urne lässt sich nicht herstellen, und auch, wenn man sie durch eine Urne mit einer endlichen Zahl von Kugeln ersetzt, in die man die m Kugeln nach jedem Zuge zurückthut, was wohl geschehen kann, würde das Verfahren bei sehr vielen Zügen außerordentlich langweilig und die Herstellung einer ganz zufälligen Mischung der Kugeln vor jedem neuen Zuge schwerlich erreichbar sein, kurz die wirkliche Anwendung des Verfahrens immer praktisch undurchführbar sein; auch wüßte ich nicht, dass je Gebrauch davon gemacht worden. Aber es steht das Äquivalent der Urne in den Listen gezogener Gewinnnummern der Lotterie zu Gebote, von welchen die geradzahligen als weiße, die ungeradzahligen als schwarze Kugeln, oder bei Vergleich mit positiven und negativen Abweichungen von gleicher W., die einen als positiv, die anderen als negativ gefasst werden können.

Hierzu habe ich mir (in den 50er Jahren) von den betreffenden Behörden die Listen von zehn sächsischen Lotterien von 1843 bis mit 1852 mit je 32000 bis 34000 Nummern verschafft, Listen, in welchen die Gewinnnummern nach der zufälligen Folge, in der sie gezogen wurden, stehen, als wie 28 904; 24 460; 32 305; 16 019; 157; 3708; 16 928 u. s. w. Obwohl nun die Anzahl der Nummern jeder Jahreslotterie immer nur eine endliche Zahl bleibt, und die gezogenen Nummern nicht in das Glücksrad zurückgelegt werden, so ändert doch die Ziehung der früheren Nummern nichts in dem Wahrscheinlichkeitsverhältnis der späteren, wie es bei der Anwendung der Urne mit einer endlichen Zahl Kugeln der Fall sein würde, und kann man es so ansehen, als wenn eine Urne mit einer unendlichen Zahl Kugeln vorläge [1]).

---

1) Die Losnummern im Glücksrade stellen sich, soviel ich bei einem deshalb vorgenommenen Besuche der Anstalt habe beobachten können, als kleine Stifte dar, welche, näher besehen, kleine Röllchen sind, bestehend aus fest zusammengerollten und durch ringförmige Hülsen gesteckten Zetteln, auf welchen die Nummern enthalten sind. Vielleicht ist diese Beschreibung nach der Erinnerung nicht ganz genau, worauf aber hier nichts ankommt. Vor der Ziehung sind diese Nummern auf Brettern nach ihrer Reihenfolge geordnet, je 1000 auf einem Brett. Diese Bretter werden in unregelmäßiger, durch zufälligen Aufruf eines Beamten bestimmten Reihenfolge erst in einen Kasten und von hier aus in das Glücksrad entleert, so dass von vornherein eine unregelmäßige Mischung nach Tausenden statt hat, dann das Rad umgedreht, und dies nach je 100 gezogenen Nummern wiederholt. An der Axe des Rades sind vier durchbrochene Flügel angebracht, welche sich in entgegengesetzter Richtung des Rades drehen und dadurch die unregelmäßige Mengung befördern. Sieht man zu, wie dies geschieht, und die Lose durcheinander fallen, so fühlt man sich versucht, zu glauben, dass schon

Erläutern wir die Anwendung hiervon zunächst an dem einfachen Fall von $m = 3$, wo bloß die beiden $\pm u = 1$ und 3 mit der theoretischen $W[u] = 0{,}75$ respektive $0{,}25$ möglich sind, welche sich nach angegebenen Regeln finden lassen. Bei 2000maliger Wiederholung der Bestimmung von $m = 3$ aus immer neuen Nummern, also $n = 2000$, wurden im ganzen folgende Resultate erhalten:

Empirische Zahl, wie oft ein $\pm u$ in n Serien von je $m = 3$ Werten vorkam, verglichen mit der theoretischen Zahl.

$m = 3$; $n = 2000$.

$\pm u$	theoretisch	empirisch
1	1500	1494
3	500	506

Dividiert man die erhaltenen Zahlen mit n, so erhält man aus voriger Tabelle folgende Bestimmungen:

$W[\pm u]$

$\pm u$	theoretisch	empirisch
1	0,750	0,747
3	0,250	0,253

woraus sich dann Q^2, U, V, wie früher angegeben, bestimmen lassen; also z. B. theoretisch $Q^2 = 1 \cdot 0{,}750 + 9 \cdot 0{,}250 = 3$; und $U = 1 \cdot 0{,}750 + 3 \cdot 0{,}250 = 1{,}5$. Entsprechend sind die folgenden Resultate mit größerem m und verschiedenem, nur immer sehr großem n zu verstehen und zu behandeln.

---

ganz wenige Drehungen hinreichen, die Mischung ganz unregelmäßig zu machen; doch sollen nach Aussage der Beamten bei den ersten Ziehungen, in welche die Lotterie eingeteilt ist, noch öfter Nachbarzahlen nacheinander erscheinen, indes bei der letzten Ziehung, nachdem die Mengung durch mehrhundertmalige Drehung des Rades bewirkt ist, nichts mehr der Art bemerkt wird..

Empirische Zahl, wie oft ein $\pm u$ in n Serien von je m Werten vorkam, verglichen mit der theoretischen Zahl.

$\pm u$	$m = 10;\ n = 5000$		$m = 50;\ n = 1000$		$m = 100;\ n = 600$	
	theoretisch	empirisch	theoretisch	empirisch	theoretisch	empirisch
0	1230	1201	112	110	48	46
2	2051	2027	216	217	93,5	104
4	1172	1225	192	194	88	85
6	439	442	158	154	80	67
8	98	97	119,5	120	69,5	68
10	10	8	84	65	58	63
12	—	—	54	62	47	51
14	—	—	32	41	36	31
16	—	—	17	21	27	34
18	—	—	9	10	19	13
20	—	—	4	3	13	14
22	—	—	2	2	8,5	8
24	—	—	0,5	1	5,5	7
26	—	—	—	—	3	4
28	—	—	—	—	2	2
30	—	—	—	—	1	1
32	—	—	—	—	0,5	0
34	—	—	—	—	0,3	1
36	—	—	—	—	0,1	1
38	—	—	—	—	0,1	0
	5000	5000	1000	1000	600	600

Die möglichen Werte u in voriger Tabelle sind für $m = 50$ und 100 nicht bis zu Ende durchgeführt, die noch fehlenden aber von merklich verschwindender W., so dass ein ungeheures n nötig gewesen sein würde, sollten solche ein oder das andere Mal vorkommen.

Aus voriger Tabelle ist folgende Tabelle der empirischen Q^2, U, V im Vergleich mit den theoretischen Werten abgeleitet.

m	n	Q^2		U		V	
		theoretisch	empirisch	theoretisch	empirisch	$0{,}674\ 49\sqrt{m}$	empirisch interpol.
3	2000	3,00	3,02	1,50	1,51	1,17	1,18
10	5000	10,00	10,13	2,46	2,49	2,13	2,19
50	1000	50,00	52,02	5,61	5,71	4,77	4,76
100	600	100,00	101,68	7,96	8,05	6,74	6,94

Die nahe Übereinstimmung der empirischen Werte mit den theoretischen ist unstreitig befriedigend und nur auffällig, dass bei allen Werten von m sich das empirische Q^2 und U ein wenig größer als das theoretische findet, was wohl nur deshalb der Fall ist, weil die Serien für die größeren m größtenteils durch Zusammenlegen der Serien, welche für die kleineren m erhalten worden waren, erhalten wurden, so dass diese ihren Einfluss auf erstere mit erstrecken konnten, was wegen der Quadrierung des u bei Bestimmung von Q^2 merklicher werden musste als bei U, wo sich das Entsprechende in geringerem Grade zeigt.

§ 108. Die vorigen Betrachtungen und Formeln können vielfach von nützlicher Anwendung bei statistischen Untersuchungen sein. Z. B. es gelte zu untersuchen, ob der Unterschied, der zwischen der Zahl der Geburten oder Todesfälle oder Selbstmorde in zwei verschiedenen Jahreszeiten, oder zwischen der Zahl der männlichen und weiblichen Geburten, oder zwischen der Zahl der Gewitter an zwei verschiedenen Lokalitäten besteht, rein zufällig ist, oder ob die Beschaffenheit der Jahreszeiten, des Geschlechtes, der Lokalität einen wesentlichen Einfluss auf die Größe und Richtung des Unterschiedes hat. Sei in Summa für beide unterschiedenen Bedingungen eine sehr große Zahl, sagen wir m, Fälle beobachtet worden und hierbei gefunden, dass auf die eine Seite μ', auf die andere μ, Fälle kommen, mithin der absolute Unterschied u ist, so wird es darauf ankommen, ob der gefundene Unterschied u im absoluten Werte den wahrscheinlichen V übersteigt oder untersteigt, und in welchem Verhältnisse dies der Fall ist, um Wahrscheinlichkeitsschlüsse folgender Art zu machen.

Wäre die W. von μ' und $\mu,$ gleich, mithin der gefundene Unterschied u rein zufällig, so würde es eben so wahrscheinlich sein, dass er den für diese Voraussetzung symmetrischer W. nach vorigen Formeln bestimmten, wahrscheinlichen Unterschied V überstiege und unterstiege, und wenn die Beobachtung mit demselben m sehr oft wiederholt würde, würde er im Mittel mit V merklich gleich gefunden werden; hiergegen wird ein bloß zufälliger Unterschied natürlich um so unwahrscheinlicher, in je größerem Verhältnisse er den unter Voraussetzung bloßer Zufälligkeit bestimmten wahrscheinlichen V übersteigt; hieraus die W., dass er nicht bloß zufällig sei, um so größer, in je größerem Verhältnisse dieses Übersteigen stattfindet; und sofern die Verhältnisse rein zufälliger u bei großem m mit den Verhältnissen der Beobachtungsfehler nach G. G. zusammenstimmen, werden auch nach einer Tabelle des G. G., welche die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse der Fehler als Funktion des Verhältnisses giebt, in dem der wahrscheinliche Fehler w von ihnen überstiegen oder unterstiegen wird, sich unter Substitution von V für w noch bestimmtere Wahrscheinlichkeitsrechnungen in vorigen Beziehungen anstellen lassen.

Gegen diese allgemeinen Sätze dürfte sich meines Erachtens kein haltbarer Einwand erheben lassen; in betreff der bestimmten Auslegung aber, die ich folgends den Verhältnissen $u:V$ im Interesse ihrer praktischen Verwertung gebe, dürfte bei der großen Leichtigkeit von Fehlbegriffen und Fehlschlüssen in diesem Felde die prinzipielle Revision seitens eines mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung vollkommen vertrauten Fachmathematikers wohl noch erwünscht sein.

Seien beispielsweise $m = 1000$ Gewitter während derselben Zeitperiode an zwei Orten, für beide zusammengenommen, beobachtet, am einen $\mu' = 530$, am anderen $\mu, = 470$, also $u = 60$; so ist, nach Formel (15), der wahrscheinliche Unterschied V, den wir nach bloßem Zufalle erwarten und, unter der gleichen Voraussetzung symmetrischer W. für u und Δ, für das w der Fehlertabelle einsetzen können:

$$V = 0{,}6745 \sqrt{1000} = 21{,}33 .$$

Dieser Wert 21,33 wird in beträchtlichem Verhältnisse vom gefundenen Unterschiede $u = 60$ überstiegen; indem $60 = 2{,}81\ V$ ist, also ist es erheblich wahrscheinlicher, als das Gegenteil, dass der Unterschied nicht rein zufällig ist, sondern ein lokaler Einfluss an seinem Zustandekommen Anteil hat, ohne es aber deshalb überwiegend wahrscheinlich finden zu dürfen, dass er bloß auf dem lokalen Einfluss beruht, sondern eben nur, dass ein lokaler Einfluss von bestimmter Richtung vorhanden ist, welcher über den bloß nach Zufall bei symmetrischer W. zu erwartenden hinaustreibt. Wäre andererseits der gefundene Unterschied u kleiner als der wahrscheinliche V, z. B. $\mu' = 505$, $\mu_{,} = 495$, mithin $u = 10 = 0{,}47\ V$, indes $V = 21{,}33$ bleibt, so würde eine überwiegende W. nicht dafür bestehen, dass bloß ein zufälliger Unterschied vorhanden, sondern dass der zufällige Einfluss groß genug ist, um einen etwaigen lokalen Einfluss zu überwiegen, indes keine Wahrscheinlichkeitsrechnung dafür besteht, dass der gefundene Unterschied sei es bloß zufällig oder bloß von lokalem Einflusse abhängig sei. Kurz es handelt sich hierbei um die W., ob der eine oder andere Einfluss überwiege, nicht ob bloß der eine oder andere bestehe. Wenn aber die W., dass der lokale überwiegt, sehr groß ist, so ist damit natürlich zugleich die W. sehr groß, dass ein solcher vorhanden ist; und werden dadurch Rechnungen dieser Art von Nutzen für den Wahrscheinlichkeitsbeweis des Daseins anderer als bloß zufälliger Einflüsse. Wenn hiergegen die W. überwiegt, dass der zufällige Einfluss den nicht zufälligen überwiegt, so bleibt es zweifelhaft, ob ein solcher überhaupt vorhanden sei, und hat man bloß einen Wahrscheinlichkeitsbeweis dafür, dass er überhaupt klein sei.

Lassen wir diese Betrachtungsweise gelten und gehen damit auf die vorigen Beispiele zurück, so findet sich erstenfalls, wo der gefundene Unterschied $u = 60$ und $V = 21{,}33$, mithin $u : V = 2{,}81$ ist, nach der Tabelle des G. G., dass die W., der Unterschied u werde als rein zufällig unter diesem Werte bleiben, sich zur W. des Gegenteils wie 0,942 gegen 0,058 verhält; und sofern jener Wert u doch erreicht ist, wird man in runder Zahl 94 gegen 6 wetten können, er sei nicht bloß zufällig. Im zweiten Falle, wo

$u = 10 = 0{,}47\ V$, findet sich nach der betreffenden Tabelle, dass die W., der Unterschied u werde als zufälliger unter diesem Werte bleiben, sich zum Gegenteil wie 0,249 zu 0,751 verhält, sofern er aber nicht unter diesem Werte geblieben ist, findet die entgegengesetzte W. dafür statt, dass er als zufälliger diesen Wert erreicht hat, und wird man in runder Zahl nur 1 gegen 3 wetten können, dass ein lokaler Einfluss den zufälligen überboten habe, 3 gegen 1 aber für das Gegenteil, ohne doch wetten zu können, dass ein lokaler Einfluss überhaupt nicht vorhanden gewesen sei. Ich wüsste wenigstens nicht, wie diese Verhältnisse anders zugleich praktisch und rationell zu fassen seien.

Sei W_ω die W., dass $\varDelta$ oder u unter Voraussetzung symmetrischer W. unter einem gegebenen Bruchteile oder Multiplum von w oder V bleiben werden, so hat man, um einen kleinen Auszug aus der hierher gehörigen Tabelle[1] des G. G. zu geben, zu einander gehörig:

u	W_ω	u	W_ω
0,10 V	0,05378	2,25 V	0,87088
0,25 V	0,13391	2,50 V	0,90825
0,50 V	0,26407	2,75 V	0,93638
0,75 V	0,38705	3,00 V	0,95698
1,00 V	0,50000	3,25 V	0,97163
1,25 V	0,60083	3,50 V	0,98176
1,50 V	0,68833	4,00 V	0,99302
1,75 V	0,76214	4,50 V	0,99760
2,00 V	0,82266	5,00 V	0,99926

Man hat sich aber bei Anwendung voriger Bestimmung vor einer fehlerhaften Anwendung derselben in folgendem Sinne zu hüten. Gesetzt man hat, sei es irgend zwei Monate oder irgend zwei Jahreszeiten, ohne die übrigen, in betreff der Anzahl von Gewittern in Untersuchung genommen, so wird nichts hindern, die vorige Bestimmung in betreff der Frage, ob der Unterschied der beiden Monate

1) [Diese Tabelle findet man im Berliner Astronom. Jahrbuch für 1834, S. 309 flgd.]

oder Jahreszeiten einen anderen als bloß zufälligen Einfluss auf die Zahl der Gewitter habe, eben so in Anwendung zu bringen, als wenn es sich um den lokalen Einfluss der Örtlichkeit handelt. Aber gesetzt, man habe die Beobachtung der Gewitterzahl mit gegebenem m für alle 12 Monate vorgenommen, so wird, auch wenn für alle Monate dieselbe W. der Gewitterzahl besteht, das u bei Vergleich je zweier derselben nach Zufall verschieden ausfallen, und es werden sich darunter zwei Monate finden lassen, die das größte u geben, was leicht so groß sein könnte, dass nach seinem Verhältnisse zu V auf überwiegende W. eines wesentlichen Einflusses zu schließen. Aber dieser Schluss würde in sofern irrig sein, als unter einer größeren Anzahl von Fällen auch bei geringer W. doch große Abweichungsunterschiede auftreten können. Jedenfalls bleiben dann die betreffenden Monate wegen eines spezifischen Einflusses verdächtig; zur Sicherstellung aber müsste meines Erachtens an ihnen die Beobachtung noch besonders erweitert und z. B. bis zur doppelten Zahl fortgesetzt werden, um zu sehen, ob sich der Wahrscheinlichkeitsschluss bestätigt[1]).

§ 109. Zunächst scheint nun, dass von vorigen Betrachtungen und Formeln auch unmittelbare Anwendung auf die Aufgabe zu machen, aus der Größe des Unterschiedes u, der zwischen der Zahl der positiven und negativen Abweichungen $+\Delta$ und $-\Delta$ bez. des arithmetischen Mittels A besteht, nach W. zu schließen, ob der Unterschied bloß von Zufälligkeiten abhängen könne, oder ob in der Natur des Gegenstandes und seiner Existenzbedingungen ein Einfluss begründet liegt, der am Übergewicht der Zahl der einen oder anderen Abweichungen wenn schon nicht alleinige doch Mitschuld trägt, oder kurz, ob wesentliche Asymmetrie an dem Unterschiede Anteil hat. Und in der That, wenn wir von vornherein versichert wären, dass die Abweichungen der Exemplare a von ihrem arithmetischen Mittel A dieselbe symmetrische W. nach beiden Seiten zeigen, als die weißen und schwarzen Kugeln bei Ziehung derselben, so würden die vorigen Betrachtungen und Formeln ganz darauf

1) [Vergl. zu diesem Paragraphen den zweiten Zusatz (§ 111).]

anwendbar sein; aber das ist nach folgenden Betrachtungen nicht der Fall.

Nennen wir im Sinne eines bekannten Sprachgebrauches wahres Mittel A_∞ das Mittel aus einer unendlichen Zahl von Exemplaren, falsches Mittel A_m das uns nur zu Gebote stehende aus einer endlichen Zahl m. Setzen wir nun symmetrische W. der Abweichungen bez. des wahren Mittels voraus, so werden doch sowohl die beiderseitigen Abweichungssummen, als die beiderseitigen Abweichungszahlen bez. desselben nach Zufall ungleich sein und sich normaler Weise bei Änderung der Gesamtzahl m der Abweichungen zwar nicht einander proportional, aber in funktionalem Zusammenhange nach gleicher Richtung, d. h. in Zunahme oder Abnahme ändern[1]. Wird nun aus einer endlichen Zahl von a das falsche Mittel gezogen, so verschwindet damit der Unterschied zwischen den beiderseitigen Abweichungs**summen**, da das ja im Wesen des arithmetischen Mittels liegt; man macht dabei die Summen so zu sagen **künstlich** gleich, und wenn sich Summen und Zahlen einander proportional änderten, so würde mit dem Unterschiede zwischen den beiderseitigen Summen zugleich der Unterschied u zwischen den beiderseitigen Zahlen verschwinden, was nicht nur erfahrungsmäßig nicht der Fall ist, sondern auch wegen nicht proportionaler Änderung nicht zu erwarten ist. Aber jedenfalls **mindert** sich mit Aufhebung des Unterschiedes zwischen den beiderseitigen Abweichungssummen der funktional damit zusammenhängende Unterschied zwischen den beiderseitigen Zahlen gegen den Fall, dass die Abweichungen vom wahren Mittel genommen wurden, für welchen die obigen Formeln gelten, und lässt sich also voraussehen, dass der mittlere und wahrscheinliche Wert von u bez. des falschen Mittels, von dem wir sie doch nur rechnen können, bei gleichem m geringer ausfallen müssen, als bez. des wahren, und dass obige Formeln also nicht mehr dafür maßgebend sein können.

Inzwischen lassen sich doch aus Vorigem zunächst folgende zwei Folgerungen ziehen: 1) die W. eines wesentlichen Einflusses ist bei

---

1) Man berücksichtige, dass, während das wahre Mittel immer aus einer unendlichen Zahl von a gezogen zu denken ist, doch die Zahl m der genommenen Abweichungen eine mehr oder weniger große endliche sein kann.

Anwendung der obigen Formeln auf den Abweichungsunterschied u bez. des arithmetischen Mittels A_m bei gegebenem m für noch größer anzunehmen, als es nach obigen Formeln erscheint, weil V, im Verhältnisse zu welchem u in Betracht kommt, bezüglich A_m jedenfalls kleiner als bez. A_∞ ist, wofür die obigen Formeln gelten.

2) Lassen wir bez. des falschen Mittels A_m ebenso wie bez. des wahren A_∞ die Voraussetzung symmetrischer W. gelten, nennen aber dann die oben bezüglich des ersteren mit u, Q, U, V bezeichneten Werte, wenn sie vielmehr bez. des letzteren bestimmt werden resp. $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, so wird es nur gelten, diese entsprechend als Funktion des m bez. A_m zu bestimmen, als jene in Bezug auf A_∞ bestimmt wurden, um damit Formeln zu erlangen, welche zu entsprechendem Gebrauche dienen können.

§ 110. [Erster Zusatz. Bestimmung des wahrscheinlichen Unterschiedes V mittelst der Summenformel von Mac Laurin oder von Euler:]

[Diese Summenformel lautet[1]):

$$\left.\begin{aligned} & f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+\overline{n-1}\,h) = \\ & \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}(f(b) - f(a)) + \frac{B_1 h}{2}(f'(b) - f'(a)) - \\ & \qquad \frac{B_3 h^3}{2\cdot 3\cdot 4}(f'''(b) - f'''(a)) + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

wo $b = a + nh$ und $B_1 = \frac{1}{6}$; $B_3 = \frac{1}{30} \cdots$ die Bernoulli'schen Zahlen sind.]

[Um nun die $W[\pm u]$ nach dieser Formel zu summieren, ist nicht die ursprüngliche Form (4), sondern die hieraus auf Grund der Näherungsformel:

$$n! = n^n \cdot \exp[-n] \cdot \sqrt{2\pi n}\,, \qquad (20)$$

oder, wenn man Glieder von der Ordnung $1:n$ berücksichtigt, auf Grund der korrigierten Formel:

1) [Euler leitet sie ab in den Institutiones calculi differentialis, Pars post., Cap. V. — Reprod. z. B. in Schlömilch's Kompendium der höheren Analysis, zweiter Band, S. 226.]

$$n! = n^n \cdot \exp[-n] \cdot \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12\,n}\right) \tag{21}$$

resultierende Form zu Grunde zu legen.]

[Benutzt man zunächst (20), so ist für $m = 2\mu$; $\mu' = \mu + \nu$; $\mu_, = \mu - \nu$; $u = 2\nu$:

$$W[\pm 2\nu] = \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \exp\left[-\frac{\nu^2}{\mu}\right]; \quad W[0] = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}\,. \tag{22}$$

Die Summe der $W[u]$ zwischen den Grenzen $+2n$ und $-2n$, oder die Summe der $W[\pm u]$ zwischen den Grenzen 0 und $2n$ wird somit gegeben durch:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \exp\left[-\frac{\nu^2}{\mu}\right] - \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}\,. \tag{23}$$

Nun ist aber nach (19), wenn im Einklange mit der durch (20) gegebenen Annäherung Glieder von der Ordnung $1:\mu$ vernachlässigt werden:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \exp\left[-\frac{\nu^2}{\mu}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \int_0^n \exp\left[-\frac{x^2}{\mu}\right] dx - \\ \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}\left(\exp\left[-\frac{n^2}{\mu}\right] - 1\right). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Folglich erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \exp\left[-\frac{\nu^2}{\mu}\right] - \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} = \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \int_0^n \exp\left[-\frac{x^2}{\mu}\right] dx + \\ \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} \exp\left[-\frac{n^2}{\mu}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Der rechten Seite giebt man eine bequemere Form, wenn man $x^2 = \mu\tau^2$; $n^2 = \mu t^2$; $dx = d\tau\sqrt{\mu}$ substituiert. Man gewinnt alsdann als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit W, dass:

$$-2t\sqrt{\mu} < u < +2t\sqrt{\mu}; \quad \text{oder} \quad \pm u < 2t\sqrt{\mu}$$

die Bestimmung:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp[-\tau^2]\, d\tau + \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} \exp[-t^2]. \tag{26}$$

Ihr zufolge wird der wahrscheinliche Wert von u, d. i. V, gegeben durch:

$$V = 2t\sqrt{\mu}\,, \tag{27}$$

wenn t der Bedingung:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp[-\tau^2]\, d\tau + \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} \exp[-t^2] \tag{27a}$$

genügt. Denn es ist alsdann die W., dass $\pm u < 2t\sqrt{\mu}$ gleich $\frac{1}{2}$. Um hieraus t zu berechnen, setze man $t = c + \gamma$, und bestimme c aus

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c \exp[-\tau^2]\, d\tau\,,$$

so dass es sich der t-Tabelle zufolge gleich 0,476936 findet; dann zerlegt sich das Integral zwischen den Grenzen 0 und $c + \gamma$ in zwei Integrale zwischen den Grenzen 0 und c und zwischen den Grenzen c und $c + \gamma$, und es resultiert:

$$0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_c^{c+\gamma} \exp[-\tau^2]\, d\tau + \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} \exp[-(c+\gamma)^2].$$

Da aber γ eine Größe von der Ordnung $1 : \sqrt{\mu}$ ist, so erhält man eine genügende Genauigkeit, wenn $\exp[-\tau^2]$ in Erstreckung des Integrals konstant gehalten und gleich $\exp[-(c+\gamma)^2]$ gesetzt wird. Es wird somit, nach Division mit $\exp[-(c+\gamma)^2]$:

$$0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma + \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} \quad \text{oder} \quad \gamma = -\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\,.$$

Auf Grund dessen erhält man[1]:

$$V = 2c\sqrt{\mu} - 1 = 0{,}674489\sqrt{m} - 1\,. \tag{28}$$

---

[1] [Eben diese Formel giebt auch MEYER in den Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung bei der Behandlung des BERNOULLI'schen Theorems. S. 107.]

Da anfänglich $m = 2\mu$ gesetzt wurde, so könnte es scheinen, dass diese Formel nur für geradzahlige m gelte. Indessen ergiebt sich für $m = 2\mu - 1$ das nämliche Resultat, wie nicht anders zu erwarten ist, da nur Größen von der Ordnung $1 : \sqrt{m}$ berücksichtigt werden.]

[Will man aber Größen von der Ordnung $1 : m$ berücksichtigen, so muss man statt (20) die Näherungsformel (21) benutzen und den Fall, dass m geradzahlig, von dem Falle, dass m ungeradzahlig ist, scheiden.]

[Erstenfalls ist von (22) auszugehen, nachdem den dortigen Bestimmungen der Faktor $(1 - 1 : 8\mu)$ beigefügt ist. Man findet alsdann mittelst (19) unter Mitnahme der ersten Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}}\left(1 - \frac{1}{8\mu}\right)\exp\left[-\frac{\nu^2}{\mu}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}}\left(1 - \frac{1}{8\mu}\right)\int_0^n \exp\left[-\frac{x^2}{\mu}\right]dx - \\ \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}\left(\exp\left[-\frac{n^2}{\mu}\right] - 1\right) - \frac{2nB_1}{\mu\sqrt{\pi\mu}}\exp\left[-\frac{n^2}{\mu}\right],\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

wenn Glieder von der Ordnung $1 : \mu\sqrt{\mu}$ bei Seite gelassen werden. Hieraus resultiert, wenn $n^2 = \mu t^2$, $x^2 = \mu\tau^2$ gesetzt wird, als Ausdruck der Wahrscheinlichkeit W, dass:

$$-2t\sqrt{\mu} < u < +2t\sqrt{\mu} \quad \text{oder} \quad \pm u < 2t\sqrt{\mu},$$

$$\left.\begin{aligned}W = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{8\mu}\right)\int_0^t \exp[-\tau^2]\,d\tau + \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}\exp[-t^2] - \\ \frac{2B_1 t}{\mu\sqrt{\pi}}\exp[-t^2].\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Um hieraus V zu gewinnen, ist $W = \frac{1}{2}$ anzunehmen, sodann t aus der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{8\mu}\right)\int_0^t \exp[-\tau^2]\,d\tau + \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}\exp[-t^2] \\ -\frac{2B_1 t}{\mu\sqrt{\pi}}\exp[-t^2]\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

zu berechnen und

$$V = 2t\sqrt{\mu} \quad (31\,\text{a})$$

zu setzen. Man nehme nun wie oben $t = c + \gamma$ an, bestimme c

der Art, dass nach Division der Gleichung (31) mit $(1 - 1 : 8\mu)$ oder, was dasselbe ist, nach Multiplikation mit $(1 + 1 : 8\mu)$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8\mu}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c \exp[-\tau^2]\, d\tau, \tag{32}$$

und finde γ aus:

$$0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_c^{c+\gamma} \exp[-\tau^2]\, d\tau + \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} - \frac{2B_1(c+\gamma)}{\mu\sqrt{\pi}}\right) \exp[-(c+\gamma)^2]. \tag{33}$$

Diese Gleichung nimmt mit Rücksicht, dass γ eine kleine Größe von der Ordnung $1 : \sqrt{\mu}$ ist, nach Division mit $\exp[-(c+\gamma)^2]$ die einfache Form:

$$0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma + \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} - \frac{2B_1 c}{\mu\sqrt{\pi}} \quad \text{oder} \quad \gamma = -\frac{1}{2\sqrt{\mu}} + \frac{B_1 c}{\mu} \tag{33a}$$

an, woraus, da $B_1 = 1 : 6$ und $2\mu = m$, als wahrscheinlicher Wert für geradzahlige m:

$$V = 2c\sqrt{\mu} - 1 + \frac{c}{3\sqrt{\mu}} = c\sqrt{2} \cdot \sqrt{m + \tfrac{2}{3}} - 1 \tag{34}$$

folgt.]

[Ist m ungerade $= 2\mu - 1$, so ist, wenn $\mu' = \mu + \nu$; $\mu_1 = \mu - \nu - 1$; $u = 2\nu + 1$:

$$\left.\begin{aligned} W[\pm(2\nu+1)] &= \frac{2(2\mu-1)!}{(\mu+\nu)!(\mu-\nu-1)!\,2^{2\mu-1}} = \\ &\left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \exp\left[-\frac{\nu^2}{\mu}\right]\left(1 - \frac{1}{8\mu}\right), \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass u zwischen den Grenzen $+(2n-1)$ und $-(2n-1)$ sich hält, wird bestimmt durch:

$$W = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \left(1 - \frac{\nu}{\mu}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi\mu}} \exp\left[-\frac{\nu^2}{\mu}\right] \left(1 - \frac{1}{8\mu}\right). \tag{36}$$

Somit besteht auf Grund von (19), wenn $n = t\sqrt{\mu}$, die Wahrscheinlichkeit:

$$W = \left(1 - \frac{1}{8\mu}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp[-\tau^2]\, d\tau + \frac{t}{\mu\sqrt{\pi}} \exp[-t^2]\,(1 - 2B_1) \tag{37}$$

dafür, dass

$$-(2t\sqrt{\mu}-1) < u < +(2t\sqrt{\mu}-1) \text{ oder } \pm u < 2t\sqrt{\mu}-1\,. \tag{37a}$$

Bestimmt man nun wieder t aus der Gleichung:

$$\frac{1}{2} = \left(1-\frac{1}{8\mu}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \exp[-\tau^2]\,d\tau + \frac{t}{\mu\sqrt{\pi}}\exp[-t^2]\,(1-2B_1)\,, \tag{38}$$

indem man wie in (32) c berechnet und $t=c+\gamma$ setzt, so resultiert aus:

$$0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_c^{c+\gamma}\exp[-\tau^2]\,d\tau + \frac{c+\gamma}{\mu\sqrt{\pi}}\exp[-(c+\gamma)^2]\,(1-2B_1) \tag{39}$$

mit Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $1:\mu\sqrt{\mu}$,

$$\gamma = -\frac{c}{2\mu}(1-2B_1) = -\frac{c}{3\mu}\,, \tag{39a}$$

folglich

$$t = c\left(1-\frac{1}{3\mu}\right)$$

und schließlich:

$$V = 2t\sqrt{\mu}-1 = 2c\sqrt{\mu-\tfrac{2}{3}}-1\,,$$

woraus mit Rücksicht auf $m=2\mu-1$ als wahrscheinlicher Wert für ungerade m

$$V = c\sqrt{2}\sqrt{m-\tfrac{1}{3}}-1 \tag{40}$$

sich ergiebt.]

§ 111. [Zweiter Zusatz. Den Erörterungen des § 108 liegt das Problem zu Grunde, aus einer großen Zahl beobachteter Fälle unbekannte Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln. Dasselbe steht zu der Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems in Beziehung, wonach für die unbekannte W. Grenzwerte angegeben werden können und zugleich der Wahrscheinlichkeitsgrad berechnet werden kann, mit dem die unbekannte W. innerhalb jener Grenzen zu suchen ist. Hat man nämlich zwei, einander ausschließende Ereignisse A und B in einer großen Zahl m von Fällen beobachtet und dabei das Ereignis A μ'-mal, das Ereignis B $\mu_{\prime}$-mal gefunden, so kann man zunächst die W. für das Stattfinden des Ereignisses A gleich $\mu':m$, die W. für B gleich $\mu_{\prime}:m$ setzen, ohne dabei den Zufälligkeiten, die der

Bestimmung von μ' und $\mu_{,}$ anhaften, Rechnung zu tragen. In der That kann man $\mu' : m$ und $\mu_{,} : m$ nur als die wahrscheinlichsten Werte der unbekannten W. x und $1 - x$ auffassen und es als wahrscheinlich bezeichnen, dass bei einer Wiederholung der Beobachtungen aus einer anderen Reihe von Fällen die nunmehr sich ergebenden wahrscheinlichsten Werte in der Nähe der früher gefundenen liegen. An Stelle dieser unbestimmten Aufstellungen giebt nun die Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems folgende Bestimmungen.]

[Es besteht die W.:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c \exp[-\tau^2]\, d\tau \tag{41}$$

dafür, dass die unbekannte Wahrscheinlichkeit x für das Eintreten des Ereignisses A zwischen den Grenzen:

$$\frac{\mu'}{m} - \frac{c}{m}\sqrt{\frac{2\mu'\mu_{,}}{m}} \quad \text{und} \quad \frac{\mu'}{m} + \frac{c}{m}\sqrt{\frac{2\mu'\mu_{,}}{m}} \tag{41a}$$

liegt; die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $1 - x$ ist dann gleichzeitig zwischen den Grenzen

$$\frac{\mu'}{m} \pm \frac{c}{m}\sqrt{\frac{2\mu'\mu_{,}}{m}} \tag{41b}$$

zu suchen; während für den mit der W. W zu erwartenden Unterschied u zwischen der beiderseitigen Anzahl der Fälle die Ungleichung:

$$\mu' - \mu_{,} - 2c\sqrt{\frac{2\mu'\mu_{,}}{m}} < u < \mu' - \mu_{,} + 2c\sqrt{\frac{2\mu'\mu_{,}}{m}} \tag{41c}$$

gilt. Setzt man insbesondere $W = \frac{1}{2}$, so wird $c = 0{,}476\,936$, und die Substitution dieses Wertes giebt die wahrscheinlichen Grenzen für x; $1 - x$ und u.]

[Demnach ergeben sich für $m = 1000$ Gewitter, die während der nämlichen Zeitperiode an zwei Orten beobachtet wurden, als wahrscheinliche Grenzen für die Werte der W., mit denen an dem einen oder anderen Orte das Stattfinden eines Gewitters zu erwarten ist:

1) an dem einen Orte 0,541 und 0,519, an dem anderen Orte 0,459 und 0,481, wenn an dem ersteren Orte 530, am letzteren 470 Gewitter beobachtet wurden.

2) an dem einen Orte 0,516 und 0,494, an dem anderen Orte 0,484 und 0,506, wenn die beiderseits beobachteten Anzahlen der Gewitter 505 resp. 495 betrugen. Entsprechend sind die wahrscheinlichen Grenzen für u im ersten und zweiten Falle $60 \pm 21{,}29$ resp. $10 \pm 21{,}33$.]

[Diesen Bestimmungen liegt die Voraussetzung unter, dass die Zahl der beobachteten Fälle hinreichend groß sei, um die Annahme zu gestatten, der beobachtete Unterschied u sei nicht rein zufällig, sondern durch die Verschiedenheit der unbekannten W. x und $1 - x$ bedingt, und zwar wird, wie bereits angegeben, vorausgesetzt, dass die wahrscheinlichsten Werte von x, $1 - x$ und u eben die beobachteten Werte $\mu' : m$, $\mu_{,} : m$ und $\mu' - \mu_{,}$ seien.]

[Es liegt aber kein zwingender Grund vor, gerade diese Werte als die wahrscheinlichsten Werte vorauszusetzen. Denn vor Anstellung der Beobachtungen besaß jede Hypothese über die wahrscheinlichsten Werte von x und u die nämliche W., und mit Rücksicht auf die gemachten Beobachtungen kann eine dieser Hypothesen vor der anderen nur durch größere W. ausgezeichnet sein, nicht aber eine Gewissheit für sich beanspruchen. Es ist somit noch der Grad der W. zu bestimmen, den die Hypothese, die beobachteten Werte seien die wahrscheinlichsten, im Vergleiche zu anderen Hypothesen, die andere Werte als die wahrscheinlichsten einführen, besitzt. Hierzu dient das Prinzip, das Encke in der Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate[1]) in folgender Form giebt, wobei zu beachten, dass die Abweichungen beobachteter Werte von den wahrscheinlichsten Werten als Fehler bezeichnet werden.]

[» Die W. zweier, vor den gemachten Beobachtungen gleich wahrscheinlichen und einander ausschließenden Hypothesen verhalten sich direkt wie die W. der aus ihnen hervorgehenden Fehler oder Fehlersysteme «.]

[Zum Vergleiche soll die Hypothese dienen, dass die wahrscheinlichsten Werte von x und $1 - x$ einander gleich, somit gleich $\frac{1}{2}$ seien, wonach als wahrscheinlichste Differenz $u = 0$ zu erwarten

1) [Berliner Astron. Jahrbuch f. 1834 S. 258.]

ist. Es besitzt alsdann die thatsächlich beobachtete Differenz u die W.:

$$W[u] = \frac{m!}{(\mu')!(\mu_,)!\,2^m} = \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \exp\left[-\frac{u^2}{2m}\right]. \tag{42}$$

Auf Grund der bisherigen Hypothese, dass die wahrscheinlichen Werte von x und $1-x$ resp. $\mu':m=p$ und $\mu_,:m=q$ seien, ergiebt sich dagegen für das beobachtete u der Maximalwert der W., nämlich:

$$W[u] = \frac{m!}{(\mu')!(\mu_,)!} p^{\mu'} \cdot q^{\mu_,} = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqm}}. \tag{43}$$

Es verhält sich somit die W., dass das beobachtete u rein zufällig sei, d. h. bei Gleichheit von x und $1-x$ sich ergeben habe, zu der W., dass das beobachtete u den wahrscheinlichsten Differenzwert der beiderseitigen Anzahlen μ' und $\mu_,$ darstelle, wie

$$2\sqrt{pq} : \exp\left[\frac{u^2}{2m}\right] \text{ oder wie } 2\sqrt{\mu'\mu_,} : m \exp\left[\frac{(\mu'-\mu_,)^2}{2m}\right]; \tag{44}$$

und will man wetten, so müssen die Einsätze das angegebene Verhältnis aufweisen.]

[Auf anderen Voraussetzungen beruhen die Wahrscheinlichkeitsbestimmungen in § 108. Zunächst ist zu bemerken, dass dort u mit seinem absoluten Werte in Rechnung genommen wird, es mithin unentschieden bleibt, auf welcher Seite die überwiegende Zahl der Fälle zu suchen ist. Sodann ist zu berücksichtigen, dass mit der Annahme, der beobachtete Unterschied u sei nicht rein zufällig, offenbar vorausgesetzt wird, derselbe werde durchweg diesen Wert besitzen, vielleicht auch größere Werte annehmen (wodurch das Fehlen reiner Zufälligkeit nur wahrscheinlicher wird), keinesfalls aber unter diesen Wert sinken, kurz, es scheint der beobachtete Wert als untere Grenze zu gelten, die nur bei reiner Zufälligkeit nach Maßgabe des G. G. unterschritten wird. Setzt man nun einerseits voraus, der beobachtete Unterschied $u = \pm(\mu' - \mu_,)$ sei rein zufällig, so besteht nach dem G. G. die W. W_ω, dass dieser Wert nicht erreicht, und die W.

$1 - W_\omega$, dass er erreicht oder überschritten wird. Setzt man andererseits voraus, jener Unterschied sei nicht zufällig, sondern seiner Natur nach gleich u oder größer als u, so ist die W., dass er erreicht oder überschritten wird gleich 1 zu setzen. Es überbietet somit die W., der beobachtete Wert u sei seiner Natur nach gleich oder größer als u, die W., er sei bloß zufällig, um W_ω, so dass die überwiegende Wahrscheinlichkeit W_ω für das Fehlen reiner Zufälligkeit der Wahrscheinlichkeit $1 - W_\omega$ für das Bestehen reiner Zufälligkeit gegenübersteht, und in diesem Verhältnisse wird alsdann gegen und für reine Zufälligkeit gewettet.]

XVI. Wahrscheinlichkeitsbestimmungen für den von rein zufälliger Asymmetrie abhängigen Unterschied v beim Ausgange vom falschen Mittel.

§ 112. Gehen wir jetzt an die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverhältnisse des zufälligen Unterschiedes, welcher zwischen der Zahl der positiven und negativen Abweichungen von einem Mittelwerte aus einer endlichen Zahl von Werten zu erwarten ist, wenn die Wahrscheinlichkeit der Abweichungen vom wahren Mittel, wie es aus einer unendlichen Zahl von Werten folgen würde, nach beiden Seiten gleich groß ist. Indem der falsche, d. i. aus dem endlichen m gewonnene Mittelwert vom wahren um eine zufällige (bei verschiedenen Serien bald nach einer, bald nach der anderen Seite gehende) Größe abweicht, sind auch die Abweichungen Δ von beiden Mitteln in jeder Serie verschieden; und es bleibt zwar auch bei Rechnung vom falschen Mittel die gleiche W. der $+\Delta$ und $-\Delta$ bestehen, wenn sie für das wahre Mittel bestand, aber die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse des Unterschiedes v zwischen der Zahl derselben ändern sich. Dies begreift sich leicht nach der in § 109 angestellten Betrachtung, da das falsche Mittel durch die Bedingung bestimmt wird, dass die Summe der Abweichungen davon nach beiden Seiten gleich gemacht wird, indes sie bei Rechnung von dem unbekannten wahren Mittel bei endlichem m im allgemeinen als ungleich vorauszusetzen ist. Durch diese künstliche Ausgleichung der Summen der $+\Delta$ und $-\Delta$ würden auch die Zahlen derselben ausgeglichen werden, wenn Zahl und Summe proportionale Änderungen erlitten, was nicht der Fall ist; jedenfalls aber wird der Unterschied v durch den Übergang vom wahren zum falschen Mittel gegen den Unterschied u verkleinert.

Um zu beurteilen, in welchem Verhältnisse diese Verkleinerung nach W. zu erwarten, muss ein bestimmtes Gesetz der Verteilung der wahren Δ nach Zahl und Größe zu Grunde gelegt werden, weil hiervon die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse des Unterschiedes zwischen wahrem und falschem Mittel abhängen, hiervon aber wieder die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse des Unterschiedes v. Nun ist bekannt, dass für die Abweichungen, welche die Einzelexemplare von K.-G. bei nicht zu unregelmäßiger Verteilung bezüglich ihres Mittelwertes zeigen, das durch das Integral Φ (s. Kap. XVII) bestimmte Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit zu Grunde gelegt werden kann, wenn man ein großes m und approximative Symmetrie hat, und somit wird dies Gesetz auch im Folgenden zu Grunde gelegt werden.

§ 113. Eine Untersuchung über diese Verhältnisse liegt bisher überhaupt weder vor, noch reichen die mir bisher bekannten Voruntersuchungen hin, die Aufgabe vollständig danach zu behandeln. Inzwischen findet man im Zusatz (§ 116) eine Untersuchung von mir geführt, wonach approximativ das mit $\mathfrak{Q}^2$ zu bezeichnende mittlere Quadrat des Unterschiedes v gleich $m(1 - 2 : \pi)$ sich ergiebt, und nachdem die weiterhin mitzuteilende Erfahrungsprobe gezeigt hat, dass diese Bestimmung selbst bis zu einem $m = 4$ herab sehr approximativ genügt, ließ sich fragen, ob aus dem Werte von $\mathfrak{Q}$ sich die übrigen Wahrscheinlichkeitsverhältnisse von v entsprechend ableiten lassen, als bei der Rechnung vom wahren Mittel die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse von u aus dem Werte $Q = \sqrt{m}$. Auch dies hat sich nach Erfahrung mit genügender Approximation bestätigt. Und zwar ist für den wahrscheinlichen Wert von v, welcher $\mathfrak{W}$ heiße [falls man die interpolationsmäßige Bestimmung zum Vergleiche heranzieht], ebenso wenig eine Korrektion nach dieser Ableitung nötig als für den Wert von V bei Ableitung von Q; für das einfach mittlere v aber, welches $\mathfrak{U}$ heiße, eine nur etwas größere Korrektion, als für das einfach mittlere u, welches wir U nannten. Endlich berechnet sich auch die Verteilungstafel der einzelnen v nach Zahl und Größe approximativ genug nach dieser Voraussetzung.

Die demgemäßen fundamentalen Bestimmungen sind folgende:

$$\mathfrak{Q}^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) m = 0{,}36338\, m\,; \quad \log 0{,}36338 = 0{,}56036 - 1\,; \tag{1}$$

$$\mathfrak{Q} = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) m} = 0{,}60281 \sqrt{m}\,; \quad \log 0{,}60281 = 0{,}78018 - 1\,; \tag{2}$$

$$\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)(m \pm 1{,}5)} = 0{,}48097 \sqrt{m \pm 1{,}5}\,; \log = 0{,}68212 - 1\,; \tag{3}$$

$$\mathfrak{D} = 0{,}40659 \sqrt{m}\,; \quad \log 0{,}40659 = 0{,}60916 - 1\,. \tag{4}$$

Zur Bestimmung von $W[\pm v]$ hat man die Differenz der Φ-Werte zu nehmen, welche in der Tabelle der t zu

$$t = \frac{v + 1}{\mathfrak{Q}\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \frac{v - 1}{\mathfrak{Q}\sqrt{2}}$$

gehören, wo für $\mathfrak{Q}$ der obige Wert zu substituieren ist; für $W[v=0]$ insbesondere aber den zu $t = 1 : \mathfrak{Q}\sqrt{2}$ gehörigen Φ-Wert. $W_\omega[v]$, d. i. die W., dass der gegebene Wert von v nicht erreicht wird, findet man als den Φ-Wert, welcher zu $t = (v - 1) : \mathfrak{Q}\sqrt{2}$ und $W_a[v]$, d. i. die für v selbst und die unterhalb v gelegenen Werte bestehende W., als den, welcher zu $(v + 1) : \mathfrak{Q}\sqrt{2}$ gehört.

In der Formel für $\mathfrak{A}$ gilt das obere Vorzeichen der Korrektion $\pm 1{,}5$ für ungerades, das untere für gerades m, und eine Folgerung dieser Korrektion, sowie der Grund derselben ist das erfahrungsmäßige Datum, wofür jedoch die Theorie noch zu suchen, dass jeder Wert von $\mathfrak{A}$ für ein gerades m merklich übereinstimmt mit dem um drei Einheiten kleineren Werte von $\mathfrak{A}$ für ein ungerades m, wozu die Belege unten folgen.

Leider stehen bis jetzt zur Kontrolle für diese Approximationsformeln bezüglich v nicht ebenso wie bezüglich deren für u im vorhergehenden Kapitel genaue Formeln für kleines m zu Gebote; ein um so fühlbarerer Mangel, als die theoretische Begründung und Ableitung obiger Formeln im Zusatz lückenhaft ist, und die Korrektion für $\mathfrak{A}$ sogar sonderbar erscheinen kann. Ich würde daher dieselben mit wenig Zutrauen darbieten, wenn ich nicht durch eine sehr ausgedehnte empirische Bewährung diesen Mangel insoweit zu ersetzen vermocht hätte, dass man sicher sein kann, bei Benutzung derselben keinen in Betracht kommenden Irrtum zu begehen, wennschon eine genauere Begründung und Revision der Theorie durch einen Mathematiker von Fach sehr erwünscht wäre.

Die empirische Bewährung beruht wie die der früheren Funktionswerte von u auf einer Benutzung von Lotterielisten, welche aber ohne Vergleich umständlicher war als für die Werte des vorigen Kapitels. Denn es galt dazu, zuvörderst die Nummern jeder Liste in Werte von $+\Delta$ und $-\Delta$ in der Art zu übersetzen, dass für die ganze Liste die dem Integral Φ entsprechende Verteilung nach Zahl und Größe bei Rechnung vom wahren Mittel herauskam, welche durch die t-Tabelle im Anhang § 183 repräsentiert ist; dann für jede zufällige Serie solcher Abweichungen von gegebenem m das falsche Mittel zu bestimmen, die positiven und negativen Abweichungen von diesem falschen Mittel zu rechnen und den Unterschied zwischen der Zahl beider als v zu nehmen. Etwas ausführlicher ist hiervon im Zusatz (§ 117) gehandelt und das Beispiel einer Bestimmung von v für eine zufällig genommene Serie mit $m = 6$ daselbst gegeben.

§ 114. Hiernach lasse ich zuvörderst in einigen Tabellen die Gesamtheit der empirischen Data folgen, welche ich bezüglich unserer Aufgabe direkt erhielt, um nachher die daraus abgeleiteten Hauptwerte zusammengestellt mit den nach obigen Formeln berechneten Werten anzuschließen. Wenn vielfach Zahlenangaben mit einem Bruchwerte 0,5 vorkommen, so rührt dies daher, dass, wenn zufällig, wie dies mitunter vorkam, das falsche Mittel mit einem wahren Abweichungswerte genau zusammentraf, die Abweichung vom falschen Mittel mit $+0,5$ und $-0,5$ nach beiden Seiten gezählt werden musste, wodurch ein v entstand, was in die Mitte zwischen die um je 2 distanten Werte der v-Skala fiel, dann aber mit je 0,5 auf die beiden Nachbarwerte verteilt wurde.

I. Zahl z, wie oft ein Unterschied v zwischen der Zahl der positiven und negativen Abweichungen vom falschen Mittel aus m Werten bei n-maliger Wiederholung der Bestimmung vorkam.

a) bei ungeradem m

v	$m=5$ $n=2400$	$m=7$ $n=1700$	$m=9$ $n=1320$	$m=11$ $n=820$	$m=13$ $n=840$	$m=15$[1] $n=800$	$m=17$ $n=600$	$m=19$ $n=600$
1	2155,5	1388,5	966,5	552	562,5	?	351	327,5
3	244,5	300,5	324,5	235,5	231,5	?	187	197,5
5	—	11	29	32,5	41,5	?	57	63
7	—	—	—	—	4,5	?	5	10
9	—	—	—	—	—	—	—	2

b) bei geradem m

v	$m=4$ $n=3000$	$m=6$ $n=2000$	$m=8$ $n=1500$	$m=10$ $n=1200$	$m=12$ $n=1000$	$m=14$ $n=850$	$m=16$ $n=750$	$m=18$ $n=660$	$m=20$ $n=600$
0	1950	1040	648	494	379	314	247	179,5	176
2	1050	905	753,5	588	489	382,5	333	325,5	256,5
4	—	55	96,5	112	126	127,5	148	120	130,5
6	—	—	2	6	6	25	20	28	33
8	—	—	—	—	—	1	2	7	3
10	—	—	—	—	—	—	—	—	1

1) [Die Werte dieser Kolumne waren durch unaufhebbare Widersprüche entstellt.]

II. Dieselben Angaben für einige größere Werte von m.

v	$m = 30$ $n = 400$	$m = 50$ $n = 240$	$m = 100$ $n = 120$	$m = 500$ $n = 24$
0	94	49	19	2
2	169	84	31	2
4	90	51	13	3
6	36	32	22	3
8	8	14	18	2
10	3	8	9	2
12	—	2	5	2
14	—	—	2	5
16	—	—	1	0
24	—	—	—	1
28	—	—	—	1
34	—	—	—	1

Dieselben Serien mit $m = 10$, 50, 100 hatten bei Rechnung der Abweichungen vom wahren Mittel folgende Resultate gegeben, welche also ganz direkt mit den vorigen, vom falschen Mittel gerechneten vergleichbar sind, indes die in § 107 angeführten Resultate unter Zuziehung noch anderer Serien, daher mit größerem n, gefunden sind.

III. Mit den vorigen Tabellen vergleichbare Tabelle für den Unterschied u bei Rechnung vom wahren Mittel.

u	$m = 10$ $n = 1200$	$m = 50$ $n = 240$	$m = 100$ $n = 120$
0	301	23	10
2	467	52	17
4	299	44	14
6	102	42	13
8	29	28	22
10	2	16	16
12	—	17	10
14	—	7	2
16	—	10	5
18	—	0	4
20	—	1	2
22	—	—	4
28	—	—	1

In den beiden Tabellen für Rechnung vom falschen Mittel ist die Zahl z', wie oft ein v das gleiche Vorzeichen mit der Abweichung des falschen vom wahren Mittel hatte, und die Zahl $z_,$, wie oft es das entgegengesetzte Vorzeichen hatte, kurz, wie oft ein v mit dem falschen A gleichseitig oder ungleichseitig war, zur Zahl $z = z' + z_,$ zusammengezogen. Geben wir jetzt die Werte $\mathfrak{z} = z' - z_,$ für die Werte von $m = 6$ bis $m = 30$, da für die anderen die Sonderung von z' und $z_,$ nicht geschehen ist. Unter $\Sigma(\pm \mathfrak{z})$ ist eine Summe der $\mathfrak{z}$ nach absolutem Werte, unter $\Sigma \mathfrak{z}$ mit Rücksicht auf das Vorzeichen verstanden.

IV. Unterschied $\mathfrak{z} = z' - z_,$ zwischen der Zahl z' der mit dem falschen Mittel gleichseitigen und der Zahl $z_,$ der damit ungleichseitigen Werte von v gleicher Größe, welche sich zum z in vorigen Tabellen vereinigen, von $m = 6$ bis $m = 30$.

a) bei ungeradem m

v	$m = 7$ $n = 1700$	$m = 9$ $n = 1320$	$m = 11$ $n = 820$	$m = 13$ $n = 840$	$m = 15$ $n = 800$	$m = 17$ $n = 600$	$m = 19$ $n = 600$
1	+ 33,5	+ 0,5	− 33	− 25,5	+ 29	+ 1	− 20,5
3	+ 46,5	− 4,5	+ 9,5	+ 21,5	− 7	− 10	+ 11,5
5	0	+ 1	− 0,5	− 8,5	+ 7,5	− 5	− 15
7	—	—	—	+ 0,5	+ 1,5	+ 3	− 4
9	—	—	—	—	—	—	− 2
$\Sigma(\pm \mathfrak{z})$	80	6	43	56	45	19	53
$\Sigma(\mathfrak{z})$	+ 80	− 3	− 24	− 12	+ 31	− 11	− 30

b) bei geradem m

v	$m = 6$ $n = 2000$	$m = 8$ $n = 1500$	$m = 10$ $n = 1200$	$m = 12$ $n = 1000$	$m = 14$ $n = 850$	$m = 16$ $n = 750$	$m = 18$ $n = 660$	$m = 20$ $n = 600$	$m = 30$ $n = 400$
2	− 24	+ 42,5	+ 20	+ 8	+ 1,5	− 29	− 35,5	− 16,5	+ 5
4	+ 13	+ 11,5	+ 16	+ 8	+ 0,5	− 14	− 8	+ 1,5	0
6	—	0	− 4	0	+ 3	+ 2	+ 2	− 1	+ 4
8	—	—	—	—	+ 1	+ 2	+ 1	− 3	− 2
10	—	—	—	—	—	—	—	− 1	− 1
$\Sigma(\pm \mathfrak{z})$	37	54	40	16	6	47	46,5	23	12
$\Sigma(\mathfrak{z})$	− 11	+ 54	+ 32	+ 16	+ 6	− 39	− 40,5	− 20	+ 6

Es kann etwas auffällig erscheinen, dass die Werte von z und mithin auch Σz bei den kleineren, namentlich geradzahligen Werten m fast alle positiv sind. Wahrscheinlich aber hat dies denselben Grund, der für eine analoge Erscheinung (§ 107) geltend gemacht wurde, dass nämlich die Serien mit kleinerem m in die Serien mit größerem m mit eingehen, so dass die Serien mit verschiedenem m nicht ganz unabhängig von einander sind, indes aber nicht nur jede Serie für sich, die ein v gab, sondern alle n-Serien für ein gegebenes m zusammen rein nach Zufall geordnet sind.

§ 115. Aus den ersten beiden Tabellen leiten sich folgende Hauptwerte ab, deren Zusammenstellung mit den beistehenden theoretischen Werten, nach obigen Formeln, zur Prüfung dieser Formeln dienen kann.

m	$\mathfrak{Q}^2$		$\mathfrak{A}$		$\mathfrak{D}$	
	beobachtet	$0{,}36338\, m$	beobachtet	$0{,}48097 \sqrt{m \pm 1{,}5}$	beob.[1]	$0{,}40659 \sqrt{m}$
4	1,40	1,45	0,70	0,76	0,72	0,81
5	1,82	1,82	1,20	1,23	0,89	0,91
6	2,25	2,18	1,02	1,02	0,96	1,00
7	2,57	2,54	1,38	1,40	1,03	1,08
8	3,09	2,91	1,27	1,23	1,19	1,15
9	3,49	3,27	1,58	1,56	1,21	1,22
10	3,63	3,63	1,38	1,40	1,27	1,29
11	4,25	4,00	1,73	1,70	1,36	1,35
12	4,19	4,36	1,52	1,56	1,38	1,41
13	4,65	4,72	1,78	1,83	1,37	1,47
14	5,33	5,09	1,69	1,70	1,46	1,52
15	?[2]	5,45	?	1,95	?	1,57
16	6,06	5,81	1,86	1,83	1,65	1,63
17	6,17	6,18	2,05	2,07	1,64	1,68
18	7,09	6,54	2,05	1,95	1,78	1,73
19	7,22	6,90	2,21	2,18	1,80	1,77
20	7,66	7,27	2,11	2,07	1,85	1,82
30	10,06	10,90	2,27	2,57	2,14	2,23
50	17,87	18,17	3,25	3,35	2,63	2,88
100	37,87	36,34	4,87	4,77	4,64	4,07
500	178,17	181,69	10,42	10,74	9,00	9,09

1) [Wie in §106, so wurde auch hier mit Zuziehung zweiter Differenzen interpoliert.]

2) [Vergl. die Bemerkung zu Tab. I a.]

Man dürfte die durchschnittliche Übereinstimmung der empirischen Werte mit den berechneten sehr befriedigend finden. Wenn aber hier und da auch nicht unerhebliche Abweichungen vorkommen, so kann dies bei der sorgfältigen Revision dieser Werte nicht auf Versehen geschrieben werden, sondern es liegt in der Natur der Sache, dass unter vielen, nach ihrer W. berechneten, zufälligen Werten auch zufällig stärkere Abweichungen von den Normalwerten vorkommen. [Überdies können die verhältnismäßig starken Abweichungen, die sich unter den Werten der vier letzten Zeilen finden, auf Rechnung des geringen n derselben gesetzt werden.]

[Berücksichtigt man neben den Tabellen I und II die Vergleichstabelle III, so findet man folgende, mit einander vergleichbare Hauptwerte für den Ausgang vom wahren und vom falschen Mittel:

m	Q^2	$\mathfrak{Q}^2$	U	$\mathfrak{U}$	V	$\mathfrak{V}$
10	10,32	3,63	2,495	1,38	2,19	1,27
50	52,48	17,87	5,825	3,25	5,04	2,63
100	97,47	37,87	8,00	4,87	7,49	4,64

Dieselben zeigen, dass der Übergang vom wahren zum falschen Mittel in der That eine Verringerung der mittleren und wahrscheinlichen Unterschiede mit sich führt, die in genügender Übereinstimmung mit der theoretisch geforderten Verringerung steht. Es ist nämlich:

m	$\mathfrak{Q}^2 : Q^2$	$\mathfrak{U} : U$	$\mathfrak{V} : V$
10	0,352	0,554	0,577
50	0,341	0,558	0,522
100	0,389	0,608	0,619

Die theoretischen Verhältnisse dagegen sind ohne Berücksichtigung der Korrektionen für $\mathfrak{U}$ und U, $\mathfrak{Q}^2 : Q^2 = 0{,}363$; $\mathfrak{U} : U = \mathfrak{V} : V = 0{,}603$.]

Man kann es als eine Merkwürdigkeit anführen, dass der Wert $\mathfrak{U}$, welcher für Rechnung vom falschen Mittel gilt, nahe übereinkommt mit der einfach mittleren Abweichung von dem für Rechnung vom wahren Mittel geltenden U, oder dass $\mathfrak{A}$ nahe gleich $\varepsilon\,[U]$; doch nur bei so großem m, dass die Korrektion $\pm$ 1,5 nicht mehr erheblich in Betracht kommt. Dies ergiebt sich sowohl aus dem Vergleiche der Formeln für beide Werte:

$$\mathfrak{A} = 0{,}48097\sqrt{m} \pm 1{,}5$$

und [1]:

$$\varepsilon\,[U] = 0{,}48262\sqrt{m},$$

als es sich empirisch für größeres m bestätigt.

[Auf Grund der obigen Zusammenstellung der Werte von U und $\mathfrak{A}$ insbesondere ergiebt sich $\varepsilon\,[U]$ für $m = 10$; 50; 100 resp. gleich: 1,64; 3,44; 4,40. Es ist somit in der nämlichen Reihenfolge $\varepsilon\,[U] - \mathfrak{A}$ resp. gleich: 0,26; 0,19; $-$0,47.]

Auch kann man nicht versichern, ob der Zahlenkoeffizient für beide Werte nicht wirklich mit Vorteil als gleich anzunehmen ist, da beide auf verschiedenen Wegen abgeleitete und hiernach etwas verschieden sich ergebende Koeffizienten beiderseits überhaupt nur Approximativbestimmungen liefern, mithin keine absolute Gültigkeit haben.

Wahrscheinlich erstrecken sich dergleichen Beziehungen auch auf die anderen Hauptwerte, und die mitgeteilten Beobachtungsdata geben die Gelegenheit, es zu prüfen; doch habe ich unterlassen, darauf einzugehen, teils in Erwartung, dass sich die Theorie erst dieses Verfahrens mehr bemächtige, teils um nicht die schon so weitläufige Untersuchung noch weiter auszudehnen.

Endlich folgt hier noch der Vergleich einiger Verteilungstafeln nach Rechnung und Erfahrung.

---

1) [Vergl. § 120 im folg. Kap. Da nach der dortselbst gegebenen Bestimmung $\varepsilon\,[U] = 0{,}60488\,U$ und da andererseits mit Vernachlässigung der Korrektion:

$$\mathfrak{A} = U\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}},$$

so folgt auf Grund der Übereinstimmung von $\varepsilon\,[U]$ und $\mathfrak{A}$, dass, wie an jener Stelle angegeben wird, approximativ

$$0{,}60488 \text{ gleich } \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}$$

gesetzt werden kann.]

Vergleich der beobachteten Zahlen von v in obigen Tabellen mit den nach § 113 berechneten für einige Werte von m.

v	$m = 4$		$m = 10$		$m = 20$		$m = 30$		$m = 50$	
	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.
0	1950	1779	494	480	176	174	94	95	49	44,5
2	1050	1182	588	581	256,5	267	169	159,5	84	80
4	—	38	112	128	130,5	121	90	93,5	51	57,5
6	—	—	6	10	33	32	36	38,5	32	33,5
8	—	—	—	—	3	6	8	13	14	16
10	—	—	—	—	1	—	3	0,5	8	6
12	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,5

§ 116. [Erster Zusatz. Die theoretische Bestimmung des mittleren und wahrscheinlichen Wertes von v.]

[Jedem Systeme von m positiven oder negativen Größen Δ_1, $\Delta_2 \ldots \Delta_m$ gehört ein Mittelwert Δ_0 und ein Differenzwert v zu, welch letzterer angiebt, um wie viel die Anzahl ν[1]) der oberhalb Δ_0 liegenden Werte die Anzahl μ der unterhalb Δ_0 liegenden Werte übersteigt. Die Werte von $v = \nu - \mu$ können daher jeden Wert der Reihe: $m - 2$, $m - 4 \ldots 4 - m$, $2 - m$ darstellen, so dass es im ganzen $m - 1$ positive oder negative v-Werte giebt, während die entsprechende Anzahl der u-Werte $m + 1$ beträgt. Hierbei bedarf der Fall, wo ein Δ_i ($i = 1, 2 \ldots m$) mit Δ_0 zusammenfällt, keiner besonderen Rücksichtnahme, da er bei der vorauszusetzenden stetigen Veränderlichkeit dieser Größen als ein Grenzfall anzusehen ist, der entweder dem Falle, dass Δ_i oberhalb Δ_0 oder dem Falle, dass Δ_i unterhalb Δ_0 liegt, beizuzählen ist. So ist beispielsweise für $m = 2$ der Wert von v stets gleich Null; für $m = 3$ dagegen ist v entweder gleich $+ 1$ oder gleich $- 1$.]

[Andererseits gehört zu jedem $v = \nu - \mu$ eine Mannigfaltigkeit von Systemen Δ_1, $\Delta_2 \ldots \Delta_m$, die man wie folgt bestimmen kann.]

[Bezeichnet Δ_0 den zwischen $-\infty$ und $+\infty$ variierenden Mittelwert, stellt ferner δ eine positive Größe dar, die alle Werte von 0 bis ∞ annehmen kann, und repräsentieren schließlich α_1, $\alpha_2 \ldots$

1) [ν und μ ersetzen hier μ' und μ_r.]

$\alpha_{\mu-1}$; $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{\nu-1}$ unabhängig von einander die positiven Werte von 0 bis 1, so setze man:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_1 &= \Delta_0 - (1 - \alpha_1)\,\delta \\
\Delta_2 &= \Delta_0 - (1 - \alpha_2)\,\alpha_1\,\delta \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\Delta_{\mu-1} &= \Delta_0 - (1 - \alpha_{\mu-1})\,\alpha_{\mu-2} \ldots \alpha_1\,\delta \\
\Delta_\mu &= \Delta_0 - \alpha_{\mu-1}\,\alpha_{\mu-2} \ldots \alpha_1\,\delta \\
\Delta_{\mu+1} &= \Delta_0 + (1 - \beta_1)\,\delta \\
\Delta_{\mu+2} &= \Delta_0 + (1 - \beta_2)\,\beta_1\,\delta \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\Delta_{m-1} &= \Delta_0 + (1 - \beta_{\nu-1})\,\beta_{\nu-2} \ldots \beta_1\,\delta \\
\Delta_m &= \Delta_0 + \beta_{\nu-1}\,\beta_{\nu-2} \ldots \beta_1\,\delta.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Man erhält so zunächst alle Wertensysteme $\Delta_1 \ldots \Delta_m$, deren μ ersten Werte unterhalb des jeweiligen Mittelwertes liegen, während die ν letzten Werte denselben übersteigen. In der That ist auf Grund der festgesetzten Variabilitätsbereiche $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_\mu$ kleiner als Δ_0; $\Delta_{\mu+1}, \Delta_{\mu+2} \ldots \Delta_m$ größer als Δ_0; so ist ferner die Summe der μ ersten Δ gleich $\mu\,\Delta_0 - \delta$ und die Summe der ν letzten Δ gleich $\nu\,\Delta_0 + \delta$, somit die Summe aller Δ gleich $m\,\Delta_0$.]

[Um sodann alle Wertensysteme $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_m$ zu erhalten, für welche irgend welche Werte in der Anzahl μ unterhalb und die übrigen ν oberhalb des jeweiligen Mittelwertes liegen, ist nur nötig, an dem Systeme (5) alle möglichen Vertauschungen zwischen den μ ersten und den ν letzten Δ vorzunehmen, was zu $m! : (\mu!\,\nu!)$ Gleichungensystemen von der Form (5) führt, deren jedes die nämliche Mannigfaltigkeit von Wertensystemen $\Delta_1 \ldots \Delta_m$ nur mit jedesmal veränderter Reihenfolge der Δ darstellt, und deren Verein die Gesamtmannigfaltigkeit der zu $v = \nu - \mu$ gehörenden Wertensysteme bestimmt.]

[Es sollen nun die Δ_i $(i = 1 \ldots m)$ als Abweichungen vom wahren Mittel aufgefasst werden, für welche das G. G. gilt. Dann ist die W. für das Vorkommen eines einzelnen Wertes Δ gleich:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h^2 \Delta^2\right].$$

Es ist ferner die W für das Vorkommen des Systems der m Werte $\Delta_1 \ldots \Delta_m$ gleich:

$$\frac{h^m}{(\sqrt{\pi})^m} \exp\left[-h^2(\Delta_1^2 + \ldots \Delta_m^2)\right],$$

da — nach bekanntem Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung — die W. für das Zusammentreffen mehrerer, von einander unabhängiger Ereignisse gleich dem Produkte der W. für das Eintreffen jedes einzelnen Ereignisses ist. Es ist schließlich die W. für das Vorkommen irgend eines Systemes $\Delta_1 \ldots \Delta_m$, das einer wohl definierten, stetigen Mannigfaltigkeit solcher Systeme angehört, gleich:

$$\frac{h^m}{(\sqrt{\pi})^m} \int \exp\left[-h^2(\Delta_1^2 + \ldots \Delta_m^2)\right] d\Delta_1 \ldots d\Delta_m, \tag{6}$$

wo das Integral über das Kontinuum der Wertensysteme zu erstrecken ist, in dessen Bereich das vorkommende Wertensystem fallen soll. Denn die W. dafür, dass irgend eines aus einer Reihe einander ausschließender Ereignisse eintritt, ist — wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt — gleich der Summe der W. der einzelnen Ereignisse.]

[Es ist aber den Gleichungen (5) zufolge:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots \Delta_m^2 = m\Delta_0^2 + \delta^2(\alpha;\beta), \\ \text{wenn zur Abkürzung } (\alpha;\beta) = \\ (1-\alpha_1)^2 + \alpha_1^2(1-\alpha_2)^2 + \cdots + (1-\beta_1)^2 + \beta_1^2(1+\beta_2)^2 + \cdots \end{array}\right\} \tag{7a}$$

$$\left.\begin{array}{l} d\Delta_1 \, d\Delta_2 \ldots d\Delta_m = m\delta^{m-2}\alpha_1^{\mu-2} \ldots \alpha_{\mu-2}\beta_1^{\nu-2} \ldots \beta_{\nu-2} \cdot \\ \qquad d\Delta_0 \, d\delta \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{\mu-1} \, d\beta_1 \ldots d\beta_{\nu-1}. \end{array}\right\} \tag{7b}$$

Man erhält somit als Ausdruck für die W., dass von m Abweichungen $\Delta_1 \ldots \Delta_m$ die μ ersten unterhalb, die ν letzten oberhalb des Mittelwertes Δ_0 liegen, das Integral:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{m h^m}{(\sqrt{\pi})^m} \displaystyle\int \exp\left[-h^2(m\Delta_0^2 + \delta^2(\alpha;\beta))\right] \cdot \\ \delta^{m-2}\alpha_1^{\mu-2} \ldots \alpha_{\mu-2}\beta_1^{\nu-2} \ldots \beta_{\nu-2} \, d\Delta_0 \, d\delta \, d\alpha_1 \ldots d\beta_1 \ldots, \end{array}\right\} \tag{8}$$

wo über Δ_0 von $-\infty$ bis $+\infty$, über δ von 0 bis ∞ und über jedes der α und β von 0 bis 1 zu integrieren ist. In Übereinstimmung damit drückt sich die W., dass überhaupt von m Abweichungen

μ unterhalb und ν oberhalb des Mittelwertes liegen, dass mithin $v = \nu - \mu$, aus durch:

$$\left.\begin{array}{l} W[v] = \dfrac{m!}{\mu!\,\nu!} \cdot \dfrac{m h^m}{(\sqrt{\pi})^m} \displaystyle\int \exp[-h^2(m\Delta_0^2 + \delta^2(\alpha;\beta))] \cdot \\ \delta^{m-2}\alpha_1^{\mu-2} \ldots \beta_1^{\nu-2} \ldots d\Delta_0\, d\delta\, d\alpha_1 \ldots d\beta_1 \ldots, \end{array}\right\} \quad (9)$$

wo das Integral zwischen eben denselben Grenzen zu nehmen ist.]

Da sich die Integration über Δ_0 und über δ sofort ausführen lässt, indem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-h^2 m \Delta_0^2]\, d\Delta_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{m}};$$

und für gerades m:

$$\int_0^\infty \exp[-h^2\delta^2(\alpha;\beta)]\,\delta^{m-2}\,d\delta = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (m-3)}{2^{\frac{m}{2}} \cdot (h\sqrt{\alpha;\beta})^{m-1}};$$

für ungerades m:

$$\int_0^\infty \exp[-h^2\delta^2(\alpha;\beta)]\,\delta^{m-2}\,d\delta = \frac{1\,.\,2\,.\,3 \ldots \left(\frac{m-3}{2}\right)}{2(h\sqrt{\alpha;\beta})^{m-1}};$$

so erhält man für $W[v]$ den vereinfachten Ausdruck:

$$W[v] = C_m \cdot \int \frac{\alpha_1^{\mu-2} \cdots \alpha_{\mu-2}\,\beta_1^{\nu-2} \cdots \beta_{\nu-2}}{(\alpha;\beta)^{\frac{m-1}{2}}}\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_{\nu-1}\, d\beta_1 \cdots d\beta_{\nu-1}, \quad (10)$$

woselbst:

$$\begin{aligned}(\alpha;\beta) = {} & (1-\alpha_1)^2 + \alpha_1^2(1-\alpha_2)^2 + \cdots + \alpha_1^2 \cdots \alpha_{\mu-1}^2 \\ & + (1-\beta_1)^2 + \beta_1^2(1-\beta_2)^2 + \cdots \beta_1^2 \cdots \beta_{\nu-1}^2;\end{aligned}$$

für gerades m: $\quad C_m = \dfrac{m!}{\mu!\,\nu!} \cdot \dfrac{\sqrt{m}}{2(\sqrt{2\pi})^{m-2}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-3);$

für ungerades m: $\quad C_m = \dfrac{m!}{\mu!\,\nu!} \cdot \dfrac{\sqrt{m}}{2(\sqrt{\pi})^{m-1}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \left(\dfrac{m-3}{2}\right);$

und wo die Integration für jedes α und β von der unteren Grenze 0 bis zur oberen Grenze 1 zu erstrecken ist.]

[Die Formel (10) erprobt sich zunächst in den einfachsten Fällen für $m = 2$ und 3, deren $W[0]$ resp. $W[1]$ von vornherein bekannt ist. Es ist nämlich, da für $m = 2$ stets $r = 0$ ist, $W[0] = 1$ und, da r für $m = 3$ entweder gleich $+1$ oder gleich -1, und beide Werte gleich wahrscheinlich sind, $W[+1] = W[-1] = \frac{1}{2}$. Und in der That erhält man aus (10) für $m = 2$:

$$W[0] = C_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1;$$

ferner für $m = 3$:

$$W[+1] = W[-1] = C_3 \int_0^1 \frac{d\alpha}{2(1 - \alpha + \alpha^2)} = C_3 \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.]$$

[Aus (10) ergeben sich sodann durch Ausführen der Integrationen die Werte von $W[r]$ für größere m. Dabei ist zu beachten, dass die Summe aller $W[r]$ für ein gegebenes m gleich 1, und dass

$$W[+r] = W[-r], \tag{11}$$

da r in $-r$ übergeht, vom μ mit ν vertauscht wird, was auf den Wert des Integrals keinen Einfluss hat.]

[Hiernach findet man für $m = 4$:

$$W[0] = \frac{3}{\pi} I_1; \quad W[+2] = W[-2] = \frac{2}{\pi} I_2;$$

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\alpha\, d\beta}{(1 - \alpha + \alpha^2 - \beta + \beta^2)^{3/2}}$$

$$= 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2} - \operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{2} = 0{,}21636 \cdot \pi;$$

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \int_1^\infty \frac{d\alpha\, d\beta}{(1 - \alpha + \alpha^2 - \beta + \beta^2)^{3/2}}$$

$$= \operatorname{arc\,tg} 2\sqrt{2} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2} = 0{,}08773 \cdot \pi.$$

Daraus folgt:

$$W[0] = 0{,}64908; \; W[+2] = W[-2] = 0{,}17546;$$
$$\mathfrak{Q}^2 = 1{,}40368; \; \mathfrak{A} = 0{,}70184.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich für $m = 5$:

$$W[+1] = W[-1] = 0{,}451075; \; W[+3] = W[-3] = 0{,}048925;$$
$$\mathfrak{Q}^2 = 1{,}7828; \; \mathfrak{A} = 1{,}1957.$$

Für die beiden Fälle $m = 4$ und $m = 5$ werden so die exakten Werte für $\mathfrak{Q}^2$ und $\mathfrak{A}$ geboten, deren Vergleich mit den entsprechenden Werten des § 115 die Zuverlässigheit der dortigen Bestimmungen zu beurteilen gestattet.]

[Um aber auf diesem Wege in gleicher Weise, wie es im vorigen Kapitel für die Abweichungen vom wahren Mittel geschah, Formeln für $W[r]$ und hiernach solche für $\mathfrak{Q}^2$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Y}$ zu gewinnen, welche die Abhängigkeit dieser Werte von m explicite darstellen, müsste das $(m-2)$-fache Integral von (10) in allgemein gültiger Ausführung vorliegen. Nun lässt sich allerdings eine solche Ausführung, am bequemsten aus (9), durch Entwicklung in Reihen gewinnen. Da dieselbe jedoch zu Weitläufigkeiten führt, so ist es angezeigt, den Wert von $\mathfrak{Q}^2$ direkt zu bestimmen, um sodann — mit dem Zugeständnis, dass so eine für die hier verfolgten Ziele unbedenkliche Lücke bleibt — $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Y}$ daraus unter der Voraussetzung abzuleiten, dass für große m die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse der v durch das G. G. geregelt werden. Diese Voraussetzung ist zulässig, da nach (11) das Wahrscheinlichkeitsgesetz für r symmetrisch ist bezüglich des Maximalwertes $r = 0$, und da ferner die aus dem G. G. folgenden Beziehungen zwischen $\mathfrak{Q}^2$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Y}$, die den Formeln (1) bis (4) zu Grunde liegen, eine hinreichende empirische Bewährung gefunden haben. Es wird dann allerdings auch auf eine theoretische Begründung der für $\mathfrak{A}$ gegebenen Korrektionen verzichtet.]

[Die direkte Bestimmung von $\mathfrak{Q}^2$ lässt sich wie folgt erreichen. Man beachte, dass für ein beliebiges System von Abweichungen Δ_1, $\Delta_2 \dots \Delta_m$, deren arithmetischer Mittelwert Δ_0 sei, die Differenz $r = \nu - \mu$ zwischen den Anzahlen der oberhalb und unterhalb Δ_0 liegenden Δ_i $(i = 1, 2 \dots m)$ darstellbar ist durch:

$$r = \frac{\Delta_1 - \Delta_0}{\sqrt{(\Delta_1 - \Delta_0)^2}} + \frac{\Delta_2 - \Delta_0}{\sqrt{(\Delta_2 - \Delta_0)^2}} + \cdots \frac{\Delta_m - \Delta_0}{\sqrt{(\Delta_m - \Delta_0)^2}}; \qquad (12)$$

denn jeder Quotient $(\Delta_i - \Delta_0) : \sqrt{(\Delta_i - \Delta_0)^2}$ ist gleich $+1$ oder gleich -1, je nachdem Δ_i oberhalb oder unterhalb Δ_0 liegt. Es ist demzufolge:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Q}^2 = \int \left(\frac{\varDelta_1 - \varDelta_0}{\sqrt{(\varDelta_1 - \varDelta_0)^2}} + \cdots \frac{\varDelta_m - \varDelta_0}{\sqrt{(\varDelta_m - \varDelta_0)^2}} \right)^2 \\ \cdot \frac{h^m}{(\sqrt{\pi})^m} \exp[-h^2(\varDelta_1^2 + \cdots \varDelta_m^2)] \cdot d\varDelta_1 \cdots d\varDelta_m ,\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

wo die Integration über jedes $\varDelta_i$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken ist.]

[Nun ist aber:

$$\left(\frac{\varDelta_1 - \varDelta_0}{\sqrt{(\varDelta_1 - \varDelta_0)^2}} + \cdots \frac{\varDelta_m - \varDelta_0}{\sqrt{(\varDelta_m - \varDelta_0)^2}} \right)^2 = m + \Sigma \frac{(\varDelta_i - \varDelta_0)(\varDelta_k - \varDelta_0)}{\sqrt{(\varDelta_i - \varDelta_0)^2 (\varDelta_k - \varDelta_0)^2}} ,$$

wo die Summation über alle i und k aus der Reihe der Zahlen von 1 bis m, ausgenommen die Werthe $i = k$, auszudehnen ist. Es ist daher, da

$$\frac{h^m}{(\sqrt{\pi})^m} \int \exp[-h^2(\varDelta_1^2 + \cdots \varDelta_m^2)] \, d\varDelta_1 \cdots d\varDelta_m = 1 ,$$

und alle $m(m-1)$ Integrale:

$$\frac{h^m}{(\sqrt{\pi})^m} \int \frac{(\varDelta_i - \varDelta_0)(\varDelta_k - \varDelta_0)}{\sqrt{(\varDelta_i - \varDelta_0)^2 (\varDelta_k - \varDelta_0)^2}} \exp[-h^2(\varDelta_1^2 + \cdots \varDelta_m^2)] \, d\varDelta_1 \cdots d\varDelta_m$$

einander gleich sind:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Q}^2 = m + m(m-1) \frac{h^m}{(\sqrt{\pi})^m} \cdot \\ \int \frac{(\varDelta_1 - \varDelta_0)(\varDelta_2 - \varDelta_0)}{\sqrt{(\varDelta_1 - \varDelta_0)^2 (\varDelta_2 - \varDelta_0)^2}} \exp[-h^2(\varDelta_1^2 + \cdots \varDelta_m^2)] \, d\varDelta_1 \cdots d\varDelta_m ,\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

wo die Grenzen der Integration, wie oben angegeben, zu nehmen sind.]

[Um nunmehr das m-fache Integral auszuwerten, setze man:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta_1 &= \varDelta_0 + \delta_1 \\
\varDelta_2 &= \varDelta_0 + \delta_2 \\
\varDelta_3 &= \varDelta_0 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{m-2} + \delta_3 \\
\varDelta_4 &= \varDelta_0 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{m-2} + \delta_4 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varDelta_{m-1} &= \varDelta_0 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{m-2} + \delta_{m-1} \\
\varDelta_m &= \varDelta_0 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{m-2} - (\delta_3 + \delta_4 + \cdots \delta_{m-1})
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Dadurch treten an Stelle der unabhängig voneinander zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ variierenden $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_m$ die gleichfalls unabhängig voneinander zwischen den nämlichen Grenzen variierenden $\Delta_0, \delta_1, \delta_2 \ldots \delta_{m-1}$, und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{Q}^2 = m + m(m-1)\frac{m h^m}{(\sqrt{\pi})^m} \cdot \\ &\int \frac{\delta_1 \delta_2}{\sqrt{\delta_1^2 \delta_2^2}} \exp[-h^2 A]\, d\Delta_0\, d\delta_1\, d\delta_2 \ldots d\delta_{m-1}, \\ &\text{wo: } A = m\Delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \frac{(\delta_1+\delta_2)^2}{m-2} \\ &+ 2(\delta_3^2 + \delta_3\delta_4 + \delta_4^2 + \delta_3\delta_5 + \delta_4\delta_5 + \delta_5^2 + \cdots \delta_{m-1}^2). \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Hieraus gewinnt man durch Ausführung der Integration bez. Δ_0, δ_3, $\delta_4 \ldots \delta_m$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{Q}^2 = m + m(m-1)\frac{h^2}{\pi}\sqrt{\frac{m}{m-2}} \cdot \\ &\int \frac{\delta_1 \delta_2}{\sqrt{\delta_1^2 \delta_2^2}} \exp\left[-h^2\left(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \frac{(\delta_1+\delta_2)^2}{m-2}\right)\right] d\delta_1\, d\delta_2. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Da aber $\delta_1 \delta_2 : \sqrt{\delta_1^2 \delta_2^2} = +1$, wenn δ_1 und δ_2 gleichzeitig positiv oder negativ sind, und da der nämliche Quotient den Wert -1 darstellt, wenn von den beiden Größen δ_1 und δ_2 die eine positiv, die andere negativ ist, so erhält man nach einfachen Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{Q}^2 = m + m(m-1)\frac{2h^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{m}{m-2}} \cdot \\ &\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \exp\left[-\frac{m-1}{m-2}h^2(\delta_1^2+\delta_2^2)\right] \cdot \left(\exp\left[-\frac{2}{m-2}h^2\delta_1\delta_2\right] - \exp\left[\frac{2}{m-2}h^2\delta_1\delta_2\right]\right) d\delta_1\, d\delta_2 \end{aligned}\right\} (18)$$

oder, wenn $t_1 = \sqrt{\frac{m-1}{m-2}}\, h\delta_1$; $t_2 = \sqrt{\frac{m-1}{m-2}}\, h\delta_2$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{Q}^2 = m + \frac{2m}{\pi}\sqrt{m(m-2)} \cdot \\ &\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \exp[-t_1^2 - t_2^2]\left(\exp\left[-\frac{2}{m-1}t_1 t_2\right] - \exp\left[\frac{2}{m-1}t_1 t_2\right]\right) dt_1\, dt_2. \end{aligned}\right\} (19)$$

Nun ist:

$$\exp\left[-\frac{2}{m-1}t_1 t_2\right]-\exp\left[\frac{2}{m-1}t_1 t_2\right]=-\frac{4}{m-1}t_1 t_2$$
$$-\frac{8}{3(m-1)^3}t_1^3 t_2^3-\frac{8}{15(m-1)^5}t_1^5 t_2^5-\ldots.$$

Folglich resultiert schließlich, wenn $t_1^2=\tau_1$ und $t_2^2=\tau_2$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Q}^2&=m-\frac{2m}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{m(m-2)}}{m-1}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\exp[-\tau_1-\tau_2]\\&\quad\left(1+\frac{2\tau_1\tau_2}{3(m-1)^2}+\frac{2\tau_1^2\tau_2^2}{15(m-1)^4}+\cdots\right)d\tau_1\,d\tau_2\\&=m-\frac{2m}{\pi}\frac{\sqrt{m(m-2)}}{m-1}\left(1+\frac{2}{3(m-1)^2}+\frac{8}{15(m-1)^4}+\cdots\right)\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Aus diesem Resultate wird aber der gesuchte Wert von $\mathfrak{Q}^2$, wie ihn die Formel (1) darstellt, gewonnen, wenn Größen von der Ordnung $1:m$ vernachlässigt werden. Durch Entwicklung nach Potenzen von $1:m$ erhält man nämlich:

$$\mathfrak{Q}^2=m-\frac{2m}{\pi}-\frac{1}{3\pi m}-\frac{2}{3\pi m^2}\cdots,\qquad(21)$$

somit in erster Annäherung:

$$\mathfrak{Q}^2=m\left(1-\frac{2}{\pi}\right).\qquad(22)$$

Hieraus folgen dann unmittelbar die Formeln (3) und (4) für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ — jedoch ohne die für $\mathfrak{A}$ empirisch gefundene Korrektion — wenn das G. G. für die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse der v bei großem m in Anspruch genommen wird.]

§ 117. [Zweiter Zusatz. Erläuterungen zur empirischen Bewährung der Wahrscheinlichkeitsbestimmungen für $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ mittelst der Lotterielisten.]

Zunächst könnte es überhaupt unmöglich scheinen, ein Prinzip empirischer Bewährung dafür zu finden, da ja die Formeln wesentliche Symmetrie und Gültigkeit des G. G. zufälliger Abweichungen voraussetzen; aber an welchem Gegenstande man auch die Bewährung versuchen will, man kann für die Abweichungen vom Mittel A weder die eine, noch die andere Bedingung von vornherein als erfüllt voraussetzen. Aber man kann sich künstlich einen Gegenstand herstellen, der diese Bedingungen erfüllt, nach folgendem Prinzip.

Denke man sich, um das Prinzip zuerst in möglichst fasslicher Form zu erläutern, in eine Urne eine sehr große Anzahl, ich will sagen 15000 weiße und ebenso viele schwarze Kugeln gethan, wovon die ersten als positive, die letzten als negative Abweichungen zählen mögen; es sollen diese Kugeln aber mit positiven und negativen Größenwerten beschrieben sein, jede Größe in solcher Wiederholung, wie es der W. der entsprechenden Fehlergrößen nach dem G. G. entspricht. Als richtiger Mittelwert, von dem die Fehler ihren Ausgang nehmen, gilt hierbei der Nullwert. Man ziehe nun m Kugeln und nenne positive Summe $\Sigma\Delta'$ die Summe, die man erhält, wenn man jede positive Fehlergröße mit der Zahl, wie oft sie gezogen ist, multipliziert; entsprechend mit der negativen Summe $\Sigma\Delta_,$. Sofern nun $\Sigma\Delta'$ und $\Sigma\Delta_,$ nach Zufall nicht gleich gefunden sind, erscheint der Mittelwert um $(\Sigma\Delta' - \Sigma\Delta_,) : m$, welcher Wert c heiße, vermehrt oder vermindert, je nachdem $\Sigma\Delta' > \Sigma\Delta_,$ oder umgekehrt. Der falsche Mittelwert ist also statt o gleich $\pm c$. Hat man also solchergestalt c bestimmt, so kann man jetzt zählen, wie viel Fehler größer und wie viel kleiner als c sind und hiernach ein $\pm(\mu' - \mu_,)$ oder v für diesen Fall finden und, nachdem man n Züge gethan hat, hieraus sowohl ein mittleres v als wahrscheinliches v finden, welches letztere nur eine Interpolation fordert.

Nun würde ein solches Verfahren mit der Urne und so vielen weißen und schwarzen, mit Größenwerten beschriebenen Kugeln praktisch undurchführbar sein; aber man kann die Urne durch das Lotterierad, die weißen und schwarzen Kugeln durch geradzahlige und ungeradzahlige Nummern ersetzt halten. Man kann ferner, um unter den 30000 Nummern Verhältnisse herzustellen, welche den Wahrscheinlichkeitsverhältnissen der Fehler entsprechen, allen Nummern von 1 bis incl. 338 die Größe 0,25 beilegen, allen von da bis incl. 1015 die Größe 1, allen von da bis 1691 die Größe 2, allen von da bis 2366 die Größe 3 u. s. w. und diese Übersetzung in eine Tabelle bringen, welche bei jeder Lotterienummer, auf die man im

Durchgehen der Liste trifft, sofort Auskunft giebt, welche Größe sie repräsentiert.

[Die Herstellung dieser Tabelle erfolgt mittelst der t-Tabelle (§ 183), wie folgt. Zunächst ist eine Entscheidung zu treffen, nach welchem Intervalle die zu Grunde zu legenden t-Werte fortschreiten sollen. Im Interesse der Bequemlichkeit werde das Intervall 0,02, mit dem Anfangs-$t = 0{,}01$, gewählt. Da nun die vorausgesetzte Anzahl der Lotterienummern, die als ebensoviele Exemplare eines K.-G. zu interpretieren sind, 30 000 ist, so sind die den Intervallgrenzen entsprechenden Φ-Werte mit 30 000 zu multiplizieren, um in ihren successiven Differenzen die Anzahlen der Abweichungen zu erhalten, die in die aufeinander folgenden Intervalle fallen. Die Abweichungen selbst aber sind, wie das für unsere K.-G. durchweg geschieht, in der Mitte des Intervalles, in das sie gehören, vereinigt zu denken. Es wäre somit, da $t = \Delta : \varepsilon\sqrt{\pi}$, das erste Δ gleich $\varepsilon\sqrt{\pi} \cdot 0{,}005$; das zweite gleich $\varepsilon\sqrt{\pi} \cdot 0{,}02$; das dritte gleich $\varepsilon\sqrt{\pi} \cdot 0{,}04$ u. s. w. zu setzen; da jedoch die Größe der mitlleren Abweichung ε beliebig festgesetzt werden darf, so kann $\varepsilon = 1 : 0{,}02\sqrt{\pi} = 28{,}2095$ angenommen werden, wonach das erste Δ gleich 0,25, das zweite Δ gleich 1, das dritte gleich 2 u. s. w. gefunden wird. Um endlich diesen Δ die Häufigkeit des Vorkommens, wie sie das G. G. gemäß der t-Tabelle verlangt, zu sichern, sind jedem einzelnen so viele Lotterienummern zuzuweisen, als die Anzahl der zugehörigen Abweichungen beträgt. Diese Zuordnung könnte an sich ganz willkürlich vorgenommen werden, da jede der 30 000 Nummern des Glücksrades die nämliche W. besitzt, gezogen zu werden. Selbstverständlich wird jedoch dabei die natürliche Reihenfolge der Nummern beobachtet; es werden mithin dem ersten Δ die ersten 338 Nummern, dem zweiten Δ die 677 folgenden Nummern u. s. w., wie oben angegeben, beigesellt, so dass eine Tabelle entsteht, die auszugsweise folgendermaßen lautet:]

Größe	Zahl	Größe	Zahl	Größe	Zahl
0,25	1 — 338	14	8923 — 9548	47	24347—24626
1	339—1015	15	9549—10167		
2	1016—1691			74	28872—28946
3	1692—2365	25	15351—15877	75	28947—29018
4	2366—3038	26	15878—16393		
5	3039—3708	27	16394—16899	100	29854—29865
10	6356—7005	28	16900—17394		
11	7006—7650			143	29998
12	7651—8289	45	23756—24056	150	29999
13	8290—8922	46	24057—24346	160	30000

Eigentlich freilich ändern sich die Abweichungen kontinuierlich, während hier jede Abweichungsgröße um 1 von der folgenden abweicht; dieses Abweichungsintervall ist aber im Verhältnisse zur einfachen mittleren Abweichung, also nach dem getroffenen Verhältnisse $1 : 0{,}02\sqrt{\pi} = 28{,}2095$ klein genug, um ein merklich übereinstimmendes Resultat mit kontinuierlicher Größenänderung zu geben.

Es haben mir nun sächsische Lotterielisten von 10 Jahren zu Gebote gestanden, jede von 32 000 bis 34 000 Nummern, wovon ich aber die Nummern über 30 000 in den Listen als nicht vorhanden bei Seite gelassen habe. [Aus diesen 10 Listen wurden mittelst voriger Methode die empirischen Data der obigen Tabellen I und II und hiernach die Bewährungen der Wahrscheinlichkeitsbestimmungen von $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ gewonnen.]

[Es gelte z. B. die Bestimmung von v für $m = 6$. Man hat dann je sechs aufeinander folgende Nummern der Listen zusammenzunehmen, wobei die Nummern über 30 000 nicht berücksichtigt werden; also, wenn die Nummern 28 904, 24 460, 32 305, 16 019, 157, 3708, 16 928 getroffen werden, mit Beiseitelassen der 3ten, da sie 30 000 übersteigt, die übrigen sechs nach obiger Tabelle in Abweichungsgrößen Δ umzusetzen, die positiv zu nehmen sind für geradzahlige Nummern, negativ für ungeradzahlige Nummern. Es stellen somit die bezeichneten Nummern die Größen $+74$, $+47$, -26, $-0{,}25$, $+5$, $+28$ mit dem Mittelwert $+21{,}3$ dar; mithin ist bezüglich des letzteren $\mu' = \mu, = 3$ und $r = 0$. Diese Bestimmung, 2000mal ausgeführt, ergab die in Tab. I, b unter $m = 6$, $n = 2000$ aufgeführten Werte.]

XVII. Das einfache und das zweiseitige Gauss'sche Gesetz.

§ 118. Wenn schon das einfache G. G., welches wir § 24—29 erläutert haben, wegen der im allgemeinen bei K.-G. vorauszusetzenden asymmetrischen W. der Kollektivabweichungen bez. A nicht direkt auf K.-G. anwendbar ist, ist doch das zweispaltige G. G. (§ 33) für sie in Anspruch zu nehmen, wonach alle Bestimmungen des einfachen G. G. auf K.-G. übertragbar werden, wenn man die Abweichungen von D statt von A nimmt und die nach einfachem G. G. gemeinsam für beide Seiten bez. A geltenden Werte $\pm \varDelta$, m, $\eta = \Sigma\varDelta : m$, bez. jeder Seite insbesondere resp. durch ∂', m', $e' = \Sigma\partial' : m'$ und $\partial_{,}$, $m_{,}$, $e_{,} = \Sigma\partial_{,} : m_{,}$ ersetzt. Mit Rücksicht hierauf gehen wir nach den schon im V. Kap. gemachten Angaben über das einfache G. G., welche hierbei vorauszusetzen sind, noch auf folgende Ergänzungen derselben ein.

Es ist schon angeführt, dass die bis jetzt vorliegenden, ausgeführten Verteilungstafeln des G. G., d. i. die Φ-Tafel und φ-Tafel, nicht bez. $\varDelta : \eta$, wofür sie § 27 gegeben wurden, sondern bez. $\varDelta : \eta\sqrt{\pi}$, kurz t, aufgestellt sind. Eine solche Tafel wird im Anhang (§ 183) mitgeteilt.

Derselben liegt die fundamentale Gauss'sche Bestimmung unter, dass die W. oder verhältnismäßige Zahl eines einzelnen Wertes $\pm \varDelta$ kurz eine bestimmte Größe sei, gleich:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \exp[-h^2 \varDelta^2], \tag{1}$$

worin $h = 1 : \eta\sqrt{\pi}$, $\varDelta = \eta\sqrt{\pi}\, t$.

Um sie zwischen gegebenen Grenzen von $\varDelta$ zu haben, hat man vorigen Ausdruck mit $d\varDelta$ zu multiplizieren und das Integral davon zwischen den betreffenden Grenzen zu nehmen; giebt allgemein:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int \exp[-h^2\varDelta^2]\cdot d\varDelta \tag{2}$$

oder nach Ersatz von h durch $1:\eta\sqrt{\pi}$, $\varDelta$ durch $\eta\sqrt{\pi}t$, $d\varDelta$ durch $\eta\sqrt{\pi}dt$:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int \exp[-t^2]\cdot dt \tag{3}$$

und die W. oder verhältnismäßige Zahl der $\varDelta$ zwischen $t=\varDelta:\eta\sqrt{\pi}=0$ und einem gegebenen t ist hiernach:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp[-t^2]\cdot dt,\quad \text{kurz} = \varPhi[t]. \tag{4}$$

Diese Wahrscheinlichkeit $\varPhi[t]$ wird nun eben für die verschiedenen Werte t durch die im Anhang gegebene Tabelle ausgedrückt. Um die absolute Zahl der $\varDelta$ zwischen den Grenzen $t=0$ und einem gegebenen t zu haben, hat man $\varPhi[t]$ noch mit der Totalzahl m zu multiplizieren.

Der Integralausdruck für $\varPhi[t]$ lässt sich bekanntlich nicht in endlicher Form integrieren, wohl aber in folgender unendlichen Reihe darstellen, welche so lange stark konvergiert und mithin zur Berechnung von $\varPhi$ brauchbar ist, als $t=\varDelta:\eta\sqrt{\pi}$ kleiner als 1, mithin $\varDelta<\eta\sqrt{\pi}$, d. i. $<1{,}772\,45\cdot\eta$ ist:

$$\varPhi[t]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{t}{1}-\frac{1}{1}\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{t^3}{5}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{t^7}{7}+\cdots\right) \tag{5}$$

Da die $\varPhi$ folgends immer bez. t genommen sind, kann die Zufügung $[t]$ übergangen werden. Alle Potenzen von t sind positiv, weil $t=\varDelta:\eta\sqrt{\pi}$, $\varDelta$ und η aber zugleich positiv und negativ werden.

Nun ist wichtig zu bemerken, dass, wenn, wie vielfach bei unseren Anwendungen der Fall, der Wert $\varDelta$, welcher in $t=\varDelta:\eta\sqrt{\pi}$ eingeht, sehr klein gegen den Mittelfehler η, mithin t selbst sehr klein ist, alle Glieder der Reihe (5) gegen das erste vernachlässigt werden können; wonach approximativ:

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot t = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\Delta}{\eta} \tag{6}$$

$$t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \Phi . \tag{7}$$

Doch wird bei dieser Vernachlässigung der höheren Glieder nach Ansicht von (5) der Wert Φ um eine Kleinigkeit zu groß bestimmt, und haben wir also genauer zu setzen:

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (t - \omega) , \tag{8}$$

wo ω ein sehr kleiner positiver Wert ist. Aus (8) aber folgt:

$$t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \Phi + \omega , \tag{9}$$

wonach t bei Vernachlässigung von ω, d. i. nach dem approximativen Werte (7), etwas zu klein gefunden wird.

§ 119. Der Wert η hat nach dem G. G. bestimmte Normalbeziehungen zu manchen anderen, aus den Verteilungstafeln ableitbaren Werten, insofern sie dem G. G. unterliegen, deren Bestätigung um so approximativer zu erwarten ist, je mehr m wächst.

Sei $q = \sqrt{\Sigma \Delta^2 : m}$ die Wurzel aus dem mittleren Abweichungsquadrat, welche bei den Astronomen als mittlere Abweichung schlechthin gilt, und w die sogenannte wahrscheinliche Abweichung, d. i. die Abweichung, die, wenn man positive und negative Abweichungen beide nach absolutem Werte nimmt, eben so viele größere Abweichungen über sich als kleinere unter sich hat, also im Grunde der Zentralwert der Abweichungen, nicht zu verwechseln mit unserem Zentralwerte schlechthin, der mit C bezeichnet wird, indem dieser nicht eine Abweichung Δ, sondern ein a ist. Man hat nun folgende Normalbeziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
q &= \eta \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}253\,314 \cdot \eta\,, \text{ also merklich } = \tfrac{5}{4}\eta\,;\\
\eta &= q \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}797\,885 \cdot q\,, \text{ also merklich } = \tfrac{4}{5}q\,;\\
q &= 1{,}482\,604 \cdot w\,;\; w = 0{,}674\,489 \cdot q\\
\eta &= 1{,}182\,947 \cdot w\,;\; w = 0{,}845\,347 \cdot \eta
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Durch Substitution der vorigen Ausdrücke für η in $t = \varDelta : \eta\sqrt{\pi}$ kann man also auch ohne Änderung des zugehörigen Φ setzen:

$$t = \frac{\varDelta}{q\sqrt{2}} \text{ oder } t = \frac{\varDelta}{2{,}096718 \cdot w} \cdot \tag{11}$$

Hiernach erscheint es zunächst gleichgültig, an welchen Ausdruck für t man sich hält. Nur ist es nicht ganz gleichgültig, ob man zunächst q aus den Quadraten der Abweichungen, $\Sigma\varDelta^2$, bestimmt, um danach η oder w mittelst der vorigen Formeln zu finden, oder umgekehrt η oder w aus den einfachen Abweichungen, um aus einem dieser Werte die anderen zu finden, sondern die direkte Bestimmung von q aus den Quadraten der Abweichungen hat eine etwas größere Sicherheit, als die von η als Mittel der einfachen Abweichungen, und letztere eine nicht unerheblich größere, als die von w durch Abzählen der Abweichungen, was sich auf die nach obigen Formeln daraus abgeleiteten Werte überträgt. Daher hält man sich in der physikalischen und astronomischen Maßlehre am liebsten an den Wert $t = \varDelta : q\sqrt{2}$, nach direkter Bestimmung von q aus den Quadraten der Abweichungen; gewönne aber auch dieselbe Sicherheit durch Anwendung der anderen Ausdrücke für t, wenn man η oder w darin nach obigen Formeln aus dem direkt bestimmten q abgeleitet hat, wogegen die Sicherheit geringer ist, wenn man η oder gar w im Ausdruck von t direkt aus den einfachen Abweichungen bestimmt, und man gewinnt nichts durch Anwendung des Ausdruckes $t = \varDelta : q\sqrt{2}$, wenn q darin durch Anwendung voriger Formeln aus dem direkt bestimmten η oder w abgeleitet ist.

Obschon nun nach Vorigem die Benutzung des Wertes $t = \varDelta : q\sqrt{2}$, nach direkter Bestimmung von q, einen prinzipiellen Vorteil der Sicherheit vor den anderen Bestimmungsweisen von t voraus hat, wird man sich doch in der Kollektivmaßlehre im allgemeinen lieber des Wertes $t = \varDelta : \eta\sqrt{\pi}$ nach direkter Bestimmung von η aus $\Sigma\varDelta$ bedienen, weil bei der großen Menge der Abweichungen, mit welchen man im allgemeinen in dieser Maßlehre zu thun hat, die Quadrierung derselben zu umständlich sein würde, der Vorteil der Sicherheit bei Anwendung des direkt bestimmten q vor der des direkt bestimmten η

doch nur unbedeutend ist, und bei großem m überhaupt seine Bedeutung merklich verliert. In der That, während der wahrscheinliche Fehler des direkt bestimmten q gleich

$$\pm \frac{0,476\,936}{\sqrt{m}}\, q$$

ist, ist der des direkt bestimmten η gleich

$$\pm \frac{0,509\,584}{\sqrt{m}}\, \eta$$

und der des direkt bestimmten w gleich

$$\pm \frac{0,786\,716}{\sqrt{m}}\, w$$ [1]).

§ 120. Alles Vorige sind bekannte Dinge. Es mag aber nicht ohne Interesse sein, hierzu noch einige, von mir selbst aus dem G. G. abgeleitete Sätze zu fügen.

Man muss sich hüten, die Summe der Abweichungsquadrate $\Sigma\Delta^2$ mit dem Quadrate der Abweichungssumme $(\Sigma\Delta)^2$ zu verwechseln. Wenn man sich nun die Mühe giebt, außer dem letzteren, einfach durch Quadrierung von $\Sigma\Delta$ zu gewinnenden Werte auch ersteren mühseliger durch Bestimmung der Abweichungsquadrate zu erhalten, so kann man mit Rücksicht, dass $(\Sigma\Delta)^2 = (m\eta)^2$ und $\Sigma\Delta^2 = mq^2$, aus der Gleichung:

$$q = \eta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

leicht die interessante Gleichung:

$$\frac{2m\Sigma\Delta^2}{(\Sigma\Delta)^2} = \pi\,, \tag{12}$$

oder, wenn man den Ausdruck auf linker Seite P nennt,

$$P = \pi \tag{12a}$$

1) [Die Ableitung dieser wahrscheinlichen Fehler giebt Gauss in der Zeitschrift für Astronomie Bd. I (Werke; Bd. IV; S. 116, 117) und Encke in der Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate (Berliner Astron. Jahrbuch für 1834 S. 293 und 298). Es ist zu beachten, dass der Zahlenwert für w, der sich an der angegebenen Stelle bei Gauss findet, entstellt ist.]

ableiten, wonach die mit $2m$, d. i. der doppelten Abweichungszahl multiplizierte Summe der Abweichungsquadrate, dividiert durch das Quadrat der Abweichungssumme, gleich dem Kreisverhältnisse π ist. Kurz mag die Formel die P-Formel heissen.

Andererseits erhält man nach voriger Formel die direkt mühsam zu berechnende Summe der Abweichungsquadrate aus dem leichter zu bestimmenden Quadrate der Abweichungssumme nach der Formel:

$$\Sigma \Delta^2 = \frac{\pi}{2m} \cdot (\Sigma \Delta)^2, \tag{13}$$

nur dass die direkt bestimmte Summe $\Sigma \Delta^2$ etwas sicherer bestimmt ist als die nach voriger Formel aus $(\Sigma \Delta)^2$ abgeleitete.

Zu den beiden Mittelfehlern, dem einfachen $\eta = \Sigma \Delta : m$ und quadratischen $q = \sqrt{\Sigma \Delta^2 : m}$, lässt sich noch ein dritter

$$\eta_\pi = \frac{\Sigma \Delta^2}{\Sigma \Delta} = \frac{q^2}{\eta} \tag{14}$$

fügen, den ich den Kreismittelfehler nennen will, und der gemäß obigen Ausdruckes dadurch erhalten wird, dass man die Summe der Abweichungsquadrate mit der Summe der Abweichungen oder, was auf dasselbe herauskommt, das Quadrat des quadratischen Mittelfehlers mit dem einfachen Mittelfehler dividiert.

Ich gebe ihm obigen Namen, weil er in Bezug auf das durch die P-Gleichung ausgedrückte Kreisverhältnis π einen Wendepunkt in folgendem Sinne darstellt. Setzen wir zuerst, die Gleichung sei genau durch die vorhandenen Abweichungen erfüllt, so wird in dem Falle, dass Abweichungen, welche größer als η_π sind, wachsen, P größer als π; hingegen wird P kleiner als π, wenn Abweichungen, die kleiner als η_π sind, wachsen. Die Änderung ist dem Abstande der betreffenden Abweichung von η_π proportional. Den Beweis hiervon übergehe ich[1]).

---

1) [Er folgt daraus, dass P in seiner Abhängigkeit von einem beliebigen einzelnen Abweichungswerte Δ_i sein Minimum erreicht, wenn $\Delta_i = \frac{\Sigma \Delta^2}{\Sigma \Delta}$ oder $= \eta_\pi$. Zugleich erhellt, dass P sein absolutes Minimum mit dem Werte 2 erreicht, wenn jedes der $\Delta_i = \eta_\pi$ wird.]

Ich habe die P-Gleichung an vielzahligen reinen Fehlern nach der psychophysischen Methode der mittleren Fehler vortrefflich bewährt gefunden.

Nach den gegebenen Ausdrücken haben die drei Mittelfehler folgendes Verhältnis:

$$\eta : q : \eta_\pi = 1 : \sqrt{\frac{\pi}{2}} : \frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

und es lässt sich zeigen, dass die Abweichungssummen oberhalb dieser Mittelfehler zur Totalsumme der Abweichungen nach Kap. XVIII folgende Verhältnisse haben, wo e wie immer die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet:

$$\exp\left[-\frac{1}{\pi}\right] = 0{,}72738 \text{ bez. } \eta; \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\right] = 0{,}60653 \text{ bez. } q;$$

$$\exp\left[-\frac{\pi}{4}\right] = 0{,}45594 \text{ bez. } \eta_\pi;$$

wovon die beiden ersten Werte sehr nahe das Verhältnis $7:6$ haben.

Das entsprechende Verhältnis der unteren Abweichungssummen wird natürlich durch Abzug voriger Zahlen von 1 erhalten, und es zeigt sich dann, dass die untere und obere Abweichungssumme sich bez. q sehr nahe wie $2:3$ verhält.

Bezüglich w ist das betreffende Verhältnis der oberen Abweichungssumme 0,79655; der Wert aber, bezüglich dessen die obere Abweichungssumme gleich der unteren ist, ist $1{,}17741 \cdot q$.

Die oberen Abweichungszahlen haben zur Totalzahl der Abweichungen folgende Verhältnisse:

$$0{,}42494 \text{ bez. } \eta; \quad 0{,}31731 \text{ bez. } q; \quad 0{,}21009 \text{ bez. } \eta_\pi; \quad 0{,}5 \text{ bez. } w;$$

wonach diese Verhältnisse für w, η, q, η_π sehr nahe mit $5:4:3:2$ stimmen.

Noch kann man als eine mitttere Abweichung zweiter Ordnung das mit η_2 zu bezeichnende Mittel aus den Differenzen der einzelnen Δ vom Mitlel η derselben definieren, d. i. [wenn $\Sigma\Delta_{\prime\prime}$ die Summe und $\mu_{\prime\prime}$ die Anzahl der Δ, welche kleiner als η sind, entsprechend $\Sigma\Delta''$ und μ'' die Summe und Anzahl der Δ, welche größer als η, bezeichnen, so dass $\mu_{\prime\prime}\eta - \Sigma\Delta_{\prime\prime} = \Sigma\Delta'' - \mu''\eta = \frac{1}{2} m \eta_2$]:

$$\eta_2 = 2\,\eta \left(\frac{\Sigma \Delta''}{\Sigma \Delta} - \frac{\mu''}{m} \right) = 0{,}60488 \cdot \eta, \tag{16}$$

approximativ mit

$$\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} \cdot \eta$$

stimmend.

So wie man den Wert π durch eine Function der Abweichungen nach G. G. darstellen kann, so auch den Wert e. Sofern nämlich nach obiger Angabe die Abweichungssumme oberhalb q dividiert durch die totale Abweichungssumme gleich $\exp[-\frac{1}{2}]$ ist, ist umgekehrt die totale Abweichungssumme dividiert durch die obere bez. q und der Quotient quadriert gleich e.

§ 121. Alle vorigen Sätze über das G. G. setzen zu ihrer vollen Gültigkeit eine große, streng genommen unendliche Zahl der Abweichungen voraus, aus denen die betreffenden Größen abgeleitet werden, was doch, wie schon früher bemerkt, nicht hindert, dass schon bei einer sehr mäßigen Zahl von Abweichungen eine sehr angenäherte empirische Bestätigung der vorigen Sätze zu finden sei; und da zur erfolgreichen Behandlung eines K.-G. jedenfalls eine nicht unbeträchtliche Zahl m von Exemplaren a und mithin Abweichungen desselben nach beiden Seiten von D gehört, so kann man nicht nur [nach Ersatz des einfachen G. G. durch das zweispaltige] eine sehr angenäherte Bestätigung der bisherigen Sätze dadurch erwarten, sondern auch finden. Inzwischen verdienen die Abweichungen von den sog. wahren Werten, d. h. welche aus einem unendlichen m folgen, oder sog. Fehler, welche je nach der Größe des endlichen m nach beiden Seiten und des m' und $m_{,}$ nach jeder Seite insbesondere noch übrig bleiben, immerhin wesentliche Beachtung; und es beziehen sich darauf teils die sog. wahrscheinlichen Fehler, teils die Korrektionen der Bestimmung aus endlichem m, je nachdem die Fehler den wahren Wert gleichgültig und zufällig ins Positive oder Negative ändern oder in bestimmter Richtung um einen von der Größe des m abhängigen Wert sei es vergrößern oder verkleinern[1]).

---

1) Die Korrektionen für die mittleren Abweichungswerte wurden in § 44 u. 45 mitgeteilt; die wahrscheinlichen Fehler für ε, q und w finden sich oben § 119

§ 122. [Um nun die Triftigkeit des zweiseitigen G. G. im Vergleich mit dem bisher allein als Verteilungsgesetz der K.-G. in Anspruch genommenen einfachen G. G. zu erproben, sollen auf Grund der Tafeln I und III des VIII. Kapitels Vergleichstabellen zwischen den beobachteten und berechneten z-Werten hergestellt werden. Es eignen sich jene Tafeln zu einem solchen Vergleiche, da sie eine bloß schwache Asymmetrie besitzen und somit zu der Erwartung berechtigen, dass ein durch die Anwendung des zweiseitigen Gesetzes gebotener Vorteil bei stärkerer Asymmetrie sich in verstärktem Maße wiederfinden werde.]

[Aus den 5 Reduktionslagen der Tafel I (§ 64) wähle ich die Lage $E_{,} = 368$ und aus den 4 Reduktionslagen der Tafel III (§ 65) die Lage $E_{,} = 60$ mit dem Bemerken, dass die erstere die relativ schwächste, die letztere die relativ stärkste Asymmetrie im Vergleiche mit den übrigen Lagen aufweist. Für beide Tafeln werden nun sowohl mit Bezug auf A die Werte $t = \Delta : \eta\sqrt{\pi}$ und hiernach $\Phi[t]$ als auch mit Bezug auf D_p die Werte $t' = \partial' : e'\sqrt{\pi}$ und $t_{,} = \partial_{,} : e_{,}\sqrt{\pi}$ und hiernach $\Phi[t']$ und $\Phi[t_{,}]$ berechnet, wo die Δ, ∂', $\partial_{,}$ von A oder D_p aus bis zu den jeweiligen Intervallgrenzen $a \pm \frac{1}{2}i$ (nicht bis zu den a selbst) sich erstrecken. Es werden sodann die Differenzen der aufeinanderfolgenden Φ-Werte, die als φ-Werte zu bezeichnen sind, gebildet und die gefundenen $\varphi[t]$ mit $\frac{1}{2}m$, die $\varphi[t']$ resp. $\varphi[t_{,}]$ mit m' resp. $m_{,}$ multipliziert. Auf diese Weise resultieren die nach dem einfachen und nach dem zweiseitigen G. G. berechneten z-Werte im Vergleich mit den beobachteten Tafelwerten in den beiden folgenden Tabellen. Hierbei sind die Zahlenwerte von η, e' und $e_{,}$ ohne Korrektion zu Grunde gelegt, da die Anbringung derselben bei der Größe des m und dem angestrebten Genauigkeitsgrade belanglos ist:

---

angegeben. Erwähnenswert ist auch der wahrscheinliche Fehler, der bei Bestimmung des arithmetischen Mittels A aus m Werten zu erwarten ist, und der gleich $w : \sqrt{m}$ zu setzen ist, wenn w, wie üblich, den wahrscheinlichen Fehler d. i. die wahrscheinliche Abweichung der Einzelwerte (s. oben unter (10)) vorstellt.

Vergleich der empirischen z von Tafel I (Vertikalumfang des Schädels) mit den theoretischen nach einfachem und zweiseitigem G. G.

$\varepsilon = 1$ mm; $i = 5$; $A = 408{,}2$; $D_p = 409{,}7$; $\eta = 11{,}1$; $e' = 10{,}4$; $e_i = 11{,}9$; $m = 450$; $m' = 210$; $m_i = 240$.

a	empirische z	theoretische z		Differenz	
		bez. A	bez. D_p	bez. A	bez. D_p
363	—	0,5	0,5	+ 0,5	+ 0,5
368	1	1	1	0	0
373	2	3	3	+ 1	+ 1
378	5	6	7	+ 1	+ 2
383	17	13	13	— 4	— 4
388	24	22,5	22,5	— 1,5	— 1,5
393	36	35,5	34,5	— 0,5	— 1,5
398	41	49	47	+ 8	+ 6
403	59	60	58	+ 1	— 1
408	**65**	**64**	**64**	— 1	— 1
413	**65**	60	62	— 5	— 3
418	51	50	52	— 1	+ 1
423	40	37	38	— 3	— 2
428	17	24	24	+ 7	+ 7
433	19	13	13	— 6	— 6
438	4	7	6	+ 3	+ 2
443	2	3	3	+ 1	+ 1
448	2	1	1	— 1	— 1
453	—	0,5	0,5	+ 0,5	+ 0,5
Summe	450	450	450	46	42

Vergleich der empirischen z von Tafel III (Rekruten) mit den theoretischen nach einfachem und zweiseitigem G. G.

$\mathfrak{E} = 1$ Zoll; $i = 1$; $A = 71{,}75$; $D_p = 71{,}99$; $\eta = 2{,}04$; $e' = 1{,}92$; $e_{,} = 2{,}16$; $m = 2047$; $m' = 963{,}5$; $m_{,} = 1083{,}5$.

a	empirische z	theoretische z bez. A	theoretische z bez. D_p	Differenz bez. A	Differenz bez. D_p
60	1	—	—	— 1	— 1
61	0	—	—	0	0
62	0	—	0,5	0	+ 0,5
63	0	1	1,5	+ 1	+ 1,5
64	2	3,5	4	+ 1,5	+ 2
65	15,5	10	12	— 5,5	— 3,5
66	26	26	28	0	+ 2
67	54	58	59	+ 4	+ 5
68	108	110	108	+ 2	0
69	172	179	174	+ 7	+ 2
70	253	252	243	— 1	—10
71	290	304	298	+14	+ 8
72	**330,5**	**315**	**318**	—15,5	—12,5
73	296	282	291	—14	— 5
74	223,5	217	226	— 6,5	+ 2,5
75	142	143	145,5	+ 1	+ 3,5
76	75	81	80,5	+ 6	+ 5,5
77	38	40	37	+ 2	— 1
78	13	17	15	+ 4	+ 2
79	3,5	6	5	+ 2,5	+ 1,5
80	2	2	1	0	— 1
81	1	0,5	—	— 0,5	— 1
82	0,5	—	—	— 0,5	— 0,5
83	0,5	—	—	— 0,5	— 0,5
Summe	2047	2047	2047	90	72

Wie man sieht, ist in beiden Tabellen die Gesamtsumme der Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Werten, dem absoluten Betrage nach genommen, für das zweiseitige Gesetz kleiner als für das einfache, wenn schon der Unterschied namentlich für die erste Vergleichstabelle unbedeutend ist. Was aber mehr ins Gewicht fällt, ist die größere Treue, die durch das zweiseitige Gesetz im Vergleiche zum einfachen in der Darstellung des Kernes beider Tafeln, den Endabteilungen gegenüber, erzielt wird.]

[Übrigens zeigt der Vergleich der z-Werte des zweiseitigen Gesetzes mit den entsprechenden z-Werten des einfachen Gesetzes in beiden Fällen übereinstimmend, dass von der Tafelmitte aus für wachsende a jene zuerst größer und dann kleiner, für abnehmende a jene zuerst kleiner und dann größer als diese sind. Der Grund hierfür liegt in der beiden Tafeln gemeinsamen Richtung der Asymmetrie, und es würden sich diese Verhältnisse gerade umkehren, wenn die Asymmetrie die entgegengesetzte Richtung erhielte.]

XVIII. Das Summengesetz und das Supplementarverfahren.

§ 123. Bisher ist das G. G., soviel mir bekannt, bloß zur Bestimmung der verhältnismäßigen oder absoluten Zahl der Abweichungen Δ von A zwischen gegebenen Grenzen der Abweichung benutzt worden; aber es lassen sich in Zusammenhang damit und gewissermaßen als Korollar davon auch Formeln für die verhältnismäßige und absolute Summe der Abweichungen von A zwischen gegebenen Grenzen der Abweichung entwickeln, welche, wie die Formeln bez. des G. G. überhaupt, so lange gültig und für die beiderseitigen Abweichungen gemeinsam anwendbar bleiben, als eine symmetrische W. der Abweichungen bez. A besteht; im Falle der asymmetrischen W. aber wiederum nach dem zweispaltigen G. G. ihre Gültigkeit für jede Seite insbesondere in Anspruch nehmen, wenn man die Abweichungen bez. D statt bez. A nimmt, und m, $\Sigma\Delta$, η, t für jede Seite insbesondere respektiv durch $m_{,}$, $\Sigma\partial_{,}$, $e_{,}$, $t_{,}$ und m', $\Sigma\partial'$, e', t' ersetzt.

Es verdienen aber die Ergebnisse in Bezug auf die Summe der Abweichungen um so mehr Beachtung, als sie den Nachteil der Ergebnisse bezüglich der Zahl der Abweichungen nicht teilen, nur durch ein auf einen endlichen Ausdruck nicht zurückführbares Integral oder eine unendliche Reihe, hiernach tabellarisch dargestellt werden zu können, da sie vielmehr in endlicher Form ausdrückbar sind, außerdem durch das Supplementarverfahren (§ 128), das sie ermöglichen, wichtig werden. Es gilt nämlich nach dem unten auseinander zu setzenden Gange folgendes.

§ 124. Um die Summe der Abweichungen bis zu einer gewissen Abweichungsgrenze vom dichtesten Werte aus nach einer Seite, sagen wir der positiven, also bis zur Grenze ∂', zu bestimmen, wovon das

Entsprechende für die negative Seite gilt, nehme man die Totalsumme der Abweichungen nach dieser Seite, d. i. $\Sigma\partial'$, bilde hieraus die einfache mittlere Abweichung $e' = \Sigma\partial' : m'$, nehme $t = \partial' : e'\sqrt{\pi}$, bilde daraus nach unten folgender Regel den Wert $\exp[-t^2]$, dann ist die absolute Summe der Abweichungen von $\partial' = 0$ bis zum gegebenen ∂' gleich: $\Sigma\partial'(1 - \exp[-t^2])$ und die darüber hinaus von ∂' bis ∞ liegende gleich: $\Sigma\partial' \cdot \exp[-t^2]$; die verhältnismäßige Summe bis ∂' aber, d. i. die vorige absolute, dividiert durch die Gesamtsumme $\Sigma\partial'$, welche mit T bezeichnet werde, gleich $1 - \exp[-t^2]$, darüber hinaus $\exp[-t^2]$.

Anstatt die absolute und verhältnismäßige Summe bis zu einer gewissen Grenze ∂' und darüber hinaus zu bestimmen, kann man diese Bestimmung auch bis zu einer gewissen Zahl der Abweichungen, welche z' heiße, vornehmen, sofern bei großem m', wie es hier vorausgesetzt ist, $z' : m'$ nach dem in voriger Weise bestimmten t und umgekehrt als Φ in der t-Tabelle gefunden werden kann. Sei also $z' : m'$ gegeben, so suche man in der t-Tabelle das t und verwende es in voriger Weise zur Summenbestimmung.

Insofern jeder Wert a in der a-Spalte der Verteilungstafel eigentlich ein ganzes Intervall i repräsentiert, in welchem sich die auf a geschriebenen z-Werte verteilen, was wir das Umkreisintervall des betreffenden a nennen, so ist die Grenze, bis zu welcher wir die Summe wie Zahl der Abweichungen zu nehmen haben, nicht durch ein a der a-Spalte selbst, sondern durch die Grenze von dessen Umkreisintervall, wodurch es sich an das Umkreisintervall des benachbarten a anschließt, als bestimmt anzusehen.

Anstatt die Summe bis zu gegebenen Grenzen von D aus jederseits zu bestimmen, kann man sie auch zwischen beliebigen Grenzen jederseits ganz in derselben Weise als die Zahl jederseits bestimmen, indem man die den Grenzen nach ersterer Bestimmungsweise zugehörigen Summen von einander abzieht.

§ 125. Um $\exp[-t^2]$ zu finden, addiere $2 \log t$ zu $0{,}63778 - 1$, suche hierzu die Zahl in den Logarithmentafeln, nimm sie negativ, d. h. ziehe sie von der nächst größeren ganzen Zahl ab und füge diese hinten mit negativem Vorzeichen hinzu; hierzu suche wieder die Zahl, so ist dies $\exp[-t^2]$.

Diese Berechnung hat an sich natürlich keine Schwierigkeit, ist aber, wie man sieht, etwas umständlich, und um sie für die einzelnen Fälle zu ersparen, kann man dann allerdings für äquidistante $t = \Delta : \eta \sqrt{\pi}$ oder, um die Multiplikation von η mit $\sqrt{\pi}$ zu ersparen, für solche von $\Delta : \eta$ die zugehörigen Werte von

$$\exp[-t^2] = \exp\left[-\frac{\Delta^2}{\eta^2 \pi}\right]$$

und hiernach $1 - \exp[-t^2]$ angeben und die äquidistanten Werte einander nahe genug nehmen, um dann dazwischen zu interpolieren.

Hier folgt eine solche Tabelle, deren Werte freilich noch einander näher liegen müssten, um eine sehr genaue Interpolation zu gestatten.

Tabelle über die Abweichungssummen von Δ bis ∞, die Totalsummme als Einheit gesetzt $\left(t = \frac{\Delta}{\eta\sqrt{\pi}}\right)$.

$\frac{\Delta}{\eta}$	$\exp[-t^2]$	$\frac{\Delta}{\eta}$	$\exp[-t^2]$	$\frac{\Delta}{\eta}$	$\exp[-t^2]$
0,00	1,00000	1,00	0,72738	2,00	0,27992
0,05	0,99920	1,05	0,70403	2,05	0,26245
0,10	0,99682	1,10	0,68035	2,10	0,24568
0,15	0,99286	1,15	0,65641	2,15	0,22961
0,20	0,98735	1,20	0,63232	2,20	0,21425
0,25	0,98030	1,25	0,60813	2,25	0,19960
0,30	0,97176	1,30	0,58395	2,30	0,18566
0,35	0,96176	1,35	0,55983	2,35	0,17241
0,40	0,95034	1,40	0,53586	2,40	0,15986
0,45	0,93757	1,45	0,51210	2,45	0,14798
0,50	0,92350	1,50	0,48861	2,50	0,13677
0,55	0,90820	1,55	0,46545	2,55	0,12621
0,60	0,89173	1,60	0,44270	2,60	0,11628
0,65	0,87417	1,65	0,42038	2,65	0,10696
0,70	0,85558	1,70	0,39855	2,70	0,09823
0,75	0,83606	1,75	0,37726	2,75	0,09006
0,80	0,81569	1,80	0,35654	2,80	0,08245
0,85	0,79455	1,85	0,33641	2,85	0,07536
0,90	0,77273	1,90	0,31692	2,90	0,06877
0,95	0,75031	1,95	0,29809	2,95	0,06266

$\frac{\varDelta}{\eta}$	$\exp[-t^2]$	$\frac{\varDelta}{\eta}$	$\exp[-t^2]$	$\frac{\varDelta}{\eta}$	$\exp[-t^2]$
3,00	0,05700	4,00	0,00614	5,00	0,00035
3,05	0,05176	4,05	0,00540	5,05	0,00030
3,10	0,04694	4,10	0,00474	5,10	0,00025
3,15	0,04249	4,15	0,00416	5,15	0,00022
3,20	0,03841	4,20	0,00364	5,20	0,00018
3,25	0,03466	4,25	0,00318	5,25	0,00015
3,30	0,03123	4,30	0,00278	5,30	0,00013
3,35	0,02809	4,35	0,00242	5,35	0,00011
3,40	0,02523	4,40	0,00211	5,40	0,00009
3,45	0,02263	4,45	0,00183	5,45	0,00008
3,50	0,02026	4,50	0,00159	5,50	0,00007
3,55	0,01811	4,55	0,00137	5,55	0,00006
3,60	0,01616	4,60	0,00119	5,60	0,00005
3,65	0,01440	4,65	0,00103	5,65	0,00004
3,70	0,01281	4,70	0,00088	5,70	0,00003
3,75	0,01138	4,75	0,00076	5,75	0,00003
3,80	0,01009	4,80	0,00065	5,80	0,00002
3,85	0,00893	4,85	0,00056	5,85	0,00002
3,90	0,00790	4,90	0,00048	5,90	0,00002
3,95	0,00697	4,95	0,00041	5,95	0,00001
				6,00	0,00001
				6,15	0,00001
				6,20	0,00000

§ 126. Die Ableitung des Summengesetzes in Abhängigkeit von A nach einfachem G. G. ist diese.

Nach dem einfachen G. G. ist die beiderseits zusammengenommene absolute Zahl der Abweichungen zwischen $t = 0$ und einem gegebenen Werte von $t = \varDelta : \eta \sqrt{\pi}$:

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp[-t^2]\, dt; \quad \text{kurz } m\,\Phi[t]. \tag{1}$$

Um die zugehörige Summe zu haben, hat man vorigen Wert unter dem Integralzeichen mit $\varDelta$ zu multiplizieren, was giebt:

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \varDelta \exp[-t^2]\, dt\,. \tag{2}$$

Da aber $t = \varDelta : \eta\sqrt{\pi}$, mithin $\varDelta = t\eta\sqrt{\pi}$, so hat man durch Substitution dieses Wertes für $\varDelta$ in voriges Integral:

$$2m\eta \int_0^t t \exp[-t^2]\, dt\,. \tag{3}$$

Das allgemeine Integral von $2\int t \exp[-t^2]\, dt$ ist mit Rücksicht, dass $t dt = d\frac{1}{2}t^2$, in endlicher Form integrierbar, nämlich gleich $-\exp[-t^2]$ und mithin zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = t$ gleich $(1 - \exp[-t^2])$, was mit $m\eta = \Sigma\varDelta$ multipliziert, giebt:

$$\Sigma\varDelta(1 - \exp[-t^2])\,, \tag{4}$$

als Summe der $\varDelta$ zwischen $t = 0$ und einem gegebenen t.

Sei kurz

$$1 - \exp[-t^2] = T \tag{5}$$

gesetzt, so ist

$$\Sigma\varDelta \cdot T \tag{6}$$

der verlangte Wert.

Nun ist in unendlicher Reihe ausgedrückt:

$$\exp[-t^2] = 1 - \frac{t^2}{1} + \frac{t^4}{1.2} - \frac{t^6}{1.2.3} + \cdots, \tag{7}$$

wovon es bei sehr kleinem t d. i. $\varDelta : \eta\sqrt{\pi}$ hinreicht, die beiden ersten Glieder beizubehalten, was bei sehr kleinem t merklich giebt:

$$\Sigma\varDelta \cdot T = t^2 \cdot \Sigma\varDelta\,. \tag{8}$$

Im Falle der Asymmetrie hat man von D statt von A auszugehen und das zweispaltige G. G. anzuwenden, d. i. statt $\Sigma\varDelta$ zu setzen $\Sigma\partial'$ oder $\Sigma\partial$, und t jederseits ebenso von e' oder e, abhängig zu machen, wie vorhin von η.

§ 127. Um Beobachtung mit Rechnung zu vergleichen, gilt es natürlich, die Abweichungssumme selbst bis zu gegebenen Grenzen zu bestimmen. Nun gilt für die empirische Bestimmung der totalen $\Sigma\partial$ jeder Seite (nach § 74):

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\partial_{,} = m_{,}D - \Sigma a_{,}\,; \\ \Sigma\partial' = \Sigma a' - m'\,D\,; \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Formeln, die sich für die Bestimmung bis zu gegebener Grenze $\partial_{,}$ oder ∂' jeder Seite bloß insofern ändern, als unter $m_{,}$ und m' nicht mehr die Totalität der Abweichungszahlen jeder Seite, sondern bloß die Abweichungszahlen bis zur betreffenden Grenze, und unter $\Sigma a_{,}$, $\Sigma a'$ nicht die Totalität der a jeder Seite, sondern wieder nur bis zur gegebenen Grenze zu verstehen sind, wonach wir die betreffenden Werte mit zwei Strichelchen unten und oben, statt bezüglich der Totalität bloß mit einem Strichelchen bezeichnen. Sofern nun D im allgemeinen in ein gewisses Intervall hineinfällt, ist der Teil von $m_{,,}$, m'', $\Sigma a_{,,}$, $\Sigma a''$, der in jenes Intervall hineinfällt, wie früher (§ 72 u. 73) angegeben, durch Interpolation zu bestimmen, indes der übrige Teil durch die Beobachtung selbst gegeben ist.

Erläutern wir dies an der Tafel I der 450 Schädel. [Für die Reduktionslage $E_{,} = 368$ (§ 64) fällt $D_p = 409{,}7$ in das Intervall $405{,}5 - 410{,}5$. Es ist somit $a_0 = 408$; $z_0 = 65$; $i = 5$; $g_1 = 405{,}5$; $x = 4{,}2$, und man erhält für das von D_p bis zur ersten Intervallgrenze $405{,}5$ reichende $\Sigma\partial_{,,}$ d. i. für $y\,D_p - Y$, wo y die Zahl und Y die Summe des Eingriffsintervalles angiebt, nach den Formeln (13) und (8) des IX. Kapitels:

$$y = \frac{4{,}2}{5} \cdot 65 = 55\,; \quad Y = 55 \cdot 407{,}6\,; \quad y\,D_p - Y = 55 \cdot 2{,}1 = 116.$$

Man erhält demgemäß folgende Vergleichstabelle zwischen Theorie und Erfahrung für die unteren Abweichungssummen der Tafel I:

Vergleich der empirischen $\Sigma\partial_{\prime\prime}$ mit den theoretischen für Tafel I (Vertikalumfang des Schädels).

$\varepsilon = 1$ mm; $i = 5$; $D_p = 409{,}7$; $e_{\prime} = 11{,}9$; $\Sigma\partial_{\prime} = 2840$.

$\partial_{\prime\prime}$	$\Sigma\partial_{\prime\prime}$ empir.	$\Sigma\partial_{\prime\prime}$ theor.	Differenz	$\Sigma\partial_{\prime\prime} : \Sigma\partial_{\prime}$ empir.	$\Sigma\partial_{\prime\prime} : \Sigma\partial_{\prime}$ theor.	Differenz
0 bis 4,2	116	111	— 5	0,041	0,039	— 0,002
» 9,2	511	491	— 20	0,180	0,173	— 0,007
» 14,2	991	1034	+ 43	0,349	0,364	+ 0,015
» 19,2	1592	1599	+ 7	0,561	0,563	+ 0,002
» 24,2	2113	2079	— 34	0,744	0,732	— 0,012
» 29,2	2566	2423	—143	0,904	0,853	— 0,051
» 34,2	2725	2636	— 89	0,960	0,928	— 0,032
» 39,2	2798	2749	— 50	0,982	0,968	— 0,014
» 44,2	2840	2806	— 34	1,000	0,988	— 0,012

Hieraus ist zu ersehen, mit welcher Annäherung die absoluten und relativen Abweichungssummen, wie sie die Tafel hergiebt, durch das Summengesetz dargestellt werden. Dabei ist in Rücksicht zu ziehen, dass die empirischen Werte unter der Voraussetzung einer gleichmäßigen Verteilung der a resp. ∂ innerhalb der einzelnen Intervalle bestimmt wurden, während der theoretischen Berechnung die Annahme zu Grunde liegt, dass die Verteilung auch innerhalb der Intervalle dem G. G. entspreche.]

§ 128. Zusatz. Das Supplementarverfahren.

Wenn, wie allgemein üblich, in einer Verteilungstafel bloß die Gesamtzahl, aber nicht die Gesamtsumme der a, welche über und unter einen gewissen Wert fallen, kurz bloß die Vorzahl v und Nachzahl n, aber nicht die Vorsumme V und Nachsumme N gegeben ist, so lässt sich zwar C, aber weder A noch D_p direkt erhalten, ebensowenig die Abweichungsfunktionen bezüglich dieser Werte, also wird auch keine Verteilungsrechnung möglich sein. Inzwischen kann man dazu nach folgendem, freilich etwas mühsamem, Verfahren, welches ich das Supplementarverfahren nenne, gelangen.

Man bestimmt statt D_p vielmehr D_i, welches in der Regel von D_p so wenig abweicht, um dafür substituiert werden zu können, lässt zunächst eine Rücksicht auf v, V, n, N bei Seite, sondern bestimmt die noch unvollständigen Abweichungszahlen $m_{,,}$, m'' und Abweichungssummen $\Sigma\partial_{,,}$, $\Sigma\partial''$ nach bekannter scharfer Methode bloß aus dem ausgeführten Teile der Tafel. Man bestimmt aber auch die totalen Abweichungszahlen $m_, = m_{,,} + v$ und $m' = m'' + n$, hiernach $v : m_,$ und $n : m'$. Diesen Werten zugehörig kann man in folgender Tabelle Werte α finden, deren Berechnungsweise nachher angegeben wird, durch die Tabelle aber soll, wenigstens für einige Werte, die Mühe der Berechnung erspart werden. Die Tabelle ist bloß auf kleine Werte $v : m_,$ und $n : m'$ ausgedehnt, da es sich in weit den meisten Fällen nur um solche handelt; wo die Tabelle nicht ausreicht, muss α direkt berechnet werden.

Hiernach findet man die volle Summe der unteren und oberen Abweichungen von D_i wie folgt:

$$\Sigma\partial_, = \frac{\Sigma\partial_{,,}}{1-\alpha}, \quad \Sigma\partial' = \frac{\Sigma\partial''}{1-\alpha}. \tag{10}$$

Hiernach[1]):

$$\left.\begin{aligned} e_, &= \frac{\Sigma\partial_,}{m_,}, \quad e' = \frac{\Sigma\partial'}{m'}; \\ A &= D_i + \frac{\Sigma\partial' - \Sigma\partial_,}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

---

1) [Da die hierbei vorauszusetzende Gültigkeit des zweispaltigen G. G. bezüglich D_i das Bestehen des Proportionalgesetzes: $e' : e_, = m' : m_,$ zur Folge hat, so kann mit Rücksicht darauf statt der obigen, ohne Berücksichtigung dieses Gesetzes geltenden Formel auch direkt:

$$A = D_i + e' - e_,$$

gesetzt werden, was verglichen mit der obigen Ableitung von A einen Anhalt für die Sicherheit der Bestimmung gewährt.]

Einige zu den Zahlenwerten $v : m_{,}$, $n : m'$ zugehörige Summenbruchwerte α der Abweichungen jeder Seite bezüglich D.

$\frac{v}{m_{,}}$ oder $\frac{n}{m'}$	α
0,1626	0,37726
0,1105	0,27992
0,0726	0,19960
0,0461	0,13677
0,0282	0,09006
0,0167	0,05700
0,0095	0,03466
0,0052	0,02026
0,0028	0,01138
0,0014	0,00614
0,0007	0,00319
0,0003	0,00159
0,0002	0,00076
0,0001	0,00035

Die Berechnung von α geschieht so: Man suche zu $m_{,,} : m_{,}$ oder zu $m'' : m'$, je nachdem es sich um die negative oder positive Seite handelt, als $\Phi[t]$ genommen, den Wert t und nehme $\alpha = \exp[-t^2]$.

Diese Bestimmungsweise ist davon abhängig, dass man für jede Seite der Abweichungen von D_i aus das einfache G. G. nach der insbesondere für diese Seite gefundenen Zahl und mittleren Abweichung für gültig hält, kurz das modifizirte G. G. für die Totalität statuiert, und hängt an dem in folgender Einschaltung entwickelten Prinzip.

[Die drei Werte: 1) die relative Zahl der Abweichungen, 2) die relative Summe der Abweichungen, 3) der Quotient aus der Abweichung selbst, bis zu welcher von D_i aus die relative Zahl und Summe bestimmt werden, und aus der mittleren Abweichung, stehen in solcher Abhängigkeit von einander, dass je zwei aus dem dritten berechnet werden können. Es ist nämlich auf Grund des G. G. für die Abweichungen einer Seite, beispielsweise der positiven:

$$\frac{m''}{m'} = \Phi\,[t]; \quad \frac{\Sigma\partial''}{\Sigma\partial'} = 1 - \exp\,[-t^2]; \qquad t = \frac{\partial''}{e'\sqrt{\pi}}; \qquad (12)$$

wo m' und $\Sigma\partial'$ die gesamte Zahl und Summe der Abweichungen dieser Seite vorstellen, ∂'' aber die Abweichung bedeutet, bis zu welcher die unvollständige Zahl m'' und die unvollständige Summe $\Sigma\partial''$ erstreckt werden. Es kann daher, in der oben angegebenen Weise, zu $m'' : m'$ resp. $m_{,,} : m_,$ durch Vermittelung von t der Wert $\Sigma\partial'' : \Sigma\partial'$ resp. $\Sigma\partial_{,,} : \Sigma\partial_,$ berechnet und hieraus, wenn $\Sigma\partial''$ resp. $\Sigma\partial_{,,}$ empirisch gefunden ist, $\Sigma\partial'$ resp. $\Sigma\partial_,$ nach (10) bestimmt werden.]

Um diese Bestimmung an einem speziellen Beispiele zu erläutern, so ist in QUETELET's Tafel der französischen Rekruten[1]) $r = 28620$; $n = 2490$; $m = 100000$. [Man findet nun $D_i = 1{,}6273$ m, also $m_, = 55951$; $m' = 44049$; $m_{,,} : m_, = 0{,}48848$; $m'' : m' = 0{,}94347$; hiernach aus der t-Tabelle erstenfalls $t = 0{,}46420$ und $1 - \exp\,[-t^2] = 0{,}19385$; zweitenfalls $t = 1{,}34843$ und $1 - \exp\,[-t^2] = 0{,}83769$. Folglich erhält man aus (10) die Totalsumme $\Sigma\partial_, = 3740{,}5$; $\Sigma\partial' = 2410{,}7$, da $\Sigma\partial_{,,} = 725{,}1$ und $\Sigma\partial'' = 2019{,}4$. Schließlich ergiebt sich auf Grund von (11) $e_, = 0{,}0669$; $e' = 0{,}0547$; $A = 1{,}6140$. Es ist somit $D - A = 0{,}0133$, während $e_, - e' = 0{,}0122$; beide Werte sollten einander gleich sein, ihr Auseinanderweichen aber hat darin seinen Grund, dass der Ausgangswert D_i von dem proportional bestimmten D_p etwas abweicht. QUETELET selbst, der durch abschätzende Vergleichung der beobachteten Wahrscheinlichkeitswerte mit den theoretischen Werten seiner Wahrscheinlichkeitstafel zur Aufstellung einer durchgeführten Verteilungstafel gelangt, sagt: »la taille moyenne est de 1,62 m environ«.]

Man könnte nun meinen, dass auch in Fällen, wo eine vollständige Reihe vorliegt, die beobachteten Werte aber nach unten abnorm zu klein werden, wie es bei den Leipziger und Annaberger Rekrutenmaßen der Fall ist, man nur das Supplementarverfahren auf den höheren Teil der Reihe, der aber noch auf derselben Seite

1) [Lettres sur la théorie des probabilités, p. 401. »Taille des conscrits français«.]

von D liegt, anzuwenden brauche, um ein $\Sigma\partial_{,}$ zu erhalten, was am Einflusse der Abnormität nach unten unbeteiligt oder so beschaffen ist, als wenn das normale Verhältnis zwischen Zahl und Größe der Abweichungen, was man nach oben voraussetzt, auch bis zum unteren Ende reichte. Aber dies ist nicht der Fall, vielmehr kann man vom Supplementarverfahren nur insoweit ein brauchbares Ergebnis erwarten, als der bei der Berechnung ausgeschlossene untere Teil der Reihe, welcher b heisse, ebenso normal ist, als der bei der Berechnung zugezogene, welcher a heisse. In der That nehmen wir an, die verhältnismäßige Zahl der Abweichungen von einem gewissen Abweichungswerte bis zum Ende, d. i. im Teile b, sei zu groß, so wird die verhältnismäßige Zahl darüber, im Teile a, abnorm zu klein sein; beim Supplementarverfahren aber setzt man voraus, dass sie normal sei, was sich widerspricht. Daher kommt man auch, wenn man doch nach dem Supplementarverfahren bei solch abnormen Reihen verfährt, zu absurden Folgerungen. Natürlich vermindert sich in solchen Reihen durch das Supplementarverfahren der direkt erhaltene Wert $\Sigma\partial_{,}$, und steigt der Wert von A. — So habe ich bei den Leipzigern als a nach negativer Seite den Teil genommen, der von $D = 69{,}71$ bis 66,5 reicht, als b den Teil von da bis zu Ende, wobei man sich (nach § 15) erinnern kann, dass 66 der Wert ist, unterhalb dessen die Untermäßigen fallen. Der aus der Totalität abgeleitete Wert von $\Sigma\partial_{,}$ war 9935, der nach dem Supplementarverfahren abgeleitete 9097, merklich gleich mit dem Werte von $\Sigma\partial' = 9070$, welcher aus dem als normal angesehenen positiven Teile der Reihe folgt. Der aus der Totalität der Reihe direkt abgeleitete Wert von A war 69,62, der nach dem Supplementarverfahren gewonnene 69,70, also dem Werte D merklich gleich. Wäre nun aber D wirklich der Mittelwert, so müsste auch der Zentralwert damit zusammenfallen, also $m' = m_{,}$ sein, wogegen $m_{,} = 4257$; $m' = 4145$ ist.

XIX. Die Asymmetriegesetze.

§ 129. [In den beiden vorhergehenden Kapiteln wurde das G. G. so weit entwickelt, dass es als geeignetes Instrument für die Verteilungsrechnung der K.-G. ebensowohl bei wesentlicher Symmetrie als bei wesentlicher Asymmetrie der Abweichungen zur Benutzung bereit steht. Da nun die Erfahrung lehrt, dass in der That das Gauss'sche Fehlergesetz bei geringer Schwankung der Einzelwerte um ihren Mittelwert das zutreffende Verteilungsgesetz darstellt, und dass selbst bei schwacher Asymmetrie, bei der es zweifelhaft bleibt, ob nur eine Störung wesentlicher Symmetrie oder wesentliche Asymmetrie vorliegt, das zweiseitige Gesetz Vorteile dem einfachen Gesetze gegenüber gewährt, so kann man das zweiseitige G. G. als das hinreichend sich bewährende Verteilungsgesetz der K.-G. mit schwacher verhältnismäßiger Schwankung aufstellen. Dieses Grundgesetz der Verteilung für K.-G. stützt sich alsdann lediglich auf die Erfahrung und bedarf keiner theoretischen Begründung. Es bleibt daher vom empirischen Standpunkte aus bloß noch die Aufgabe, die bereits früher (im V. Kap.) vorgreiflich aufgeführten Spezialgesetze wesentlich asymmetrischer Verteilung als Folgerungen des Grundgesetzes abzuleiten.]

[Wenn aber auch dieses Grundgesetz durch die Erfahrung hinlänglich gestützt wird, so ist es doch wohl von Interesse, theoretische Voraussetzungen betreffs der K.-G. zu entwickeln, um das zweiseitige G. G. in ähnlicher Weise, wie es für das einfache Gesetz in der Fehlertheorie geschehen ist, theoretisch zu begründen. Dies soll nach Ableitung der Spezialgesetze in dem Zusatze zu diesem Kapitel geschehen.]

§ 130. [Die Spezialgesetze wesentlich asymmetrischer Verteilung zerfallen in zwei Gruppen. Die erste enthält Bestimmungen des Ausgangswertes, denen zufolge letzterer 1) der dichteste Wert ist, d. h. das Maximal-z aufweist, 2) die in dem Proportionalgesetze ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Die zweite Gruppe giebt Beziehungen zwischen den Hauptwerten, dem arithmetischen Mittelwerte A, dem Zentralwerte C und dem dichtesten Werte D, insofern die Abstände dieser Werte und ihre relative Lage theoretisch bestimmt und Eigenschaften der zu A und D gehörigen Abweichungszahlen entwickelt werden [1].]

[Zur Ableitung dieser Gesetze ist das zweiseitige G. G. zu Grunde zu legen, das als Verteilungsgesetz der Exemplare eines K.-G. folgende Form erhalten soll:

$$\left.\begin{aligned} \zeta' &= \frac{2\, h' m'}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\, h'^2 \partial'^2\right] \\ \zeta_, &= \frac{2\, h_, m_,}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\, h_,^2 \partial_,^2\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Hier bedeuten, wie üblich, m' und $m_,$ die Anzahlen der oberhalb und unterhalb des Ausgangswertes D gelegenen Abweichungen, ∂' und $\partial_,$ die ihrem absoluten Werte nach genommenen Abstände der Abweichungen von D, h' und $h_,$ schließlich die reziproken Werte von $e'\sqrt{\pi}$ und $e_,\sqrt{\pi}$, wo e' und $e_,$ die Mittelwerte der ∂' und $\partial_,$ sind. Es soll aber dabei der Ausgangswert D nicht von vornherein als dichtester Wert noch auch als der durch das Proportionalgesetz bestimmte Wert gelten, da ja beide Eigenschaften erst bewiesen werden sollen. Es ist vielmehr D als ein vorerst willkürlich gewählter Ausgangswert anzusehen, der erst auf Grund des Gesetzes (1) als der mit jenen beiden Eigenschaften behaftete Wert nachzuweisen ist. Noch ist zu bemerken, dass ζ' und $\zeta_,$ keine Anzahlen bedeuten, sondern bei geometrischer Interpretation nur die zu ∂'

---

1) [Außer diesen Gesetzen wurden in § 33 auch noch die Extremgesetze aufgeführt. Dieselben haben jedoch ebensowohl bei Symmetrie als bei Asymmetrie der Abweichungswerte Geltung und sind somit keine Gesetze wesentlich asymmetrischer Verteilung. Da sie überdies zu ausführlicheren Erörterungen Anlass geben, so werden sie im folgenden Kapitel eine besondere Behandlung erfahren.]

resp. $\partial_{,}$ als Abscissen gehörigen, auf letzteren senkrecht stehenden Ordinaten des Verteilungsgesetzes vorstellen. Die Anzahlen der Abweichungen dagegen beziehen sich stets auf Intervalle und werden durch Flächenstreifen repräsentiert, so dass die Gleichungen

$$z' = \zeta' d\partial'\,; \quad z_{,} = \zeta_{,} d\partial_{,} \tag{2}$$

angeben, wie viel Abweichungen dem Gesetze (1) zufolge zwischen den unendlich nahen Grenzen ∂' und $\partial' + d\partial'$ resp. $\partial_{,}$ und $\partial_{,} + d\partial_{,}$ auf das von letzteren eingeschlossene Intervall von der Größe $d\partial'$ resp. $d\partial_{,}$ fallen. Entsprechend bestimmt sich auch die W. W' und $W_{,}$, dass eine Abweichung zwischen den angegebenen Grenzen sich findet. Sie wird durch:

$$\left.\begin{aligned} W' &= \frac{z'}{m'} = \frac{2h'}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h'^2 \partial'^2\right] d\partial' \\ W_{,} &= \frac{z_{,}}{m_{,}} = \frac{2h_{,}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h_{,}^2 \partial_{,}^2\right] d\partial_{,} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

bezeichnet.]

[Durch die Gleichungen (1) ist für jeden endlichen Wert von ∂' und $\partial_{,}$ der zugehörige Wert von ζ' und $\zeta_{,}$ und damit auch der zugehörige Wert von z' und $z_{,}$ oder von W' und $W_{,}$ in eindeutiger Weise bestimmt. Für den Ausgangswert selbst jedoch, dem die Abweichungswerte $\partial' = 0$ und $\partial_{,} = 0$ zugehören, fehlt diese Eindeutigkeit, es sei denn, dass

$$h' m' = h_{,} m_{,} \quad \text{oder} \quad \frac{m'}{e'} = \frac{m_{,}}{e_{,}}\,. \tag{4}$$

Denn es wird für diesen Wert:

$$\zeta' = \frac{2h' m'}{\sqrt{\pi}}\,; \quad \zeta_{,} = \frac{2h_{,} m_{,}}{\sqrt{\pi}}\,; \tag{5}$$

so dass ein ununterbrochener Übergang der beiden Curvenzüge, welche die Gleichungen (1) darstellen in der That nur bei Erfüllung der Bedingungsgleichung (4) stattfindet. Dass aber diese Bedingungsgleichung notwendig erfüllt werden muss, erhellt aus folgender Überlegung.]

[Es ist selbstverständlich, dass einem Intervalle von gegebener Größe und gegebener Lage nur eine ganz bestimmte Anzahl von

Abweichungen angehören kann. Dies hat zur Folge, dass auch einem unendlich kleinen Intervalle, das als Grenze eines endlichen Intervalles zu betrachten ist, die nämliche Anzahl zukommen muss, mag es als Grenze eines in den oberen oder eines in den unteren Teil der Verteilungstafel sich erstreckenden Intervalles angesehen werden. Ist aber für den Ausgangswert ζ' verschieden von $\zeta_,$, so ist auch die Anzahl der Abweichungen für das dem Ausgangswerte zugehörige Intervall davon abhängig, ob das letztere von Seiten der oberhalb oder von Seiten der unterhalb des Ausgangswertes gelegenen Abweichungen erreicht gedacht wird. Da dies nicht zulässig ist, so muss $\zeta' = \zeta_,$ sein und somit die Bedingungsgleichung (4) erfüllt werden.]

[Untriftig wäre es, dem entgegenzuhalten, dass man so zwar für die Anzahlen, nicht aber für die W. der Abweichungen die Eindeutigkeit erziele. Denn die Wahrscheinlichkeitsbestimmungen (3) beziehen sich auf jede Seite der Abweichungen besonders, ohne dabei die andere Seite zu berücksichtigen oder von ihr in Mitleidenschaft gezogen zu werden. Will man eine beide Seiten gemeinsam berücksichtigende Bestimmung der W., so muss dieselbe auf die Gesamtanzahl $m = m' + m_,$ der Abweichungen Bezug nehmen, und es ist alsdann zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} W' &= \frac{z'}{m} = \frac{2\,h'\,m'}{\sqrt{\pi}\cdot m} \exp\left[-h'^2 \partial'^2\right] d\partial' \\ W_, &= \frac{z_,}{m} = \frac{2\,h_,\,m_,}{\sqrt{\pi}\cdot m} \exp\left[-h_,^2 \partial_,^2\right] d\partial_, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

so dass, wie es sein muss, für $\partial' = \partial_, = 0$ die Eindeutigkeit der Wahrscheinlichkeitsbestimmung auf Grund von (4) sich ergiebt.]

[Es ist somit bei Aufstellung des Verteilungsgesetzes (1) die Bedingungsgleichung (4) beizufügen. Damit wird aber von dem Ausgangswerte die Erfüllung des Proportionalgesetzes

$$e' : e_, = m' : m_, \tag{7}$$

gefordert. Zugleich giebt sich dieser Wert als dichtester Wert zu erkennen, da sowohl ζ' als auch $\zeta_,$ für den Nullwert der Abweichungsgröße ∂' und $\partial_,$ das Maximum erreicht.]

[Zur Veranschaulichung dieses Verteilungsgesetzes mögen die beiden folgenden Curvenzüge dienen, von welchen der erste den Verlauf der oberhalb D gelegenen Werte mit Angabe der wahrscheinlichen und mittleren Abweichungen $w = DW$; $e' = DE'$; $q = DQ$; der zweite den Verlauf der beiderseits von D gelegenen Werte mit Angabe der beiden Hauptwerte A und C neben D und der beiden einfachen mittleren Abweichungen $e' = DE'$; $e_, = DE_,$ vor Augen stellt.

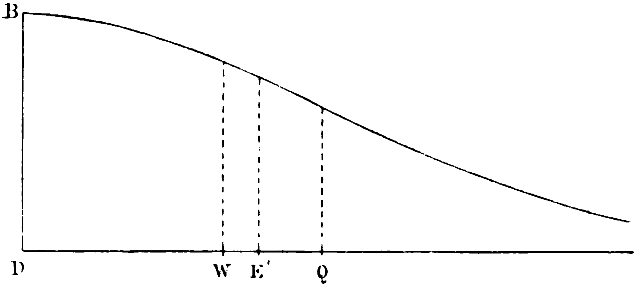
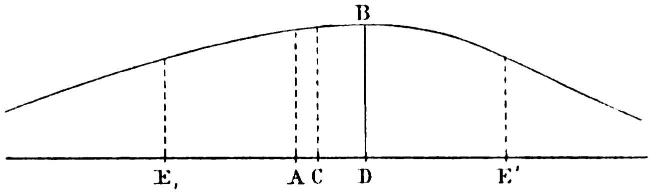


Fig. 2.



$DB = 1 : \sqrt{\pi}$; $DE' = e'$; $DE_, = e_,$; $DW = w$, $DQ = q$

Fig. 3.

Hierzu ist zu bemerken, dass die Ordinaten relative Werte vorstellen, indem an Stelle der Werte ζ' und $\zeta_,$ der Formel (1) die durch $2h'm' = 2h_,m_,$ dividierten Werte $\zeta' : 2h'm'$ und $\zeta_, : 2h_,m_,$ gesetzt wurden. Es wurde ferner $h' = 1$; $h_, = \frac{2}{3}$ angenommen. Daher ist der Maximalwert DB in beiden Curvenzügen gleich $1 : \sqrt{\pi}$; ferner:

$$e' : e_, = 2 : 3; \quad e' = 0{,}564; \quad e_, = 0{,}846; \quad D - A = 0{,}282;$$

$$D - C = 0{,}222; \quad p = \frac{D - C}{D - A} = 0{,}787.$$

Die Maßeinheit ist für den ersten Curvenzug gleich 5,6 cm, für den zweiten gleich 3,2 cm.]

§ 131. [Nur ausnahmsweise werden die Anzahlen m' und $m_,$ der oberhalb und unterhalb des Ausgangswertes D gelegenen Abweichungen einander gleich sein. In diesem Ausnahmefalle liegen der Zentralwert C und der arithmetische Mittelwert A mit D vereint. Denn es ist ja $m' = m_,$, so dass die den Zentralwert charakterisierende Bedingung erfüllt ist; aus der Gleichheit von m' und $m_,$ folgt aber weiterhin auf Grund des Proportionalgesetzes, dass auch $e' = e_,$ und mithin $m'e' = m_,e_,$. Dies besagt, dass auch die beiderseitigen Abweichungssummen einander gleich sind, wodurch der arithmetische Mittelwert bestimmt wird.]

[Ist jedoch, wie in der Regel vorauszusetzen, m' von $m_,$ verschieden, so liegen die beiden Hauptwerte A und C niemals mit D vereint, und es lassen sich ihre Abstände von D aus dem G. G. wie folgt ableiten.]

[Man bezeichne die größere der beiden Anzahlen m' und $m_,$ durch m'', die kleinere durch $m_{,,}$ und kennzeichne die auf Seite der m'' liegenden Werte ∂, e, h und t im Einklange mit den früher (§ 33) getroffenen Bestimmungen durch zwei Strichelchen oben. Dann ist der Zentralwert C als derjenige Wert zu suchen, der im Vereine mit D ein Intervall abgrenzt, das $\frac{1}{2}(m'' - m_{,,})$ Abweichungen enthält; denn es ist:

$$m_{,,} + \frac{m'' - m_{,,}}{2} = m'' - \frac{m'' - m_{,,}}{2} = \frac{m}{2}, \tag{8}$$

so dass oberhalb und unterhalb des der Art bestimmten Wertes gleich viel Abweichungen liegen, wie es für den Zentralwert zu fordern ist. Aus dem Verteilungsgesetze folgt aber, wenn $\gamma = C - D$ den Abstand der Werte C und D ohne Rücksicht auf ihre gegenseitige Lage angiebt:

$$\frac{m'' - m_{,,}}{2} = \frac{2h''m''}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} \exp[-h''^2 \partial''^2]\, d\partial'', \tag{9}$$

oder, wenn $h''\partial'' = t$; $h''\gamma = t''$ gesetzt wird:

$$\frac{m'' - m_{\prime\prime}}{2} = \frac{2\, m''}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t''} \exp[-t^2]\, dt = m'' \cdot \Phi[t''] \,. \tag{10}$$

Man findet somit mit Rücksicht, dass $h'' = 1 : e''\sqrt{\pi}$,

$$C - D = \gamma = t''\, e''\sqrt{\pi}\,, \tag{11}$$

wo entweder γ direkt aus (9) zu berechnen oder t'' mittelst der t-Tabelle auf Grund von (10) als derjenige Wert zu bestimmen ist, der zu $\Phi = \frac{m'' - m_{\prime\prime}}{2\, m''}$, kurz zu Φ'' gehört.]

[Der Abstand $C - D$ ist demnach wesentlich von dem Quotienten $(m'' - m_{\prime\prime}) : m''$ abhängig. Ist der letztere gleich Null, so wird auch γ gleich Null, und C fällt, wie schon bemerkt, mit D zusammen. Ist jedoch dieser Quotient zwar nicht gleich Null, wohl aber hinreichend klein, so dass seine zweite Potenz vernachlässigt werden kann, so ist es erlaubt, $\Phi[t'']$ als Größe der nämlichen Ordnung angenähert durch:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, t'' \quad \text{oder} \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{C - D}{e''\sqrt{\pi}} \tag{12}$$

darzustellen und mithin:

$$\frac{m'' - m_{\prime\prime}}{2} = \frac{2\, m''}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{C - D}{e''\sqrt{\pi}} \tag{13}$$

oder:

$$C - D = \frac{m'' - m_{\prime\prime}}{4\, m''}\, e''\, \pi \tag{14}$$

zu setzen. Andererseits erreicht $C - D$ den größtmöglichen Wert, wenn $(m'' - m_{\prime\prime}) : m''$ den Wert 1 annimmt, d. h. wenn $m_{\prime\prime} = 0$ und $m'' = m$, wenn also die Gesamtheit der Abweichungen auf einer und derselben Seite des Ausgangswertes liegt, und die Asymmetrie infolgedessen unendlich groß wird. Es wird in diesem Grenzfalle aus (10) die einfachere Gleichung:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t''} \exp[-t^2]\, dt = \Phi[t''], \tag{15}$$

so dass $t'' = w : e''\sqrt{\pi}$, wo w den wahrscheinlichen Wert der Abweichungen darstellt, der nach § 119 gleich 0,845347 · e'' zu setzen ist. Für den Abstand $C - D$ erhält man sonach die Gleichung:

$$C - D = w = 0{,}845\,347 \cdot e''.] \tag{16}$$

[Diese Bestimmung von $C - D$ ist ebenso im allgemeinen Falle (11) wie in den beiden Grenzfällen (14) und (16) durchaus auf das zweiseitige G. G. als Verteilungsgesetz gegründet. Es wird darum die empirische Bestimmung dieses Abstandes in einer vorgelegten Verteilungstafel, die am einfachsten nach direkter Berechnung von C und A mittelst der Gleichung (26) oder (29) des XI. Kapitels geleistet wird, im allgemeinen einen von der hier gefundenen theoretischen Bestimmung abweichenden Wert ergeben. Anders ist es bezüglich des Abstandes $A - D$ zwischen dem arithmetischen Mittelwerte A und dem Ausgangswerte D, da die Aufstellung der Formeln für diesen Abstand lediglich auf den Eigenschaften von A und D fusst, die auch der empirischen Berechnung zu Grunde liegen, während zu einer Verwendung des G. G. kein Anlass sich bietet.]

[Beachtet man nämlich, dass die größere der beiden Abweichungssummen $\Sigma\partial'$ und $\Sigma\partial$, infolge des Proportionalgesetzes auf der nämlichen Seite von D sich findet, auf der die größere der beiden Abweichungszahlen, nämlich m'', zu suchen ist, wonach die größere der beiden Summen durch $\Sigma\partial''$, die kleinere durch $\Sigma\partial_{,,}$ bezeichnet wird, so kann man setzen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\partial'' &= \Sigma a'' - m''D \\ \Sigma\partial_{,,} &= m_{,,}D - \Sigma a_{,,}\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Hieraus folgt durch Subtraktion:

$$\Sigma\partial'' - \Sigma\partial_{,,} = \Sigma a'' + \Sigma a_{,,} - (m'' + m_{,,})\,D = \Sigma a - mD,$$

und man erhält nach Division mit m unter Berücksichtigung, dass:

$$A = \frac{\Sigma a}{m},$$

die Gleichung:

$$A - D = \frac{\Sigma\partial'' - \Sigma\partial_{,,}}{m}. \tag{18}$$

die jedoch die Eigenschaft von $\bar{D}$, das Proportionalgesetz zu erfüllen, noch nicht berücksichtigt. Zu diesem Zwecke setze man in (18):

$$\Sigma\partial'' = m''e''; \quad \Sigma\partial_{,,} = m_{,,}e_{,,}$$

oder, was dasselbe ist, da $m'' = m - m_{,,}$ und $m_{,,} = m - m''$:

$$\Sigma\partial'' = me'' - m_{,,}e''; \quad \Sigma\partial_{,,} = me_{,,} - m''e_{,,}.$$

Man gelangt so zu der Gleichung:

$$A - D = e'' - e_{,,} - \frac{m_{,,}e'' - m''e_{,,}}{m}, \tag{19}$$

in welcher dem Proportionalgesetze zufolge:

$$m_{,,}e'' - m''e_{,,} = 0$$

ist, so dass schließlich:

$$A - D = e'' - e_{,,} \tag{20}$$

resultiert, eine Beziehung, die schon im XI. Kap. aufgestellt wurde, als es sich um die Verwertung der Eigenschaften von D_p im Interesse seiner Bestimmung aus den empirisch gegebenen Tafelwerten handelte.]

[Da nach dem Proportionalgesetze:

$$e'' - e_{,,} = (m'' - m_{,,})\frac{e''}{m''},$$

so kann die Gleichung (20) auch in die Form:

$$A - D = \frac{m'' - m_{,,}}{m''}e'' \tag{21}$$

oder, wenn wie oben:

$$\Phi'' = \frac{m'' - m_{,,}}{2\,m''}$$

gesetzt wird, in die Form:

$$A - D = 2\,\Phi'' \cdot e'' \tag{22}$$

gebracht werden.]

[Die Bestimmung des Abstandes $A - D$ ist somit in der That von dem Bestehen des G. G. unabhängig, so dass für jede Verteilungstafel die Gleichung (20) bestehen muss, wenn anders A als Mittelwert und D als D_p, d. i. dem Proportionalgesetz gemäß, berechnet worden sind.]

[Auch für $A - D$ lassen sich die Grenzwerte angeben. Ist $m'' = m_{,,}$, so folgt aus (21), dass auch $A = D$, im Einklang mit der bereits gemachten Bemerkung, wonach C und A gleichzeitig mit D zusammenfallen. Ist dagegen $m'' = m$ und $m_{,,} = 0$, ist mithin die Asymmetrie unendlich groß, so wird

$$A - D = e'', \tag{23}$$

also gleich der einfachen mittleren Abweichung, während nach (16) $C - D$ die wahrscheinliche Abweichung darstellt. Für den Fall ferner, dass $(m'' - m_{,,}) : m''$ eine kleine Größe ist, deren zweite Potenz vernachlässigt werden darf, treten die Formeln (12), (13) und (14) in Kraft, so dass aus (21) oder (22) die Gleichung:

$$A - D = \frac{4}{\pi}(C - D) \tag{24}$$

abgeleitet werden kann.]

§ 132. [Auf Grund obiger Bestimmung der Abstände $C - D$ und $A - D$ lässt sich auch $A - C$ als Differenz der beiden vorigen Abstände finden, wonach die Abstandsgesetze für die drei Hauptwerte A, C und D in folgender Form gegeben werden können:

1) für ganz beliebige Werte m'' und $m_{,,}$, d. i. für einen ganz beliebigen Grad der Asymmetrie, hat man nach den Formeln (11) und (20) resp. (22):

$$\left.\begin{aligned} C - D &= t'' e'' \sqrt{\pi} \\ A - D &= e'' - e_{,,} = 2\,\Phi'' \cdot e'' \\ A - C &= (A - D) - (C - D) = (2\,\Phi'' - t'' \sqrt{\pi})\, e''; \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

2) für $m_{,,} = 0$ und $m'' = m$, d. i. für den Fall unendlich großer Asymmetrie bestehen die Beziehungen (16) und (23); es ist somit:

$$\left.\begin{aligned} C - D &= 0{,}845347 \cdot e'' \\ A - D &= e'' \\ A - C &= 0{,}154653 \cdot e''; \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

3) wenn $(m'' - m_{,,}) : m''$ eine kleine Größe vorstellt, deren zweite Potenz vernachlässigt werden kann, wenn also die Asymmetrie sehr klein ist, kann man nach den Formeln (14) und (24) setzen:

$$\left.\begin{aligned} C - D &= \frac{m'' - m_{\prime\prime}}{4\,m''}\,e''\pi \\ A - D &= (C - D)\,\frac{4}{\pi} = \frac{m'' - m_{\prime\prime}}{m''}\,e'' \\ A - C &= (A - D)\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{m'' - m_{\prime\prime}}{m''}\,e''\left(1 - \frac{\pi}{4}\right); \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

4) für den Fall, dass gar keine Asymmetrie vorhanden ist, in welchem Falle $m' = m_{\prime}$ ist, wird schließlich:

$$\left.\begin{aligned} C - D &= 0 \\ A - D &= 0 \\ A - C &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Dabei ist zu beachten, dass zwar, wie die Herleitung der Abweichungen für $A - D$ und $C - D$ unmittelbar erkennen lässt, A und C zugleich auf der Seite der m'' liegen, dass aber nur die absoluten Werte dieser Abstände bestimmt werden, und es mithin dahingestellt bleibt, ob A und C in der positiven oder in der negativen Richtung von D abweichen. Das erstere ist der Fall, wenn $m' > m_{\prime}$; das letztere, wenn $m_{\prime} > m'$.]

§ 133. [Aus diesen Abstandsgesetzen lassen sich die **Abstandsverhältnisse** und insbesondere die π-**Gesetze** durch Division gewinnen. Man erhält:

1) für den allgemeinen Fall, in welchem der Grad der Asymmetrie keiner Bedingung unterworfen ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{C - D}{A - D} &= \frac{t''e''\sqrt{\pi}}{e'' - e_{\prime\prime}} = \frac{t''m''\sqrt{\pi}}{m'' - m_{\prime\prime}} = \frac{t''\sqrt{\pi}}{2\,\Phi''} \\ \frac{C - D}{A - C} &= \frac{t''\sqrt{\pi}}{2\,\Phi'' - t''\sqrt{\pi}} \\ \frac{A - C}{A - D} &= \left(2\,\Phi'' - t''\sqrt{\pi}\right)\frac{e''}{e'' - e_{\prime\prime}} = \left(2\,\Phi'' - t''\sqrt{\pi}\right)\frac{m''}{m'' - m_{\prime\prime}} = \\ &\qquad 1 - \frac{t''\sqrt{\pi}}{2\,\Phi''}; \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

2) für den Fall sehr schwacher Asymmetrie:

$$\left.\begin{aligned}\frac{C-D}{A-D}&=\frac{\pi}{4}=0{,}785\,398\\ \frac{C-D}{A-C}&=\frac{\pi}{4-\pi}=3{,}659\,793\\ \frac{A-C}{A-D}&=\frac{4-\pi}{4}=0{,}214\,602;\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

3) für den Fall unendlich großer Asymmetrie:

$$\left.\begin{aligned}\frac{C-D}{A-D}&=0{,}845\,347\\ \frac{C-D}{A-C}&=5{,}466\,089\\ \frac{A-C}{A-D}&=0{,}154\,653.\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

Die unter 2) und 3) mitgeteilten Werte stellen die Grenzen dar, zwischen welchen die für den allgemeinen Fall geltenden Bestimmungen variieren. Insbesondere sind die für schwache Asymmetrie geltenden Relationen von Interesse, da dieser Fall bei der hier vorauszusetzenden geringen Schwankung der Exemplare der K.-G. so häufig vorkommt, dass er als Regel bezeichnet werden kann. Aus diesem Grunde erhalten die Relationen (30) einen besonderen Namen und heißen die π-Gesetze.]

[Von den drei Quotienten wird gewöhnlich der an erster Stelle stehende berücksichtigt und darum der Einfachheit wegen durch einen besonderen Buchstaben, nämlich durch p bezeichnet. Es ist somit zu erwarten, dass p oder $(C-D):(A-D)$ nicht kleiner als 0,785 und nicht größer als 0,845 wird, wofern nicht Unregelmäßigkeiten den Gang der empirischen Werte einer Verteilungstafel stören und die Übereinstimmung mit der Theorie, die allein für die obigen Bestimmungen maßgebend ist, beeinträchtigen.]

§ 134. [Dass C und A auf der nämlichen Seite von D liegen, wurde schon bemerkt; dass aber C zwischen A und D liegt, erhellt aus folgender Darlegung.]

[Nach Formel (29) ist ganz allgemein:

$$\frac{C-D}{A-D}=\frac{t''\sqrt{\pi}}{2\,\Phi''}, \qquad (32)$$

wo t'' der zu Φ'' in der t-Tabelle gehörige Wert ist. Beachtet man nun, dass Φ'' nur Werte zwischen o und $\frac{1}{2}$ darstellen kann, da

$$\Phi'' = \frac{m'' - m_{''}}{2\,m''},$$

so lehrt ein Blick auf die t-Tabelle, dass durchweg

$$t'' < \Phi'', \tag{33}$$

denn erst von dem Werte $\Phi = 0{,}6209$ ab sind die dreistelligen t-Werte größer als die zugehörigen Φ-Werte, um bis zum Schlusse der Tabelle größer zu bleiben. Da überdies:

$$\sqrt{\pi} < 2$$

und somit um so mehr:

$$t''\sqrt{\pi} < 2\,\Phi'',$$

so ist in der That:

$$C - D < A - D. \tag{34}$$

Dies Gesetz, nach welchem C stets zwischen A und D liegt, heißt das Lagengesetz.]

[Das Lagengesetz hat zur Folge, dass die Asymmetrie der Abweichungen bez. D das entgegengesetzte Vorzeichen hat als die der Abweichungen bez. A. Da nämlich bezüglich C die beiderseitigen Abweichungszahlen einander gleich sind, so besteht für jeden Wert oberhalb C die Ungleichung $m' < m,$ und für jeden Wert unterhalb C die Ungleichung $m' > m,$. Es ist somit, wenn A oberhalb C liegt,

$\mu' < \mu,$ d. h. $\mu' - \mu,$ negativ.

Dann liegt aber D unterhalb C, so dass:

$m' > m,$ d. h. $m' - m,$ positiv ist.

Umgekehrt ist es, wenn A unterhalb und D oberhalb C liegt. Diese Umkehrung der Asymmetrie bezüglich A und D wird das Umkehrgesetz genannt, das mithin ein Ausfluss des Lagengesetzes ist.]

[Zusatz. Die theoretische Begründung des zweiseitigen Gauss'schen Gesetzes.]

§ 135. [Bisher wurde das zweiseitige G. G. auf Grund der Erfahrung als das hinreichend sich bewährende Wahrscheinlichkeitsgesetz der K.-G. aufgestellt. Will man nun neben der empirischen

Bewährung noch eine theoretische Begründung dieses Gesetzes, so müssen Hypothesen betreffs der K.-G. entwickelt werden, die eine Ableitung jenes Gesetzes gestatten. Die Aufstellung solcher Hypothesen findet ihre Berechtigung eben darin, dass sie zu dem abzuleitenden Gesetze hinführen und dasselbe wie im Keime enthalten. Und wenn auch die Erfahrung allein die Richtigkeit des aufgestellten Gesetzes entscheidet, so wird doch durch eine solche nachträgliche theoretische Begründung die Einsicht in die Natur der K.-G. gefördert.]

[Zunächst weise ich nach, dass es genügt, den nach dem Proportionalgesetze bestimmten Wert D_p als den wahrscheinlichsten Wert vorauszusetzen, um das zweiseitige G. G. in der nämlichen Weise abzuleiten, wie in der Fehlertheorie das einfache G. G. aus der Annahme, das arithmetische Mittel sei der wahrscheinlichste Wert, gefolgert wird. Der Hypothese vom arithmetischen Mittel in der Fehlertheorie steht somit in der Kollektivmaßlehre die Hypothese, dass das Proportionalgesetz den wahrscheinlichsten Wert unter den Exemplaren eines K.-G. bestimme, völlig gleichwertig zur Seite.]

[Um dies zu beweisen, werde angenommen, dass m Exemplare a eines K.-G. vorliegen, für welche ein nach dem Proportionalgesetze bestimmter Wert $D_p = a_0$ existiert. Es liegen dann $m_,$ Werte a, nämlich a_1, a_2, $a_3 \ldots$, unterhalb D_p und m' Werte a, nämlich a', a'', $a''' \ldots$, oberhalb D_p, und es besteht für die Abweichungen dieser Werte von $D_p = a_0$ dem Proportionalgesetze zufolge die Gleichung:

$$\frac{(a_0 - a_1) + (a_0 - a_2) + (a_0 - a_3) + \cdots}{(a' - a_0) + (a'' - a_0) + (a''' - a_0) + \cdots} = \left(\frac{m_,}{m'}\right)^2$$

oder, wenn die unteren Abweichungen durch ∂_1, $\partial_2 \cdots$ die oberen durch ∂', ∂'', $\cdots$ bezeichnet werden:

$$m'^2 \partial_, + m'^2 \partial_2 + \cdots + m_,^2 \partial' + m_,^2 \partial'' + \cdots = 0. \qquad (35)$$

Es mögen nun die W. der Abweichungen ∂_1, $\partial_2 \cdots \partial'$, $\partial'' \cdots$ durch $\varphi(\partial_1)$, $\varphi(\partial_2) \cdots \varphi(\partial')$, $\varphi(\partial'') \cdots$ bezeichnet werden. Dann wird die W. für das Zusammentreffen aller m Abweichungen durch das Produkt der m W., also durch:

$$\varphi(\partial_1)\cdot\varphi(\partial_2)\cdot\varphi(\partial_3)\cdot\cdot\cdot\cdot\,\varphi(\partial')\cdot\varphi(\partial'')\cdot\varphi(\partial''')\cdot\cdot\cdot\cdot$$

ausgedrückt.]

[Da aber a_0 nach der zu Grunde gelegten Hypothese den wahrscheinlichsten Wert darstellen soll, so muss nach den bekannten Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch das Produkt der W. für die Abweichungen der vorgelegten Werte a von a_0 größer sein als für die Abweichungen von irgend einem anderen, von a_0 verschiedenen Werte. Es muss daher

$$\varphi(\partial_1)\varphi(\partial_2)\cdot\cdot\cdot\cdot\,\varphi(\partial')\varphi(\partial'')\cdot\cdot\cdot\cdot$$

ein Maximum sein. Setzt man nun der Kürze wegen:

$$\frac{1}{\varphi(\partial)}\cdot\frac{d\varphi(\partial)}{d\partial}=\varphi'(\partial)$$

so ist demnach:

$$\varphi'(\partial_1)+\varphi'(\partial_2)+\cdots\,\varphi'(\partial')+\varphi'(\partial'')+\cdots=0 \tag{36}$$

zu setzen.]

[Diese Gleichung muss mit der Gleichung (35) zugleich bestehen. Bringt man daher (36) in die Form:

$$m'^2\partial_1\cdot\frac{\varphi'(\partial_1)}{m'^2\partial_1}+m'^2\partial_2\cdot\frac{\varphi'(\partial_2)}{m'^2\partial_2}+\cdots\cdot+m_,^2\partial'\cdot\frac{\varphi'(\partial')}{m_,^2\partial'}$$
$$+m_,^2\partial''\cdot\frac{\varphi'(\partial'')}{m_,^2\partial''}+\cdots=0$$

so erhellt, dass:

$$\frac{\varphi'(\partial_1)}{m'^2\partial_1}=\frac{\varphi'(\partial_2)}{m'^2\partial_2}=\cdots\cdot=\frac{\varphi'(\partial')}{m_,^2\partial'}=\frac{\varphi'(\partial'')}{m_,^2\partial''}=\cdots\cdot=k, \tag{37}$$

wo k eine beliebige Konstante ist. Aus:

$$\frac{\varphi'(\partial)}{m^2\partial}=k$$

folgt aber

$$\frac{d\varphi(\partial)}{d\partial}=km^2\partial\,\varphi(\partial)$$

und hieraus durch Integration:

$$\varphi(\partial)=c\cdot\exp[\tfrac{1}{2}km^2\partial^2]. \tag{38}$$

Zugleich erkennt man, dass k einen negativen Wert vorstellen muss, wenn $\varphi(\partial)$ für $\partial = 0$ sein Maximum erreichen soll.]

[Es ist somit für die unterhalb $D = a_0$ gelegenen Abweichungen, die jetzt unterschiedslos durch $\partial_,$ bezeichnet werden sollen:

$$\varphi(\partial_,) = c_, \cdot \exp[- h_,^2 \partial_,^2], \tag{39}$$

wo $c_,$ eine noch näher zu bestimmende Constante und $-h_,^2 = \frac{1}{2} k m'^2$ ist. Für die oberhalb $D = a_0$ liegenden Abweichungen dagegen, die unterschiedslos durch ∂' repräsentiert werden mögen, findet man:

$$\varphi(\partial') = c' \cdot \exp[- h'^2 \partial'^2], \tag{40}$$

wo wiederum die Bestimmung von c' noch aussteht, während $-h'^2 = \frac{1}{2} k m_,^2$ ist.]

[Um schließlich die Konstanten c' und $c_,$ zu bestimmen, ist die W., dass von den m' oberen und den $m_,$ unteren Abweichungen irgend eine zwischen 0 und ∞ liegt, — wie sich von selbst versteht — gleich 1 zu setzen. Es muss daher:

$$c_, \int_0^\infty \exp[- h_,^2 \partial_,^2] d\partial_, = 1$$

und:

$$c' \int_0^\infty \exp[- h'^2 \partial'^2] d\partial' = 1$$

sein. Dies führt, da:

$$\int_0^\infty \exp[- h^2 \partial^2] d\partial = \frac{\sqrt{\pi}}{2h},$$

zu:

$$\left.\begin{aligned} c_, &= \frac{2h_,}{\sqrt{\pi}} \\ c' &= \frac{2h'}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Daher ist schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\partial_,) &= \frac{2h_,}{\sqrt{\pi}} \exp[- h_,^2 \partial_,^2] \\ \varphi(\partial') &= \frac{2h'}{\sqrt{\pi}} \exp[- h'^2 \partial'^2] \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

mit der aus den angegebenen Werten für h' und $h_{\prime}$ folgenden Bedingung:

$$h_{\prime} m_{\prime} = h' m' = m_{\prime} m' \sqrt{-\frac{k}{2}} \cdot] \qquad (42a)$$

§ 136. [Bei dieser Begründung des zweiseitigen G. G. kann es als ein Mangel empfunden werden, dass die zu Grunde gelegte Hypothese des Proportionalgesetzes der Hypothese des arithmetischen Mittels in der Fehlertheorie an Einfachheit und Evidenz nachsteht. Denn man kann zunächst nur in der Erfahrung eine Stütze für dieselbe suchen, wie es denn auch in § 42 als eine fundamentale Thatsache der Erfahrung bezeichnet wurde, dass die K.-G. die Bestimmung eines dichtesten Wertes gestatten, der hinreichend nahe mit dem durch das Proportionalgesetz definierten Werte zusammenfällt.]

[Es ist darum von Interesse, dass eine andere Hypothese aufgestellt werden kann, die sich auf einfache und nahe liegende Überlegungen über die Entstehungsweise der K.-G. stützt. Sie führt vorerst zu einem einheitlichen Verteilungsgesetz; indem jedoch das letztere die Bestimmung eines dichtesten Wertes gestattet, der approximativ dem Proportionalgesetze genügt, stellt sich auch das zweiseitige G. G. als Approximation an jenes einheitliche Gesetz dar. Man gelangt so zu der Erkenntnis, dass die Zweiteilung des Verteilungsgesetzes, wie sie durch die Verwendung des G. G. bedingt ist, nicht durch die Natur der K.-G. gefordert wird, wohl aber durch das Bedürfnis motiviert werden kann, das aus der aufzustellenden Hypothese folgende Gesetz einer bequemen, den Anforderungen der Kollektivmaßlehre genügenden Verwendung zugänglich zu machen.]

[Um die wesentlichen Punkte in der Entwicklung dieser Hypothese klar hervortreten zu lassen, werde zunächst, entgegen den thatsächlich bestehenden Verhältnissen, ein K.-G. vorausgesetzt, dessen Exemplare nur eine kleine Anzahl äquidistanter und endlicher Abstufungen bezüglich der Größe unterscheiden lassen. Beispielsweise mögen fünf Größenstufen existieren, und die Größen selbst der Reihe nach gleich:

$$a, \quad a+i, \quad a+2i, \quad a+3i, \quad a+4i \qquad (43)$$

sein. Dann liegt es nahe, die Verschiedenheit der Größe dem Spiele besonderer Kräfte zuzuschreiben, von welchen jede im Falle ihres Wirkens den Zuwachs i erzeugt. Man wird daher vier Kräfte K_1, K_2, K_3, K_4 annehmen, der Art, dass jede ebensowohl wirken als auch nicht wirken kann. Tritt keine der vier Kräfte in Wirksamkeit, so entsteht ein Exemplar von der Größe a; wirkt nur eine der vier Kräfte, so erhält das Exemplar die Größe $a+i$; wirken aber zwei, drei oder alle vier Kräfte, so wird die Größe $a+2i$, $a+3i$ oder $a+4i$ erzeugt. Von der W., die für das Wirksamwerden jeder einzelnen Kraft besteht, wird dann die Häufigkeit des Auftretens der Exemplare einer bestimmten Größenstufe abhängen und hierdurch das Verteilungsgesetz bedingt sein. Man erhält nämlich, wenn die Kräfte unabhängig von einander mit den W. p_1, p_2, p_3, p_4 wirken und entsprechend die W. für das Ausbleiben ihrer Wirkung durch $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, $q_3 = 1 - p_3$, $q_4 = 1 - p_4$ angegeben werden, folgende Darstellungen für die W. der verschiedenen Größenstufen:

$$\left.\begin{aligned}
W[a] &= q_1 q_2 q_3 q_4 ;\\
W[a+i] &= p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 ;\\
W[a+2i] &= p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4\\
&\quad + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 ;\\
W[a+3i] &= p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 ;\\
W[a+4i] &= p_1 p_2 p_3 p_4 .
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Hieraus ist zu ersehen, dass eine symmetrische Verteilung der Exemplare auf die verschiedenen Größenstufen nur dann möglich ist, wenn z. B. $p_1 + p_3 = p_2 + p_4 = 1$, oder wenn für das Auftreten der Wirkung jeder einzelnen Kraft die nämliche W. wie für das Ausbleiben der Wirkung einer der anderen Kräfte besteht. Dann wird:

$$\begin{aligned}
W[a] &= p_1 p_2 q_1 q_2\\
W[a+i] &= (p_1 p_2 + q_1 q_2)(p_1 q_2 + p_2 q_1)\\
W[a+2i] &= (p_1 p_2 + q_1 q_2)^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1)^2 - 2 p_1 p_2 q_1 q_2\\
W[a+3i] &= (p_1 p_2 + q_1 q_2)(p_1 q_2 + p_2 q_1)\\
W[a+4i] &= p_1 p_2 q_1 q_2 .
\end{aligned}$$

Jede andere Bestimmung der W. führt zu einer asymmetrischen

Verteilung der Exemplare auf die verschiedenen Größenstufen. Man erhält beispielsweise 1. für $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$, 2. für $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$, $p_4 = p$, wo p und $q = 1 - p$ von $\frac{1}{2}$ verschieden seien:

	1.	2.
$W[a]$	$= q^4$	$\frac{1}{8}q$
$W[a + i]$	$= 4pq^3$	$\frac{1}{8}(3q + p)$
$W[a + 2i]$	$= 6p^2q^2$	$\frac{1}{8}(3q + 3p)$
$W[a + 3i]$	$= 4p^3q$	$\frac{1}{8}(q + 3p)$
$W[a + 4i]$	$= p^4$	$\frac{1}{8}p$

Man kann so immer wieder andere asymmetrische Verteilungsweisen als Spezialisierungen des allgemeinen Schemas (44) angeben, während nur auf obige Art eine symmetrische Verteilung möglich ist. Aber jede derselben beruht in gleicher Weise auf der Hypothese, dass vier von einander unabhängige Kräfte vorhanden sind, von welchen jede eine bestimmte W. für ihr Wirksamwerden besitzt und im Falle ihres Wirkens den Größenzuwachs i erzeugt.]

[Nun giebt es allerdings in Wirklichkeit keinen K.-G., der nur fünf, durch endliche und konstante Intervalle getrennte Größenstufen unterscheiden lässt. Vielmehr verteilen sich die Exemplare stetig auf das durch die extremen Werte begrenzte Größengebiet, so dass man auch durch eine Vermehrung der Größenstufen, wo dann statt fünf eine größere Zahl zu wählen wäre, nichts gewinnt. Wohl aber lässt sich der Größenbereich, den die Exemplare des K.-G. stetig erfüllen, in Intervalle von konstanter Größe i abteilen und die Intervallgröße der Art bestimmen, daß innerhalb jedes einzelnen Intervalles die Verteilung der Exemplare als gleichmäßig und das Verteilungsgesetz als konstant angenommen werden darf. Dies ist der Fall, wenn i eine kleine Größe vorstellt, deren zweite Potenz im Vergleiche zu endlichen Größen vernachlässigt werden darf. Dann ist es auch gestattet, die auf das Intervall fallenden Exemplare in der Intervallmitte vereinigt zu denken, so dass man auf diesem Wege zu der Vorstellung der Größenstufen mit konstanten Intervallen zurückgeführt wird. Die anfängliche Vorstellungsweise ist jedoch jetzt insofern modifiziert, als die Exemplare nicht mehr den einzelnen Größenstufen selbst, sondern den zugehörigen Intervallen angehören, und die Größenstufen nur als Repräsentanten der Intervalle dienen.]

[Mit Berücksichtigung dieser Modifikation kann nun der von den Exemplaren des K.-G. erfüllte Größenbereich durch eine unbestimmt große Anzahl von Größenstufen ersetzt werden, so dass die auftretenden Größen selbst durch

$$a\,,\; a+i\,,\; a+2i\,,\; \ldots\ldots\; a+ni \tag{45}$$

darstellbar sind. Man hat daher nur nötig, an Stelle der im obigen Beispiele gewählten beschränkten Anzahl von vier Kräften eine unbestimmt große Anzahl n solcher Kräfte vorauszusetzen und jeder eine bestimmte W. für ihr Wirksamwerden beizumessen, um für jede Größenstufe eine wie oben zu bestimmende W. und damit eine bestimmte Verteilung der Exemplare auf das ganze Größengebiet zu erhalten. Zugleich erhellt, dass diese Verteilung nur dann symmetrisch ist, wenn sich die n Kräfte paarweise zusammenfassen lassen und für jedes Paar, dessen W. gleich p_i und p_k seien, $p_i + p_k = 1$ ist. Jede andere Bestimmung dieser W. führt zu einer asymmetrischen Verteilung. Soll aber die letztere in ihrer Gesetzmäßigkeit verfolgt werden können, so darf nicht regellos jeder wirkenden Kraft eine ganz willkürlich gewählte W. zuerteilt werden. Es möge darum im Interesse der Durchführbarkeit der mathematischen Behandlung jeder Kraft die nämliche W. für ihr Wirksamwerden beigemessen werden.]

[Man wird so zu folgender Hypothese geführt:

1) Es wird eine unbestimmt große Anzahl n von Kräften[1])

$$K_1\,,\; K_2\,,\; \ldots\; K_n$$

vorausgesetzt, die unabhängig von einander an der Erzeugung der Exemplare eines K.-G sich beteiligen.

2) Es besteht die W. p für das Auftreten und die W. $q = 1 - p$ für das Ausbleiben der Wirkung jeder einzelnen Kraft.

---

1) [Die Bezeichnung »Kräfte« wird bloß der Kürze halber gewählt; es mögen darunter alle die Besonderheiten, welcher Art sie auch seien, verstanden werden, die einen ändernden Einfluss auf die Größe der Exemplare eines K.-G. auszuüben im stande sind.]

3) Jede Kraft erzeugt im Falle ihres Wirkens den Zuwachs i, wo i eine so kleine Größe vorstellt, dass ihre zweite Potenz neben endlichen Größen vernachlässigt werden darf.]

[Hiernach erhält ein Exemplar, an dessen Erzeugung sich keine der n Kräfte beteiligt, die Größe a, deren W. $W[a] = q^n$, während bei Auftreten aller Kräfte die Größe $a + ni$ entsteht, für welche $W[a + ni] = p^n$ ist. Beteiligen sich aber an einem Exemplare x Kräfte, so wird die Größe desselben $a + xi$; und da

$$\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

verschiedene Systeme von je x Kräften gebildet werden können, für jedes System aber die W.

$$p^x \cdot q^{n-x}$$

besteht, so ist:

$$W[a + xi] = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots n). \tag{46}$$

Nun gelten für große n, x und $n - x$ die Formeln:

$$\begin{aligned} n! &= n^n \exp[-n] \sqrt{2\pi n} \\ x! &= x^x \exp[-x] \sqrt{2\pi x} \\ (n-x)! &= (n-x)^{n-x} \exp[-(n-x)] \sqrt{2\pi(n-x)}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht hierauf erhält man:

$$\left.\begin{aligned} W[a + xi] &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi x(n-x)}} \cdot \left(\frac{pn}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{qn}{n-x}\right)^{n-x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} \left(\frac{pn}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \left(\frac{qn}{n-x}\right)^{n-x+\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Setzt man hier pn und qn als ganze Zahlen voraus, nimmt man also an, dass n durch den gemeinsamen Nenner der Brüche p und q teilbar sei, wodurch die Allgemeinheit der folgenden Entwicklung nicht beschränkt wird, so kann man statt x und $n - x$ mit Vorteil $pn + x$ und $qn - x$ schreiben, wo nunmehr x alle positiven Zahlen von 0 bis $+nq$ und alle negativen Zahlen von 0 bis $-np$ zu durchlaufen hat; zugleich ist $a + xi$ durch $a + pni + xi$ oder, wenn

$a + pni$ kurz durch a_0 bezeichnet wird, durch $a_0 + xi$ zu ersetzen. Man findet so:

$$W[a_0 + xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} \left(1 + \frac{x}{pn}\right)^{-pn-x-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{qn}\right)^{-qn+x-\frac{1}{2}} \tag{48}$$

$$(x = -np, \; -np + 1, \; \cdots \; 0, \; +1, \; \cdots \; +nq)$$

Hieraus gewinnt man mit Rücksicht, dass:

$$1 + \frac{x}{pn} = \exp\left[\log\left(1 + \frac{x}{pn}\right)\right]; \quad 1 - \frac{x}{qn} = \exp\left[\log\left(1 - \frac{x}{qn}\right)\right]$$

$$\log\left(1 + \frac{x}{pn}\right) = \frac{x}{pn} - \frac{x^2}{2p^2n^2} + \frac{x^3}{3p^3n^3} \cdots$$

$$\log\left(1 - \frac{x}{qn}\right) = -\frac{x}{qn} - \frac{x^2}{2q^2n^2} - \frac{x^3}{3q^3n^3} \cdots$$

folgende Darstellungsform:

$$\left.\begin{aligned}
W[a_0 + xi] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} \exp[\varphi + \psi] \\
\varphi &= (pn + x + \tfrac{1}{2}) \left(-\frac{x}{pn} + \frac{x^2}{2p^2n^2} - \frac{x^3}{3p^3n^3} \cdots\right) \\
\psi &= (qn - x + \tfrac{1}{2}) \left(\frac{x}{qn} + \frac{x^2}{2q^2n^2} + \frac{x^3}{3q^3n^3} \cdots\right)
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Dieselbe ist gültig, solange $x : pn$ und $x : qn$ kleiner als 1.]

[Soll dieses Gesetz die W. für die endlichen Werte der Abweichungen xi von a_0 darstellen, so muss x als Größe von der Ordnung $1 : i$ vorausgesetzt werden. Es ist dagegen n eine Größe höherer Ordnung, wenn die extremen Abweichungen pni und qni im Vergleich zu den in Betracht gezogenen Werten xi sehr groß sind. Dies trifft aber in der That zu, da die extremen Abweichungen mit der Zahl der Exemplare beiderseits wachsen und somit, vom Standpunkte der Theorie aus, als ins Unbegrenzte wachsend anzunehmen sind. Es werde darum n als eine Größe von der Ordnung $1 : i^2$ vorausgesetzt. Alsdann repräsentiert der Quotient $x^2 : n$ eine endliche Größe und der Quotient $x : n$ in gleicher Weise wie der Quotient $x^3 : n^2$ eine Größe von der Ordnung i. Man kann somit, wenn Größen von der Ordnung i^2 und höherer Ordnung in der Reihendarstellung von φ und ψ vernachlässigt werden, das Wahrscheinlichkeitsgesetz (49) in folgende einfache Form bringen:

$$W[a_0 + xi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} \exp[\varphi + \psi]$$

$$\varphi = -x + \frac{x^2}{2pn} - \frac{x^3}{3p^2n^2} - \frac{x^2}{pn} + \frac{x^3}{2p^2n^2} - \frac{x}{2pn}$$

$$\psi = \quad x + \frac{x^2}{2qn} + \frac{x^3}{3q^2n^2} - \frac{x^2}{qn} - \frac{x^3}{2q^2n^2} + \frac{x}{2qn}$$

$$\varphi + \psi = -\frac{x^2}{2pqn} - \frac{x(q-p)}{2pqn} + \frac{x^3(q-p)}{6p^2q^2n^2},$$

oder:

$$W[a_0 + \varDelta] = \frac{i}{\sqrt{2\pi kpq}} \exp\left[-\frac{\varDelta^2}{2kpq} - \frac{i\varDelta(q-p)}{2kpq} + \frac{i\varDelta^3(q-p)}{6k^2p^2q^2}\right], \quad (50)$$

wenn $xi = \varDelta$ und $ni^2 = k$ gesetzt wird.]

[Bei der Ableitung dieses Gesetzes wurde vorausgesetzt, dass die Exemplare des K.-G. in den Mitten $a_0 + xi$ der durch die Wertenreihe (45) repräsentierten Intervalle vereinigt gedacht werden dürfen. Es verteilen sich aber in Wirklichkeit die Exemplare stetig innerhalb der Intervalle, so dass auch die Wahrscheinlichkeitsfunktion als eine stetige Funktion der Abweichungen $\varDelta$ anzunehmen ist, deren Integrale zwischen den Grenzen der Intervalle durch die $W[a_0 + \varDelta]$ angegeben werden. Bezeichnet man demnach die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch $w[a_0 + \varDelta]$ so ist:

$$W[a_0 + \varDelta] = \int w \cdot d\varDelta,$$

oder mit Rücksicht auf den Kleinheitsgrad von i:

$$= w \cdot i.$$

Man findet daher zunächst für die Intervallmitten:

$$w[a_0 + \varDelta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi kpq}} \exp\left[-\frac{\varDelta^2}{2kpq} - \frac{i\varDelta(q-p)}{2kpq} + \frac{i\varDelta^3(q-p)}{6k^2p^2q^2}\right]; \quad (51)$$

da aber w eine stetige Funktion von $\varDelta$ ist, so hat diese Darstellung für beliebige $\varDelta$ zu gelten.]

[Hiernach findet man durch Differentiation den Maximalwert von w aus der Gleichung:

$$\frac{dw}{d\varDelta} = -w \cdot \left(\frac{\varDelta}{kpq} + \frac{i(q-p)}{2kpq} - \frac{i\varDelta^2(q-p)}{2k^2p^2q^2}\right) = 0,$$

oder (mit Rücksicht, dass einesteils w nicht verschwindet, anderenteils Δ hier eine Größe von der Ordnung i, und folglich $i\Delta^2$ zu vernachlässigen ist) aus:

$$\Delta + \frac{i(q-p)}{2} = 0.$$

Somit fällt der dichteste Wert D auf:

$$D = a_0 - \frac{i(q-p)}{2}.$$

Wird dieser Wert als Ausgangswert für das Wahrscheinlichkeitsgesetz gewählt, wird also $a_0 = D + \frac{1}{2} i(q-p)$; $\Delta = \partial - \frac{1}{2} i(q-p)$ gesetzt, so resultiert schließlich, wenn $w[D+\partial]$ durch $\varphi(\partial)$ ersetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\partial) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi kpq}} \exp\left[-\frac{\partial^2}{2kpq} + \frac{i\partial^3(q-p)}{6k^2p^2q^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi kpq}}\left(1 + \frac{i\partial^3(q-p)}{6k^2p^2q^2}\right)\exp\left[-\frac{\partial^2}{2kpq}\right] \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

als endgültige Form des abzuleitenden Gesetzes.]

[Es handelt sich nun noch um den Nachweis, dass der Ausgangswert D auf Grund des Gesetzes (52) approximativ das Proportionalgesetz erfüllt. Zu diesem Zwecke werde:

$$\partial = \sqrt{2kpq} \cdot t$$

gesetzt, so dass:

$$\varphi(\partial) = \frac{1}{\sqrt{2\pi kpq}}\left(1 + \frac{2i(q-p)t^3}{3\sqrt{2kpq}}\right)\exp[-t^2]. \tag{53}$$

Nun ist, wenn m' die oberhalb D gelegene Anzahl und m die Gesamtzahl der Abweichungen angiebt:

$$\frac{m'}{m} = \int_0^\infty \varphi(\partial)\, d\partial = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(1 + \frac{2i(q-p)t^3}{3\sqrt{2kpq}}\right)\exp[-t^2]\, dt$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{i(q-p)}{3\sqrt{2\pi kpq}}.$$

Entsprechend ist für die unterhalb D gelegene Anzahl $m_{,}$:

$$\frac{m_{,}}{m} = \frac{1}{2} - \frac{i(q-p)}{3\sqrt{2\pi kpq}}.$$

Bezeichnet man ferner die oberhalb und unterhalb D gelegenen Summen der Abweichungen durch $\Sigma\partial'$ und $\Sigma\partial_{,}$, so wird:

$$\frac{\Sigma\partial'}{m} = \int_0^\infty \partial\,\varphi(\partial)\,d\partial = \sqrt{\frac{kpq}{2\pi}} + \frac{i(q-p)}{4}$$

$$\frac{\Sigma\partial_{,}}{m} = \sqrt{\frac{kpq}{2\pi}} - \frac{i(q-p)}{4}.$$

Man findet hieraus:

$$\left(\frac{\Sigma\partial'}{\Sigma\partial_{,}}\right)^\alpha = 1 + \frac{i\alpha(q-p)\pi}{\sqrt{2\pi kpq}}; \quad \left(\frac{m'}{m_{,}}\right)^\beta = 1 + \frac{4i\beta(q-p)}{3\sqrt{2\pi kpq}}. \tag{54}$$

Somit ist:

$$\left(\frac{\Sigma\partial'}{\Sigma\partial_{,}}\right)^\alpha = \left(\frac{m'}{m_{,}}\right)^\beta, \text{ wenn } \beta = \tfrac{3}{4}\pi\alpha = 2{,}356\,\alpha. \tag{55}$$

In erster Annäherung kann man demnach

$$\alpha = 1; \quad \beta = 2$$

setzen, so dass in der That approximativ:

$$\frac{\Sigma\partial'}{\Sigma\partial_{,}} = \left(\frac{m'}{m_{,}}\right)^2, \tag{55a}$$

wie das Proportionalgesetz es verlangt.]

[Gilt aber das Proportionalgesetz, so kann mit entsprechender Approximation das zweiseitige G. G. an Stelle des einheitlichen Wahrscheinlichkeitsgesetzes (52) treten. Dasselbe ist in der Form (6), welche sich auf die beiderseitigen Abweichungen bezieht, vorauszusetzen, da auch das Gesetz (52) die oberen und unteren Abweichungen zugleich berücksichtigt. Es sei also:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\partial') &= \frac{2h'm'}{\sqrt{\pi}\,m}\exp[-h'^2\partial'^2] \\ \varphi(\partial_{,}) &= \frac{2h_{,}m_{,}}{\sqrt{\pi}\,m}\exp[-h_{,}^2\partial_{,}^2]. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Hier ist auf Grund der berechneten Abweichungszahlen und Abweichungssummen:

$$\left.\begin{aligned}
h' &= \frac{1}{e'\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2kpq}} - \frac{i(q-p)}{2kpq\sqrt{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\\
h_, &= \frac{1}{e_,\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2kpq}} + \frac{i(q-p)}{2kpq\sqrt{\pi}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\\
\frac{2h'm'}{\sqrt{\pi}\cdot m} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi kpq}} - \frac{i(q-p)}{2\pi kpq}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right)\\
\frac{2h_,m_,}{\sqrt{\pi}\cdot m} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi kpq}} + \frac{i(q-p)}{2\pi kpq}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (56a)$$

Da jedoch die approximative Geltung des Proportionalgesetzes verlangt, dass $\frac{3}{4}\pi$ auf den ganzzahligen Wert 2 abgerundet wird, so ist auch hier $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{4}{3}$ für gleichwertig anzusehen und

$$\frac{2h'm'}{\sqrt{\pi}\cdot m} = \frac{2h_,m_,}{\sqrt{\pi}\cdot m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi kpq}} \qquad (56b)$$

zu setzen; auch kann mit der nämlichen Berechtigung in der Darstellung von h' und $h_,$ statt $\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}$ ebensowohl $\frac{1}{4}\pi$ als auch $\frac{2}{3}$ gesetzt werden.]

[Die Ersetzung des einheitlichen Gesetzes (52) durch das zweiseitige G. G. hat demnach zur Folge, dass an Stelle des Gliedes

$$\frac{i\partial^3(q-p)}{6k^2p^2q^2}$$

das Glied

$$\frac{i\partial^2(q-p)}{kpq\sqrt{2\pi kpq}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

tritt, das für positive ∂ ein positives, für negative ∂ ein negatives Vorzeichen erhält.]

[Sowohl (52) als auch (56) stellt für $p = q$ das einfache G. G. dar, das somit als Spezialfall zugleich mit jenen allgemeinen Gesetzen aus der aufgestellten Hypothese entwickelt wird. Wird letztere diesem Falle von vornherein angepasst, so unterscheidet sie sich nicht wesentlich von der Hypothese, die Hagen[1]) zur Ableitung des einfachen G. G. für die Fehlertheorie aufgestellt hat.]

---

1) [Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1837. S. 34. — Die Hypothese Hagen's lautet: »Der Fehler im Resultate einer Messung ist die

[Beachtung verdient es, dass die Asymmetrie hier durch Größen von der Ordnung i repräsentiert wird. Sie wird daher unendlich klein, wenn i unendlich klein wird. Bei der obigen Ableitung wurde aber i nicht als unendlich klein, sondern nur als so klein vorausgesetzt, dass i^2 gegen endliche Größen vernachlässigt werden darf.]

[Noch ist zu erwähnen, dass für das einheitliche Wahrscheinlichkeitsgesetz an Stelle des dichtesten Wertes D ebensowohl ein anderer Wert als Ausgangswert gewählt werden kann. In der Darstellungsform (51) ist es beispielsweise der arithmetische Mittelwert, der zum Ausgangspunkt der Abweichungen gemacht ist. Man findet nämlich bezüglich a_0 die Summen der beiderseitigen Abweichungen einander gleich, so dass a_0 in der That das arithmetische Mittel A darstellt.]

---

algebraische Summe aus einer unendlich großen Anzahl elementarer Fehler, die alle gleich groß sind, und von denen jeder einzelne ebenso leicht positiv wie negativ sein kann.«.]

XX. Die Extremgesetze.

§ 137. Zu den gewöhnlich berücksichtigten Elementen eines K.-G. gehören die extremen Werte, welche die Verteilungstafel desselben bietet, d. i. das Maß des größten und kleinsten Exemplares; auch hat es ein mehrfaches Interesse, sich damit zu beschäftigen. Schon aus bloßer Kuriosität kann man sich dafür interessieren, wie groß der größte Riese und der kleinste Zwerg ist, die in einem gegebenen Lande oder überhaupt vorgekommen sind, welches die größte Hitze oder Kälte ist, bis zu der die Temperatur an einem gegebenen Orte angestiegen und herabgesunken ist, u. s. w. Aber die Angabe der extremen Werte eines untersuchten Gegenstandes hat auch einen wissenschaftlichen Wert für die Kenntnis desselben, indem sie mit Rücksicht auf die Zahl der Exemplare, unter welchen diese Extreme beobachtet sind, zur Charakteristik desselben beiträgt; auch kann die nach den beobachteten Extremen gestellte Erwartung, zwischen welchen Grenzen ein künftiges Exemplar zu suchen sein wird, worüber hinaus es voraussetzlich nicht steigen, worunter es nicht sinken wird, mitunter praktisch werden. So kann der höchste zu erwartende Wasserstand eines Flusses die Höhe des schützenden Dammes oder die Höhe von Anlagen an seinen Ufern bestimmen, die größte zu erwartende Kälte eine Grenze für die Anpflanzung gewisser Gewächse setzen, u. s. w.

Man darf nur nicht vergessen, dass die Größe der Extreme mit abhängig von der Zahl der Exemplare ist, welche der Beobachtung unterliegen, und wenn z. B. die Höhe eines Flusses binnen 100 Jahre ein gewisses Maß nicht überstiegen hat, so kann man nicht darauf rechnen, dass es nicht in 1000 Jahren einmal der Fall sein sollte, da hiermit größerer Spielraum zur Entwicklung der Extreme geboten wird, woraus sofort das Interesse einleuchtet, ein Gesetz der Abhängigkeit der Größe der Extreme von der Zahl der Exemplare zu finden, ein Interesse, was mit dem praktischen zugleich ein wissenschaftliches ist. Unmittelbar hat jede empirische Bestimmung der Extreme nur für die Zahl von Exemplaren Bedeutung, aus welcher die Bestimmung erfolgt ist; kann aber mit zu den empirischen Unterlagen für die allgemeine Bestimmung der Extreme mit abgeänderter Zahl dienen.

Bisher hat man diesen Punkt mehrfach übersehen, indem ich an mehr als einem Orte die Größe der absoluten oder relativen Abweichung zwischen den Extremen: $E' - E_{,}$ oder $(E' - E_{,}) : A$, die aus verschiedenen m bei verschiedenen K.-G. erhalten wurden, zum Vergleiche der absoluten oder relativen Variabilität der betreffenden Gegenstände verwendet finde, was ganz irrige Folgerungen mitführen kann.

Hierbei scheint das Aperçu zu Grunde gelegt, dass, wenn man nur die Extreme aus einer großen Zahl bestimme, man darauf rechnen könne, wenn nicht die absolut möglichen Extreme, doch solche, die sich ihnen sehr nähern, zu erhalten, und in Ermangelung anderen Anhaltes sich bei den gefundenen begnügen könne. Aber diese Annahme einer approximativ erreichbaren Grenze der Extreme bei wachsendem m hat weder empirisch, noch theoretisch etwas für sich; sondern wahr ist nur nach beiden Gesichtspunkten, dass die Größe der Extreme in sehr viel kleinerem Verhältnisse als die Größe des m wächst, aber, wenn m bis ins Unendliche steigend gedacht wird, immer in angebbarer Weise mit fortwächst.

§ 138. [Indessen steht der Aufstellung einer gesetzlichen Beziehung zwischen der Größe der Extreme und der Anzahl der Werte, unter denen die Extreme vorkommen, eine beispielsweise von Dove und von Encke vertretene Auffassungsweise entgegen, der zu folge die Extreme jedweder Gesetzlichkeit sich entziehen würden.]

Dove, nachdem er in seiner ersten, »die geographische Verbreitung gleichartiger Witterungserscheinungen« betreffenden Abhandlung[1]:

1) Abhandlungen der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, aus dem Jahre 1848.

»Über die nicht periodischen Änderungen der Temperaturverteilung auf der Oberfläche der Erde«, die extremen Abweichungen angegeben, welche von monatlichen und jährlichen Temperaturmitteln während einer gegebenen Anzahl Jahre an verschiedenen Beobachtungsorten stattgefunden, bemerkt ausdrücklich (S. 351): »die hier gegebenen Zahlen haben noch etwas sehr Willkürliches, da ein einziger ungewöhnlich strenger Winter oder ein sehr heißer Sommer die aus einer langen Reihe vorhergehender Jahre ermittelten Unterschiede vielleicht verdoppeln kann«, eine Bemerkung, der sich auch Schmid in seinem großen meteorologischen Werke[1]) anschließt. Desgleichen bemerkt Encke in seiner Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate[2]) (S. 275) auf Grund dessen, dass in den bekannten Bessel'schen Fehlerreihen die extremen Beobachtungsfehler etwas zu groß gegen die theoretische Forderung ausfallen: »Übrigens ist diese Abweichung leicht aus dem Umstande erklärlich, dass größere Fehler in der Regel eine ganz ungewöhnliche Vereinigung von nachteiligen Einwirkungen voraussetzen, ja selbst häufig durch ein so isoliert stehendes Ereignis herbeigeführt werden, dass keine Theorie sie der Rechnung wird unterwerfen können.«

Demgemäß ist in der That bisher weder von einer theoretischen, noch erfahrungsmäßigen Untersuchung und Feststellung gesetzlicher Verhältnisse dieser Werte die Rede gewesen, und so dürfte nicht nur eine gewisse Lücke in dieser Hinsicht durch die folgende Untersuchung ausgefüllt werden, sondern auch die faktische Beseitigung des Verdachtes, dass die extremen Werte überhaupt keinen gesetzlichen Verhältnissen unterliegen, an sich ein gewisses Interesse in Anspruch nehmen.

Nun ist es allerdings richtig, dass mitunter Extreme oder extreme Abweichungen aus exceptionellen Ursachen herrühren können, die aus der Reihe der Bedingungen heraustreten, unter welchen ein K.-G. als bestehend aufgefasst und der Untersuchung unterworfen wird; z. B. fassförmig aufgetriebene oder entschieden mikrocephale

1) Lehrbuch der Meteorologie. Leipzig 1860.
2) Berliner Astronom. Jahrbuch für 1834. S. 249 flgd.

Schädel, wo es sich um gesunde Schädel handelt. Solche Extreme sind in der That unberechenbar. Aber da sich die aufzustellenden Gesetzmäßigkeiten nur auf solche K.-G. beziehen, die den früher (Kap. IV) angegebenen Requisiten genügen, so kann ein Heraustreten der Extreme aus den gesetzlichen Beziehungen geradezu als ein Anzeichen dafür gelten, dass diese Extreme abnorm sind, die, wo es sich um normale Verhältnisse handelt, auszuschließen sind.

§ 139. Empirisch kann man sich von der Änderung der Extreme mit der Größe des m leicht in folgender Weise überzeugen.

Man bestimme aus der Totalität einer Urliste von gegebenem m, in welcher die Maße in zufälliger Ordnung enthalten sind, die beiden Extreme E' und $E_{,}$, teile dann ohne Änderung der zufälligen Ordnung der Maße die Gesamtheit derselben in eine Anzahl von gleichen Fraktionen z. B., wenn das totale $m = 1000$ wäre, in 10 Fraktionen von je $m = 100$, und bestimme nun auch die Extreme dieser Fraktionen. Wenn nicht zufälligerweise, was doch bei großem Total-m nur ausnahmsweise der Fall sein kann, dieselben Extreme schon in der Totalität mehrfach vorkommen, wird man sie in den Fraktionen nicht wiederfinden, sondern diese werden durchschnittlich nur kleinere E' und größere $E_{,}$ geben; und wiederholt man an jeder Fraktion von $m = 100$ das Verfahren, indem man sie z. B. in 10 Fraktionen von $m = 10$ teilt, so wird natürlich der entsprechende Erfolg eintreten. Nun kann man die Totalität der Maße von gegebenem m, die man zuerst vor sich hatte, selbst als Fraktion einer Totalität von größerem m betrachten und schließen, dass, wenn man mehrere solcher Fraktionen von demselben m vor sich hätte, die E' und $E_{,}$, die man aus denselben erhält, auch durchschnittlich von dem E' und $E_{,}$ der größeren Totalität aller Exemplare in Plus und Minus überboten werden würden.

Man kann bemerken, dass die E, welche aus den gleichzahligen Fraktionen derselben Totalität erhalten werden, eine etwas abweichende Größe haben, und indem man die Totalität selbst als eine Fraktion unter anderen gleichzahligen Fraktionen einer größeren Totalität mit gegebenem m betrachten kann, würde man noch zwischen den E dieser größeren Fraktionen Verschiedenheiten finden, so dass man also überhaupt nicht darauf rechnen kann, ein von gegebenem m abhängiges ganz bestimmtes E' und $E_,$ zu finden; wohl aber kann man erstlich bestimmt sagen, dass normalerweise in dem oben dafür eingeführten Sinne die von gegebenem m abhängigen E durchschnittlich um so weiter in $+$ steigen und in $-$ abnehmen, je größer m ist; zweitens kann man ihre Variation bei gegebenem m als Sache einer Unsicherheit wegen unausgeglichener Zufälligkeiten, die sich einer näheren Untersuchung fügt, betrachten, worauf unten zurückzukommen.

Erläutern wir das Vorige an der Studentenmaßtafel[1]) mit $m = 2047$, deren Elemente in § 65 gegeben sind, wonach A_1 der primären Tafel $= 71,77$; D_p nach Reduktion auf $i = 1$ Zoll aber im Mittel von 4 Lagen $= 71,96$ ist. Da jedoch die Benutzung des ganzen $m = 2047$ ungeheuer umständlich sein würde, benutze ich nur 360 Werte wie folgt.

Aus der Urliste, in welcher die Maße sich ganz zufällig folgen, wurden von jedem der 20 Jahrgänge die ersten 18 Maße in ihrer zufälligen Folge ausgeschrieben und zur Totalität von 360 Maßen vereinigt. Hierin wurde $E' = 77,5$, $E_, = 64$ Zoll gefunden. Hiernächst wurden diese 360 Maße in 180 Fraktionen mit einem $m = 2$ geteilt, in deren jeder natürlich das eine Maß unmittelbar als E', das andere als $E_,$ auftritt, und durch Division der Summe der so erhaltenen E' und $E_,$ mit 180 wurden das mittlere $E' = 73,16$ und mittlere $E_, = 70,26$ erhalten; weiter wurde eine Teilung der 360 Maße in 120 Fraktionen mit einem $m = 3$ vorgenommen, deren mittleres E' und $E_,$ berechnet u. s. f., wovon die Resultate in folgender Tabelle zusammengestellt sind.

---

1) Wegen des Nachteils der ungleichförmigen Schätzung, welchem die Rekrutenmaße überhaupt unterliegen, würde ich lieber ein anderes Beispiel gewählt haben, wenn mir Urlisten von anderen Gegenständen mit gleich sicherer reiner Zufälligkeit in der Folge der Maßgrößen zu Gebote gestanden hätten; doch kann jener Nachteil die Verhältnisse, auf die es folgends ankommt, unstreitig nur unwesentlich benachteiligen.

I. Mittelwerte der oberen und unteren Extreme aus n Fraktionen mit je m Gliedern.

m	n	E'	$E_,$	$E' - E_,$	$E' + E_,$
2	180	73,16	70,26	2,90	143,42
3	120	73,81	69,56	4,25	143,37
4	90	74,25	69,17	5,08	143,42
6	60	74,68	68,41	6,27	143,09
9	40	75,09	67,86	7,23	142,95
18	20	75,84	66,85	8,99	142,69
36	10	76,25	66,27	9,98	142,52
72	5	76,90	65,70	11,20	142,60
360	1	77,50	64,00	13,50	141,50

Diese Tabelle giebt zu folgenden Bemerkungen Anlass.

Ausnahmslos sieht man mit wachsendem m die mittleren E' steigen, die $E_,$ abnehmen, wovon die natürliche Konsequenz ist, dass der Unterschied zwischen beiden Extremen $E' - E_,$ mit wachsendem m wächst, nur, wie man sieht, nichts weniger als proportional mit m wächst, indem er z. B. bei $m = 2$ gleich 2,9, bei $m = 360$ gleich 13,5 ist. Auffällig kann es zunächst scheinen, dass die Summe beider Extreme mit wachsendem m sich nur sehr unbedeutend ändert; und zwar besteht, abgesehen von den kleinen Unregelmäßigkeiten bei $m = 4$ und 72, welche als Sache unausgeglichener Zufälligkeiten anzusehen, die Änderung in einer kontinuierlichen Abnahme von $E' + E_,$ bei wachsendem m. Es ist aber dies so zu verstehen. Natürlich, wenn E' mit wachsendem m wächst, $E_,$ abnimmt, ist allgemein gesprochen die Möglichkeit gegeben, dass sich beides gerade kompensiert, wo dann $E' + E_,$ bei wachsendem m konstant bleiben müsste, ein Fall, der abgesehen von unausgeglichenen Zufälligkeiten dann zu erwarten, wenn Symmetrie der Abweichungen nach beiden Seiten vom arithmetischen Mittel bestände. Nun nähern sich die Rekrutenmaße einer solchen, da sie aber derselben doch nicht ganz entsprechen, so entspricht auch das Resultat für $E' + E_,$ nicht ganz der Voraussetzung einer solchen.

§ 140. [Obschon nun die Werte obiger Tabelle I das Wachsen der oberen Extreme und das Abnehmen der unteren für wachsende m deutlich vor Augen stellen, eignen sie sich doch nicht zur Bewährung der im folgenden (§ 141) aufzustellenden Extremgesetze. Denn diese sind aus dem G. G. abzuleiten, das sich auf die Abweichungen vom arithmetischen Mittel A oder vom dichtesten Werte D bezieht, so dass auch die Extrembestimmungen zunächst die extremen Abweichungen von dem Ausgangswerte und nicht die extremen Werte E' und $E_,$ direkt betreffen. Der hierdurch bedingte Unterschied der Bestimmungsweise erhellt aus der Bemerkung, dass E' sehr wohl unterhalb des Ausgangswertes und ein anderes Mal umgekehrt $E_,$ oberhalb desselben liegen kann, und dass dann die Abweichung jenes Extrems vom Ausgangswerte nicht sowohl den Maximalwert als vielmehr den Minimalwert der vorkommenden Abweichungen darstellt. Die Durchschnittswerte obiger Tabelle können daher nicht als Durchschnittswerte der extremen Abweichungen gelten, da als solche nur die Maxima der Abweichungswerte in Rechnung zu ziehen sind. Gegen diese Bestimmungsweise lässt sich allerdings der Einwand erheben, dass die Extreme E' und $E_,$ als solche, ohne Rücksicht auf den als Ausgangswert gewählten Hauptwert, das Interesse erregen und die Aufstellung direkt gültiger Gesetze verlangen; es kann aber dies nur durch Vermittelung der für die extremen Abweichungen gültigen Gesetze geschehen, da das hierbei zu Grunde zu legende Verteilungsgesetz sich auf Abweichungswerte bezieht. Es sind darum auch zunächst die theoretischen Bestimmungen für die extremen Abweichungen empirisch zu bewähren.]

[Zu diesem Zwecke müssen die Maße der Urliste unter Beibehalten der vorhandenen Reihenfolge durch ihre Abweichungen vom Ausgangswerte ersetzt werden. Ist der letztere der arithmetische Mittelwert A, so treten die Abweichungen Δ an Stelle der a, und zwar entweder mit oder ohne Scheidung der positiven von den negativen Abweichungswerten, je nachdem das G. G. nur auf die oberen resp. unteren Abweichungen allein oder auf beide gemeinsam bezogen wird. Beim Ausgange von D dagegen sind die Abweichungen ∂' und $\partial_,$ an Stelle der a zu setzen und dabei die positiven ∂' von den negativen ∂, zu sondern, da das zweiseitige G. G., das nunmehr zur Verwendung kommt, prinzipiell die Trennung der oberen von den unteren Abweichungen fordert und auf beide in verschiedener Weise sich bezieht.]

[Im vorliegenden Falle kann man in Anbetracht des schwachen Grades von Asymmetrie, der den Rekrutenmaßen eigen ist, das arithmetische Mittel als Ausgangswert wählen, und zwar sollen mit Rücksicht auf die kleine, zur Verfügung stehende Gesamtzahl von 360 Maßwerten die positiven und negativen Abweichungswerte nicht getrennt behandelt werden. Ich ersetze demgemäß die 360 Rekrutenmaße unter Festhalten ihrer Reihenfolge durch ihre Abweichungen von A, das einfachheitshalber gleich 71,75 statt genauer gleich 71,77 angenommen wurde. Dann enthält die Gesamtheit der Abweichungen eine extreme Abweichung mit dem Werte 7,75, und jede Unterabteilung derselben weist in gleicher Weise einen und nur einen extremen Abweichungswert auf, der zwar seinem Ursprunge nach entweder positiv oder negativ ist, aber als absoluter Wert auftritt, da die Abweichungen nur ihren absoluten Werten nach in Betracht kommen. Wird nun die Reihe der 360 Abweichungen ganz ebenso wie oben die Reihe der 360 Maße selbst in n Fraktionen, deren jede aus m Werten besteht, zerlegt und jedesmal die allgemein mit U zu bezeichnende extreme Abweichung notiert, so erhält man nachstehende Tabelle, in welcher angegeben wird, wie oft eine Abweichung von bestimmter Größe unter den n Fraktionen als extreme Abweichung U vorkam; dabei sind natürlich für $m = 1$ die Abweichungen selbst zugleich als extreme Abweichungen genommen:

II. Anzahlen, wie oft die extreme Abweichung U in n Fraktionen mit je m Gliedern vorkam.

U	$m=1$ $n=360$	$m=2$ $n=180$	$m=3$ $n=120$	$m=4$ $n=90$	$m=6$ $n=60$	$m=9$ $n=40$	$m=18$ $n=20$	$m=36$ $n=10$	$m=72$ $n=5$	$m=360$ $n=1$
0,00	12	1								
0,25	28	1								
0,50	25	4								
0,75	21	9	1							
1,00	16	6	—	1						
1,25	31	11	4	—						
1,50	35	14	7	—						
1,75	29	13	5	2						
2,00	24	18	13	13	4	3				
2,25	23	12	9	5	2	—				
2,50	15	7	6	3	2	1				
2,75	16	9	7	4	1	—				
3,00	11	10	7	7	3	—				
3,25	12	8	7	5	3	1				
3,50	5	4	4	4	3	3				
3,75	16	14	11	9	8	5	1			
4,00	7	5	6	5	4	2	1			
4,25	10	10	10	9	8	6	3			
4,50	4	4	3	3	3	3	1			
4,75	3	3	3	3	3	2	2			
5,00	5	5	5	5	5	4	2	2		
5,25	6	6	6	6	5	4	4	3	2	
5,50	1	1	1	1	1	1	1	—	—	
5,75	2	2	2	2	2	2	2	2	—	
6,00	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
6,25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
6,50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
6,75	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
7,00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
7,25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
7,50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
7,75	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Diese Reihen, welche Verteilungstafeln für die extremen Abweichungen darstellen, lassen schon durch das successive Vorrücken der kleinsten Werte das Anwachsen der Extreme bei wachsendem m erkennen. Eine genauere Vorstellung hiervon gewährt jedoch folgende Zusammenstellung von mittleren Werten der U, als welche das arithmetische Mittel U_a, der Zentralwert U_c und der dichteste Wert U_d dienen sollen:

III. Die mittleren Werte U_a, U_c und U_d der extremen Abweichungen aus m-gliedrigen Fraktionen.

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=6$	$m=9$	$m=18$	$m=36$	$m=72$	$m=360$
U_a	2,00	2,72	3,27	3,61	4,10	4,39	5,14	5,75	6,15	7,75
U_c	1,73	2,41	3,16	3,65	4,13	4,33	5,13	5,50	6,00	7,75
U_d	1,50	2,00	2,00	2,00	4,00	4,25	5,25	5,25	5,25	7,75

Hierzu ist zu bemerken, dass U_c durch einfache Interpolation, U_d aber als derjenige Wert bestimmt wurde, auf den die größte Anzahl der U fiel; nur für $m = 6$ wurde das Mittel der beiden Werte genommen, die gemeinsam die Maximalzahl 8 besitzen. Von dem unsicher bestimmten dichtesten Werte abgesehen, lassen diese Werte ein ständiges Anwachsen bei wachsendem m bemerken. Doch nimmt auch U_d nicht ab, sondern behält nur zweimal für je drei aufeinanderfolgende m seinen Wert.]

[Hätte man die oberen von den unteren Abweichungen getrennt, statt beide in einer Reihe zu vereinigen, so wären an Stelle der einen Tabelle II zwei Tabellen getreten, die eine für die $\varDelta'$, die andere für die $\varDelta_,$; da indessen die Gesamtzahl der Abweichungen für jede einzelne sich etwa auf die Hälfte vermindert hätte, so wäre die Unsicherheit der Bestimmungen wesentlich größer geworden. Hätte man ferner D an Stelle von A als Ausgangswert gewählt, so wäre eine Trennung der Reihe von Abweichungswerten in eine Reihe der ∂' und eine solche der $\partial_,$ prinzipiell zu fordern gewesen.]

§ 141. [Um diesen emprischen Werten theoretische Bestimmungen zur Seite zu stellen, ist das Wahrscheinlichkeitsgesetz $W[U]$ abzuleiten, das angiebt, mit welcher W. unter m Abweichungswerten der extreme Wert U zu erwarten ist. Soll aber U den extremen Wert darstellen, so muss eine der m Abweichungen jenen Wert haben, während die $m - 1$ übrigen beliebige Werte zwischen 0 und U annehmen können. Das Gesetz $W[U]$ drückt somit die W. aus, dass von m Abweichungen irgend eine gleich U sei und die übrigen zwischen den Grenzen 0 und U sich halten.]

[Es ist nun, wenn die absoluten Werte der Abweichungen durch Θ bezeichnet werden, die W., dass eine Abweichung zwischen die unendlich nahen Grenzen Θ und $\Theta + d\Theta$ falle, gleich:

$$W[\Theta] = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \exp[-h^2 \Theta^2] \, d\Theta \,. \tag{1}$$

Dabei ist es gleichgültig, ob beim Ausgange vom arithmetischen Mittel die beiderseitigen Abweichungen $+\Delta$ und $-\Delta$ oder beim Ausgange vom dichtesten Werte die einseitigen Abweichungen ∂' resp. $\partial_,$ unter den Θ zu verstehen sind; wofern nur im ersteren Falle $h = 1 : \eta\sqrt{\pi}$, im letzteren Falle $h = 1 : e'\sqrt{\pi}$ resp. $= 1 : e_,\sqrt{\pi}$ gesetzt wird, wo η den Mittelwert der Δ, e' resp. $e_,$ den Mittelwert der ∂' resp. $\partial_,$ darstellt. Soll daher von den m Abweichungen Θ_1, $\Theta_2 \ldots \Theta_m$ beispielsweise die erste gleich U und jede folgende kleiner oder höchstens gleich U sein, so besteht für jene erste die W.:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \exp[-h^2 U^2] \, dU$$

und für jede folgende die W.:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^U \exp[-h^2 \Theta^2] \, d\Theta = \Phi[hU] \,.$$

Die W. für das Zusammentreffen von m Abweichungen, von welchen die erste gleich U ist, und jede folgende einen beliebigen Wert zwischen 0 und U besitzt, ist somit gleich:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \exp[-h^2 U^2] \, dU \cdot \Phi[hU]^{m-1} \,.$$

Eben dieser Wert bestimmt jedoch in gleicher Weise die W., wenn statt der ersten Abweichung eine der folgenden gleich U gesetzt wird, und jedesmal die $m - 1$ übrigen dem Wertenbereiche zwischen 0 und U angehören. Es wird folglich die W., dass von m Abweichungen irgend eine gleich U sei, und die übrigen zwischen den Grenzen o und U sich halten oder — mit anderen Worten — die W., dass U der extreme Wert unter m Abweichungen sei, durch:

$$W[U] = m\,\Phi[t]^{m-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp[-t^2]\,dt, \text{ wo } t = hU, \tag{2}$$

dargestellt. Da

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp[-t^2]\,dt = d\Phi[t],$$

$$m\,\Phi^{m-1}\,d\Phi = d\Phi^m,$$

so kann man auch:

$$W[U] = d\Phi[t]^m; \ (t = hU) \tag{3}$$

setzen.]

[Aus letzterer Darstellungsform ist ersichtlich, dass das Integral über $W[U]$ unmittelbar angebbar ist. Dieses Integral, zwischen bestimmten Grenzen genommen, drückt aber die W. aus, dass die extreme Abweichung zwischen jene Grenzen falle. Es ist daher die W., dass die extreme Abweichung kleiner als $U_1 = t_1 : h$ und größer als $U_2 = t_2 : h$, gleich:

$$\Phi[t_1]^m - \Phi[t_2]^m, \tag{4}$$

so dass insbesondere die W., dass $U = t : h$ die obere resp. untere Grenze der Extreme sei, durch:

$$\Phi[t]^m \text{ resp. } 1 - \Phi[t]^m$$

bezeichnet wird.]

[Bestimmt man nun einen Wert $U_c = t_c : h$ der Art, dass

$$\Phi[t_c]^m = 1 - \Phi[t_c]^m \text{ oder } \Phi[t_c] = \sqrt[m]{\tfrac{1}{2}}, \tag{5}$$

so ist es gleich wahrscheinlich, bei Bestimmung des Extrems von m Abweichungen einen größeren oder einen kleineren Wert als U_c zu erhalten. Es wird demzufolge U_c den Zentralwert oder wahrscheinlichen Wert bei vielfach wiederholter Bestimmung der extremen Abweichung darstellen, dessen Abhängigkeit von m die Formel (5) angiebt, und dessen Zahlenwerth für ein gegebenes m mittelst der t-Tabelle zu finden ist. Aus folgender Zusammenstellung der zusammengehörigen m und

t_c für einige Werte von m ist das Wachstum dieses Zentralwertes bei wachsendem m zu ersehen.]

m	t_c	m	t_c	m	t_c
1	0,4769	9	1,2628	500	2,2611
2	0,7437	18	1,4689	1000	2,3988
3	0,8936	36	1,6576	5000	2,6946
4	0,9957	72	1,8319	10000	2,8134
6	1,1330	360	2,1933		

[Neben dem Zentralwerte ist es von Interesse, denjenigen Wert zu kennen, der als Einzelwert die größte W. besitzt. Er giebt sich bei hinreichend oft wiederholter Bestimmung des Extrems von m Abweichungen als dichtester Wert kund und wird theoretisch als Maximalwert von $W[U]$ bestimmt. Er genügt somit für $t = hU$ der Gleichung:

$$\left(\frac{m-1}{\sqrt{\pi}} \exp[-t^2] - t\Phi[t]\right) \frac{4m}{\sqrt{\pi}} \Phi[t]^{m-2} \exp[-t^2]\, dt = 0\,,$$

oder:

$$t \exp[t^2]\, \Phi(t) = \frac{m-1}{\sqrt{\pi}}\,, \tag{6}$$

und soll durch $U_d = t_d : h$ bezeichnet werden. Die Berechnung von t_d aus der Gleichung (6) für ein vorgelegtes m ist, wie diejenige von t_c, mittelst der t-Tabelle vorzunehmen. Man findet so folgende zusammengehörige Werte von m und t_d:

m	t_d	m	t_d	m	t_d
1	0,000	9	1,194	500	2,203
2	0,620	18	1,404	1000	2,342
3	0,801	36	1,594	5000	2,641
4	0,914	72	1,770	10000	2,761
6	1,060	360	2,134		

Dieselben zeigen, daß $t_d < t_c$, also auch U_d unterhalb U_c liegt, dass aber bei wachsendem m diese Werte sich einander nähern.]

[Schließlich kann auch der arithmetische Mittelwert der extremen Abweichungen bestimmt werden. Nennt man ihn U_a, so erhält man aus (2):

$$U_a = \int_0^\infty U \cdot W[U] = \frac{2m}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t \cdot \Phi[t]^{m-1} \exp[-t^2]\, dt \tag{7}$$

oder — nach partieller Integration —:

$$U_a = \frac{2m(m-1)}{h\pi} \int_0^\infty \Phi[t]^{m-2} \exp[-2t^2]\, dt. \tag{8}$$

Für $m = 1$ resultiert aus (7) $U_a = 1 : h\sqrt{\pi}$ d. i. der einfache Mittelwert der Abweichungen selbst. Für $m = 2$ gewinnt man aus (8) $U_a = \sqrt{2} : h\sqrt{\pi}$, d. i. den mit $\sqrt{2} = 1{,}4142$ multiplizierten Mittelwert der Abweichungen selbst. Für größere m kann $\Phi[t]$ nach § 118 in Reihenform dargestellt und somit auch U_a in eine Reihe entwickelt werden. Beispielsweise gelangt man auf diesem Wege für $m = 3$ zu:

$$U_a = \frac{6}{h\pi\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)}$$

oder, da

$$\sqrt{2}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)},$$

zu:

$$U_a = \frac{6\sqrt{2}}{h\pi\sqrt{\pi}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}6623}{h\sqrt{\pi}}.$$

Es wird somit U_a gleich dem mit 1,6623 multiplizierten Mittelwerte der Abweichungen selbst.]

[Jeder einzelne von den drei Werten U_c, U_d und U_a stellt in besonderer Weise die Abhängigkeit der extremen Abweichungen von der Anzahl m der Abweichungen, aus welchen die Bestimmung erfolgt, vor Augen. Es ist jedoch, wenn es gilt, die theoretischen Werte mit den empirischen zu vergleichen, ebensowohl die Sicherheit der empirischen Bestimmung als auch die Leichtigkeit der theoretischen Berechnung zu berücksichtigen und mit Rücksicht hierauf zu erwägen, welcher von den drei Werten den größten Vorteil bietet. Nun ist die Berechnung des theoretischen Wertes von U_c bequemer als diejenige von U_d oder von U_a, bezüglich der empirischen Bestimmung steht aber U_d hinter U_c und U_a an Sicherheit zurück, während U_c und U_a im allgemeinen gleiches Zutrauen verdienen. Man wird sich daher mit Vorteil des Zentralwertes U_c zum Vergleiche der Theorie mit der Erfahrung bedienen.]

[Für die Rekrutenmaße, für welche die empirisch bestimmten Werte von U_c in Tab. III verzeichnet sind, führt dieser Vergleich zu folgenden Resultaten, wobei der Mittelwert η der einfachen Abweichungen nach § 65 gleich 2,045, also $1 : h = \eta\sqrt{\pi} = 3{,}625$ gesetzt ist:

IV. Vergleich der theoretischen Werte von U_c mit den empirischen, aus m-gliedrigen Fraktionen bestimmten.

m	U_c theor.	U_c empir.	Diff.	m	U_c theor.	U_c empir.	Diff.
1	1,73	1,73	0	9	4,58	4,33	— 0,25
2	2,70	2,41	— 0,29	18	5,32	5,13	— 0,19
3	3,24	3,16	— 0,08	36	6,01	5,50	— 0,51
4	3,61	3,65	+ 0,04	72	6,64	6,00	— 0,64
6	4,11	4,13	+ 0,02	360	7,95	7,75	— 0,20

Man wird, insbesondere in Anbetracht der geringen Anzahl von 360 Werten, die der empirischen Bestimmung unterliegen, die Übereinstimmung der theoretischen und empirischen Werte ohne Zweifel befriedigend finden, so dass hiernach das aufgestellte Wahrscheinlichkeitsgesetz durch die Erfahrung bestätigt wird.]

§ 142. [Die wichtigsten Folgerungen aus den vorstehenden Entwicklungen sind diese:

1) Ist ein K.-G. mit wesentlicher Asymmetrie — wie als Regel vorauszusetzen — vorgelegt, und hat das zweiseitige G. G. für denselben Geltung, so besteht, wenn $t' = U' : e'\sqrt{\pi}$ gesetzt wird, die W.:

$$\frac{2m'}{\sqrt{\pi}}\Phi[t']^{m'-1}\exp[-t'^2]\,dt' = d\Phi[t']^{m'} \tag{9}$$

dafür, dass der extreme Wert der m' oberhalb D gelegenen Abweichungen gleich U' und mithin das obere Extrem selbst gleich:

$$E' = D + U' = D + t'e'\sqrt{\pi} \tag{9a}$$

sei. In entsprechender Weise besteht die W.:

$$\frac{2\,m_{,}}{\sqrt{\pi}}\,\Phi[t_{,}]^{m_{,}-1}\exp[-t_{,}^{2}]\,dt_{,} = d\,\Phi[t_{,}]^{m_{,}} \tag{10}$$

dafür, dass $U_{,} = t_{,}e_{,}\sqrt{\pi}$ der extreme Werth der $m_{,}$ unterhalb D gelegenen Abweichungen oder das untere Extrem selbst gleich

$$E_{,} = D - U_{,} = D - t_{,}e_{,}\sqrt{\pi} \tag{10a}$$

sei. Ist es nun möglich, in fortgesetzter Wiederholung immer wieder m' oberhalb und $m_{,}$ unterhalb D gelegene Exemplare des vorliegenden K.-G. nach Zufall auszuwählen, so wird der Zentralwert der auf diese Weise entstehenden oberen und unteren Extreme durch:

$$\left.\begin{aligned} E' &= D + t'e'\sqrt{\pi}; \text{ wo } \Phi[t'] = \sqrt[m']{\tfrac{1}{2}} \\ E_{,} &= D - t_{,}e_{,}\sqrt{\pi}; \text{ wo } \Phi[t_{,}] = \sqrt[m_{,}]{\tfrac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

der dichteste Wert durch:

$$\left.\begin{aligned} E' &= D + t'e'\sqrt{\pi}; \text{ wo } t'\exp[t'^{2}]\,\Phi[t'] = \frac{m'-1}{\sqrt{\pi}} \\ E_{,} &= D - t_{,}e_{,}\sqrt{\pi}; \text{ wo } t_{,}\exp[t_{,}^{2}]\,\Phi[t_{,}] = \frac{m_{,}-1}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

der arithmetische Mittelwert durch:

$$\left.\begin{aligned} E' &= D + t'e'\sqrt{\pi}; \text{ wo } t' = \frac{2m'(m'-1)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\Phi[t']^{m'-2}\exp[-2t'^{2}]\,dt' \\ E_{,} &= D - t_{,}e_{,}\sqrt{\pi}; \text{ wo } t_{,} = \frac{2m_{,}(m_{,}-1)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\Phi[t_{,}]^{m_{,}-2}\exp[-2t_{,}^{2}]\,dt_{,} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

sich darstellen lassen.]

[2) Da mit wachsenden m' und $m_{,}$ die ihnen nach obigen Formeln zugehörenden Werte t' und $t_{,}$ wachsen, so besitzen zunächst die Differenzwerte $t' - t_{,}$ und $m' - m'$ gleiches Vorzeichen; da ferner nach dem Proportionalgesetze auch $e' - e_{,}$ das gleiche Vorzeichen wie $m' - m_{,}$ hat, so gilt dasselbe von den Differenzen $e't' - e_{,}t_{,}$ und

$m' - m_,$. Die Asymmetrie der extremen Abweichungen bez. D hat somit die nämliche Richtung wie die Asymmetrie der Abweichungszahlen bez. D. Will man dieses Gesetz auf die Abweichungen bez. des arithmetischen Mittels A übertragen, so gelangt man zu dem in § 33 unter 7) an zweiter Stelle angegebenen Umkehrgesetze auf Grund folgender Überlegung. Da die extremen Abweichungen groß sind und relativ großen Schwankungen unterliegen, ist die Annahme gestattet, dass die Differenz der Abweichungen ihr Vorzeichen nicht ändere, wenn man von D zu dem relativ nahen Werte A übergeht. Die Differenz der Abweichungszahlen bez. A hat aber das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Differenz der Abweichungszahlen bez. D. Es hat somit, sofern jene Annahme zutrifft, der Unterschied der extremen Abweichungen bez. A das entgegengesetzte Vorzeichen wie der Unterschied zwischen den Abweichungszahlen bez. A. In der That findet dieses Umkehrungsgesetz z. B. in den Tabellen III und IV des XXV. Kapitels für die Glieder der Roggenhalme (mit nur einer Ausnahme unter 15 verschiedenen Fällen) seine Bewährung. Dasselbe kann jedoch bloß als ein empirisches Gesetz gelten, das für den Fall wesentlicher Asymmetrie in der Regel zutrifft. Bei unwesentlicher Asymmetrie hingegen dürfte es seine Geltung nicht mehr behaupten (vergl. § 181.)]

[3) Verschwindet die Asymmetrie des K.-G., so sind auch für die extremen Abweichungen prinzipiell gleiche Werte zu fordern, als deren Ausgangswert nunmehr das mit D zusammenfallende A unter Beiziehung des einfachen G. G. an Stelle des zweiseitigen zu gelten hat. Für diesen Fall bleiben die unter 1) angegebenen Formeln bestehen, wenn nur m' und $m_,$ durch $\frac{1}{2}m$ und e' sowie $e_,$ durch das für beide Seiten in gleicher Weise gültige η ersetzt wird. Da sich aber für wesentliche Symmetrie das Verteilungsgesetz bei Zugrundelegen des Gesamt-m auf beide Seiten von A gemeinsam bezieht, so ist es zutreffender, die positiven und negativen Abweichungen gemeinsam der Extrembestimmung zu unterwerfen, was zu folgenden Aufstellungen führt. Setzt man $t = U : \eta\sqrt{\pi}$, so besteht die W.:

$$\frac{2m}{\sqrt{\pi}}\Phi[t]^{m-1}\exp[-t^2]dt = d\Phi[t]^m \tag{14}$$

dafür, dass der extreme Wert der Abweichungen $\pm\Delta$ bez. A gleich U sei. Es bleibt jedoch unentschieden, ob U im positiven oder im negativen Sinne dem Ausgangswerte beizufügen sei. Es lässt sich daher nur sagen, dass alsdann entweder

$$E' = A + U = A + t\eta\sqrt{\pi} \text{ oder } E_{,} = A - U = A - t\eta\sqrt{\pi} \quad (14a)$$

ist, und zugleich im ersteren Falle $E_{,}$ oberhalb $A - U$, im letzteren Falle E' unterhalb $A + U$ bleibt. Entsprechende Bemerkungen sind auch bezüglich der Hinzufügung der gemäß den Formeln (5), (6) und (8) zu bestimmenden mittleren extremen Abweichungswerte U_e, U_d und U_a zum Ausgangswerte zu machen. Denn man erhält hierdurch nicht die mittleren Extreme selbst, sondern nur eine obere resp. untere Grenze für das obere resp. untere mittlere Extrem.]

XXI. Die logarithmische Behandlung der Kollektivgegenstände.

§ 143. [Die bisher allein berücksichtigte arithmetische Behandlung der K.-G. hat zur Voraussetzung, dass die Maße eine geringe verhältnismäßige Schwankung um die Hauptwerte besitzen. Es giebt aber auch K.-G., wie die Dimensionen der Galleriegemälde und die täglichen Regenhöhen, die nach einer Bemerkung des IV. Kapitels im Verhältnis zu den Hauptwerten eine sehr starke mittlere Abweichung bieten, wodurch sie der Anwendung der arithmetischen Behandlungsweise sich entziehen, dagegen der logarithmischen Behandlung sich zugänglich zeigen und eine durchschlagende Bewährung des logarithmischen Verteilungsgesetzes ermöglichen.]

[Hieraus erwächst die Aufgabe, in Ergänzung des bereits im V. Kapitel (§ 35 und 36) Gesagten auf die logarithmische Behandlung überhaupt näher einzugehen. Dort wurden die allgemeinen Gesichtspunkte entwickelt, die es geboten erscheinen lassen, das Verteilungsgesetz der K.-G. prinzipiell vielmehr auf Verhältnisabweichungen als auf arithmetische Abweichungen zu beziehen, woraus unmittelbar die Folgerung sich ergab, dass dem G. G. statt der arithmetischen $\Theta = a - H$ die Logarithmen der Verhältnisabweichungen $\psi = a : H$, nämlich $\log \psi = \log a - \log H$, zu Grunde zu legen seien. Auch wurde dort die Anwendung der logarithmischen Behandlung der Hauptsache nach schon mitgeteilt und die Bezeichnungsweise festgesetzt. Demgemäß ist allgemein:

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \log a\,;\quad \psi' = \frac{a'}{H}\,;\quad \lambda' = \log \psi' = \log a' - \log H\,;\quad \psi_{,} = \frac{H}{a_{,}}\,; \\ \lambda_{,} = \log \psi_{,} = \log H - \log a_{,} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

zu setzen und insbesondere der dichteste Wert der $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{D}$, ihr arithmetisches Mittel durch $\mathfrak{G}$ und ihr Zentralwert durch $\mathfrak{C}$ zu bezeichnen, während die oberen und unteren Abweichungszahlen und mittleren Abweichungen bez. $\mathfrak{D}$ in gleicher Weise wie bez. D durch $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}_,$ und $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_,$ anzugeben sind, so dass:

$$\left.\mathfrak{e}' = \frac{\Sigma \lambda'}{\mathfrak{m}'}; \quad \mathfrak{e}_, = \frac{\Sigma \lambda_,}{\mathfrak{m}_,}; \text{ wo } \lambda' = \mathfrak{a}' - \mathfrak{D}; \ \lambda_, = \mathfrak{D} - \mathfrak{a}_, . \right\} \qquad (2)$$

Will man ferner von den logarithmischen Werten zu den Zahlwerten übergehen, die ihnen nach den Logarithmentafeln zugehören, so ist

$$\mathfrak{D} = \log \mathcal{T}; \quad \mathfrak{C} = \log C; \quad \mathfrak{G} = \log G \qquad (3)$$

vorauszusetzen. Es bezeichnet alsdann $\mathcal{T}$ den dichtesten Verhältniswert der a, der von dem arithmetisch dichtesten Werte D verschieden ist; C stimmt mit dem arithmetischen Zentralwerte überein; und G stellt das geometrische Mittel der a dar. Mit dem Hinweis auf diese Festsetzungen und Entwicklungen des angegebenen Kapitels verbindet sich aber die Verpflichtung, was dort nur in Aussicht gestellt wurde, hier durchzuführen. Es müssen darum einesteils die empirischen Belege dafür erbracht werden, dass in der That der Vorteil der logarithmischen Behandlung für K.-G. mit starker verhältnismäßiger Schwankung entschieden hervortritt. Anderenteils gilt es, die für die logarithmischen Abweichungen der $\mathfrak{a}$ und ihre Hauptwerte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$ auf Grund des zweispaltigen G. G. unmittelbar geltenden Bestimmungen auf die Verhältnisabweichungen der a und ihre Hauptwerte $\mathcal{T}$, C, G zu übertragen und durch Ableitung der theoretisch gültigen Beziehung zwischen $\mathcal{T}$ und D einen Zusammenhang zwischen der logarithmischen und arithmetischen Behandlung herzustellen.]

[Hierbei ist das logarithmische Verteilungsgesetz selbst als ein bei starker Schwankung hinreichend sich bewährendes Erfahrungsgesetz anzusehen, das bei schwacher Schwankung in das gewöhnliche arithmetische Gesetz übergeht. Jenes bedarf daher sowenig wie dieses vom empirischen Standpunkte aus einer weiteren Begründung. Nachdem aber im Zusatze zum XIX. Kapitel eine Hypothese betreffs der Entstehungsweise der K.-G. aufgestellt worden, aus der das zweiseitige G. G. für arithmetische Abweichungen approximativ sich ergab, erscheint es geboten, jene Hypothese so zu modifizieren, dass aus ihr auch für logarithmische Abweichungen das Verteilungsgesetz in entsprechender Weise folgt. Dies soll im Zusatz zu diesem Kapitel geschehen.]

§ 144. [Um den Vorzug, den die logarithmische Behandlung gegenüber der arithmetischen bei starker Schwankung besitzt, vor Augen zu stellen, entnehme ich jedem der oben genannten K.-G., den Dimensionen der Galleriegemälde und den täglichen Regenhöhen, ein Beispiel und teile die Resultate für beide Behandlungsweisen mit.]

[Aus den Katalogen der älteren Pinakothek zu München und der Gemäldesammlung zu Darmstadt ergaben sich die Maße von 253 Genrebildern, deren Höhendimensionen in eine primäre Verteilungstafel gebracht wurden. Als Maßeinheit wurde das Zentimeter gewählt. Das kleinste Maß fand sich gleich 13, das größte gleich 265, das arithmetische Mittel A_1 gleich 54,4 und der Zentralwert C_1 gleich 44,2 cm. Hieraus wurde eine reduzierte Tafel gewonnen, in welcher die Maße für je 10 cm zusammengefasst wurden. Dieselbe führte bei arithmetischer Behandlung nach dem zweiseitigen G. G. zu folgenden Ergebnissen:

I. Höhendimension der Genrebilder in arithmetischer Behandlung.

$m = 253$; $i = 10$; $A_1 = 54{,}4$; $\varepsilon = 1\,cm$.

a	z empir.	z theor.
—	—	1
15	13	15
25	41	38
35	**54**	39 [1]
45	43	36
55	22	31
65	20,5	26
75	15	21
85	10	16
95	8,5	11
105	5	8
115	3	5
125	6	3
135	3	2
145	5	1
155	0	—
165	1	—
195	1	—
235	1	—
265	1	—

$$A_2 = 55{,}3$$
$$C_2 = 44{,}3$$
$$D_i = 35{,}4$$
$$D_p = 24{,}9$$
$$m' = 220$$
$$m_, = 33$$
$$e' = 35{,}8$$
$$e_, = 5{,}4$$
$$h' = \frac{1}{e'\sqrt{\pi}} = 0{,}016$$
$$h_, = \frac{1}{e_,\sqrt{\pi}} = 0{,}104$$

1) [Hier fällt das Maximum der theoretischen Werte nicht auf das Intervall 20—30, welches den dichtesten Wert D_p einschließt. Dies wird jedoch nur durch die obige intervallweise Zusammenfassung der z bedingt. In der That findet man bei anderer Zusammenfassung beispielsweise:

Intervalle	z
20—24	14,0
24—28	15,9
28—32	15,8

so dass ein geringer Überschuss dem Intervall 24—28 mit dem dichtesten Werte 24,9 zukommt.]

Ersetzt man aber in der primären Tafel die a-Werte durch die logarithmischen Werte $\mathfrak{a} = \log a$, die nunmehr zwischen den Grenzen $\mathfrak{a} = 1{,}11$ und $\mathfrak{a} = 2{,}42$ variieren, und wählt man ein reduziertes Intervall von der Größe 0,08, so erhält man, wenn diese Tabelle der $\mathfrak{a}$ ganz ebenso behandelt wird wie die vorige Tabelle der a, folgende Resultate:

II. Höhendimension der Genrebilder in logarithmischer Behandlung.

$i = 0{,}08$; $m = 253$.

$\mathfrak{a}$	z empir.	z theor.
1,04	—	0,5
1,12	4	1,5
1,20	5	4
1,28	5	10
1,36	19	18
1,44	22	27
1,52	**38**	32
1,60	32	32
1,68	31	30
1,76	26	26
1,84	18	22
1,92	19	17
2,00	13	12
2,08	9	8,5
2,16	8	5,5
2,24	1	3
2,32	1	2
2,40	2	1
2,48	—	1

$\mathfrak{G} = 1{,}669 \qquad G = 46{,}7$

$\mathfrak{C} = 1{,}644 \qquad C = 44{,}1$

$\mathfrak{D}_i = 1{,}538 \qquad \mathfrak{T}_i = 34{,}5$

$\mathfrak{D}_p \doteq 1{,}549 \qquad \mathfrak{T}_p = 35{,}4$

$m' = 165$

$m_{,} = 88$

$e' = 0{,}256$

$e_{,} = 0{,}136$

$$h' = \frac{1}{e'\sqrt{\pi}} = 2{,}204$$

$$h_{,} = \frac{1}{e_{,}\sqrt{\pi}} = 4{,}148$$

Vergleicht man nun beide Tabellen, so tritt der Vorteil der logarithmischen Behandlung entschieden zu Tage. Denn in der arithmetischen Tafel ist die Summe der absoluten Differenzen zwischen empirischen und theoretischen Werten gleich 74; in der logarithmischen Tafel dagegen nur gleich 37, also genau halb so groß. Es weichen ferner der empirische und der theoretische dichteste Wert, D_i und D_p, um 10,5 Einheiten von einander ab; während die mit jenen vergleichbaren Werte $\mathcal{T}_i$ und $\mathcal{T}_p$ nur um 0,9 sich unterscheiden. Auch ist zu erwähnen, dass der arithmetisch bestimmte Quotient

$$p = \frac{C - D}{A - D}$$

den Wert 0,64, der logarithmisch bestimmte Quotient

$$p = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{D}}{\mathfrak{G} - \mathfrak{D}}$$

den Wert 0,792 darstellt, so dass jener ganz ausserhalb der theoretischen Grenzen von p, d. i. 0,785 und 0,845, fällt, während dieser dem durch die π-Gesetze geforderten Werte $\frac{1}{4}\pi = 0{,}785$ innerhalb jener Grenzen sehr nahe kommt. All dies zeigt, dass in der That die arithmetische Behandlung hier versagt, die logarithmische dagegen sich bewährt. Dabei ist zu beachten, dass trotz des geringen m der empirischen Tafel die hervorgehobenen Beziehungen für die Dimensionen der Genrebilder als typisch zu gelten haben.]

[Als Beispiel für die täglichen Regenhöhen sollen die in Genf während der Jahre 1845—1892 im Monat Januar gefallenen Regenmengen (geschmolzener Schnee oder Regen) dienen, die in den meteorologischen Tabellen der Bibliothèque Universelle de Genève (Archives des Sciences Phys. et Nat.) unter der Rubrik »Eau tombée dans les 24 heures« verzeichnet sind. Die Gesamtzahl der Regentage während des bezeichneten Zeitraumes von 48 Jahren beträgt 477; für jeden derselben sind die Regenhöhen bis auf Zehntelmillimeter angegeben. 16 Regentage sind mit 0,0 mm verzeichnet; die größte Regenhöhe ist gleich 40,0; das arithmetische Mittel A_1 gleich 4,45; der Zentralwert C_1 gleich 2,24 mm. Aus der primären Verteilungstafel wurde eine reduzierte Tafel mit dem Intervall $i = 1$ mm hergestellt, die bei arithmetischer Behandlung folgende Werte ergab:

III. Die Regenhöhen des Monats Januar für Genf in arithmetischer Behandlung.

$m = 477$; $i = 1$; $A_1 = 4{,}45$; $\mathfrak{E} = 1$ mm.

a	z emp.	z theor.
0,5	133	67
1,5	88	65
2,5	43,5	61
3,5	28	56
4,5	27	49
5,5	28	42
6,5	27,5	35
7,5	14,5	28
8,5	16	22
9,5	11,5	16
10,5	12	12
11,5	10	8
12,5	6,5	6
13,5	5,5	4
14,5	3	2
15,5	3	2
16,5	2	1
17,5	5	1
18,5	1	—
19,5	3	—
20,5	0	—
21,5	3	—
22,5	0	—
23,5	2	—
28,5	1	—
30,5	1	—
32,5	1	—
40,0	1	—

$A_2 = 4{,}49$
$C_2 = 2{,}40$
$D_i = 0{,}75$
$D_p = 0$
$e' = A_2$
$e_{,} = 0$
$m' = m$
$m_{,} = 0$

$$h' = \frac{1}{e'\sqrt{\pi}} = 0{,}126$$

Wie man sieht, stellen die täglichen Regenhöhen einen K.-G. mit unendlich großer Asymmetrie dar, indem $D_p = 0$, und somit alle Werte oberhalb D_p liegen. Es stimmen aber die theoretischen Werte der z mit den empirischen so wenig überein, dass die arithmetische Behandlung als unanwendbar sich erweist. Will man aber zur logarithmischen Behandlung übergehen, so muss zuvor über die Auffassung der 16 Regentage, die mit 0,0 mm verzeichnet sind, ein Übereinkommen getroffen werden, denn es war doch an jenen Tagen die Regenhöhe nicht völlig gleich 0, sondern nur so klein, dass sie ein Zehntelmillimeter nicht erreichte. Ich nehme darum 0,05 mm an Stelle von 0,0 mm an, so dass die Logarithmen der a zwischen den Grenzen — 1,30 und + 1,60 variieren. Reduziert man nach dieser, im Grunde willkürlichen Festsetzung die primäre Tafel auf ein Intervall von der Größe 0,2, und wählt man als untere Grenze des ersten Intervalles — 1,50, so erhält man folgende Resultate:

IV. Die Regenhöhen des Monats Januar für Genf in logarithmischer Behandlung.

$$m = 477\,; \quad i = 0{,}2\,.$$

a	z empir.	z theor.
—	—	5
— 1,4	8	4
— 1,2	8	6
— 1,0	9	9
— 0,8	9	14
— 0,6	28	19
— 0,4	14	26
— 0,2	34	34
0,0	45	42
+ 0,2	66	50
+ 0,4	47	56
+ 0,6	53	60
+ 0,8	67	63
+ 1,0	53	52
+ 1,2	27	27
+ 1,4	7	8
+ 1,6	2	2

$\mathfrak{G} = 0{,}313 \qquad G = 2{,}06$

$\mathfrak{C} = 0{,}374 \qquad C = 2{,}37$

$\mathfrak{D}_{\iota} = 0{,}800 \qquad \mathfrak{T}_{\iota} = 6{,}31$

$\mathfrak{D}_{\nu} = 0{,}843 \qquad \mathfrak{T}_{\nu} = 6{,}97$

$e' = 0{,}219$

$e_{,} = 0{,}749$

$m' = 108$

$m_{,} = 369$

$$h' = \frac{1}{e'\sqrt{\pi}} = 2{,}576$$

$$h_{,} = \frac{1}{e_{,}\sqrt{\pi}} = 0{,}753$$

Es zeigen zwar hier die unterhalb des dichtesten Wertes liegenden z bei $-0{,}4$ und $+0{,}2$ starke Unregelmäßigkeiten, die bei Änderung der Reduktionslage nicht verschwinden, vielmehr durch den Gang der z in der primären Tabelle und deren Zusammenfassung in die logarithmischen Intervalle begründet sind; trotzdem ist aber die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung so gut, dass die Differenzen zwischen den theoretischen Werten und den empirischen als eine Ausgleichung der Zufälligkeiten, die letzteren anhaften, sich darstellen. Es bewährt sich somit das logarithmische Verteilungsgesetz auch an den Regenhöhen durchaus befriedigend.]

§ 145. [Auf Grund des im Vorstehenden durchgeführten Vergleiches zwischen Theorie und Erfahrung erweist sich das logarithmische Verteilungsgesetz für K.-G. mit starker verhältnismäßiger Schwankung als zutreffend. Da nun dasselbe — nach den Erörterungen des V. Kapitels — bei schwacher verhältnismäßiger Schwankung der Einzelwerte um die Hauptwerte mit der arithmetischen Verallgemeinerung des G. G. merklich übereinstimmt, so ist es — wie am Schlusse des angegebenen Kap. schon hervorgehoben wurde — überhaupt als das streng gültige Verteilungsgesetz der K.-G. in Anspruch zu nehmen. Somit bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit W' oder $W_,$, dass eine logarithmische Abweichung vom dichtesten Werte $\mathfrak{D}$ zwischen die unendlich nahen Grenzen λ' und $\lambda' + d\lambda'$ oder $\lambda_,$ und $\lambda_, + d\lambda_,$ falle für jeden K.-G. durch:

$$\left.\begin{aligned} W' &= \frac{2h'}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h'^2 \lambda'^2\right] d\lambda'; \\ W_, &= \frac{2h_,}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-h_,^2 \lambda_,^2\right] d\lambda_,; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und es findet sich die Anzahl der Abweichungen zwischen den angegebenen Grenzen gleich:

$$z' = W' \cdot m'; \quad z_, = W_, \cdot m_,; \tag{5}$$

wobei $h' m' = h_, m_,$; $h' = 1 : e'\sqrt{\pi}$; $h_, = 1 : e_,\sqrt{\pi}$ und e', $e_,$, m', $m_,$ auf $\mathfrak{D}$ als Ausgangswert zu beziehen sind.]

[Für die Hauptwerte $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ der logarithmischen Abweichungen gelten daher die nämlichen Gesetze, die im XIX. Kapitel für die arithmetischen Hauptwerte A, C und D abgeleitet wurden. Ersetzt man aber $\mathcal{G}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ der Reihe nach durch $\log G$, $\log C$ und $\log \mathcal{T}$, so erhält man unmittelbar die für die Hauptwerte G, C und $\mathcal{T}$ der Verhältnisabweichungen gültigen Gesetze.]

[Es ergeben sich so insbesondere folgende Bestimmungen:

1) der Zentralwert C liegt stets zwischen dem geometrischen Mittelwerte G und dem dichtesten Verhältniswerte $\mathcal{T}$, da nach dem Lagengesetze das Gleiche von $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$ und $\mathcal{D}$ gilt.

2) Bezeichnet man das geometrische Mittel der oberhalb resp. unterhalb $\mathcal{T}$ liegenden a-Werte durch G' resp. $G_,$, so dass:

$$e' = \log G' - \log \mathcal{T}; \quad e_, = \log \mathcal{T} - \log G_, ,$$

so ist auf Grund des Proportionalgesetzes:

$$\left.\begin{aligned} e' - e_, &= \log G - \log \mathcal{T}; \\ G' \cdot G_, &= G \cdot \mathcal{T}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

3) Bestimmt man ebenso, wie in § 131 mit Bezug auf D, hier in Bezug auf $\mathcal{D}$ den Werth t'' aus:

$$\Phi[t''] = \frac{m'' - m_{,,}}{2\, m''}$$

wo m'' die größere und $m_{,,}$ die kleinere der beiden Abweichungszahlen m' und $m_,$ vorstellt, so wird:

$$\log C - \log \mathcal{T} = t'' e'' \sqrt{\pi}; \tag{7}$$

wobei die Differenz der Logarithmen nur dem absoluten Betrage nach in Rechnung kommt. Bei schwacher Asymmetrie folgt hieraus:

$$\log C - \log \mathcal{T} = \frac{\pi}{4} e'' \frac{m'' - m_{,,}}{m''} = \frac{\pi}{4} (e'' - e_{,,}),$$

oder mit Rücksicht auf (6):

$$\log C - \log \mathcal{T} = \frac{\pi}{4} (\log G - \log \mathcal{T}), \tag{8}$$

eine Gleichung, welche die π-Gesetze für die Verhältnisabweichungen enthält.]

[Den Zusammenhang zwischen den arithmetischen Hauptwerten und denjenigen der Verhältnisabweichungen schließlich stellen folgende Sätze her.]

Zum logarithmischen Mittelwerte $\mathfrak{G} = \Sigma \log a : m$ als Logarithmus gefasst gehört der mit G zu bezeichnende, sogenannte geometrische Mittelwert oder Verhältniswert, welcher stets rücksichtslos auf ein bestimmtes Verteilungsgesetz etwas kleiner als der arithmetische Mittelwert $A = \Sigma a : m$ ist und (nach einem Beweise von SCHEIBNER[1]) approximativ folgende Beziehung zu A hat, welche um so genauer zutrifft, je kleiner der mit q zu bezeichnende sog. quadratische Mittelfehler bez. A, d. i. $q = \sqrt{\Sigma \Delta^2 : m}$ ist:

$$G = A\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{A^2}\right). \tag{9}$$

Hiernach kann man G approximativ aus A ableiten.

Zwischen dem logarithmisch dichtesten Werte $\mathfrak{D}$ und dem Logarithmus des arithmetisch dichtesten Wertes D besteht folgende Beziehung:

$$\mathfrak{D} = \log D + \frac{e_{,}^2 \pi}{2 \operatorname{Mod}}. \tag{10}$$

Darin bedeutet $e_{,}$ die untere mittlere logarithmische Abweichung $= \Sigma \lambda_{,} : m_{,}$, Mod den Modulus unseres üblichen logarithmischen Systems $= 0{,}434\,29$, π wie immer $3{,}141\,59$. Diese Beziehung ist an die Gültigkeit der logarithmischen Verallgemeinerung des G. G. geknüpft und kann daher zu den empirischen Bewährungen dieser Verallgemeinerung mit benutzt werden.

[Beweis. Der logarithmisch dichteste Wert $\mathfrak{D}$ bezeichnet dasjenige logarithmische Intervall, das von allen Intervallen der nämlichen Größe die meisten x auf sich vereint. Er wird daher durch das Maximum der Wahrscheinlichkeitsfunktion (4) bei konstantem $d\lambda'$ und $d\lambda_{,}$, d. i. durch den Ausgangswert der Abweichungen λ' und $\lambda_{,}$ bestimmt.

1) [W. SCHEIBNER, Über Mittelwerte. Auszug aus einem an Herrn Prof. FECHNER gerichteten Schreiben. Berichte der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Math.-Phys. Klasse. 1873. S. 562 flgd.]

Der arithmetisch dichteste Wert D dagegen liegt in demjenigen arithmetischen Intervall, das unter allen Intervallen der nämlichen Größe das Maximal-z besitzt. Man findet daher diesen Wert bei Gültigkeit des logarithmischen Verteilungsgesetzes als das Maximum der auf konstante arithmetische Intervalle bezogenen Wahrscheinlichkeitsfunktion (4). Man bezeichne demgemäß die arithmetischen Abweichungen der a von dem dichtesten Verhältniswerte $\mathfrak{T}$ durch $\Theta' = a' - \mathfrak{T}$ und $\Theta_, = \mathfrak{T} - a_,$, so dass $d\Theta' = da'$ und $d\Theta_, = -da_,$ und setze auf Grund der Definitionen $\lambda' = \log a' - \mathfrak{D} = \log a' - \log \mathfrak{T}$; $\lambda_, = \mathfrak{D} - \log a_, = \log \mathfrak{T} - \log a_,$ in den Funktionen (4):

$$\left.\begin{aligned} d\lambda' &= \frac{\mathrm{Mod}}{a'}\, da' = \frac{\mathrm{Mod}}{a'}\, d\Theta' \\ d\lambda_, &= -\frac{\mathrm{Mod}}{a_,}\, da_, = \frac{\mathrm{Mod}}{a_,}\, d\Theta_, \,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Dann erhält man für konstante $d\Theta'$ und $d\Theta_,$ zur Bestimmung des Maximums von:

$$W' = \frac{2h'\,\mathrm{Mod}}{\sqrt{\pi}\,a'} \exp[-h'^2\lambda'^2]\, d\Theta'\,; \quad W_, = \frac{2h_,\,\mathrm{Mod}}{\sqrt{\pi}\,a_,} \exp[-h_,^2\lambda_,^2]\, d\Theta_,$$

die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W'}{\partial a_,} &= -\frac{W'}{a'}(1 + 2h'^2\lambda'\,\mathrm{Mod}) = 0\,; \\ \frac{\partial W_,}{\partial a_,} &= -\frac{W_,}{a_,}(1 - 2h_,^2\lambda_,\,\mathrm{Mod}) = 0\,. \end{aligned}$$

Nun sind aber die λ' und $\lambda_,$ ihrem Wesen nach positiv. Es bietet daher nur die zweite der beiden Gleichungen ein Maximum für:

$$\lambda_, = \frac{1}{2h_,^2\,\mathrm{Mod}} \tag{12}$$

dar. Setzt man hier, um den zu $\lambda_,$ gehörigen a-Wert durch D zu bezeichnen:

$$\lambda_, = \mathfrak{D} - \log D\,; \text{ ferner } h_,^2 = \frac{1}{e_,^2\,\pi}\,,$$

so erhält man in der That die durch (10) dargestellte Beziehung.]

§ 146. [Zusatz. Wird in Übereinstimmung mit den Ausführungen in § 35 der Grundsatz aufgestellt, dass die Größenänderungen der Exemplare eines K.-G. wesentlich abhängig sind von der Größe der Exemplare, welche die Anderungen erleiden, so ergiebt sich unmittelbar die Modifikation, die an der im Zusatz zum XIX. Kapitel (§ 136) entwickelten Hypothese anzubringen ist, um sie dem logarithmischen Verteilungsgesetz dienstbar zu machen.]

[Es können nämlich zur Ableitung des logarithmischen Gesetzes ebenso wie zur Ableitung des arithmetischen besondere Einflüsse oder Umstände, kurz Kräfte als Ursachen der Größenänderungen vorausgesetzt werden. Ihre Anzahl ist unbestimmt groß, gleich n anzunehmen und allen in gleicher Weise die W. p für ihr Eingreifen, die W. $q = 1 - p$ für das Ausbleiben ihrer Wirkung zuzuschreiben. Der Erfolg ihres Auftretens ist nun aber nicht mehr als ein additiv hinzutretender Zuwachs, sondern als eine Vervielfachung aufzufassen, so dass an Stelle von $a + i$ und $a + xi$ vielmehr ai und ai^x tritt. Man erhält somit auf Grund dieser Modifikation für ein Exemplar von der Größe ai^x die nämliche W., die der früher entwickelten Hypothese zufolge einem Exemplare von der Größe $a + xi$ zukam, so dass nunmehr:

$$W[ai^x] = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} . \tag{13}$$

Setzt man aber $\boldsymbol{a} = \log a$ und $\boldsymbol{i} = \log i$, so wird $\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{i} = \log(ai^x)$, und man erhält als Ausdruck für die W., dass der Logarithmus der Größe eines Exemplares gleich $\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{i}$ sei:

$$W[\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{i}] = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} . \tag{14}$$

Hiernach gelten die früheren Entwicklungen in der nämlichen Weise und in dem nämlichen Umfange für das logarithmische Verteilungsgesetz, wenn nur überall a durch $\boldsymbol{a} = \log a$ und i durch $\boldsymbol{i} = \log i$ ersetzt wird.]

XXII. Kollektive Behandlung von Verhältnissen zwischen Dimensionen. Mittlere Verhältnisse.

§ 147. Hiernach will ich noch etwas von einer Aufgabe sagen, welche in der Kollektivmaßlehre eine ziemliche Rolle spielt, und deren Besprechung hier zweckmäßig eine Stelle finden kann, da auch durch sie das Bedürfnis einer logarithmischen Behandlung unmittelbar nahe gelegt wird.

Bemerktermaßen können nicht bloß einfache Dimensionen eines Gegenstandes, sondern auch Verhältnisse derselben kollektiv behandelt werden, und schon oben (Kap. I und III) erwähnte ich in dieser Hinsicht die Verhältnisse zwischen den Schädeldimensionen einer gegebenen Rasse und den Stengelabteilungen, sog. Gliedern oder Internodien einer Graminee, wozu sich genug andere Beispiele finden lassen. Halten wir uns an das Verhältnis zwischen der vertikalen Dimension a und der zugehörigen horizontalen b des Schädels einer gegebenen Rasse, was zum Vergleiche mit anderen Rassen bestimmt werden soll, und setzen dabei in der Regel a in den Zähler, b in den Nenner, obwohl das Verhältnis ebenso gut umgekehrt genommen werden kann. Das Verhältnis $a:b$ ist nun schon zwischen den Exemplaren einer und derselben Rasse etwas verschieden; aber zur vergleichenden Charakteristik anderen Rassen gegenüber gehören statt der wechselvollen Einzelbestimmungen einheitliche Resultate daraus. Man kann daher nur ein mittleres Verhältnis zwischen b und a verlangen, was im allgemeinen mit $M[a:b]$ bezeichnet wird. Jenachdem man das arithmetische oder geometrische Mittel im Auge hat, treten A oder G an die Stelle von M. Die entsprechende Aufgabe kann bezüglich der zu einander gehörigen Dimensionen desselben Teiles oder derselben Dimensionen an verschiedenen Teilen nicht nur des Menschen, sondern irgend welchen Gegenstandes aufgestellt werden. So kann man fragen, wie verhält sich im Mittel die Länge des einen Fingers zu der des anderen, die Länge des einen Gliedes zur Länge des zweiten Gliedes einer Ähre, die Länge zur Breite einer Visitenkarte, die Mitteltemperatur eines Monats zu der eines anderen u. s. w., kurz, dieselbe Aufgabe bietet sich unendlich oft dar.

§ 148. Ein mittleres Verhältnis kann nun aber auf verschiedene Weise gewonnen werden; namentlich auf folgende, wobei zu einander gehörige Werte von a und b mit gleichem Index bezeichnet werden sollen. Die für die Richtung $a:b$ aufgestellten Beispiele können natürlich für die Richtung $b:a$ umgesetzt werden.

1) Das arithmetische Mittel von Verhältnissen $A[a:b]$ wird dadurch erhalten, dass man alle Einzelwerte $a:b$ addiert und mit der Zahl derselben dividiert; also:

$$A\left[\frac{a}{b}\right] = \left(\frac{a'}{b'} + \frac{a''}{b''} + \cdots\right) : m = \frac{1}{m}\Sigma\frac{a}{b}. \qquad (1)$$

2) Als summarisches Mittel bezeichne ich dasjenige, welches man erhält, wenn man die Summe aller a mit der Summe aller b oder, was auf dasselbe herauskommt, das arithmetische Mittel aller a mit dem arithmetischen Mittel aller b dividiert, nach der Formel:

$$M_s\left[\frac{a}{b}\right] = \frac{a' + a'' + \cdots}{b' + b'' + \cdots} = \frac{\Sigma a}{\Sigma b} = \frac{A}{B}. \qquad (2)$$

Man könnte gegen die Anwendung dieses Mittels geltend machen, es sei vielmehr ein Verhältnis zwischen Mitteln als ein Mittel aus Verhältnissen; aber indem es das eine ist, ist es zugleich das andere in dem weiteren Begriffe des Mittels, den wir hier überhaupt gebrauchen, sofern es nach einem bestimmten Prinzip zwischen die Einzelwerte von $a:b$ und zwar, abgesehen von ganz exceptionellen Fällen, in die Nähe der anderen Mittel fällt.

3) Prozentisches Mittel. Zur Gewinnung dieses Mittels bildet man die Werte $a:(a+b)$ und $b:(a+b)$ und dividiert die Summe der einen durch die der anderen nach der Formel:

$$M_p\left[\frac{a}{b}\right]=\frac{\sum\frac{a}{a+b}}{\sum\frac{b}{a+b}}\,. \tag{3}$$

4) Das geometrische Mittel, repräsentiert durch die Formel:

$$G\left[\frac{a}{b}\right]=\sqrt[m]{\frac{a'}{b'}\cdot\frac{a''}{b''}\cdots}=\frac{\sqrt[m]{a'\cdot a''\cdots}}{\sqrt[m]{b'\cdot b''\cdots}}\,, \tag{4}$$

ist das geometrische Mittel aus dem Produkt der einzelnen Verhältnisse $a:b$ oder, gleichgeltend damit, das geometrische Mittel aus dem Produkte der a, dividiert durch das der b, und wird in praktischem Wege als der in den Logarithmentafeln gesuchte Zahlwert zu $(\Sigma \log a - \Sigma \log b) : m$ erhalten.

Fragt man nun nach der Wahl zwischen diesen verschiedenen Mittelbestimmungen, so ist zuvörderst im allgemeinen ebenso wie bezüglich der einfachen Maße vorzubemerken, dass, insofern es sich nur um eine Charakteristik der Verhältnisse eines K.-G. handeln sollte, welche einen Vergleich desselben mit anderen Gegenständen gestattet, jedes der angeführten Mittel nur aus einem anderen Gesichtspunkte zu einer solchen Charakteristik beiträgt, und dass, wo das Verhältnis $a:b$ überhaupt nur verhältnismäßig wenig schwankt, alle vier Bestimmungsweisen fast auf denselben Wert führen. So gaben z. B. 10 Visitenkarten, nach Zufall aus einem Paket herausgezogen, wenn die kurze Seite mit a, die lange mit b bezeichnet wird, als Mittel:

arithmetisch	0,5654
summarisch	0,5634
prozentisch	0,5650
geometrisch	0,5649 .

Die extremen Werte $a:b$ waren 0,5333 und 0,6053.

Inzwischen, wo die Schwankungen zwischen den $a:b$ bedeutend sind, können auch die verschiedenen Mittelbestimmungen ein erheblich verschiedenes Resultat geben, und überhaupt gilt es, die Gesichtspunkte anzugeben, welche die Wahl der einen Bestimmungsweise vor der anderen entscheiden können.

In dieser Hinsicht kann man allgemein sagen, dass das arithmetische und prozentische Mittel in jeder Beziehung den beiden anderen Mittelwerten nachstehen und allgemein gesprochen das geometrische Mittel den Vorzug verdienen dürfte, aber auch das summarische unter Umständen eine nützliche Verwendung finden kann.

In der That leidet zunächst das arithmetische Mittel von Verhältnissen an folgenden Nachteilen.

a) Um die einzelnen Brüche $a:b$ addieren zu können, muss man erst jeden einzelnen auf einen Dezimalbruch reduzieren, was bei vielen Werten $a:b$ sehr mühsam ist.

b) An sich ist es gleichgültig, ob man die direkten Werte $a:b$ oder die reziproken Werte $b:a$ zur Mittelziehung benutzen will, um das mittlere Verhältnis der a und b zu bestimmen; und man sollte natürlich auf beiden Wegen ein übereinstimmendes Resultat erlangen; dies gewährt aber diese Methode nicht, wie sich zeigt, wenn man das aus den reziproken Werten gewonnene Mittel umkehrt, wodurch man das sog. harmonische Mittel zu dem aus den direkten Werten gewonnenen erhält; beide stimmen nicht überein, kurz $A[a:b]$ ist nicht gleich dem dazu harmonischen Mittel $1:A[b:a]$. Sei z. B., um ein ganz einfaches Beispiel von nur zwei Verhältnissen zu nehmen:

$$\frac{a'}{b'} = \frac{1}{2}; \quad \frac{a''}{b''} = \frac{3}{4},$$

so ist:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{2}{1}; \quad \frac{b''}{a''} = \frac{4}{3}; \quad A\left[\frac{a}{b}\right] = \frac{10}{16}; \quad A\left[\frac{b}{a}\right] = \frac{10}{6}; \quad 1:A\left[\frac{b}{a}\right] = \frac{6}{10},$$

$\frac{10}{16}$ aber ist $= 0{,}625$, $\frac{6}{10} = 0{,}600$. Nimmt man noch weiter von einander abweichende Brüche als in unserem Beispiel, so wird auch der Unterschied zwischen dem direkten und harmonischen Mittel noch größer. Bei solchen K.-G., wo sich die meisten Werte $a:b$ nicht sehr weit von einem mittleren Werte entfernen, ist er in der Regel zwar nur sehr gering, aber doch nicht überall zu vernachlässigen, und das Verfahren wegen der Zweideutigkeit seiner Resultate jedenfalls **prinzipiell** zu verwerfen.

c) Hat man die mittleren Verhältnisse zwischen dreierlei Werten a, b, c zu bestimmen, so sind drei Verhältnisse $a:b$, $b:c$, $a:c$ mit ihren reziproken Werten möglich, und man kann wünschen, aus zweien dieser Verhältnisse (sei es direkter oder reziproker) unmittelbar das dritte ableiten zu können. Dies leistet aber diese Methode nicht, indem man z. B. $A[a:c]$ nicht dadurch erhalten kann, dass man $A\,[a:b]$ mit $A\,[b:c]$ multipliziert.

Das prozentische Mittel teilt diese sämtlichen Nachteile des arithmetischen. Doch findet man mitunter sowohl das eine wie das andere gebraucht.

Das summarische und geometrische Mittel sind hingegen frei von diesen sämtlichen Nachteilen. Wollte man aber doch dem direkten arithmetischen und prinzipiell gleichberechtigten harmonischen, aber vom direkten verschiedenen Mittel ein besonderes Zutrauen schenken, so würde man sich nur an das arithmetische oder geometrische Mittel des direkten und harmonischen Mittelwertes halten können. Aber da es ja auch freistände, statt von $a:b$, von $b:a$ als direktem Verhältnis auszugehen, so würde nicht nur hierdurch eine Zweideutigkeit bleiben, sondern auch bei Wahl des arithmetischen Mittels wieder die Frage entstehen, ob man das direkte oder harmonische vorziehen sollte, also die Zweideutigkeit auch von dieser Seite nicht gehoben sein. Nach einem Beweise aber, den ich Prof. Scheibner[1]) verdanke, fällt der geometrische Mittelwert gegebener Verhältnisse in dem bei K.-G. in der Regel stattfindenden Falle,

---

1) [Vergl. W. Scheibner: »Über Mittelwerte«, Berichte der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1873. S. 564. — Nach den dort gegebenen Bestimmungen ist das geometrische Mittel angenähert gleich:

$$A\left(1-\frac{q^2}{2A^2}\right),$$

das harmonische Mittel gleich:

$$A\left(1-\frac{q^2}{A^2}\right),$$

wenn A das arithmetische Mittel und q den mittleren quadratischen Fehler bedeutet; woraus der obige Satz folgt.]

dass das direkte und harmonische arithmetische Mittel sich wenig unterscheiden, merklich genau mit dem arithmetischen Mittel beider zusammen, und man kann dies an selbst gemachten Beispielen leicht bestätigt finden.

§ 149. Schließlich also dürfte es sich nur um die Frage, wiefern das summarische oder geometrische Mittel vorzuziehen, handeln.

Nun empfiehlt sich das summarische Mittel vor allem durch die Leichtigkeit seiner Bestimmung, da es dazu nur der Summierung aller a, sowie aller b und der Division der einen Summe durch die andere bedarf, indes es zur Gewinnung des geometrischen Mittels gilt, erst alle a und b in Logarithmen zu übersetzen. Beide haben aber folgenden prinzipiellen Unterschied in der Bedeutung.

Sei ein summarisches Mittel:

$$\frac{a' + a'' + a''' + \cdots}{b' + b'' + b''' + \cdots}$$

gegeben, so leuchtet ein, dass wenn etwa ein Exemplar nach seinen beiden in das Verhältnis eingehenden Komponenten a' und b' sehr groß gegen die übrigen wäre, das Mittelverhältnis merklich bloß noch von dem Verhältnis $a' : b'$ abhängen würde, indem dann $a'' + a''' + \cdots$ gegen a' und $b'' + b''' + \cdots$ gegen b' verschwinden, und dass überhaupt die größeren Exemplare nach Maßgabe ihrer Größe auch mehr Einfluss auf das Mittel gewinnen. Dies ist nun ganz in der Ordnung, wenn man größeren Exemplaren mehr Gewicht für die Mittelbestimmung beilegt als kleineren, was unter Umständen sehr wohl der Fall sein kann, und jedenfalls hindert nichts in dem summarischen Mittel, was diesen Umstand mitführt, so gut ein charakteristisches Verhältnis des gegebenen K.-G. zu sehen, als in jedem anderen Mittelverhältnis, was ihn nicht mitführt, indem es den Gegenstand nur eben in anderem Sinne charakterisiert.

Hingegen kann es freilich auch in der Absicht liegen, große und kleine Exemplare mit gleicher Wichtigkeit zur Mittelbestimmung beitragen zu lassen, z. B. das Verhältnis zwischen horizontaler und vertikaler Dimension bei größeren Köpfen nicht wichtiger zu nehmen als bei kleineren, und dieser doch wohl häufiger vorkommenden Absicht entspricht das geometrische Mittel.

Den dem arithmetischen und prozentischen Mittel abgehenden Vorteil, dass, wenn von drei Verhältnissen $a:b$, $b:c$, $a:c$ zwei im Mittel bestimmt sind, das Mittel des dritten unmittelbar daraus folgt, teilt das summarische Mittel mit dem geometrischen, indem man nach beiden hat:

$$M\left[\frac{a}{c}\right] = M\left[\frac{a}{b}\right] \cdot M\left[\frac{b}{c}\right]. \tag{5}$$

Hingegen hat das summarische Mittel folgenden Vorteil vor dem geometrischen voraus. Gesetzt, man hat bei einem mehrgliedrigen Gegenstande, z. B. Getreidehalmen gegebener Art, für jedes Glied insbesondere das mittlere Verhältnis seiner Länge zur Totallänge des Halmes summarisch bestimmt, so braucht man diese Verhältnisse nur für irgend welche zwei Glieder zu addieren, um damit das mittlere Verhältnis der Verbindung dieser zwei Glieder zur Totallänge zu haben, was beim geometrischen Verfahren nicht der Fall ist, wie man leicht beweist; was man kurz so ausdrücken kann: die Verhältnismittelbestimmungen für die Teile und das Ganze hängen nach dem summarischen Verfahren rationeller zusammen als nach dem geometrischen und überhaupt jedem anderen.

Außerdem ist folgender Fall zu berücksichtigen. Setzen wir, bei einem K.-G. kommen unter anderen Exemplare vor, für welche der eine oder andere von beiden Werten a oder b Null ist; wie denn z. B. bei Bestimmung des mittleren Verhältnisses zwischen den Gewichten der festen und weichen Teile verschiedener Tiere manchen feste Teile ganz abgehen können. In diesem Falle wird das geometrische Mittel unbrauchbar, weil, je nachdem der Nullwert im Zähler oder Nenner auftritt, das Mittel Null oder unendlich wird. Dann kann man sich doch nur an das summarische Mittel halten, wenn man nicht das Prinzip aufstellen will, dass solche Fälle überhaupt nicht mit solchen, wo a und b überall endliche Werte behalten, unter demselben Mittel zu vereinigen sind.

§ 150. Da jedenfalls der vorliegende Gegenstand durch das summarische und geometrische Verhältnis der Komponenten a und b, welche in seine Bestimmung eingehen, in verschiedener Weise bestimmt ist, so wird, allgemein gesprochen, zur Vollständigkeit seiner

Bestimmung gehören, dass man beiderlei Mittel bestimmt, was nicht hindert, nach Maßgabe der Umstände doch lieber von dem einen vor dem anderen Gebrauch zu machen[1]. Es hat aber die Bestimmung von beiden außer dem allgemeinen Beitrag zur Charakteristik eines gegebenen K.-G., dessen Komponenten a und b sind, noch den Vorteil, dass mit dem Verhältnisse beider Mittel nicht unwichtige spezielle charakteristische Bestimmungen zusammengehören, nämlich folgende:

1) Wenn das Verhältnis von a zu b unabhängig von der absoluten Größe der a und b für alle Exemplare gleich ist, also für große Exemplare ebenso groß als für kleine, ist das summarische Mittel gleich dem geometrischen.

2) Wenn a mit b immer zugleich wächst oder abnimmt, aber nicht allgemein im gleichen Verhältnisse, so kann es sein, dass das Verhältnis $a:b$ mit wachsender Größe von a und b zunimmt, oder dass es abnimmt; ersteres ist der Fall, wenn das geometrische Mittel der $a:b$ kleiner ist als das summarische, letzteres, wenn es größer ist.

3) Wenn die verhältnismäßige Schwankung der Werte a um ihr arithmetisches Mittel A gleich der verhältnismäßigen Schwankung der Werte b um ihr arithmetisches Mittel B ist, so ist das geometrische Mittel gleich dem summarischen. Als Maß der verhältnismäßigen Schwankung gilt hierbei bez. A die einfache oder quadratische mittlere Abweichung von A, dividiert durch A, nämlich $\varepsilon_\alpha : A$ oder $q_\alpha : A$, sagen wir kurz P; entsprechend $\varepsilon_\beta : B$ oder $q_\beta : B$, kurz Q, bezüglich B.

4) Je nachdem die verhältnismäßige Schwankung der Werte, im vorigen Sinne verstanden, stärker um A oder um B ist, ist das geometrische Mittel kleiner oder größer als das summarische.

5) Aus Kombination von 1) und 2) mit 3) und 4) folgt dann

---

1) So gut man zwei oder mehrere K.-G. nach dem Verhältnisse ihrer Mittel A und G vergleichen kann, kann man sie natürlich auch nach dem Verhältnisse ihrer C und D vergleichen, und es geben sich diese sämtlichen Resultate keineswegs allgemein proportional; doch gehe ich auf allgemeine Erörterungen hierüber nicht näher ein. — Beispielsweise war bei 237 deutschen Männerschädeln das mittlere Verhältnis (Hor. : Vertik.) des Vertikalumfanges der Schädelkapsel zum Horizontalumfang summarisch 1,2830; geometrisch 1,2827; zentral 1,2837.

weiter noch, dass, je nachdem die verhältnismäßige Schwankung um A gleich der um B, größer oder kleiner ist, der Wert $a:b$ unabhängig von dem absoluten Werte der a und b konstant ist oder mit wachsender Größe von a und b zunimmt oder abnimmt [vorausgesetzt, dass überhaupt der Wert $a:b$ ein reguläres Verhalten zeigt und bloß zwischen Konstanz, ständiger Zunahme und ständiger Abnahme eine Entscheidung zulässt].

Hiernach also kann man aus dem Verhältnisse des geometrischen zum summarischen Mittel, ohne eine weitere Rechnung anzustellen, unmittelbar Schlüsse ziehen, ob mit wachsender Größe eines Gegenstandes und hiermit seiner Komponenten a und b das Verhältnis $a:b$ überall (oder doch vorwiegend) wächst oder abnimmt, und ob die eine oder andere Komponente a, b in stärkerem Verhältnisse um ihr arithmetisches Mittel schwankt.

Folgendes zum Beweis für vorstehende Sätze. Den ersten anlangend, so seien das summarische und geometrische Mittel:

$$\frac{a' + a'' + \cdots}{b' + b'' + \cdots} \quad \text{und} \quad \sqrt[m]{\frac{a'\,a''\cdots}{b'\,b''\cdots}}$$

einander gegenübergestellt. Nun beweist CAUCHY in seinem cours d'analyse p. 15 und 447, dass

$$\frac{a' + a'' + \cdots}{b' + b'' + \cdots}$$

allgemein zwischen $a':b'$, $a'':b''$, ... fällt. Sind nun $a':b'$, $a'':b''$, ... sämtlich gleich $a:b$, so wird das Zwischenfallen zur Gleichheit mit $a:b$, während nicht minder das geometrische Mittel sich für den Fall der Gleichheit zwischen $a':b'$, $a'':b''$, ... auf $a:b$ reduziert. Nach Maßgabe aber als die Gleichheit zwischen den einzelnen Werten $a:b$ aufhört, hört auch, allgemein gesprochen, die Gleichheit zwischen beiden Mitteln auf, und es kann nun sein, dass $a:b$ mit Änderung der absoluten Größe von a und b teils zunimmt, teils abnimmt, für welchen Fall sich nichts Allgemeines festsetzen lässt. Gesetzt aber, a und b nehmen überall mit einander zugleich zu oder ab, ohne dass es doch überall in gleichem Verhältnisse geschieht, so giebt es für den Satz 2) einen allgemeinen Beweis, den ich Herrn Prof. SCHEIBNER verdanke, der jedoch umständlich und nicht elementar ist, daher ich hier vorziehe, auf die empirische Bewährung der Regel durch beliebige, selbst gemachte Beispiele zu verweisen. Und natürlich wird die Regel auch für den Fall noch gelten, wenn nur a und b in der Überzahl der Fälle mit einander zugleich zu- oder abnehmen. Den dritten und vierten Satz anlangend, so sind sie eine Folgerung des von SCHEIBNER[1]) gegebenen Verhältnisses zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel der einfachen Werte. Hiernach hat man unter Setzung von P und Q als $q_\alpha : A$ und $q_\beta : B$:

$$\left.\begin{array}{c} G[a] = A\left(1 - \tfrac{1}{2}P^2\right); \quad G[b] = B\left(1 - \tfrac{1}{2}Q^2\right) \\ G\left[\dfrac{a}{b}\right] = \dfrac{G[a]}{G[b]} = \dfrac{A\left(1 - \frac{1}{2}P^2\right)}{B\left(1 - \frac{1}{2}Q^2\right)}, \end{array}\right\} \qquad (6)$$

woraus die Sätze 3) und 4) folgen. Sind nun schon die betreffenden Formeln nur approximative, so wird doch durch die weggelassenen kleinen Glieder die Richtung der Resultate nicht geändert. Der Satz 5) folgt aus den vorgängigen.

§ 151. Bei der oben (§ 148) angegebenen Bestimmungsweise des $G[a:b]$ dient die Anwendung der Logarithmen bloß zur Erleichterung der Rechnung; aber das Bedürfnis ihrer Anwendung greift tiefer.

Es entsteht nämlich die Frage, ob ebenso wie die einzelnen Dimensionen a und b, auch ihre Verhältnisse $a:b$ sich unseren Verteilungsgesetzen fügen; eine Untersuchung, bei der dann allerdings der Rückgang auf die einzelnen $a:b$ nicht erspart werden kann, von vornherein aber nach den bisher gemachten Bemerkungen einleuchtet, dass man von einer arithmetischen Behandlung derselben nichts erwarten kann; wogegen Aussicht war, dass nach Aufsuchung des dichtesten Wertes der $\log(a:b)$ die Abweichungen der einzelnen $\log(a:b)$ von demselben sich unseren Verteilungsgesetzen fügen könnten, was sich bei den zur Untersuchung geeigneten K.-G. bestätigt gefunden hat.

---

1) [»Über Mittelwerte« a. a. O.]

[Um dies durch ein Beispiel zu illustrieren, wähle ich das Verhältnis des Horizontalumfanges zum Vertikalumfange (genauer Scheitelbogen) der 500 europäischen Männerschädel, die mir von Prof. Welcker zur Verfügung gestellt sind. Da der horizontale Umfang durchweg größer ist als der vertikale — der kleinste Horizontalumfang (für einen Kleinrussen) ist 465 mm; der größte Scheitelbogen (für einen Schädel aus der Umgegend von Halle) ist 448 mm — so sind die Verhältnisse sämtlich unechte Brüche und ihre Logarithmen positiv. Das Minimum der Verhältniswerte ist gleich 1,211, das Maximum gleich 1,403. Die logarithmischen Werte variieren somit zwischen den Grenzen 0,083 und 0,147; sie besitzen den Mittelwert $\mathfrak{G}_1 = 0,1073$, so dass das geometrische Mittel G_1 der Verhältnisse gleich 1,280 ist. Wählt man nun als logarithmisches Intervall $i = 0,003$ und als untere Grenze des ersten Intervalles den Wert 0,0825, so erhält man folgende Vergleichstabelle zwischen den empirischen und den durch das logarithmische Verteilungsgesetz geforderten theoretischen Werten:

Verhältnis des Horizontalumfanges *a* zum Vertikalumfange (Scheitelbogen) *b* für 500 europäische Männerschädel.

$\alpha = \log a - \log b$; $i = 0{,}003$; $m = 500$; $\mathfrak{G}_1 = 0{,}1073$; $G_1 = 1{,}280$.

α	z empir.	z theor.
—	—	1
0,084	1	2
0,087	4	5
0,090	12	10
0,093	17	19
0,096	29	32
0,099	47	46
0,102	64	58,5
0,105	64	65
0,108	67	64
0,111	61	58
0,114	45	47
0,117	36	36
0,120	28	24,5
0,123	11	15
0,126	7	9
0,129	3	4,5
0,132	2	3
0,135	1	0,5
0,138	0	—
0,141	0	—
0,144	0	—
0,147	1	—
Summe	500	500

$\mathfrak{G}_2 = 0{,}1073$ $\quad G_2 = 1{,}280$
$\mathfrak{C} = 0{,}1070$ $\quad C = 1{,}279$
$\mathfrak{D}_i = 0{,}1068$ $\quad \mathfrak{T}_i = 1{,}279$
$\mathfrak{D}_p = 0{,}1060$ $\quad \mathfrak{T}_p = 1{,}276$
$e' = 0{,}0079$
$e_, = 0{,}0066$
$m' = 272{,}5$
$m_, = 227{,}5$
$h' = 71{,}42$
$h_, = 85{,}48$.

Hierzu ist zu bemerken, dass $\mathfrak{D}_i$ nicht den aus der obigen Tabelle direkt ableitbaren, empirisch dichtesten Wert darstellt (der vielmehr gleich 0,1075 ist), sondern das Mittel der drei aus den drei möglichen Reduktionslagen berechneten Werte: 0,1075; 0,1085; 0,1043.

Diese Bestimmungsweise wurde gewählt, weil hier zufällig die Reduktionslage von großem Einflusse auf die Lage von $\mathfrak{D}_i$ ist, während $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{C}$ fast vollständig mit den aus der primären Tafel resultierenden Werten übereinstimmen. Die Asymmetrie ist schwach; wie denn auch

$$p = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{D}_p}{\mathfrak{G} - \mathfrak{D}_p} = 0{,}77$$

nahe mit $\frac{1}{4}\pi = 0{,}785$ übereinstimmt. Die Übereinstimmung zwischen den empirischen und theoretischen z-Werten aber ist ohne Zweifel befriedigend.]

XXIII. Abhängigkeitsverhältnisse.

§ 152. Man kann fragen, ob die Mitteltemperaturen der aufeinanderfolgenden Jahre nach reinem Zufallsgesetze variieren oder eine gewisse Abhängigkeit in ihrer Aufeinanderfolge von einander zeigen; eine Frage, die auf viele analoge Fälle übertragen werden kann. Nun können die Abhängigkeitsverhältnisse verschieden, und die Untersuchungen darauf demgemäß verschieden zu führen sein. Eine der einfachsten Fragen und Untersuchungswege aber knüpft sich an folgende Bemerkung.

Ich nehme eine Liste gezogener Lotterienummern. Eine solche beginnt beispielsweise mit:

$$\begin{array}{ll} 26\,826 & \\ & - \\ 21\,460 & \\ & + \\ 31\,094 & \\ & - \\ 22\,120 & \\ & - \\ 16\,226 & \\ & (+) \end{array}$$

Ich bezeichne, wie beistehend, jede Abnahme von einer zur folgenden Nummer mit —, jede Zunahme mit + und erhalte so ohne Rückgreifen auf die erste Nummer folgende Reihe: — + — — und hiervon ohne Rückgreifen auf das erste Vorzeichen zwei Zeichenwechsel und eine Folge gleicher Zeichen; oder wenn ich sowohl mit Zahl als Zeichen zurückgreife: — + — — + und hierin vier Wechsel und eine Folge; allgemein, wenn ich die Zahl der Nummern m und die Zahl der Wechsel und Folgen z nenne, erstenfalls $z = m - 2$, letzterenfalls $z = m$. Ersteres heiße Methode a, letzteres Methode b.

Mag ich nun die Methode a oder b anwenden, so finde ich bei großem m die Zahl der Zeichenwechsel so approximativ gleich dem

Doppelten der Zahl der Zeichenfolgen, dass ich die W. der einen zur W. der anderen wie 2 : 1 annehmen kann [1]). Dies das Gesetz des reinen Zufalls.

Sollte aber eine Abhängigkeit der aufeinander folgenden Zahlen der Art stattfinden, dass sie in continuo durch ein gewisses Intervall stiegen und wieder sänken, so würde die Zahl der Zeichenfolgen sich über das vorige Verhältnis hinaus vergrößern. Ja, wenn die Abhängigkeit immer in derselben Richtung fortginge, so würde man nach Methode a lauter Zeichenfolgen, nach Methode b $m - 2$ Folgen, 2 Wechsel erhalten.

Bleiben wir bei Methode a stehen und nennen die Zahl der Wechsel w, die der Folgen f, so wird die volle Unabhängigkeit durch $f = \frac{1}{3}z$, die volle Abhängigkeit durch $f = z$ und die partielle Abhängigkeit durch Werte von f zwischen diesen charakterisiert, und man wird ein Maß der partiellen Abhängigkeit bei gegebenem f und z in dem Verhältnisse finden können, in welchem der Überschuss von f über das Maß der vollen Unabhängigkeit zum Totalüberschuss der vollen Abhängigkeit über die volle Unabhängigkeit steht, d. i. wenn wir dieses Maß mit Abh. bezeichnen:

$$\text{Abh.} = \frac{3f - z}{2z}. \tag{1}$$

Inzwischen ist f wegen des endlichen m unsicher, und von dieser Unsicherheit ist Abh. mit beteiligt. Die Bestimmung dieser Unsicherheit

---

1) [Theoretisch leitet man dieses Verhältnis aus der Bemerkung ab, dass drei Werte a, b, c, die frei von Successionsabhängigkeit sind, mit der nämlichen Wahrscheinlichkeit in jeder der sechs Successionen:

$$\begin{array}{c} a,\ b,\ c, \\ c,\ b,\ a, \\ b,\ a,\ c, \\ c,\ a,\ b, \\ a,\ c,\ b, \\ b,\ c,\ a \end{array}$$

auftreten können, so dass, wenn z. B. $a < b < c$, die beiden ersten Successionen je eine Zeichenfolge, die vier letzten je einen Zeichenwechsel ergeben, und mithin die W. einer Zeichenfolge gleich $\frac{1}{3}$, die W. eines Zeichenwechsels gleich $\frac{2}{3}$ zu setzen ist.]

ist in den Wert von Abh. als wahrscheinlicher Fehler mit aufzunehmen.

[Man leistet diese Bestimmung durch Berechnung der wahrscheinlichen Grenzen, die sich aus der Umkehrung des sog. BERNOULLIschen Theorems für die W. einer Zeichenfolge auf Grund der beobachteten Werte von f und z ergeben. Setzt man nämlich die unbekannte W. für das Auftreten einer Zeichenfolge gleich x, die W. eines Zeichenwechsels gleich $1 - x$, so besteht dem angeführten Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung[1]) zufolge die W.:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c \exp\left[-t^2\right] dt \tag{2}$$

dafür, dass der Wert von x zwischen den Grenzen:

$$\frac{f}{z} - c\sqrt{\frac{2f \cdot w}{z^3}} \quad \text{und} \quad \frac{f}{z} + c\sqrt{\frac{2f \cdot w}{z^3}} \tag{2a}$$

liege. Da nun für $W = \frac{1}{2}$ der Wert von $c = 0{,}476\,94$ wird, so sind die wahrscheinlichen Grenzen von x gleich:

$$\frac{f}{z} \pm 0{,}674\,49\sqrt{\frac{f \cdot w}{z^3}}\,. \tag{3}$$

Dem entsprechend sind die wahrscheinlichen Grenzen von Abh. gleich:

$$\frac{3f - z}{2z} \pm \frac{3}{2} \cdot 0{,}67\,449\sqrt{\frac{f \cdot w}{z^3}}\,. \tag{4}$$

Es ist somit 1 gegen 1 zu wetten, dass das wie oben definierte Maß der Abhängigkeit nicht kleiner als die untere und nicht größer als die obere der beiden angegebenen Grenzen sei.]

[Dasselbe kann auch negative Werte annehmen und so eine Abhängigkeit anzeigen, die sich durch vorwiegenden — im extremen Falle durch ständigen — Wechsel der Zeichen kund giebt. Hierzu ist erforderlich, dass die Anzahl f der Zeichenfolgen unter den Wert $\frac{1}{3}z$ sinke und im Grenzfalle gleich 0 werde.]

---

1) [Vergl. MEYER's Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung Kap. VII.]

§ 153. [Die Anwendung des Abhängigkeitsmaßes (4) zur Prüfung der Successionsabhängigkeit meteorologischer Monats- und Tageswerte führt zu folgenden Resultaten.]

[Dove stellt in einer seiner Abhandlungen[1]) für eine Reihe von Orten die »Abweichungen der einzelnen Monate vom vieljährigen mittleren Werte derselben« zusammen. Für Berlin umfasst diese Zusammenstellung den Zeitraum von 1719 bis 1849 mit dem Ausfalle von bloß 3 bis 7 Jahren für die einzelnen Monate. Hieraus ergeben sich für alle Monate zusammen genommen nach Methode a 1421 Successionen von Zeichen, und zwar 913 Zeichenwechsel und 508 Zeichenfolgen. Die W. x einer Zeichenfolge hat somit die wahrscheinlichen Grenzen:

$$\frac{508}{1421} \pm 0{,}67449 \sqrt{\frac{508 \cdot 913}{1421^3}} \text{ oder } 0{,}3575 \pm 0{,}0086\,;$$

woraus man

$$\text{Abh.} = 0{,}036 \pm 0{,}013$$

erhält.]

[Im Niederländischen Jahrbuche für Meteorologie[2]) findet man Tabellen der täglichen Thermometer- und Barometerabweichungen von dem aus langjähriger Beobachtung gefundenen täglichen Normalstande, für die einzelnen Monate des Jahres. Die Beobachtungsorte sind die verschiedenen meteorologischen Stationen des Landes; die Beobachtungszeiten sind bestimmte Stunden des Tages, auf welche sich sowohl der Normalstand als auch die Abweichungswerte beziehen. Hierdurch wird dem gesetzmäßigen Steigen oder Fallen des Thermometers und Barometers innerhalb eines Monats Rechnung getragen, so dass die Successionsabhängigkeit nicht davon beeinflusst wird. Ich wählte die für Utrecht im Monat Januar während des 10-jährigen Zeitraumes von 1884 bis 1893, mittags 2 Uhr, angegebenen Werte. Dieselben ergaben nach Methode a 298 Successionen von Zeichen.

---

1) [Bericht über die in den Jahren 1848 und 1849 auf den Stationen des meteorologischen Instituts angestellten Beobachtungen. Berlin 1851. S. XX flgd.]

2) [Meteorologisch Jaarboek, uitgegeven door het Kon. Nederlandsch Meteorologisch Instituut. »Thermo- en Barometer-afwijkingen«.]

Darunter waren für die Thermometerabweichungen 129 Zeichenfolgen und 169 Zeichenwechsel, für die Barometerabweichungen 153 Zeichenfolgen und 145 Zeichenwechsel. Sonach findet man für erstere die wahrscheinlichen Grenzen der W. einer Zeichenfolge gleich:

$$0{,}433 \pm 0{,}019$$

und:

$$\text{Abh.} = 0{,}149 \pm 0{,}029\,;$$

für letztere dagegen als wahrscheinliche Grenzen der W. einer Zeichenfolge:

$$0{,}513 \pm 0{,}020$$

und:

$$\text{Abh.} = 0{,}270 \pm 0{,}029\,.$$

Demgemäß besitzen die täglichen Thermometer- und Barometerabweichungen eine entschiedene Successionsabhängigkeit, während dieselbe für die monatlichen Temperaturabweichungen — wie schon in § 20 bemerkt wurde — mit wenig Entschiedenheit hervortritt.]

[Die täglichen Regenhöhen sind dagegen — nach einer Bemerkung in § 21 — frei von wesentlicher Successionsabhängigkeit. In der That ergeben die im XXI. Kapitel als Beispiel für die logarithmische Behandlung gewählten Regenhöhen des Monats Januar für Genf von 1845—1892 unter 475 Successionen von Zeichen 165 Folgen gleicher Zeichen. Dabei sind sämtliche 477 Werte ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge nach in eine Reihe vereinigt, und die Successionen gleicher Werte abwechselnd den Zunahmen und den Abnahmen beigerechnet worden. Somit findet sich:

$$\text{Abh.} = 0{,}022 \pm 0{,}022\,.$$

Von diesem Werte unterscheidet sich nicht wesentlich das Maß der Abhängigkeit für die Urliste der Rekrutenmaße, deren Successionsabhängigkeit von vornherein als unwesentlich aufzufassen ist, da nicht einzusehen ist, wie bei den Rekrutenmessungen des Aushebungsgeschäftes eine wesentliche Abhängigkeit in der Reihenfolge der Maße soll entstehen können. Für die Reihe der 360 Studentenrekrutenmaße, die in Kap. XX zur Bewährung der Extremgesetze dienten, resultieren nämlich 125 Zeichenfolgen und 233 Zeichenwechsel, wonach

$$\text{Abh.} = 0{,}023 \pm 0{,}025$$

wird. In beiden Fällen schließen die Grenzwerte des Abhängigkeitsmaßes den Wert 0 des idealen Falles voller Unabhängigkeit ein.]

§ 154. [Ein anderer Weg zur Untersuchung der Successionsabhängigkeit wurde in § 20 zugleich mit dem bisher erörterten bezeichnet. Er gründet sich auf die Bemerkung, dass bei voller Unabhängigkeit und ohne Störung durch unausgeglichene Zufälligkeiten die Anzahl der Folgen von je zwei oberhalb oder je zwei unterhalb der Wertmitte C gelegenen Maßwerten gleich sei der Anzahl der Wechsel zwischen je zwei oberhalb und unterhalb C gelegenen Werten. Werden nämlich die Werte oberhalb C durch $+$, die Werte unterhalb C durch $-$ bezeichnet, so ist die W. eines positiven Wertes ebenso groß wie die W. eines negativen; es ist daher auch bei voller Unabhängigkeit jede der vier möglichen Successionen: $++$; $--$; $+-$; $-+$ gleich wahrscheinlich. Die beiden ersten ergeben aber je eine Zeichenfolge, die beiden letzten je einen Zeichenwechsel, so dass sowohl für eine Zeichenfolge als auch für einen Zeichenwechsel die W. $\frac{1}{2}$ besteht. Findet man nun für eine in dieser Weise behandelte Reihe von Werten f Zeichenfolgen und w Zeichenwechsel bei einer hinreichend großen Anzahl von $z = f + w$ Successionen von Zeichen, so können ebenso wie oben die wahrscheinlichen Grenzen für die unbekannte W. x einer Zeichenfolge aus der Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems gleich:

$$\frac{f}{z} \pm 0{,}674\,49 \sqrt{\frac{f \cdot w}{z^3}}$$

gefunden werden. Hier wird sich der Wert $f:z$ bei stattfindender partieller Successionsabhängigkeit, die sich als Häufung der Folgen im Vergleiche zu den Wechseln zu erkennen giebt, zwischen dem Werte $\frac{1}{2}$, der für volle Unabhängigkeit gilt, und dem Werte 1, der für $f = z$ volle Abhängigkeit anzeigt, halten. Man kann daher wiederum in dem Verhältnisse des Überschusses der partiellen Abhängigkeit über die volle Unabhängigkeit, d. i. des berechneten x über $\frac{1}{2}$, zu dem Totalüberschusse der vollen Abhängigkeit über die volle Unabhängigkeit, d. i. von 1 über $\frac{1}{2}$, ein Maß der Abhängigkeit gewinnen und

$$\text{Abh.} = \frac{x - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2x - 1\,, \tag{5}$$

oder, wenn für x die wahrscheinlichen Grenzwerte genommen werden,

$$\text{Abh.} = \frac{2f - z}{z} \pm 2 \cdot 0{,}67449 \cdot \sqrt{\frac{f \cdot w}{z^3}} = \frac{f - w}{z} \pm 1{,}34898 \sqrt{\frac{f \cdot w}{z^3}} \tag{6}$$

setzen. Auch dieses Maß der Abhängigkeit behält für negative Werte seine Bedeutung, indem es alsdann das Überwiegen der W. eines Zeichenwechsels über die W. einer Zeichenfolge anzeigt.]

[Als Beispiel für diese Abhängigkeitsbestimmung diene einesteils die Reihe der Monatsabweichungen für Berlin, anderenteils die Reihe der Rekrutenmaße, deren Successionsabhängigkeiten nach Formel (4) bereits berechnet wurden, so dass zugleich ein Vergleich zwischen beiden Weisen der Bestimmung möglich wird.]

[Bezüglich der Monatsabweichungen ist zunächst für jeden Monat die Wertmitte C zu bestimmen. Dieselbe fällt für einige Monate unterhalb, für die Mehrzahl der Monate oberhalb des jeweiligen vieljährigen Mittels. Es kann indessen — was die Anwendung dieser Methode sehr erleichtert — sehr wohl der Mittelwert selbst als Wertmitte angenommen werden, so dass die positiven und negativen Abweichungswerte zugleich als + Werte und — Werte im Sinne unserer Methode gelten dürfen. Denn die 12 Monate ergeben, zusammengenommen, nach Bestimmung der Zentralwerte 768 Zeichenfolgen und 665 Zeichenwechsel; bei direkter Bezugnahme auf die Mittelwerte dagegen finden sich 769 Zeichenfolgen und 664 Zeichenwechsel, was keinen wesentlichen Unterschied für das Abhängigkeitsmaß mit sich führt. Aus ersteren Bestimmungen resultieren als wahrscheinliche Grenzen für die W. einer Zeichenfolge die Werte:

$$0{,}536 \pm 0{,}009;$$

aus letzteren die Werte:

$$0{,}537 \pm 0{,}009;$$

und im ersteren Falle wird:

$$\text{Abh.} = 0{,}072 \pm 0{,}018$$

im letzteren Falle:

$$\text{Abh.} = 0{,}073 \pm 0{,}018 \, .$$

Das Abhängigkeitsmaß (6) führt somit hier zu größeren Werten als das Abhängigkeitsmaß (4).]

[Der Zentralwert C der 360 Rekrutenmaße findet sich gleich 71,75. Hiernach ergeben sich unter 359 Successionen von Zeichen 165 Zeichenfolgen und 194 Zeichenwechsel. Die wahrscheinlichen Grenzen für die W. einer Reihenfolge sind daher:

$$0{,}460 \pm 0{,}018$$

und:

$$\text{Abh.} = -0{,}081 \pm 0{,}035 \, .$$

Man erhält demnach in diesem Falle einen relativ kleineren Wert als nach Formel (4); derselbe weicht jedoch in stärkerem Maße von dem idealen Werte 0 ab.]

§ 155. [Das Abhängigkeitsmaß (6) kann auch der Bestimmung der wechselweisen Abhängigkeit von je zwei Dimensionen eines mehrdimensionalen K.-G. oder von Dimensionen verschiedener, aber zeitlich zusammengehöriger K.-G. dienstbar gemacht werden. Zu diesem Zwecke bezeichne man das Wachsen von jeder der beiden verglichenen Dimensionen durch $+$, das Abnehmen durch $-$, so dass eine Reihe von m Paaren zusammengehöriger Werte durch $m-1$ Zeichenpaare $++$, $--$, $+-$, $-+$ charakterisiert wird. Unter letzteren werden sich bei voller Unabhängigkeit der beiden Dimensionen von einander und ohne Hinzutreten unausgeglichener Zufälligkeiten ebensoviele Zeichenfolgen als Zeichenwechsel befinden, da die W. für jede der vier Arten von Zeichenpaaren gleich groß anzunehmen ist. Es ist daher, wenn unter z Beobachtungen f Folgen und w Wechsel auftreten, die W. einer Zeichenfolge nach Formel (3) zu berechnen und das Abhängigkeitsmaß nach Formel (6) zu bestimmen.]

So besteht beispielsweise zwischen der Größe des Horizontalumfanges und des vertikalen Scheitelbogens der 500 europäischen Männerschädel, die im vorigen Kapitel der Behandlung von Verhältnissen zwischen Dimensionen als Beispiel dienten, eine Abhängigkeit, die sich nach der angegebenen Methode wie folgt bestimmen lässt. Die 500 Schädelmasse sind in der Urliste in 34 Gruppen von 6 bis 30 Schädel zusammengefasst (die beiden ersten enthalten 20 Breisgauer und 15 Schwaben; die beiden letzten 6 Serben und 22 Großrussen); in jeder Gruppe aber sind die Maße nach wachsendem Horizontalumfange geordnet. Ich zählte nun für jede Gruppe die Anzahl der Zeichenfolgen und Zeichenwechsel ab, die sich für den Gang der beiden verglichenen Werte ergeben, wobei die Fälle, in denen ein Stillstand in der Veränderung einer der beiden Größen eintrat, zur Hälfte den Folgen und zur Hälfte den Wechseln beigezählt wurden. Hiernach fanden sich 273 Zeichenfolgen und 193 Zeichenwechsel unter 466 Zeichenpaaren, so dass sich:

$$\text{Abh.} = \frac{273 - 193}{466} \pm 1{,}3490 \sqrt{\frac{273 \cdot 193}{466^3}} = 0{,}172 \pm 0{,}031$$

ergab.]

[Ein zweites Beispiel entnehme ich den von Prof. WELCKER in der Abhandlung[1]): »die Kapazität und die drei Hauptdurchmesser der Schädelkapsel« mitgeteilten Maßen des Innenraumes I und der Länge L, Breite B und Höhe H von 101 Schädeln verschiedener Völkerschaften, um insbesondere die Abhängigkeit des WELCKERschen »Schädelmodulus« $L+B+H$ und des Produktes $L \cdot B \cdot H$ vom zugehörigen Innenraume zu berechnen. Werden die einzelnen, nach zunehmendem Innenraume geordneten Schädelgruppen, deren Anzahl 15 ist, hier ebenso behandelt wie bezüglich der Gruppen der Horizontal- oder Vertikalmaße angegeben wurde, so resultieren sowohl für $L+B+H$ und I als auch für $L.\ B.\ H$ und I 59,5 Zeichenfolgen gegenüber 26,5 Zeichenwechsel unter 86 Zeichenpaaren. Es ist somit sowohl für die Abhängigkeit der Summe als des Produktes der drei Hauptdurchmesser vom Innenraume:

$$\text{Abh.} = \frac{59{,}5 - 26{,}5}{86} \pm 1{,}3490 \sqrt{\frac{59{,}5 \cdot 26{,}5}{86^3}} = 0{,}384 \pm 0{,}067$$

zu setzen. Es lassen sich denn auch, wie Prof. WELCKER in der

1) [Archiv für Anthropologie, Band XVI, Heft 1 u. 2. S. 72 flgd.]

genannten Abhandlung zeigt, sowohl den Werten von $L + B + H$ als denjenigen von $L \cdot B \cdot H$ durchschnittliche Innenraumswerte tabellarisch zuordnen, die es gestatten, auf Grund des gemessenen Wertes der Summe oder des Produktes der drei Hauptdurchmesser den zugehörigen Innenraum des Schädels angenähert zu ermitteln.]

[Eine Verschärfung dieser Abhängigkeitsbestimmung wird erzielt, wenn die Größe des Wachstums oder der Abnahme für die verglichenen Dimensionen berücksichtigt wird. Dies kann durch Bestimmung des Gewichtes der beobachteten Zeichenfolgen und Zeichenwechsel in folgender Weise geschehen. Man erteile einem Zeichenpaare das Gewicht 1, wenn jede Dimension um die Maßeinheit zunimmt oder abnimmt, und setze sonach das Gewicht jedes Zeichenpaares gleich dem Produkte der beiden Größen, um welche jede der beiden Dimensionen zunimmt oder abnimmt. Auf diese Weise erhält man an Stelle der zuletzt angegebenen Abhängigkeitsbestimmung zwischen der Summe und dem Produkte der drei Hauptdurchmesser und dem Innenraume des Schädels für $L + B + H$ und I:

$$\text{Abh.} = 0{,}8436 \pm 0{,}0012$$

für $L \cdot B \cdot H$ und I:

$$\text{Abh.} = 0{,}8387 \pm 0{,}0008$$

indem erstenfalls für f und w die Werte 45641 und 3871; zweitenfalls die Werte 99886 und 8763 eintreten. Wie zu erwarten, ist das Maß der Abhängigkeit erheblich größer geworden, ohne dass ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Abhängigkeitsverhältnisse von $L + B + H$ und I und demjenigen von $L \cdot B \cdot H$ uud I sich bemerkbar macht. Wenn daher — wie die Welcker'schen Ausführungen zeigen — das Produkt der drei Durchmesser ein empfindlicheres Maß für den Innenraum liefert als ihre Summe, so muss bemerkt werden, dass unsere Methode, wenigstens bei der relativ geringen Anzahl von 101 Schädeln, eine solche Unterscheidung nicht gestattet. Da ferner diese Abhängigkeitsbestimmung durch die absolute Größe der verglichenen Dimensionen nicht beeinflusst wird, sondern nur auf deren Zunahme und Abnahme beruht, so kann sie auch keinen zahlen-mäßigen Beleg dafür geben, dass — wie gleichfalls die Welcker'sche Abhandlung lehrt — die tabellarische Zuordnung von Innenraumswerten zu der Summe der drei Hauptdurchmesser wesentlich genauer wird, wenn der sogenannte Breitenindex des Schädels, d. i. das Verhältnis zwischen seiner Breite und seiner Länge, Berücksichtigung findet und dementsprechend die Schädel von dolichocephaler, mesocephaler und brachycephaler Form gesondert behandelt werden. Zu diesem Zwecke müssten die Verhältnisse zwischen der Summe der drei Durchmesser einerseits und dem Innenraume andererseits unter Berücksichtigung des Breitenindex einer kollektiven Behandlung unterworfen werden.}

Zweiter Teil.

Specielle Untersuchungen.

XXIV. Über den räumlichen und zeitlichen Zusammenhang der Variationen der Rekrutengröfse.

§ 156. Die Feldfrüchte bringen es je nach Beschaffenheit der Jahrgänge nicht nur zu einem verschiedenen Ertrage, sondern wachsen auch in verschiedenen Jahren bis zu einer verschiedenen Höhe heran, was hauptsächlich von Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnissen der verschiedenen Jahrgänge abhängt. Insofern diese Verhältnisse größeren Landstrecken gemeinsam zukommen, macht sich auch ihr Einfluss auf das Wachstum der Feldfrüchte im Zusammenhange für alle Teile solcher Strecken geltend; ändert sich aber von Strecke zu Strecke, so wie sich diese Verhältnisse dafür ändern.

Es fragt sich, ob für die Größe der in gleichen Jahrgängen geborenen Menschen etwas Entsprechendes stattfindet, ob auch sie sich nach Beschaffenheit der Jahrgänge in gewissem Zusammenhange für zusammenhängende Landstriche ändert, ja vielleicht gar im Zusammenhange mit der der Pflanzen ändert. Nun lässt sich freilich kaum ein entsprechender direkter Einfluss von Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnissen auf das Wachstum der Menschen wie auf das der Pflanzen voraussetzen; auch wachsen die Menschen nicht wie die Feldfrüchte in jedem Jahre vom Keim aus neu heran, noch schließen sie ihr Dasein in demselben Jahre ab, so dass man dabei nur auf die Verhältnisse eines Jahres zu achten hätte; aber es wäre doch denkbar, dass die Fruchtbarkeit eines Jahres, indem sie die Ernährungsverhältnisse der Eltern zur Zeit der Erzeugung des Kindes oder während der Schwangerschaft, oder des Kindes selbst während der Wachstumszeit, insbesondere der ersten, beeinflusste, auch einen indirekten Einfluss auf das Wachstum des Kindes äußerte, und insofern wirklich Wachstum der Pflanzen und Menschen sich im Zusammenhange änderten. Es hängen aber die Ernährungsverhältnisse der Menschen in einem Lande nicht bloß von der Fruchtbarkeit der Jahre ab; auch Kriegs- und Friedenszustand, Stand der Industrie und des Handels haben darauf Einfluss, und nicht bloß Ernährungsverhältnisse können in Betracht kommen; auch alles, was die körperliche und geistige Kraft und Gesundheit der Eltern zur Zeit der Erzeugung des Kindes und bei der Schwangerschaft über ein gewisses Land im Zusammenhange betrifft, vielleicht sogar epidemische und selbst kosmische Einflüsse. Kurz, man ist nicht in Verlegenheit, mögliche Ursachen zu finden, dass sich die Durchschnittsgröße der in demselben Jahre geborenen Menschen über größere Raumstrecken im Zusammenhange so gut als die der Pflanzen, sei es mit oder ohne Beziehung zu dieser, ändert. Nur fragt sich vor allem, ob die Thatsache eines solchen Zusammenhanges über größere oder geringere Landstrecken nachweisbar ist; und die folgende Untersuchung wird beweisen, dass es der Fall ist. Abgesehen hiervon wird sich die folgende Untersuchung mit der Frage beschäftigen, ob die Einflüsse, welche auf die Größenänderung wirken, auch einen zeitlichen Zusammenhang der Art verraten, dass statt unregelmäßig, im Sinne unausgeglichener Zufälligkeiten, wechselnden Steigens und Fallens der Größenmaße im Verlaufe der Jahrgänge immer mehrere Jahrgänge nach einander geneigt sind, zu steigen, und wieder mehrere, zu fallen. Für die zwanzig Jahrgänge sächsischer Studentenrekruten wird sich nichts der Art nachweisen lassen, hingegen ergiebt sich ein um so entschiedeneres Resultat für Jahrgänge belgischer Rekruten.

Außer den beiden vorigen Fragen habe ich auch noch die Frage untersucht, ob sich zwischen den hauptsächlichsten Fruchtpreisen, welche um die Geburtszeit der Rekruten stattgefunden haben, und der durchschnittlichen Größe der aus dieser Zeit hervorgegangenen Rekruten eine Beziehung entdecken ließe, und ich habe diese Untersuchung in Reclam's hygienistischer Zeitschrift »Gesundheit« (1876) mitgeteilt [1]); da sie jedoch zu einem wesentlich

1) [Untersuchung über den räumlichen und zeitlichen Zusammenhang in der Verschiedenheit der Menschengröße; IV. Abschnitt: Über die Frage, inwiefern

negativen Resultate geführt hat, so komme ich folgends nicht darauf zurück.

Zur Untersuchung über die hier zu behandelnden Fragen aber vereinigen jedenfalls **Rekrutenmaße** mehrere der günstigsten Bedingungen; man möchte sagen, sie sind wie gemacht dazu; sind auch das einzige Material, was bis jetzt zu einer solchen Untersuchung zu Gebote steht. Einmal sind die Rekrutenmaße jedes Jahrganges von Personen genommen, die auch in demselben Jahre, 20, 19 oder 18 Jahre rückwärts, je nach Verschiedenheit der Länder, geboren sind. Zweitens erstrecken sich die Rekrutenmessungen über alle kultivierten Länder durch längere Epochen, sind spezifiziert nach ganzen Ländern, Landesteilen, Distrikten, Städten, gewähren also Gelegenheit, die Wirkung allgemeinerer und speziellerer Einflüsse in größerem Maßstabe vergleichungsweise zu untersuchen. Drittens ist die Zahl der Einzelmaße, selbst nur für einen mäßigen Distrikt, um so mehr für eine ganze Provinz oder ein ganzes Land, in jedem Jahrgange schon sehr groß, wodurch bemerktermaßen die Kompensation eines Nachteiles entsteht, der sonst freilich sehr bedenklich erscheinen müsste, dass sie nämlich im einzelnen sehr ungenau sind.

Meinerseits ist die ganze Untersuchung in Beziehung auf vorige Fragen nur auf Grund des sehr beschränkten Materiales, was mir in den sächsischen und belgischen Maßen vorlag, geführt worden, was teils darin seinen Grund hatte, dass ich anderes brauchbares Material nicht vorfand, teils dass diese Untersuchung überhaupt bloß als Nebenuntersuchung geführt worden. Denn für Sachsen hätte ich mir wohl noch Urlisten für andere Landesteile und spätere Jahrgänge nachträglich verschaffen können; aber schon die Durcharbeitung des bisher benutzten Materiales war zeit- und gedulderschöpfend. Eine allgemeinere Untersuchung über die hier behandelten Fragen kann überhaupt nur Sache statistischer Institute sein, denen mit einem ausgedehnten Materiale hinreichende mechanische Rechenkräfte zu Gebote stehen, welche in der That durch derartige Untersuchungen außerordentlich in Anspruch genommen werden. Bei alledem

---

die Größenbewegung der Rekruten mit der Bewegung der Fruchtpreise um die Geburtszeit zusammenhängt. »Gesundheit«, 1. Jahrgang, S. 54 flgd.]

dürfte die folgende Untersuchung, so weit sie hat geführt werden können, das doppelte Interesse behalten, einmal dass sie Wege bezeichnet und erörtert, auf denen eine solche Untersuchung überhaupt zu führen, zweitens in den doch bemerkenswerten Resultaten, die sich damit für beschränkte Räume und Epochen erhalten ließen, eine Einladung für andere enthält, der Untersuchung weitere Folge zu geben.

Bei diesen Vorteilen, welche die Rekrutenmaße als Unterlage für Untersuchungen dieser Art überall darbieten *könnten*, ist nur zu bedauern, wie schon früher berührt worden, dass sie in den statistischen Werken, wo man die Data darüber zu suchen hätte, im allgemeinen in keiner dazu geeigneten Form dargeboten sind. Jahresmittelwerte A finden sich teils gar nicht, teils nicht in hinreichender Ausdehnung oder Folge, Spezialisierung, Schärfe gezogen, und die Maßlisten, so weit ich solche kenne, nirgends so aufgestellt, dass sich solche mit Genauigkeit daraus ziehen ließen, ihre Ziehung aus Urlisten aber erfordert eine mühselige Arbeit, und die Beschaffung der Urlisten selbst steht nicht überall zu Gebote.

§ 157. Hiernach zur allgemeinen Bezeichnung der Methode der Untersuchung.

Nennen wir überhaupt die Anderung einer Größe von einem Jahrgange zum anderen *Bewegung* der Größe und sprechen von einem *Parallelismus* der Bewegung zweier Größen, z. B. der Jahresmittel der Rekrutenmaße in zwei benachbarten Landesteilen, wenn die beiderseitigen Bewegungen dieselbe Richtung in Abnahme oder Zunahme haben, ohne dazu zu verlangen, wie es in mathematischer Bedeutung des Wortes Parallelismus gefordert wäre, dass die Änderung beider verglichenen Größen auch gleich groß sei oder einander proportional gehe; genug, wenn sie sich nur in der Richtung korrespondiert. Ein Fall des Parallelismus werde mit $||$, ein Fall des Nichtparallelismus oder, wie wir sagen wollen, Antiparallelismus mit $\times$ bezeichnet; die Zahl der $||$ unter einer gegebenen Zahl z verglichener Bewegungsfälle mit p, die der $\times$ mit q. Sollte keine Abhängigkeit beider Größen von einander oder von einer gemeinsamen Ursache stattfinden, so würde im Verfolg durch eine größere Reihe von Jahren und mithin von Bewegungsfällen die || mit den × gleichgültig wechseln, und die Zahl beider einander nahe, d. i. bis auf unausgeglichene Zufälligkeiten, gleich sein müssen. Sollten alle Fälle parallel ausfallen, so hätte man zu schließen, dass eine Ursache oder eine Zusammensetzung mehrerer Ursachen, welche auf die Bewegung der beiden Größen einwirkt, alle in entgegengesetztem Sinne einwirkenden stetig überwiegt. Sollte nur ein erhebliches Übergewicht der || über die × stattfinden, so würde man nach Maßgabe des größeren Übergewichtes es auch wahrscheinlicher finden können, dass ein gemeinsamer Einfluss in betreffender Hinsicht zwar stattfinde, der aber doch mitunter einem Uberwiegen entgegengesetzter Einflüsse Raum gebe. Sollten endlich die × ausschließlich oder sehr überwiegend vorkommen, so würde dies nicht eine Unabhängigkeit beider Größen von einander beweisen, sondern dass derselbe Einfluss, der zur Vergrößerung der einen Größe wirkt, zur Verminderung der anderen wirkt.

Außer dem Parallelismus und Antiparallelismus im angegebenen Sinne, wobei die Größe der Bewegungen nicht beachtet wird, kann man nun aber auch noch diese Größe in Rücksicht ziehen, indem die W. einer Abhängigkeit oder eines gemeinsamen Einflusses sich erheblich verstärkt, wenn es vorzugsweise die starken Bewegungen sind, bei welchen sich der Parallelismus oder (bei Wirkungsgegensatz) Antiparallelismus ausnahmslos oder weit überwiegend zeigt; indes man bei schwächeren Bewegungen dem Einflusse unausgeglichener Zufälligkeiten Rechnung zu tragen hat, und es ist daher in Fällen, wo eine größere Reihe von Jahrgängen vorliegt (wie in Tab. III, siehe § 160) zweckmäßig, nachdem man erst die Bewegungen nach der Folge der Jahrgänge aufgeführt hat, um zu sehen, ob sich nicht das Verhältnis der || und × im Laufe der Zeit auffällig ändert, sie auch noch einmal nach Ordnung der Bewegungsgröße, der einen oder anderen Größe, aufzuführen, wo sich dann die zur Voraussetzung des gemeinsamen Einflusses zutreffenden Fälle vorzugsweise auf Seiten der größeren, die nicht zutreffenden und gleichgültig wechselnden auf Seiten der kleineren Bewegungen zusammenfinden müssen, soll ein solcher Einfluss annehmbar sein.

Hierbei fragt sich, ob das Gewicht, was man einem Falle von $||$ oder $\times$ beizulegen hat, der Summe oder dem Produkte der darein eingehenden Bewegungsgrößen proportional zu nehmen ist. Unstreitig dem Produkte, weil, wenn die eine beider Bewegungen, die in einen Fall eingehen, null ist, das Gewicht des Falles, als unentschieden zwischen $||$ und $\times$, null sein muss, und weil Parallelismus zwischen positiven Bewegungen dem zwischen negativen Bewegungen gleich gilt, was nur durch das Produkt beider Bewegungen zu erzielen.

Dies vorausgeschickt, wird man ein noch sichereres Urteil als nach der bloßen Zahl der $||$ und $\times$ durch folgende Berücksichtigung der Gewichte gewinnen. Man nehme die Bewegungsprodukte der zusammengehörigen Größen sowohl für die $||$ als $\times$ besonders, nenne die Summe der ersten P, die der zweiten Q, und urteile nun, statt nach dem Verhältnisse oder verhältnismäßigen Unterschiede von p zu q, nach dem von P zu Q. Wenn ein gemeinsamer Einfluss annehmbar sein soll, so muss nicht nur überhaupt ein bedeutendes verhältnismäßiges Übergewicht des einen von beiden Werten P, Q über den anderen stattfinden, sondern auch der verhältnismäßige Unterschied von p zu q darin übertroffen werden, kurz $(P-Q):(P+Q)$ dem absoluten Werte nach größer als $(p-q):(p+q)$ sein, weil bei letzterem Verhältnisse das größere Gewicht der starken Fälle zu Gunsten des Einflusses nicht mit in Rücksicht kommt. Es ist also in jedem Falle nützlich, sowohl p und q als P und Q zu bestimmen, um, wenn der aus dem Verhalten der ersten zu ziehende Schluss sich nicht durch das Verhalten der zweiten noch verstärkt, den gemeinsamen Einfluss für zweifelhaft zu halten.

Die Sicherheit des Schlusses wächst überhaupt einerseits mit der Zahl der Bewegungsfälle z, andererseits der Größe der verhältnismäßigen Unterschiede

$$\frac{p-q}{p+q}; \quad \frac{P-Q}{P+Q}.$$

Aus gar zu kleinem z oder gar zu geringen relativen Überschüssen lässt sich überhaupt kein beachtenswertes Ergebnis ziehen; je mehr sich beide vergrößern, und in je stärkerem Verhältnisse sich der zweite über den ersten vergrößert, desto näher kommt die W. eines

Einflusses der Gewissheit, und es würde unstreitig nichts hindern, genauere Wahrscheinlichkeitsbestimmungen in dieser Hinsicht vorzunehmen, worauf ich jedoch hier nicht eingehen will[1]).

§ 158. Die Bewegung der Maße dürfte an jedem der Hauptwerte A, C, D verfolgt werden können, die leichteste Bestimmung aber den praktischen Ausschlag geben; und in dieser Hinsicht C um so mehr im Vorteil sein, als es auch noch aus Rekrutenmaßtafeln gewinnbar ist, in welchen nach dem so gewöhnlichen Fehler zur Vorzahl und Nachzahl nicht auch die Vorsumme und Nachsumme angegeben ist. Will man sich aber die Bildung einer Verteilungstafel ganz ersparen, so empfiehlt sich folgendes Verfahren. Man zähle die Zahl der Maße ab, welche kleiner, und die, welche größer sind als ein ein- für allemal bestimmtes Maß oder kleines Maßintervall, nenne die Zahl der ersten k, die der anderen g und urteile nun nach dem Parallelismus oder Antiparallelismus des Verhältnisses $g:k$ oder $g:m$. Bei den belgischen Maßen habe ich das Intervall 1618 bis 1643 mm dafür angenommen, wo dann g die Zahl der Maße bedeutet, welche größer als die obere, und k die Zahl derer, welche kleiner als die untere Grenze dieses Intervalles sind; und die folgende Untersuchung wird lehren, dass das Urteil hiernach mit dem Urteile nach C wohl stimmt, indem ich bei den belgischen Maßen $g:k$ und $g:m$ zum Teil vergleichungsweise mit C angewandt habe. Da mir jedoch bei den sächsischen Maßen vollständige primäre Tafeln zu Gebote standen, aus denen sich genaue arithmetische Mittel A_1 ziehen ließen, so habe ich mich hierbei an diese gehalten.

Da die Werte A_1, A_2, C, $g:k$, $g:m$ sich nicht genau proportional ändern, so würden allerdings bei kleinem m und schwacher Bewegung Unterschiede je nach dem vergleichsweisen Verfolg der Änderungen des einen oder anderen dieser Werte eintreten können; aber für größeres m und stärkere Bewegung, welche überhaupt nur ein durchschlagendes Resultat geben können, wird der Parallelismus, wo ein solcher wesentlich besteht, nicht gestört werden können. Dies ließ sich für A_1 (primär),

1) [Vergl. hierzu § 155. Es ist nur nötig, den Parallelismus als Zeichenfolge, den Antiparallelismus als Zeichenwechsel zu deuten, um einen direkten Anschluss an die dortigen Bestimmungen zu gewinnen.]

A_2 (reduziert) und C (reduziert) durch einen Vergleich in dieser Hinsicht nach den zwanzig Jahrgängen der Studentenrekrutentafel feststellen.

Über den räumlichen Zusammenhang der Variationen der Rekrutengröße.

§ 159. An sich nun liegt nichts Auffälliges darin, dass die mittleren Rekrutengrößen an demselben Orte variieren; denn wer kann bei der Menge zufälliger Umstände, von welchen das Größenwachstum der einzelnen Menschen abhängt, erwarten, dass die Verschiedenheiten darin sich durch die Mittelziehung zu ganz denselben Werten ein Jahr wie das andere ausgleichen. Allerdings aber kann auffällig erscheinen, dass die Schwankungen der mittleren Rekrutengröße zwischen verschiedenen Jahren groß genug sind, um den mit der Rekrutenmessung Betrauten auch ohne Mittelziehung spürbar zu werden. So sagte man mir auf dem Leipziger Quartieramte, von dem ich Listen für die Leipziger Rekruten einholte, dass man von guten und schlechten Jahrgängen in dieser Hinsicht spreche, und ein höherer österreichischer Offizier, welcher lange Jahre den Rekrutenmessungen vorgestanden, erklärte, als man ihm von meinen, in dieser Hinsicht gemachten Bemerkungen sprach: Daran könne gar nicht gezweifelt werden, dass die Rekrutengröße sich nach Jahrgängen ändere. Mir selbst war nämlich aufgefallen, als ich behufs meiner allgemeinen Untersuchung arithmetische Mittel aus den 17 Jahrgängen der Leipziger Stadtmaße zog, dass der letzte Jahrgang 1862 das Maximum, der vorletzte 1861 das Minimum aller 17 Jahrgänge gab, und der Unterschied 1,17 Zoll erschien mir durch seine Größe so merkwürdig, dass ich ihm näher auf den Grund zu kommen suchte. Hiervon hat die ganze folgende Untersuchung den Ausgang genommen.

Zunächst nämlich entstand der Verdacht, dass der große Unterschied auf einem konstanten Messungsfehler von entgegengesetzter Richtung in beiden Jahren beruhe. Dann ließ sich nicht erwarten, dass er sich bei anderswo als in Leipzig gestellten und gemessenen Rekruten entsprechend wiederfinde. Ich verschaffte mir also die Urlisten der Maße für die drei letzten Jahrgänge der ganzen Amtshauptmannschaft Borna, brachte sie in Verteilungstafeln und zog die Mittel A nicht nur für die verschiedenen Jahrgänge, sondern auch verschiedenen Abteilungen der Amtshauptmannschaft Borna, und es fand sich das überraschende Resultat, dass ausnahmslos in allen die Mittelmaße der Jahre 1860 und 1861 nahe übereinstimmten, das Mittelmaß von 1862 aber erheblich größer war, dass also in der ganzen Amtshauptmannschaft eine parallele Änderung der mittleren Rekrutengröße im Laufe jener Jahre stattgefunden. Dies wird durch folgende Tabelle belegt, wobei zu bemerken, dass unter dem Ausdrucke Gerichtsamt im allgemeinen Dorfschaften und kleine Flecken begriffen sind. Von den Zeichen || und $\times$, welche für den Vergleich zweier Örtlichkeiten bestimmt sind, ist hier noch nicht Gebrauch gemacht, weil es mehrere auf einmal zu vergleichen gilt.

I. Mittelwerte A für 20jährige sächsische Rekruten in den verschiedenen Teilen der Amtshauptmannschaft Borna in den Jahren 1860, 1861, 1862.
(Gesamtes $m = 4736$; $\mathfrak{E} = 1$ sächs. Zoll $= 23,6$ mm.)

	A			m		
	1860	1861	1862	1860	1861	1862
1) Stadt Leipzig	69,17	69,06	70,23	616	560	603
2) Gerichtsamt Leipzig I und II	68,85	68,74	69,85	363	326	418
3) Stadt und Gerichtsamt Borna	69,39	69,34	70,01	161	169	185
4) Gerichtsamt Rötha	69,20	69,12	70,11	79	48	61
5) Stadt und Gerichtsamt Pegau und Zwickau	69,45	69,10	69,79	157	199	186
6) Stadt und Gerichtsamt Taucha und Markranstädt	68,74	68,93	69,94	109	90	91
7) Studenten	71,47	71,05	71,89	96	111	108
Gesamte Amtshauptmannschaft	69,26	69,17	70,15	1581	1503	1652

Die unten stehenden A der gesamten Amtshauptmannschaft sind nicht die Mittel der A der einzelnen Distrikte, sondern aus dem gesamten m aller im Zusammenhange, also nicht singulär, sondern summarisch (vergl. § 79) bestimmt.

Man sieht aus dieser Tabelle, dass selbst die Bewegung in den so wenig unterschiedenen Jahren 1860 und 1861 in allen Gebietsteilen der Amtshauptmannschaft Borna, ausgenommen Nr. 6, parallel geht, indem das A von 1861 sonst überall kleiner als das von 1860 ist; jene Ausnahme aber kann bei dem kleinen m von Nr. 6 nicht befremden. Vielmehr gestehe ich, mich bei dem überall nicht großen m und kleinen Unterschiede beider Jahre durch den in allen übrigen Gebietsteilen vorhandenen Parallelismus überrascht zu finden, da man ihn unter solchen Bedingungen den unausgeglichenen Zufälligkeiten gegenüber weder überall erwarten kann, noch wiederfindet.

Die Leipziger, unter denen bemerktermaßen die Studenten nicht mitgezählt sind, und die Studenten verdienen in vorstehender Tabelle insofern eine besondere Beachtung, als erstere zu einem großen Teile, letztere selbstverständlich aus den verschiedensten Teilen Sachsens stammen. Wenn also der beobachtete große Unterschied zwischen 1862 und den beiden vorhergehenden Jahren nicht in einem Messungsfehler gesucht werden konnte, so musste er überhaupt ein allgemeineres Phänomen sein.

Um eine Untersuchung hierüber auf einen Teil Sachsens zu richten, der von dem bisher untersuchten möglichst verschieden sei, verschaffte ich mir die Rekrutenmaßlisten derselben drei Jahre, welche vorhin untersucht wurden, von der Amtshauptmannschaft Annaberg. In der That sind die Verhältnisse der Annaberger Amtshauptmannschaft von denen der Borna'schen sehr verschieden. Diese liegt am nördlichen, jene am südlichen Ende Sachsens, diese enthält ebenes Land mit einer großen Stadt und verhältnismäßig guten Nahrungsquellen, jene gebirgiges Terrain bloß mit kleinen Städten und Dorfschaften und einer verhältnismäßig armen Bevölkerung. Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle enthalten.

II. Mittelwerte A der Maße in der Amtshauptmannschaft Annaberg in den Jahren 1860, 1861, 1862.

(Gesamtes $m = 3067$; $\mathcal{E} = 1$ Zoll.)

	A			m		
	1860	1861	1862	1860	1861	1862
Städte	68,85	69,04	69,25	369	359	454
Dorfschaften	68,99	68,87	69,04	638	565	682
Gesamte Amtshauptmannschaft . .	68,94	68,94	69,12	1007	924	1136

Vergleicht man nun zuvörderst die Größenbewegung für die gesamte A.-H. Annaberg mit der für die gesamte A.-H. Borna nach den Schluss-Resultaten der Tabellen I und II, so findet man, 1) dass für Annaberg 1860 und 1861 nicht oder nur bei Berücksichtigung dritter Dezimalen um einen unwesentlichen negativen Bruchteil, hiergegen 1861 und 1862 viel erheblicher, d. i. um + 0,18, sich unterscheiden, 2) dass diese Bewegungen mit denen der Borna'schen A.-H. wirklich parallel gehen; also in beider Hinsicht ein gemeinsamer Einfluss sich verrät. Nur ist der Einfluss für die A.-H. Annaberg viel geringer oder mehr durch Einflüsse entgegengesetzter Art aufgewogen als für die A.-H. Borna, wo die entsprechenden Bewegungen — 0,09 und + 0,98 waren. Doch ist + 0,18 immer noch doppelt so groß, als der aus den Datis berechenbare wahrscheinliche Unterschied ± 0,09 [1]). Auch zwischen Städten und Dorfschaften der A.-H. Annaberg findet sich der Parallelismus in den Jahren 1861 und 1862 wieder, und nur in den Jahren 1860 und 1861, auf die mit Sicherheit überhaupt nicht zu rechnen, fehlt er hier.

Insoweit sich nun aus vorigen, noch sehr beschränkten Daten überhaupt ein Schluss ziehen lässt, würde es der sein, dass sich in den betreffenden Jahren zwar ein sehr allgemeiner Einfluss gleicher Richtung auf die Größenbewegung über ganz Sachsen erstreckt hat, der aber durch lokale Gegenwirkungen in der A.-H. Annaberg nur in stark vermindertem Grade hat zur Geltung kommen können. Und dass überhaupt in der A.-H. Annaberg andere Bedingungen der Größenentwicklung stattfinden als in der A.-H. Borna, ergiebt sich direkt daraus, dass auch die Mittelmaße in jener absolut kleiner sind, als sie sich in dieser gefunden haben.

§ 160. Nachdem die Frage des Parallelismus im Vorigen bloß durch Folgen von je drei Jahren verfolgt war, hatte es unstreitig ein Interesse, sie durch eine längere Reihe von Jahren zu verfolgen, wobei sich die Behauptung zu bewähren hatte, dass der Parallelismus vorzugsweise bei den größeren Bewegungen zu suchen. In dieser

1) Derselbe wurde gefunden, indem sowohl für 1861 als für 1862 der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung des A berechnet und aus der Summe ihrer Quadrate die Quadratwurzel gezogen wurde.

Beziehung haben mir von sächsischen Maßen zum Vergleiche nur die Leipziger Stadtmaße mit den darin nicht eingehenden Studentenmaßen von 1846—1862 zu Gebote gestanden; und ich gebe in folgender Tabelle das Ergebnis des Vergleiches. Nachdem darin für das erste Jahr der volle Wert des A_1 angegeben ist, sind folgends bloß die Bewegungen jedes Jahres vom je vorhergehenden angegeben. Dabei halte man im Auge, dass das einer Bewegung beistehende Jahr stets das **zweite** von den beiden ist, wozwischen die Bewegung stattfindet. Wenn also z. B. dem Jahre 1849 die Zahl — 0,12 beisteht, so heisst dies, das A_1 des Jahres 1849 war um 0,12 Zoll kleiner, als das des vorhergehenden Jahres 1848.

III. Größenbewegungen von A_1 der Leipziger Stadtmaße und der Studentenmaße von 1846—1862 inkl.

Jahr	Leipziger	Studenten	
1846	69,19	72,07	
1847	+ 0,10	— 0,37	×
1848	+ 0,28	+ 0,40	‖
1849	— 0,12	— 0,79	‖
1850	+ 0,37	+ 0,70	‖
1851	— 0,18	+ 0,55	×
1852	— 0,11	— 1,02	‖
1853	+ 0,52	+ 0,24	‖
1854	— 0,04	+ 0,27	×
1855	— 0,28	+ 0,05	×
1856	+ 0,15	— 0,06	×
1857	— 0,28	— 0,41	‖
1858	+ 0,44	+ 0,24	‖
1859	— 0,89	— 0,96	‖
1860	+ 0,04	+ 0,56	‖
1861	— 0,11	— 0,42	‖
1862	+ 1,17	+ 0,84	‖

$$\frac{p-q}{p+q} = 0{,}375\,; \quad \frac{P-Q}{P+Q} = 0{,}887\,.$$

Man sieht nun zuvörderst im allgemeinen, dass die parallelen Fälle die antiparallelen Fälle bei weitem überwiegen; und stellt man die Tabelle nach der Größenfolge der Maße um, so gehen bei Ordnung nach den Leipziger Maßen die ersten sechs Bewegungen ausnahmslos, nach den Studenten die ersten zehn nur mit Ausnahme von 1851 einander parallel, erst von da wechseln || und $\times$ ziemlich gleichgültig, woraus das große Verhältnis von P zu Q folgt. Dabei ist doch auffällig, dass der stärksten Bewegung bei den Studenten von 1851—52 gleich — 1,02 nur eine sehr unbedeutende, wennschon von gleicher Richtung gleich — 0,11 bei den Leipzigern entspricht. Durch sorgfältige Revision habe ich mich überzeugt, dass dies nicht von einem Rechenversehen meinerseits abhängt. Übrigens ist nicht außer Acht zu lassen, dass das verhältnismäßig geringe m jedes Jahrganges bei den Studenten die Sicherheit der Bestimmung schwächt.

Anstatt wie in voriger Tabelle die Bewegung von einem Jahre zum je nächsten zu verfolgen, kann man sie auch von einem ersten zu einem je späteren verfolgen und die Ergebnisse dafür sehr einfach aus einer Tabelle wie der vorigen ableiten, indem man die Bewegungen durch die betreffenden Jahre algebraisch, d. h. mit Rücksicht auf die Vorzeichen addiert; so erhält man die Bewegungen:

Jahr	Leipziger	Studenten
1846—48	+ 0,38	+ 0,03
1848—50	+ 0,25	— 0,09

u. s. w.

mit sechs p, zwei q. Doch bleiben wir bei der ersten, so zu sagen elementaren Tafel stehen.

Diese Tabelle giebt noch Gelegenheit, zu untersuchen, ob und in welchem Verhältnisse überhaupt die Beweglichkeit größer auf Seite der Leipziger oder Studenten ist, wozu es nur nötig ist, die Summe der Bewegungen jederseits ohne Rücksicht auf das Vorzeichen zu nehmen, was für die Leipziger 5,08, für die Studenten 7,88 giebt; also einen erheblichen Überschuss auf Seiten der Studenten; was unstreitig davon abhängt, dass die Gesamtheit einer Bevölkerung aus allen Ständen viel mannigfaltigeren, zum Teil sich zerstörenden Einflüssen unterliegt als die wohlhabenderen Klassen.

Addiert man andererseits die Bewegungen in + und in — für jede Seite besonders, so erfährt man, wie viel im ganzen auf jeder Seite die Variation der Größe in + und in — betragen hat, was für die Leipziger Stadtmaße + 3,07 und — 2,01 giebt, also ein nicht unerhebliches Wachstum im ganzen, wogegen die Studenten + 3,85 und — 4,03 geben, also fast Gleichgewicht zwischen Zunahme und Abnahme.

Unstreitig hat man zu erwarten, dass in Jahren, welche ein größeres Durchschnittsmaß A geben, auch riesigere Resultate als obere Extreme E' vorkommen, überhaupt A und E' überwiegend parallel gehen. Auch hat sich dies bei Zusammennehmen von je drei oberen Extremen für jeden Jahrgang (um Zufälligkeiten besser zu kompensieren) für Leipziger wie Studenten insbesondere bestätigt; dort bei 16 Bewegungen zwischen 17 Jahrgängen $p = 10{,}5$ [1]); $q = 5{,}5$; $P = 18{,}03$; $Q = 1{,}23$; hier bei 19 Bewegungen zwischen 20 Jahrgängen $p = 11$; $q = 8$; $P = 21{,}33$; $Q = 6{,}84$. Nun sollte man weiter erwarten, dass in Jahren mit größerem A auch das untere Extrem $E_,$ wüchse, d. h. mit wachsendem Durchschnittsmaße auch die kleinsten Rekruten mit wachsen, und auch dies hat sich, nach Zusammennehmen von je drei Minimalmaßen in jedem Jahre, bei den Studenten so gefunden: $p = 14$; $q = 5$; $P = 19{,}73$; $Q = 10{,}99$. Sehr merkwürdig aber lieferten die Leipziger gerade das umgekehrte Resultat: $p = 4{,}5$; $q = 11{,}5$; $P = 3{,}23$; $Q = 22{,}62$, so dass mit steigendem Mittelmaße die kleinsten Rekruten sich im ganzen vielmehr verkleinerten als vergrößerten. Dies mit so großer Entschiedenheit hervortretende Ergebnis erscheint mir merkwürdig, und ich weiß zunächst keine Erklärung dafür zu geben.

Man kann ferner, so wie oben die Beweglichkeit des A für Leipziger und Studenten ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Bewegungen verglichen wurde, diesen Vergleich auch in Bezug auf die Extreme vornehmen. Der Vergleichbarkeit mit den Leipzigern

1) Die 0,5 rührt daher, dass eine Bewegung von Nullgröße zwischen zwei Jahrgängen vorkam, wo dann 0,5 sowohl zu p als zu q zu schlagen ist.

halber nehme ich bei den Studenten wie oben nur auf dieselben 17 Jahrgänge 1846—1862 Rücksicht, welche für die Leipziger gelten, und ziehe zur besseren Ausgleichung der Zufälligkeiten nicht bloß die Bewegung der äußersten Extreme, sondern der Mittel aus je drei äußersten Werten in Betracht. Dies giebt folgende Zusammenstellung:

IV. Bewegungssumme durch 17 Jahrgänge.

	Für d. Mittel aus d. Totalität	Für d. Mittel aus 3 Minim.	Für d. Mittel aus 3 Maxim.
Leipziger	5,08	27,17	14,67
Studenten	7,88	15,17	16,00

Überall also sind die arithmetischen Mittel *A* der Totalität minder beweglich als die bloß als Mittel von je drei äußersten Werten abgeleiteten Extreme, was nicht befremden kann, und wären bloß die alleräußersten Extreme in Betracht gezogen worden, so würde sich die Beweglichkeit noch größer dafür herausgestellt haben.

Außerdem aber kann man wieder den großen Unterschied zwischen Leipziger und Studenten in den Minimis bemerken, während bei den Maximis fast Übereinstimmung zwischen beiden stattfindet. Bei den Studenten ist die Beweglichkeit der Minima ungefähr gleich der der Maxima, bei den Leipzigern fast doppelt so groß. Alles das aber stimmt wohl mit der früher[1]) aufgestellten Annahme zusammen, dass die kleinsten Werte bei den Leipzigern abnorm sind.

§ 161. Näher zugesehen kann der vorwiegende Parallelismus, der sich in Vorigem zwischen Leipzigern und Studenten herausgestellt hat, nicht sowohl einen solchen für verschiedene Landesteile als für einen sehr gemischten und für einen gewissermaßen bevorzugten Teil der sächsischen Bevölkerung beweisen, da bemerktermaßen die Leipziger zu einem großen Teile, die Studenten überhaupt aus allen Teilen des Landes herrühren. Sofern nun das vorher erhaltene Resultat für verschiedene Distrikte Sachsens nur auf sehr beschränkten Raum und sehr beschränkte Zeit sich bezieht, musste eine ausgedehnte Bestätigung nach beider Hinsicht erwünscht sein;

1) [Vergl. § 15 und § 128.]

wozu nun eben die belgischen Maße einen erwünschten Anhalt darboten, die durch einen langen Zeitraum in übereinstimmender Weise nicht nur für das ganze Land, sondern auch für die einzelnen Provinzen (Départements) in den »Documents Statistiques« von Belgien und einem früheren Exposé[1]) tabellarisch verzeichnet sind. Da aber Jahrgänge mit schwacher Bewegung des A oder C für ein ganzes Land überhaupt kein sicheres Vorwiegen des Parallelismus für die einzelnen Landesteile erwarten lassen, so habe ich den Vergleich nur für stärkere Bewegungen, wo sich solche für ganz Belgien finden lassen, angestellt und dazu die Bewegungen zwischen folgenden Jahren und Epochen gewählt:

1) 1852 und 1858;
2) die zwei fünfjährigen Epochen 1851—55; 1856—60;
3) zwei Unterepochen der ersten dieser fünfjährigen Epochen, d. i. 1851—53 und 1854—55.

Was Abteilung 1) anlangt, so liegen 1852 und 1858 zwar auseinander, es hindert aber bemerktermaßen nichts, die Größenbewegung auch zwischen zwei von einander entfernten Jahrgängen zu betrachten; jene Jahrgänge aber sind deshalb gewählt, weil der erste das Maximum, der letzte das Minimum der C und $g:k$ in einer längeren Folge von Jahrgängen enthält, mithin der Parallelismus der Größenbewegung zwischen verschiedenen Landesteilen, wenn ein solcher überhaupt bestand, am wenigsten Gefahr lief, durch unausgeglichene Zufälligkeiten überwogen und versteckt zu werden. — Die Abtl. 2) anlangend, so sind auch diese Epochen darnach unterschieden, dass sich die C, sowie die $g:k$ derselben ziemlich unterscheiden. — Die Abtl. 3) ist eine Spezialisierung der ersten Abtl. von 2).

Zu 1) sind bloß die $g:k$, zu 2) die C und $g:k$, zu 3) die C und $g:m$ bestimmt. Die Bestimmung dieser Werte ist bei 2) und 3) summarisch für die in jede Epoche eingehenden Jahre nach Zusammenfassung der denselben Maßintervallen zugehörigen Maßzahlen, (nicht singulär als Mittel der Bestimmungen aus den einzelnen Jahren) geschehen; dasselbe gilt von dem Schluss-C jeder Epoche,

1) [Exposé de la Situation du Royaume. Bruxelles 1852.]

was in folgenden Tabellen (VI und VII) in der untersten Querspalte (Royaume) steht, bezüglich der einzelnen Provinzen statt Jahre.

Der absolute Wert des C oder $g:k$ ist bloß für das erste der verglichenen Jahre oder Epochen angegeben; für das zweite wieder die Bewegung dazu, so dass z. B. in der ersten der folgenden Tabellen 1,776 | — 0,182 steht für: 1,776 | 1,594.

Parallelismus oder Antiparallelismus zwischen den verschiedenen Provinzen nun findet statt, je nachdem die Vorzeichen der Bewegungen in derselben Vertikalkolumne übereinstimmen oder nicht, wonach man sieht, dass unter den 27 Bewegungen, die in den folgenden drei Tabellen für die neun Provinzen Belgiens verzeichnet sind, eine einzige (Liège in der 3. Tabelle) sich dem Parallelismus entzieht, (ohne dass ich bei Revision der Rechnung einen Irrtum betreffs dieser Ausnahme finden konnte) wonach ein gemeinsamer Einfluss auf die Bewegung durch ganz Belgien unzweifelhaft ist.

Die Größe der parallelen Bewegungen in den verschiedenen Provinzen ist jedoch sehr verschieden und hier und da so gering, um leicht einsehen zu lassen, dass, wenn man die Bewegung zwischen Jahren oder Epochen hätte verfolgen wollen, wo sie für ganz Belgien gering ist, genug antiparallele Fälle für die Provinzen eingetreten sein würden, natürlich also auch, wenn man sie durch alle einzelnen Jahre hinter einander, so wie es bezüglich der Leipziger und Studenten geschehen ist, hätte verfolgen wollen, nur würde immer ein Ubergewicht der parallelen Fälle zu erwarten sein.

Jedenfalls wäre es nicht ohne Interesse, diesen Vergleich wirklich in solcher Weise für die Provinzen Belgiens durchzuführen, wo sich vielleicht manche charakteristische Unterschiede für dieselben ergeben könnten; und die Documents Statistiques bieten dazu das genügende Material; indessen kann ich selbst auf diese, im Grunde sehr einfach auszuführende, doch ins Weite führende Erweiterung der Untersuchung nicht eingehen.

Man kann sich übrigens aus den folgenden Tabellen überzeugen, dass die Beurteilung der Bewegungen nach den $g:k$ oder $g:m$ zu denselben Resultaten führt, als nach den C; kann sich also bei etwaiger Vornahme vorstehender Untersuchung die etwas umständliche Bestimmung des C durch Ersatz mittelst voriger Werte ersparen.

V. Größenbewegung in den einzelnen Provinzen Belgiens von 1852 zu 1858.

	$g:k$		m	
	1852	1858	1852	1858
Anvers	1,776	—0,182	3249	3796
Brabant	1,832	—0,558	5490	6208
Flandr. occ.	1,209	—0,179	5144	5782
Flandr. or.	1,083	—0,074	6525	7307
Hainaut	1,471	—0,330	6133	7377
Liège	1,600	—0,437	3634	4566
Limbourg	2,119	—0,513	1608	1803
Luxembourg	2,293	—0,819	1544	1782
Namur	2,915	—0,832	2257	2666
Royaume	1,539	—0,310	35584	41287

VI. Größenbewegung in den einzelnen Provinzen Belgiens in folgenden zwei Epochen: 1. Epoche: fünf Jahre, 1851—1855; 2. Epoche: fünf Jahre, 1856—1860.

	C		$g:k$		m	
	1. Epoche	2. Epoche	1. Epoche	2. Epoche	1. Epoche	2. Epoche
	mm					
Anvers	1645,8	— 3,6	1,584	—0,097	17368	18382
Brabant	1650,4	— 9,4	1,767	—0,389	29301	30444
Flandr. occ.	1634,7	— 0,2	1,124	—0,005	28169	28471
Flandr. or.	1633,2	— 1,1	1,075	—0,027	34648	35483
Hainaut	1638,1	— 1,8	1,289	—0,081	33063	36204
Liège	1647,6	— 6,9	1,602	—0,259	19842	22206
Limbourg	1656,7	— 6,3	2,021	—0,378	8696	8837
Luxembourg	1658,6	— 9,4	2,167	—0,460	8279	8823
Namur	1662,3	— 5,3	2,344	—0,264	12102	12921
Royaume	1643,1	— 3,7	1,443	—0,140	191468	201771

VII. Größenbewegung in den einzelnen Provinzen Belgiens in folgenden zwei Epochen: 1. Epoche: drei Jahre, 1851—1853; 2. Epoche: zwei Jahre, 1854—1855.

	C		$g:m$		m	
	1851-53	1854-55	1851-53	1854-55	1851-53	1854-55
	mm					
Anvers	1650,6	—10,8	0,538	—0,062	9992	7376
Brabant	1651,3	— 2,1	0,540	—0,013	17268	12033
Flandr. occ. . . .	1635,8	— 2,9	0,454	—0,013	16511	11658
Flandr. or. . . .	1634,9	— 4,0	0,450	—0,022	20419	14229
Hainaut	1639,4	— 3,1	0,472	—0,020	19088	13975
Liège	1646,0	+ 3,6	0,513	+0,021	11277	8565
Limbourg . . .	1658,3	— 3,8	0,586	—0,021	5062	3634
Luxembourg . .	1658,9	— 0,7	0,582	—0,006	4880	3399
Namur	1664,2	— 4,5	0,608	—0,012	7117	4988
Royaume	1644,4	— 3,0	0,505	—0,017	111611	79857

Es wäre nun wohl erwünscht, den Vergleich auch noch über Belgien hinaus, etwa auf Frankreich, ausdehnen zu können; wozu mir aber genügende Unterlagen fehlen. Die »Comptes rendus sur le recrutement de l'armée« geben allerdings für Frankreich Jahresmittelwerte für eine größere Reihe von Jahren, die in einer Schrift von Bischoff[1]) reproduziert sind, jedoch folgenden Übelständen unterliegen, die sie für unsere Zwecke gänzlich unbrauchbar machen: Im größten Teile der Reihe der Jahrgänge sind die Mittel so wenig scharf bestimmt, dass mehrfach zwei bis vier Jahrgänge hinter einander sich gar nicht unterscheiden, und dazwischen springen einzelne Mittel aus der Reihe mit solchen Werten heraus, dass Rechnungsversehen nur zu wahrscheinlich sind.

1) [Über die Brauchbarkeit der in verschiedenen europäischen Staaten veröffentlichten Resultate des Rekrutierungsgeschäftes zur Beurteilung des Entwicklungs- und Gesundheitszustandes ihrer Bevölkerung München 1867 (Verlag der Akademie).]

Uber die Frage nach einem zeitlichen Zusammenhange der Variationen der Rekrutengröße.

§ 162. Wie diese Frage zu verstehen, ist § 156 angegeben. Untersuchen wir sie zunächst in Bezug auf die sächsischen Maße, die uns dazu zu Gebote stehen, d. i. die Leipziger und Studenten. Das allgemeine summarische A der ersten ist 69,61, womit das singuläre übereinstimmt. Bezeichnen wir nun bei jetziger Untersuchung die successiven 17 Jahrgänge von 1846 an mit + oder — je nachdem ihr A über oder unter diesem Mittel steht, so finden wir folgende Vorzeichenreihe:

$$- - - - + + - + + + + - + - - - - +.$$

Bei den Studenten ist das summarische A der zwanzig Jahrgänge 71,76; womit das singuläre ebenfalls übereinstimmt. Und die Folge der Zeichen hiernach:

$$+ - + + - + - + + - + + + + - + - - - +.$$

Nun würden nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung bloßen Zufalles eben so viele Zeichenwechsel als Folgen zu erwarten sein, wie man sich überzeugen kann, wenn man eine Urliste von Rekrutenmaßen vornimmt, in welcher die Maße sich nach Zufall folgen, und die einzelnen Maße ebenso nach der Reihe mit + oder — bezeichnet, je nachdem sie größer oder kleiner als das A_1 der Liste sind[1]). Bei den Leipziger Maßen aber beträgt die Zahl der Zeichenfolgen 9, die der Wechsel 7, bei den Studenten die der Zeichenfolgen 7, die der Wechsel 13. Hieraus ist also kein zeitlicher Zusammenhang zu folgern, denn sollte ein solcher bestehen, so müssten die Zeichenfolgen entschieden überwiegen.

Hiergegen ergiebt sich bei den belgischen Maßen (s. unten Tab. VIII) ein sehr auffälliger Zusammenhang. Das singuläre mittlere C aller 33 Jahrgänge von 1843 bis 1875 inklusive ist 1645,8 mm.

---

1) [Streng genommen müsste der Zentralwert C der obigen Bestimmung unterliegen. Es weichen hier jedoch A und C nicht wesentlich von einander ab.]

Hiergegen sind die gesamten ersten 22 Jahrgänge in minus, die letzten 11 in plus; und sondert man die 33 Jahrgänge in zwei Abteilungen, 16 von 1843 bis 1858 inkl. mit mittl. $C = 1641,3$ und 17 von 1859 bis 1875 mit mittl. $C = 1650,0$, so erhält man in Bezug dazu respektiv folgende Reihen von Zeichen:

$$+ + + + - - - - + + + - + - - - \quad ;$$
$$- - - - - - - - - + + + + + + + + .$$

Noch mehr, es zeigt sich bei den belgischen Maßen nicht bloß eine Neigung, mehrere Jahre hinter einander über und dann wieder unter dem allgemeinen Mittel zu verharren, sondern auch die Neigung, durch eine Reihe von Jahren kontinuierlich zu steigen und dann wieder zu sinken. Wir finden nämlich die Bewegungen in dieser Hinsicht von 1843 bis 1875 sich mit folgenden Vorzeichen folgend:

$$+ + - - - + + + + - - + - - - + - + + + + + - + +$$
$$- + + - + + + .$$

Der Zeichenfolgen (Folgen gleicher Zeichen) sind hier 17, der Zeichenwechsel bloß 14. Nach bloßem Zufalle aber würden hier d o p p e l t s o v i e l Zeichenwechsel als Folgen zu erwarten gewesen sein. (So findet es sich nämlich, wie ich mich überzeugt habe, wenn man die Vorzeichen in entsprechender Weise an den Bewegungen der zufällig aufeinander folgenden Rekrutenmaße der Urlisten bestimmt, oder in Listen von gezogenen Lotterienummern, worin die Zahlen sich nach Zufall folgen, eine solche Bestimmung an den Bewegungen der auf einander folgenden Zahlen vornimmt.)

In Sachsen zeigen die Bewegungen der Rekrutenmaße durch 20 Jahrgänge, sei es an A_1, A_2 oder C verfolgt, 5 Folgen auf 13 Wechsel; also noch mehr Wechsel als erforderlich, um bloß für zufällig zu gelten.

Da sich in Sachsen bei den viel kleineren Maßabteilungen, als für ganz Belgien vorliegen, nichts Entsprechendes von einem zeitlichen Zusammenhange der Variation gezeigt hat, so dürfte dies beweisen, dass jener Zusammenhang überhaupt auf sehr allgemeinen Ursachen beruht, die durch lokale Einflüsse, welche sich über größere

Landesstrecken kompensieren, leicht versteckt werden können; und es liegt nicht nur eine interessante Aufgabe vor, dies weiter auch bei anderen Ländern zu verfolgen, sondern auch zu untersuchen, mit welcher Periodizität von Einflüssen die Periodizität im Menschenwachstum zusammenhängt.

§ 163. Ich gebe nun die Zentralwerte C für die 33 Jahrgänge 1843—1875, welche von mir aus den Originaltabellen abgeleitet sind, sowie die zugehörigen Werte $g:k$, wobei g die Zahl der Maße, welche das Intervall 1618 bis 1643 an Größe übersteigen, k die Zahl derer, welche es nicht erreichen, bedeutet. Bei diesen Bestimmungen war das Total-m aller 33 Jahrgänge (ohne taille inconnue) 1304764; das mittlere m also 39538; das Minimum 35584 im Jahre 1852; das Maximum 41851 im Jahre 1860.

VIII. Zentralwerte C und Werte $g:k$ für 19jährige Rekruten in Belgien von 1843 bis 1875 [1]).

Jahrgang	C	$g:k$	Jahrgang	C	$g:k$
	mm			mm	
1843	1642,1	1,412	1860	1639,5	1,316
1844	1642,3	1,414	1861	1642,0	1,432
1845	1644,6	1,515	1862	1642,6	1,474
1846	1642,3	1,428	1863	1643,1	1,495
1847	1640,8	1,357	1864	1645,1	1,577
1848	1635,1	1,159	1865	1647,6	1,694
1849	1639,6	1,308	1866	1646,2	1,583
1850	1641,0	1,340	1867	1648,7	1,692
1851	1644,1	1,468	1868	1653,8	2,022
1852	1644,7	1,539	1869	1651,27	1,892
1853	1644,3	1,504	1870	1651,33	1,876
1854	1641,2	1,361	1871	1656,6	1,930
1855	1641,5	1,370	1872	1654,2	1,923
1856	1640,3	1,321	1873	1659,2	2,233
1857	1640,2	1,336	1874	1664,4	2,549
1858	1637,4	1,229	1875	1664,5	2,570
1859	1639,8	1,320			

1) Diese Tabelle weicht in den Bestimmungen für die sechs ersten Jahrgänge, welche durch Reduktion 18jähriger Rekruten auf 19jährige entstanden

Man sieht, dass abgesehen von den Jahrgängen 1857 und 1870 der Gang der Werte $g:k$ mit dem der Werte C in Richtung von Abnahme und Zunahme überall parallel geht.

Zu bemerken ist, dass nur die Werte der Jahrgänge von 1849 an nach direkten Messungen 19jähriger Rekruten bestimmt sind, die Werte der sechs ersten, durch einen Strich davon getrennten, Jahrgänge aber durch Reduktion aus Messungen 18jähriger, je ein Jahr vorher ausgehobener Rekruten; so dass z. B. das $C = 1642{,}1$, welches in der Tabelle als für 19jährige Rekruten des Jahres 1843 gültig angegeben ist, aus einem $C = 1632{,}5$ abgeleitet ist, welches direkt aus Maßen von 18jährigen Rekruten im Jahre 1842 erhalten war[1]). Hierzu folgende Erläuterung.

Bis zum Jahre 1847 inkl. wurden bemerktermaßen die Rekruten mit vollen 18 Jahren gemessen, und waren dann natürlich kleiner, als wenn sie ein Jahr später mit 19 Jahren gemessen worden wären. Um sie hierauf zu reduzieren, habe ich das singuläre Mittel der sechs C, sowie $g:k$ der Jahrgänge 18jähriger Rekruten von 1842 bis 1847 inkl. bestimmt und ersteres 1631,6, letzteres 1,033 gefunden; andererseits die entsprechenden Bestimmungen für die 13 Jahrgänge 19jähriger Rekruten von 1849 bis 1861 gesucht und respektiv 1641,2 und 1,373 gefunden, wonach die C der 18jährigen Rekruten mit $1641{,}2 : 1631{,}6 = 1{,}0059$, die $g:k$ mit $1{,}373 : 1{,}033 = 1{,}329$ multipliziert worden sind, um sie darauf zurückzuführen, dass sie ein Jahr später gemessen worden wären.

Dass ich bloß 13 Jahrgänge 19jähriger Rekruten zum Vergleiche mit den sechs Jahrgängen 18jähriger Rekruten behufs Bestimmung des Reduktionsfaktors genommen, während 27 zu Gebote stehen, hatte zunächst den Grund, dass mir zur Zeit der Vornahme dieser

---

sind, etwas von der ab, die ich in RECLAM's Zeitschrift gegeben habe, weil die Reduktion der C in obiger Tabelle ebenso wie der $g:k$ nach singulärer Mittelziehung geschehen ist, indes sie in der Zeitschrift für erstere nach summarischer, nur für letztere nach singulärer Mittelziehung geschehen, was der Vergleichbarkeit einigen Eintrag thut. Prinzipiell muss eben unserenfalls erstere Mittelziehung vorgezogen werden.

1) Die direkt für das C der 18jährigen Rekruten erhaltenen Werte sind nach der Reihe: 1632,5; 1632,7; 1635,0; 1632,6; 1631,2; 1625,5.

Reduktion nicht mehr Jahrgänge zu Gebote standen; ich bin aber dabei stehen geblieben, weil es an sich nicht zweckmäßig sein dürfte, zu entfernte Jahrgänge zur Reduktion zu benutzen.

Sollte die Reduktion nach dem Verhältnisse der sechs obersten C zu den gesamten 27 übrigen geschehen, so würde der wegen Mitzuziehung der zeitlich sehr entfernten großen Werte von C unstreitig zu große Reduktionsfaktor 1646,8 : 1631,6 = 1,0093 sein, und das allgemeine singuläre Mittel aller 33 Werte von C 1646,8 statt 1645,8 betragen.

XXV. Gliederung und Asymmetrie des Roggens
(Secale cereale).

§ 164. Hinsichtlich der Bezeichnungen bemerke ich vorweg, dass ich unter Rispe die Fruchtähre, d. i. den obersten Teil des Halmes, welcher die Körner enthält, verstehen werde, unter erstem, zweitem, drittem Glied u. s. f. die Glieder oder sog. Internodien, in der Ordnung vom obersten abwärts, unter Halm die ganze Länge: Summe der Rispe und der Glieder bis zur Wurzel ohne diese.

Es wurde im Jahre 1863 um den 24. Juli von einem mit Roggen bestandenen Felde auf Leutzscher Pflege bei Leipzig, kurz mit L. zu bezeichnen, eine Garbe zur Ernte reifer Halme mit der Wurzel ausgerissen. Die Mehrzahl davon, 217 an der Zahl, hatten 6 Glieder, 138 bloß 5 Glieder, 10 hingegen 7 Glieder und 6 von ziemlich verkümmertem Aussehen bloß 4 Glieder. Auf die 217 sechsgliedrigen und 138 fünfgliedrigen Halme dieser Pflege, vorzugsweise auf erstere, bezieht sich die folgende Hauptuntersuchung betreffs der Asymmetrieverhältnisse und asymmetrischen Verteilung.

Indes schien es von Interesse, ob sich Ähren von anderen Standorten (um Leipzig) hinsichtlich der Verhältnisse der Gliederung ähnlich wie die von der Leutzscher Pflege verhalten, wozu eine geringere Zahl Halme dienen musste, da die Untersuchung sonst nicht von mir durchführbar gewesen wäre. Es wurden also um dieselbe Zeit kleinere Bündel von Halmen von folgenden Standorten um Leipzig entnommen mit folgendem Gehalt an Halmen. Bei Stünz (St.) 16. Juli: 22 Stück, 20 sechsgliedrige, 2 fünfgliedrige; am Täubchenwege

(Tbch.) 20. Juli: 24 Stück, 4 sechsgliedrige, 20 fünfgliedrige; bei Schönefeld (Sch.) 15. Juli: 22 Stück, 18 sechsgliedrige, 4 fünfgliedrige. Die Halme rührten von einem schon zur Hälfte abgeernteten Felde her.

Von sämtlichen Halmen wurden die Rispe und die einzelnen Glieder bis zur Knotenmitte besonders gemessen, die Totallänge des Halmes (also mit Einschluss der Rispe, aber ohne die Wurzel) nur durch Addition der einzeln gemessenen Längen erhalten, da es praktisch schwer ausführbar ist, den ganzen Halm im Zusammenhange zu messen, nicht allein wegen der oft großen Länge desselben, sondern auch, weil sich oft Glieder in stumpfen Winkeln aneinander setzen. Wonach die Bestimmung des Halmes verhältnismäßig etwas weniger genau als die seiner Abteilungen ist, weil sich die Irrtümer der Einzelmaße bei der Addition zwar teilweise kompensieren, teilweise aber auch addieren. Auch das unterste Glied ist meist nicht genau zu messen, und die Bestimmungen in Bezug darauf sind von viel geringerem Werte als für die anderen Glieder, weil es meist verkrüppelt ist, so dass nur obenhin mit dem Bandmaße darüber hingemessen werden konnte; und ich hätte sogar die Bestimmungen darüber ganz bei Seite gelassen, wenn nicht einerseits eine fühlbare Lücke dadurch im Totalzusammenhange der Bestimmungen entstanden wäre, und sich nicht die obenhin gewonnenen Bestimmungen doch im allgemeinen ganz gut dem Totalzusammenhange eingereiht hätten. Mitunter kann man im Zweifel sein, ob man das unterste Glied nicht viel mehr zur Wurzel als zum Halme zu rechnen habe, indem sich mitunter schon von seinem oberen Knoten Würzelchen abgesenkt zeigen; sofern jedoch von diesem Knoten abwärts noch ein einfaches, wenn auch verkümmertes Internodium bis zur verzweigten Wurzel verläuft, ist dasselbe immer als unterstes Glied des Halmes gerechnet worden. Auch die reife Rispe kann wegen Ausfalls der untersten Körner leicht zu kurz, und das erste ihm nächste Glied dem entsprechend zu lang gemessen werden; doch ließ sich die Länge der Rispe noch nach einem kleinen, besser mit dem Finger fühlbaren, als mit dem Auge erkennbaren Vorsprunge, der sie vom ersten Gliede scheidet, bestimmen. Die Grannen der Rispe sind nicht mit gemessen.

Zur Messung diente ein in Centimeter genau geteiltes[1]), bei den Maßnahmen möglichst gleichförmig gespanntes Bandmaß. Millimeter und mitunter selbst noch halbe Millimeter wurden daran geschätzt. Millimeter selbst am Maßbande anzugeben würde, abgesehen davon, dass das so oft zu wiederholende scharfe Zusehen die Augen zu sehr angegriffen hätte, keinen erheblichen Vorteil gebracht haben, da man Zehnteile eines Centimeters noch genau genug abschätzen kann, nur dass man sich vor der ungleichförmigen Schätzung zu hüten hat, wovon die Rekrutenmaße und Schädelmaße (s. Kap. VII) Beispiele geliefert haben. Alle Abteilungen der Halme aber wurden, nachdem das ganze Bündel gruppenweise durchmessen war, noch einmal gemessen, nicht sowohl um im Mittel beider Messungen noch einen kleinen Vorteil von Genauigkeit zu erlangen, als um gröbere Versehen in der Auffassung und Aufzeichnung durch gegenseitiges Kontrollieren zweier von einander unabhängiger Aufzeichnungen zu erkennen und zu verbessern; Versehen, welche ganz zu vermeiden bei so vielen ermüdenden Maßen und Aufzeichnungen schwerer ist, als man vielleicht meint. Von den beiden Maßen derselben Länge hätte sich dann das Mittel nehmen lassen; ich habe es aber einfachheitshalber vorgezogen, die Summe beider Maße undividiert durch 2 zu lassen, und alle folgenden Angaben beziehen sich auf diese Einrichtung, welche einfach darauf hinauskommt, dass folgends als Einheit der Maße das halbe statt des ganzen Centimeters auftritt.

§ 165. [Auf diesem Wege wurden die primären Tafeln für die Rispe und die einzelnen Glieder des Halmes gewonnen, von welchen Tafel IV in Kap. VII (für das oberste Glied der 217 sechsgliedrigen Halme) ein Beispiel giebt. Aus denselben wurden sodann zunächst die folgenden Tabellen abgeleitet.]

Da die Maßeinheit $\mathscr{E}$ für den Roggen überall $\frac{1}{2}$ cm ist, so unterlasse ich folgends eine besondere Anführung derselben.

---

1) Die käuflichen Bandmaße sind oft ungenau geteilt.

I. Wert von A_1 für Rispe und Glieder je nach verschiedener Gliederzahl und verschiedenem Standort, die Totallänge des Halmes gleich 100 gesetzt.

	7 gliedr.	6 gliedr.			5 gliedr.	
	L. (10)	L. (217)	St. (20)	Sch. (18)	L. (138)	Tbch. (20)
Rispe	5,8	5,9	7,1	5,7	6,5	5,0
1. Glied	27,5	31,4	31,6	33,7	35,4	34,6
2. Glied	23,6	26,1	25,3	28,7	28,5	28,8
3. Glied	15,6	16,3	15,7	15,6	16,0	16,9
4. Glied	12,3	11,8	12,0	10,0	10,2	10,5
5. Glied	9,3	6,7	6,8	5,1	3,4	4,2
6. Glied	5,2	1,8	1,5	1,2	—	—
7. Glied	0,7	—	—	—	—	—
Absolute Werte von A_1 für den ganzen Halm	318,9	275,2	344,7	286,9	261,1	222,1

II. Werte von $\eta : A_1$.

	7 gliedr.	6 gliedr.			5 gliedr.	
	L. (10)	L. (217)	St. (20)	Sch. (18)	L. (138)	Tbch. (20)
Rispe	0,285	0,212	0,234	0,183	0,217	0,184
1. Glied	0,119	0,115	0,116	0,105	0,108	0,101
2. Glied	0,106	0,117	0,114	0,106	0,126	0,101
3. Glied	0,111	0,119	0,168[1])	0,099	0,128	0,144
4. Glied	0,128	0,141	0,094	0,135	0,201	0,177
5. Glied	0,157	0,253	0,179	0,312	0,407	0,490
6. Glied	0,164	0,487	0,542	0,576	—	—
7. Glied	0,241	—	—	—	—	—
Ganzer Halm . .	0,083	0,099	0,076	0,093	0,104	0,089

1) 0,168, obwohl durch Revision als richtig berechnet erwiesen, ist doch als anormal anzusehen, da sonst überall das $\eta : A$ des dritten Gliedes kleiner als das des vierten ist.

III. Elemente der 217 sechsgliedrigen Halme Leutzscher Pflege nach primärer Tafel.

	Rispe	1. Gl.	2. Gl.	3. Gl.	4. Gl.	5. Gl.	6. Gl.	Halm
A_1	16,2	86,5	71,8	44,9	32,5	18,4	4,9	275,2
G_1	15,8	85,5	71,0	44,2	31,9	17,4	4,0	272,8
$E_,$	7,5	42,9	38,9	19,1	15,0	6,0	0,6	147,9
E'	27,9	112,2	99,8	61,9	48,0	34,0	19,0	352,6
u	− 5	+25	+10	+10	− 3	−15	−33	+13
$U'-U_,$	+ 3,0	−17,9	− 4,9	− 8,8	− 2,0	+ 3,2	+ 9,8	−49,9

IV. Elemente der 138 fünfgliedrigen Halme Leutzscher Pflege nach primärer Tafel.

	Rispe	1. Gl.	2. Gl.	3. Gl.	4. Gl.	5. Gl.	Halm
A_1	16,9	92,4	74,4	41,8	26,7	8,9	261,1
G_1	16,3	91,5	73,4	41,2	25,8	7,6	258,8
$E_,$	7,0	53,5	34,1	19,5	6,3	1,6	158,7
E'	33,4	119,4	96,4	62,4	41,8	22,0	330,9
u	− 2	+14	+ 8	+ 8	+ 4	−14	+10
$U'-U_,$	+ 6,6	−11,9	−18,3	− 1,7	− 5,3	+ 5,8	−32,6

§ 166. Die Resultate vom meisten allgemeinen Interesse, welche sich aus vorstehenden Tabellen ziehen lassen, scheinen mir folgende zwei zu sein.

1) Dass sich bestimmte gesetzliche Gliederungsverhältnisse beim Roggen der Art finden, dass sie als charakteristisch für den Roggen gelten können und unstreitig Anlass geben können, nicht nur die verschiedenen Getreidearten und überhaupt Gramineen danach im Interesse ihrer vergleichenden Charakteristik zu untersuchen, sondern auch den Einfluss der äußeren Umstände, wie der Bodenbeschaffenheit und Jahreswitterung darauf zu studieren.

2) Dass sich daraus entscheidende Beweise für das Dasein einer wesentlichen Asymmetrie und eine Unterlage für Prüfung ihrer Gesetze ergeben.

Gehen wir zuerst dem ersteren Interesse der Untersuchung nach.

Man kann es fraglich finden, ob die Variationen, welche die einzelnen Roggenhalme in betreff ihrer Länge und ihrer Gliederungsverhältnisse zeigen, vielmehr von einer zufälligen Verschiedenheit der Samenkörner oder der Beschaffenheit des Bodens, von dem jedes einzelne umlagert wird, abhängen, wahrscheinlich von beiden Ursachen, ohne dass sich bisher empirisch darüber entscheiden lässt. Jedenfalls finden folgende Kollektivverhältnisse statt.

1) Trotzdem, dass die mittlere Länge A_1 der ganzen Halme je nach dem Standorte zwischen 344,7 und 222,1 schwankt, worüber die Angaben unter Tabelle I nachzusehen, sind doch die Verhältnisse der Glieder (ihren arithmetischen Mitteln nach) zur Totallänge unabhängig davon und nur mit der Zahl der Glieder als variabel anzusehen, kurz sie können für den Roggen bei gegebener Gliederzahl als konstant und mithin charakteristisch gelten. Tabelle I enthält dazu die Belege, sofern darin alle Glieder, sowie die Rispe nach Verhältnis des Halmes (gleich 100) reduziert sind. Da außer Leutzsch mit $m = 217$ und 138 die anderen Standorte nur ein $m = 10$; 18 und 20 haben, hätte ich nicht geglaubt, dass bei der durch dieses geringe m bedingten Unsicherheit die Übereinstimmung der relativen Gliederlängen für gegebene Gliederzahl so weit hätte gehen können, als es der Fall ist. Nur bei Schönefeld (mit $m = 18$) zeigen sich einige größere Differenzen von den anderen Standorten für die sechsgliedrigen Halme; aber man vergleiche hingegen für die sechsgliedr. Halme die überraschende Einstimmung der Gliederverhältnisse zwischen L. (217) und St. (20) bei den sehr verschiedenen Totallängen 275,2 und 344,7; sowie die nicht minder bemerkenswerte für die fünfgliedr. Halme zwischen L. (138) und Tbch. (20) bei der verschiedenen Totallänge 261,1 und 222,1. Ja selbst Sch. fünfgliedr. mit $m = 4$ stimmt merkwürdig damit zusammen, und nur Tbch. sechsgliedr. mit $m = 4$ und L. viergliedr. mit $m = 6$ zeigen nicht unerhebliche Abweichungen; aber Vergleiche bei so kleinen m können überhaupt nicht maßgebend sein und sind daher in voriger Tabelle übergangen. Übrigens dürfte es überhaupt zweckmäßiger gewesen sein, die einzelnen Glieder im Verhältnisse zur Summe der Glieder

d. i. zum Halme ohne Rispe als mit Rispe, wie es hier geschehen ist, in Betracht zu ziehen.

2) Vergleicht man die Kolumnen für die sieben-, sechs- und fünfgliedr. Halme der Tab. I, so findet man allgemein, dass mit Absteigen in dieser Gliederzahl die drei ersten Glieder an verhältnismäßiger Länge zunehmen, die letzten aber abnehmen. Oder kurz: wenn die Gliederzahl abnimmt, so verlängern sich die oberen Glieder und verkürzen sich die unteren im Verhältnisse zur Totallänge. Für die Rispe ist keine bestimmte Regel in dieser Hinsicht sichtbar.

3) Wirft man etwa die Frage auf, ob in den Gliederungsverhältnissen des Roggens die von ZEISING aufgestellte und mehrfach acceptierte Behauptung sich bestätige, dass in der Natur das irrationale Verhältnis des goldenen Schnittes, d. i. merklich genau 100 : 162, eine ausgezeichnete Rolle spiele, so wird man dies nach Tabelle I nicht bejahen können, da das Verhältnis der aufeinander folgenden Glieder zu einander überhaupt ganz variabel ist. Eben so wenig scheint eine Tendenz zu einfachen rationalen Verhältnissen vorhanden zu sein.

4) Der einfache Mittelfehler oder die einfache mittlere Schwankung $\eta = \Sigma\varDelta : m$ bez. A nimmt im absoluten Werte vom obersten bis zum untersten Gliede ab, wofür ich keine Tabelle beigefügt habe. Da nun aber auch der Wert A in dieser Richtung abnimmt, so fragte sich, wie es sich mit dem verhältnismäßigen Werte $\eta : A = \Sigma\varDelta : mA$, oder der verhältnismäßigen Schwankung in dieser Hinsicht verhält, was nach Tab. II zu beurteilen. Hier nun zeigt sich das Bemerkenswerte, dass das $\eta : A$ der zwei bis drei obersten Glieder weder nach der Ordnungszahl dieser Glieder (ob erstes, zweites Glied u. s. w.), noch nach der Art der Halme (ob sieben-, sechs- oder fünfgliedrig), noch endlich nach dem Standorte in erheblichem Grade variiert, nur dass bei den sieben- und sechsgliedrigen Halmen die merkliche Konstanz sich auf die drei[1]), bei den fünfgliedrigen nur auf die zwei obersten Glieder erstreckt. Nach Maßgabe aber, als man zu tieferen Gliedern absteigt, wächst nicht

1) Der Wert 0,168 beim dritten Gliede Stünz ist, ohne auf Rechnungsfehlern zu beruhen, erkennbar abnorm, da ihm der kleinere Wert 0,094 beim vierten Gliede folgt.

nur $\eta : A$ allgemein mit der Tiefe der Glieder bei Gleichheit des Standortes und der Gliederzahl, sondern ändert sich auch bei Gleichheit der Ordnungszahl nach diesen beiden Momenten. Das $\eta : A$ der Rispe ist überall erheblich größer, durchschnittlich etwa doppelt so groß, als das des ersten Gliedes, hingegen das $\eta : A$ des ganzen Halmes kleiner als das irgend einer Abteilung; was sich leicht versteht.

Da in den Werten von $\eta : A$ der Tab. II das η unkorrigiert ist, so würden durch Anbringung der Korrektur $\sqrt{m : (m - 1)}$ (s. § 44) die angegebenen Werte eigentlich noch für folgende Werte m in folgendem Verhältnisse v zu erhöhen sein:

m	10;	20;	138;	217
v	1,054;	1,026;	1,004;	1,002.

Man sieht aber leicht, dass dies in den gezogenen Folgerungen nichts ändern würde.

§ 167. Hiernach komme ich zu dem Teile der Untersuchung, welcher auf die Asymmetrieverhältnisse Bezug hat; wozu bloß die vom Standorte Leutzsch erhaltenen Daten mit 217 sechsgliedr. und 138 fünfgliedr. Halmen ein hinreichendes m gewähren. Auch selbst ein $m = 217$ ist freilich noch nicht groß genug, um den Einfluss unausgeglichener Zufälligkeiten bis zu einem erwünschten Grade herabzudrücken[1]), doch wird sich zeigen, dass bei erforderlicher Reduktion und scharfer Behandlung sich die Rechnungsresultate in sehr guter Einstimmung mit den Sätzen der kollektiven Asymmetrie finden; ohne alle Reduktion aber geben schon die Werte von $u = \mu' - \mu_,$ und $U' - U_,$ (wovon $U' = E' - A$; $U_, = A - E_,$) in Tafel III und IV den Beweis, dass wesentliche Asymmetrie hier vorliegt.

Sollte nämlich wesentliche Symmetrie der Abweichungen bez. A stattfinden, so müsste der Unterschied u zwischen den beiden Abweichungszahlen μ', $\mu_,$, sowie der Unterschied $U' - U_,$ zwischen den beiden

1) [In der That ist der wahrscheinliche Wert V der Differenz $u = \mu' - \mu_,$ bez. A_1 bei Voraussetzung wesentlicher Symmetrie nach § 98 auf Grund der Formel $V = \pm 0{,}6745 \sqrt{m}$ gleich ± 10.]

extremen Abweichungen, die in Tab. III u. IV zwar nicht angegeben, aber als $U' = E' - A$ und $U_{,} = A - E_{,}$ daraus leicht zu finden sind, nur von unausgeglichenen Zufälligkeiten abhängen und zwischen den Gliedern der Halme nach Größe und Vorzeichen zufällig wechseln. Verfolgen wir aber den Unterschied u durch die Reihe der Glieder abwärts, so sehen wir den beim ersten Gliede positiven Wert desselben kontinuierlich an Größe abnehmen, und von einem gewissen Gliede an (für die sechsgliedr. Halme vom vierten an — für die fünfgliedr. erst beim fünften Gliede selbst) ins Negative umschlagen. Thun wir eben so mit dem Unterschiede $U' - U_{,}$, so finden wir das Entsprechende mit umgekehrten Vorzeichen, nur dass hier auch bei den sechsgliedr. Halmen der Umschlag erst beim fünften Gliede beginnt. Zugleich geben diese Tabellen Gelegenheit, den allgemeinen Satz (§ 33; 142) zu bewähren, dass $U' - U_{,}$ das entgegengesetzte Vorzeichen von $\mu' - \mu_{,}$ hat, was nur bei sehr kleinem u und $U' - U_{,}$ eine scheinbare Ausnahme durch unausgeglichene Zufälligkeiten erleiden kann, wovon man hier auch das Beispiel bei dem vierten Gliede der sechsgliedr. Halme findet. Für die Rispe ist bei den sechs- wie fünfgliedr. Halmen u negativ, $U' - U_{,}$, positiv; für den ganzen Halm ersterer Wert positiv, letzterer negativ.

Es würde nun sehr interessant sein, zu untersuchen, ob der so bestimmt ausgesprochene gesetzliche Gang der u und $U' - U_{,}$, der hier nur für einen einzigen Standort (Leutzsch) und die Witterung eines bestimmten Jahres (1863) bei hinreichend großem m sich erwiesen hat, sich auch bei anderen Standorten und anderen Jahreswitterungen wiederfindet, da es an sich sehr möglich ist, dass andere Standorte und Witterungsverhältnisse während des Wachstums der Halme andere Verhältnisse in dieser Hinsicht mitführen. Nun liegen mir zwar auch die Data für andere Standorte (St., Tbch., Sch.) vor, aber nur mit einem m von 18 bis 20, was viel zu wenig ist, um sichere Resultate zu erwarten: doch habe ich, um wenigstens eine Vermutung zu begründen, St. und Tbch., beide mit $m = 20$, hinsichtlich des Ganges ihrer u untersucht und dabei die in folgender Tabelle verzeichneten Resultate erhalten.

V. A_1 und u für die Standorte Tbch. und St., beide mit $m = 20$.

	A_1		u	
	Tbch. 5 gl.	St. 6 gl.	Tbch.	St.
Rispe . . .	11,2	24,5	— 6	— 2
1. Gl. . . .	76,8	108,9	— 2	± 0
2. Gl. . . .	63,9	87,2	± 0	+ 2
3. Gl. . . .	37,6	54,1	— 2	— 2
4. Gl. . . .	23,3	41,4	— 6	+ 2
5. Gl. . . .	9,3	23,4	— 2	± 0
6. Gl. . . .	—	5,2	—	— 4
Halm . . .	222,1	344,7	— 6	+ 2

Hiernach aber darf man allerdings mit ziemlicher Sicherheit vermuten, dass der Standort von wesentlichem Einfluss auf den Gang der u und hiermit die Asymmetrieverhältnisse des Roggens ist, da für Tbch. alle u negativ oder null sind, für St. unbestimmt in Größe und Vorzeichen wechseln[1]).

§ 168. Für die ganzen bisherigen Ergebnisse lagen nur die primären Tafeln unter, welche aber keine zulängliche Bestimmung des dichtesten Wertes, Berechnung der davon abhängigen Verteilung und überhaupt Untersuchung der zu D in Beziehung stehenden Verhältnisse gestatten. Wir gehen also jetzt zu reduzierten Tafeln über, welche sich fortan bloß auf das Leutzscher Material und zwar das sechsgliedrige mit $m = 217$ beschränken werden.

[Aber auch von diesem Material sollen bloß die fünf oberen Glieder Berücksichtigung finden. Denn sie genügen zur Bewährung der asymmetrischen Verteilungsgesetze und gestatten eine ausreichende,

1) [Dabei ist jedoch zu beachten, dass hier der wahrscheinliche Wert von u bei Voraussetzung wesentlicher Symmetrie bez. A_1 aus der Formel $V = \pm 0{,}67 \sqrt{20}$ (s. § 98) gleich ± 3 sich ergiebt, wonach bloß drei von den obigen dreizehn Werten den wahrscheinlichen Wert V übersteigen. Es ist folglich in der That ein Überwuchern rein zufälliger Asymmetrie anzunehmen, was keineswegs ausschließt, dass für Tbch. und St. bei größerem m ähnliche Gesetzmäßigkeiten auftreten können wie die für L. beobachteten.]

berichtigende Kontrolle des in Tafel III hervortretenden Ganges der Asymmetrie. Es ist überdies angezeigt, gerade von der Rispe und dem untersten Gliede abzusehen, da aus den oben (§ 164) angegebenen Gründen die Ergebnisse einen nur zweifelhaften Wert besitzen würden. Ich gebe demgemäß folgends die z-Werte der fünf ersten Glieder für ein reduziertes $i = 4\mathfrak{G}$ in übrigens beliebig gewählter Reduktionslage und füge den beobachteten Werten die berechneten Werte, wie sie das zweiseitige G. G. hergiebt, unmittelbar bei. In direktem Anschluss daran finden sich die Elemente, die der Berechnung zu Grunde gelegt wurden, verzeichnet:

VI. Reduzierte Tafel der 217 sechsgliedrigen Halme (L.).

$$i = 4\mathfrak{G};\quad m = 217.$$

1. Glied			2. Glied			3. Glied			4. Glied			5. Glied		
a	*z* beob.	*z* ber.	*a*	*z* beob.	*z* ber.	*a*	*z* beob.	*z* ber.	*a*	*z* beob.	*z* ber.	*a*	*z* beob.	*z* ber.
44	1	1	38	1	1	18	1	0	15	3	1,5	3	0	2
48	1		42	1	1	22	1	0,5	19	5	6	7	11,5	10
52	1	1	46	1,5	3	26	2,5	2	23	12,5	17	11	29	28
56	2	2	50	6,5	5	30	4,5	6	27	38	36	15	48	50
60	4	3	54	6,5	8,5	34	16,5	15	31	55,5	53,5	19	**63,5**	56
64	6	6	58	15,5	13	38	20,5	29	35	**57,5**	54	23	38	41
68	8	9	62	17,5	18,5	42	43,5	42,5	39	31,5	34	27	15,5	21
72	9	13	66	25,5	24	46	**58,5**	49	43	11	12	31	8	7
76	21,5	17	70	29,5	29	50	39	41	47	3	3	35	3,5	2
80	15,5	22	74	30,5	32	54	19	22						
84	24	25	78	**32**	32	58	7	8						
88	**33,5**	28	82	25,5	25	62	4	2						
92	27,5	28	86	16	15									
96	23,5	24	90	6,5	7									
100	18,5	18	94	0,5	2									
104	13,5	11	98	1,5	1									
108	4	6												
112	3,5	3												

VII. Elemente der 217 sechsgliedrigen Halme (L.) nach reduzierter Tafel.

	1. Glied	2. Glied	3. Glied	4. Glied	5. Glied
A_2	86,52	71,69	44,83	32,39	18,38
C_2	87,85	72,52	45,30	32,60	18,26
D_p	90,58	76,73	46,23	33,46	17,96
D_i	88,45	76,75	45,74	33,29	18,51
u	−45	−65	−27	−24	+10
$e_,$	11,82	10,98	6,28	5,33	4,60
e'	7,76	5,94	4,88	4,26	5,02
p	0,67	0,84	0,66	0,80	0,71

Der Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung zeigt eine hinreichende Übereinstimmung, die um so mehr befriedigen kann, als das den Bestimmungen zu Grunde liegende $m = 217$ verhältnismäßig klein ist. Insbesondere kann man bemerken, dass das zweite Glied den Forderungen der Theorie gut entspricht, worin natürlich kein unterscheidendes Merkmal den übrigen Gliedern gegenüber sondern nur eine Zufälligkeit zu suchen ist, die mit der gerade gewählten Reduktionsstufe und Reduktionslage zusammenhängt. Es bewährt sich mithin das zweiseitige G. G. an den Roggenhalmen.]

[Damit ist zugleich das Vorhandensein wesentlicher Asymmetrie außer Frage gestellt. Um aber die Schlüsse hinsichtlich der Abnahme und Umkehr der Asymmetrie für absteigende Glieder, die durch den regelmäßigen Gang der u-Werte in den Tabellen III und IV nahe gelegt werden, zu kontrollieren, ist es angezeigt mit den auf A_1 sich beziehenden u der Tabelle III die entsprechenden bez. D_p geltenden u obiger Tabelle zu vergleichen. Dieser Vergleich lehrt, dass hier das zweite Glied an Stelle des ersten den Maximalwert besitzt, und die Umkehr der Asymmetrie erst beim fünften Gliede statt beim vierten hervortritt, und dass überhaupt die Schwankungen zwischen den aufeinander folgenden Gliedern anders verteilt und stärker sind als dort. Fragt man nun, welche Werte als maßgebend anzusehen sind, so wird man berücksichtigen müssen, dass zwar stets einem u-Werte bez. A ein, mit dem Verhältnisse $(D-C):(C-A)$ wachsender, relativ großer $\boldsymbol{u}$-Wert bez. D von entgegengesetztem Vorzeichen entspricht, dass aber dabei die Wahl der Reduktionsstufe und Reduktionslage die Lage der Werte D, C und A, und zwar diejenige von D in stärkerem Maße als die von C und A beeinflusst, wie aus den Vergleichstabellen der Elemente für verschiedene Reduktionsstufen und Reduktionslagen im VIII. Kapitel zu ersehen. Hierdurch erklären sich die schärferen Schwankungen der $\boldsymbol{u}$ im Vergleiche zu dem ruhigeren Gange der u. Trotzdem ist ein endgültiges Urteil über die Asymmetrieverhältnisse vielmehr auf die $\boldsymbol{u}$ als auf die u zu gründen. Denn letztere geben nur einen Anhalt, um festzustellen, ob und in wie weit die bei wesentlicher Symmetrie bez. A zu erwartenden u-Werte von den beobachteten überschritten werden; dagegen hat bei Voraussetzung wesentlicher Asymmetrie D_p als wahrscheinlichster Wert zu gelten, und es sind demgemäß die Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$ für eine obere und untere Abweichung im Verhältnisse der beobachteten mittleren Abweichungen e' und e, vorauszusetzen, während eine entsprechende Annahme für die Abweichungen bez. A nicht statthaft ist. Es sind sonach im Einklange mit den Angaben des Zusatzes zu Kap. XIV (§ 101) die wahrscheinlichen Grenzen von $\boldsymbol{u}$ gleich:

$$(p-q)m \pm 0{,}6745\sqrt{4pqm}$$

zu setzen und auf Grund der Proportion $p:q = e':e$, zu berechnen, wonach sich im vorliegenden Falle für jedes der fünf Glieder abgerundet der Wert ± 10 als obere und untere wahrscheinliche Grenze, von den in der Tabelle angegebenen wahrscheinlichsten $\boldsymbol{u}$-Werten gerechnet, ergiebt. Hieraus folgt allerdings nicht nur, dass jedem Gliede für sich betrachtet wesentliche Asymmetrie zukommt, sondern auch, dass die Schwankungen zwischen den aufeinander folgenden Gliedern mit Ausnahme derjenigen zwischen dem dritten und vierten Gliede als wesentliche anzuerkennen sind. Da jedoch hierbei die in der Kleinheit von m und in der Wahl der Reduktionslage begründete Unsicherheit in Bestimmung von D_p nicht berücksichtigt ist, wird es geraten sein, auf die absoluten Werte der beobachteten $\boldsymbol{u}$

kein allzugroßes Gewicht zu legen und nur im allgemeinen die Tendenz zur Abnahme der Asymmetrie beim Absteigen in der Reihe der Glieder und zur Umkehr der Asymmetrie bei den unteren Gliedern zu betonen.]

§ 169. [Schließlich erhebt sich noch die Frage, ob die Verhältnisse der Roggenglieder einer kollektiven Behandlung sich fügen. Diesem Interesse dienen die beiden folgenden Tabellen, welche für die Verhältnisse des ersten und zweiten Gliedes und des zweiten und dritten Gliedes reduzierte Tabellen zum Vergleiche zwischen Beobachtung und Rechnung, sowie jedesmal nebenstehend die Werte der Elemente unter Zugrundelegen des logarithmischen Verteilungsgesetzes bringen. Die drei auf einander folgenden kleinsten und größten Werte der Verhältnisse des ersten und zweiten Gliedes sind 0,64, 0,98 und 1,00 einerseits; 1,50, 1,97 und 2,11 andererseits. Die entsprechenden Werte für die Verhältnisse des zweiten und dritten Gliedes sind 1,12, 1,15 und 1,16 einerseits; 2,22, 2,42 und 2,63 andererseits. Die mit a zu bezeichnenden Logarithmen halten sich somit im ersteren Falle zwischen den Grenzen $-0,19$ und $+0,32$; im letzteren Falle zwischen den Grenzen 0,05 und 0,42. Dies führt bei einem reduzierten $i = 0,02$ zu folgenden Werten:

VIII. Verhältnisse der drei obersten Glieder der 217 sechsgliedrigen Halme (L.) und ihre Elemente.

$i = 0{,}02$; $m = 217$.

1. Glied : 2. Glied

a	z beob.	z ber.
— 0,19	1	0
— 0,03	0	1
— 0,01	1,5	3
+ 0,01	11,5	9
+ 0,03	15	21
+ 0,05	35	34
+ 0,07	**47**	43
+ 0,09	**47**	41
+ 0,11	30	31
+ 0,13	16	19
+ 0,15	7	10
+ 0,17	4	4
+ 0,19	0	1
+ 0,29	1	0
+ 0,33	1	0

$\mathcal{G} = 0{,}080$
$\mathcal{C} = 0{,}079$
$\mathcal{D}_p = 0{,}076$
$\mathcal{D}_i = 0{,}080$
$u = +13$
$e_{,} = 0{,}030$
$e' = 0{,}034$
$p = 0{,}75$

$G = 1{,}202$
$C = 1{,}199$
$\mathcal{T}_p = 1{,}191$
$\mathcal{T}_i = 1{,}202$

2. Glied : 3. Glied

a	z beob.	z ber.
0,05	1	1
0,07	5	2
0,09	3	5
0,11	8	8
0,13	14	13
0,15	17,5	19
0,17	23,5	24
0,19	26	28
0,21	**37**	29
0,23	26	26
0,25	17	22
0,27	14	16
0,29	9	11
0,31	9	7
0,33	2	3
0,35	3	2
0,37	0	1
0,39	1	0
0,41	1	0

$\mathcal{G} = 0{,}206$
$\mathcal{C} = 0{,}206$
$\mathcal{D}_p = 0{,}206$
$\mathcal{D}_i = 0{,}210$
$u = 0$
$e_{,} = 0{,}048$
$e' = 0{,}048$
$p = 0:0$

$G = 1{,}607$
$C = 1{,}607$
$\mathcal{T}_p = 1{,}607$
$\mathcal{T}_i = 1{,}622$

Bemerkenswert ist der geringe Grad der Asymmetrie, die für das Verhältnis des zweiten und dritten Gliedes sogar völlig fehlt und erst beim Fortgang zur vierten Dezimalen der Hauptwerte $\mathcal{G}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}_p$ rechnerisch auftreten würde. Die Berücksichtigung der vierten Dezimalstelle würde jedoch an der theoretischen Verteilung der z auf die einzelnen Intervalle nichts ändern, da sie nur auf die Bruchteile der z Einfluss hätte. Die Werte $\mathcal{G}$ sind nach Bestimmung aus den primären Tabellen für das Verhältnis des ersten und zweiten Gliedes gleich 0,081 und für das Verhältnis des zweiten und dritten Gliedes gleich 0,205. Die extremen a für das erste und zweite Glied stellen sich auf Grund der Verteilungsrechnung als entschieden abnorm dar.]

XXVI. Die Dimensionen der Galleriegemälde.

§ 170. [Im XXI. Kapitel wurde bereits ein K.-G. den Dimensionen der Galleriegemälde entnommen und als Beispiel im Interesse des Vergleiches zwischen der arithmetischen und logarithmischen Behandlungsweise vorgeführt. Dabei dienten die Maße von Urlisten, wie sie die dort angeführten Kataloge hergaben, als unmittelbare Unterlage bei Aufstellung der reduzierten Verteilungstafeln, und zwar ebensowohl für die logarithmische wie für die arithmetische Reduktion. — Hier sollen nun die Ergebnisse der eingehenden Untersuchung, welche bezüglich der Dimensionen der verschiedenartigen Galleriegemälde vom Standpunkte der kollektiven Asymmetrie aus in dem Anhangsabschnitte zur »Vorschule der Ästhetik« geführt worden ist, mitgeteilt und die dortselbst aufgeführten arithmetisch reduzierten Verteilungstafeln teilweise einer logarithmischen Behandlung zu Grunde gelegt werden. Die letztere kann dann zugleich als Beleg dafür dienen, dass ohne Rückgang zu Urlisten oder primären Verteilungstafeln die arithmetisch reduzierten Tabellen eine ausreichende Unterlage zur logarithmischen Behandlung auch dann noch gewähren können, wenn — wie im vorliegenden Falle — die Endabteilung der größeren Maße von einer Grenze ab als Rest zusammengefasst wird und ihre Erstreckung nur aus den angegeben extremen Werten bestimmbar ist.]

[Ich entnehme nun der bezeichneten Quelle[1]) zunächst die Angaben über die Sachlage der Untersuchung (§ 171) und weiterhin (§ 172 und 173) die Verteilungstafeln und die Tabellen der Elemente nebst den hieran zu knüpfenden Erörterungen, um sodann (§ 174) den Erfolg der logarithmischen Behandlung an vier Beispielen zu

1) Vorschule der Ästhetik; 1876. Zweiter Teil, S. 275 flgd.]

zeigen. Schließlich teile ich (§ 175) wiederum aus der Vorschule der Ästhetik Angaben über das Verhältnis von Höhe und Breite und über den Flächeninhalt der Galleriegemälde mit.]

§ 171. Als Bilderklassen werden religiöse, mythologische, Genre-, Landschafts- und Stillleben-Bilder unterschieden:

a) Religiöse Bilder, d. s. Bilder mit alttestamentlich- und christlich-religiösem Inhalte. Hierzu wurden nicht nur Kompositionen mit mehreren Figuren gerechnet, sondern auch selbst einzelne Köpfe und Figuren, wie Christusköpfe, Heiligenbilder, Darstellungen von Märtyrergeschichten, selbst Landschaften mit heiliger Staffage, so dass diese Klasse eigentlich ein schlecht definiertes Sammelsurium ist; daher auch eine sehr unregelmäßige Verteilung nach Maß und Zahl darin statt fand.

b) Mythologische, d. s. Bilder mit einem Inhalte aus der griechischen und römischen Götter- und Heroenwelt, entsprechend weit gefasst, daher auch schlecht verteilt.

c) Genrebilder, im üblichen Sinne, ohne Kriegs- und Jagdszenen.

d) Landschaften, mit Einschluss von Marinen, doch ohne Hafen- und Städteansichten.

e) Stillleben, d. s. Bilder mit toten Gegenständen (abgesehen von der dabei ausgeschlossenen Architektur), als wie Zusammenstellungen von Esswaren, Geräten, ferner Blumen- und Fruchtstücke, mit Ausnahme solcher, welche menschliche Figuren mit einschließen, mit Einschluss aber solcher, in welchen Tiere nebensächlich auftreten.

Nicht zur Untersuchung gezogen sind weltlich historische Bilder, Architekturbilder, Porträts, überhaupt die nicht in vorigen Klassen begriffenen Bilder. Überall ausgeschlossen sind Fresken- und Tapetenbilder, Diptychen und Triptychen und solche Tafeln, auf welchen verschiedene Darstellungen in von einander abgegrenzten Abteilungen enthalten waren.

Natürlich konnten mehrfach Zweifel entstehen, ob ein Bild als Genrebild sollte unter c) mit aufgenommen oder als weltlich historisches Bild bei Seite gelassen werden, ob ein Bild als Landschaft unter d) sollte aufgenommen oder als bloßes Viehstück bei Seite gelassen werden u. s. w.; und gar wohl hätten andere die zweifelhaften Fälle etwas anders rubrizieren können. Indes kommt hierauf nicht viel an, weil die Unsicherheit immer nur verhältnismäßig wenig Bilder betrifft, so dass die Verhältnisse dadurch nicht erheblich beteiligt werden können. Ein ganz scharfes Trennungsprinzip lässt sich hierbei überhaupt nicht aufstellen; ich bin nach dem Aperçu des vorwiegenden Eindruckes der Bilderbezeichnung in den Katalogen gegangen.

Mehrfach kommen Fälle vor, dass zwei oder gar eine Reihe ihrem Inhalte nach zusammengehöriger Bilder von demselben Formate hinter einander in den Katalogen aufgeführt sind. So kommen in der dritten Partie des Louvre-Kataloges: École française p. 342 ff. von No. 525 bis 547 unter dem Gemeintitel: »Les principaux traits de la vie de St. Bruno«, 22 Bilder von Le Sueur vor, welche, mit Ausnahme von No. 533, alle dieselben Dimensionen $h = 193$; $b = 130$ cm haben.

Es entstand die Frage, ob in solchen Fällen alle Exemplare als ein einziges nur einmal oder so oft, als sie vorkamen, in die Verteilungstafel aufgenommen und verrechnet werden sollten.

Käme es nun darauf an, was aber wenig Interesse haben dürfte, die faktischen Mittelwerte der in gegebenen Gallerien enthaltenen Bilder von gegebener Art und die faktischen Verteilungsverhältnisse zu bestimmen, so könnte natürlich nur letzteres Verfahren eingehalten werden; aber da man nicht darauf zu rechnen hätte, dass in anderen Gallerien dieselben Dimensionen durchschnittlich in demselben Verhältnisse wiederkehrten, so würde man auf diese Weise einen unangemessenen Beitrag zur allgemeinen Mittelbestimmung erhalten und die allgemeinen Verteilungsverhältnisse dadurch wesentlich alteriert finden. So fanden sich folgende Zahlen religiöser Bilder in folgenden Größenintervallen der Höhe:

Intervalle	z
cm cm	
179,5—189,5	91
189,5—199,5	89
199,5—209,5	93

welche Zahlen nahe übereinstimmen, wie bei aneinandergrenzenden Intervallen zu erwarten. Aber hierbei sind sämtliche 22 SUEUR'sche Bilder von 193 cm Höhe nur zweimal gerechnet, hätte man sie 22 mal rechnen wollen, so hätte man statt der aufeinander folgenden Zahlen 91; 89; 93 erhalten: 91; 109; 93; was die Verteilung sehr unregelmäßig gemacht haben würde. Entsprechend in anderen Fällen. Da nun aber eine Mehrzahl zusammengehöriger Bilder von denselben Dimensionen immerhin eine gewisse starke Bevorzugung dieser Dimensionen voraussetzt und mithin ein vermehrtes Gewicht in Anspruch nimmt, so habe ich mich entschlossen, kurz und rund alle Fälle, wo zwei oder mehr zusammengehörige Bilder von denselben Dimensionen vorhanden waren, zweimal, aber nicht mehr als zweimal, in der Verteilungstafel zählen zu lassen.

Wenn daher folgends die Gesamtzahl der in Untersuchung genommenen Bilder zu 10 558 angegeben wird, so ist diese Zahl insofern nicht streng, als nach voriger Bemerkung von einer größeren Zahl zusammengehöriger Bilder von gleichen Dimensionen überall eben nur zwei in Rechnung genommen sind, andererseits aber Landschaftsbilder, in welchen religiöse und mythologische Staffage vorkommt, sowohl bei den Landschaftsbildern als religiösen oder mythologischen Bildern, also doppelt aufgenommen sind. Da jedoch der Einfluss beider Umstände überhaupt nicht beträchtlich und überdies von entgegengesetzter Richtung ist, bleibt obige Zahl nahe genug zutreffend.

Es sind nur Galleriebilder, und zwar aus zweiundzwanzig öffentlichen Gallerien[1]) gemessen oder vielmehr die in den Galleriekatalogen

1) Benutzte Kataloge.

Amsterdam. Beschriving der Schilderijen ops Rijks Museum te Amsterdam 1858.
Antwerpen. Catalogue du Musée d'Anvers, ohne Jahreszahl.
Berlin. a) Verzeichnis der Gemäldesammlung des Königl. Museums zu Berlin 1834.
b) Verzeichnis der Gemäldesammlung des Konsul Wagener 1861.
Braunschweig. PAPE, Verz. d. Gemäldesamml. d. Herz. Museums zu Braunschweig 1849.
Brüssel. FÉTIS, Catalogue descript. et histor. du Mus. roy. de Belgique 1804.
Darmstadt. MÜLLER, Beschreibung d. Gemäldesamml. in d. Großherz. Mus. zu Darmstadt.
Dijon. Notice des objets d'art exposés au Mus. de Dijon 1860.

angegebenen Maße, auf die Bildergröße im Lichten des Rahmens gehend, benutzt und der Vergleichbarkeit halber alle auf metrisches Maß reduziert worden.

Als Einheit der Maße dient daher folgends ausnahmslos das Centimeter.

§ 172. Auf die oben bezeichneten Klassen hat sich die Untersuchung erstreckt; doch sind aus angegebenen Gründen die religiösen und mythologischen nur zu wenigen Bestimmungen mit zugezogen worden. In jeder Klasse aber werden zwei Abteilungen unterschieden; nämlich von Bildern, an denen die Höhe h größer als die Breite b ist, und solchen, von denen das Umgekehrte gilt; erstere mit $h > b$, letztere mit $b > h$ zu bezeichnen. Zwischen beiden Abteilungen sind die sehr selten vorkommenden quadratischen Bilder abwechselnd, wie sie sich darboten, gleich verteilt worden[1]). Es sind aber auch aus der Zusammenrechnung beider Abteilungen Bestimmungen gezogen, welche für das h und b derselben gemeinsam gelten.

Hiernach nun bedeutet z. B. h; $h > b$ Höhenmaße von Bildern, deren Höhe größer als die Breite, ferner b; $h > b$ Breitenmaße von

---

Dresden. HÜBNER, Verz. der Königl. Gemäldegallerie zu Dresden 1856.
Florenz. CHIAVACCHI, Guida della R. Gall. del Palazzo Pitti 1864.
Frankfurt. PASSAVANT, Verz. d. öffentl. ausgest. Kunstgegenst. d. Städel'schen Kunstinstituts 1844.
Leipzig. a) Verz. d. Kunstwerke d. städt. Mus. zu Leipzig 1862.
b) Verz. d. Löhr'schen Gemäldesammlung zu Leipzig 1859.
London. The national Gallery, its pictures etc. Ohne Jahreszahl.
Madrid. PEDRO DA MADRAZO, Catalogo de los quadros del real Mus. de Pintura y Escultura 1843.
Mailand. Guida per la regia Pinacotheca di Brera.
München. a) Verz. d. Gem. in d. Königl. Pinakothek zu München 1860.
b) Verz. d. Gem. d. neuen Königl. Pinakothek in München 1861.
Paris. VILLOT, Notice des tabl. exp. dans les gal. du Mus. imp. du Louvre 1859.
Petersburg. WAAGEN, Die Gemäldes. in der Kaiserl. Eremitage zu St. Petersburg 1864.
Venedig. Catalogo degli oggetti d'arte esposti al Publico nella L. Roy. Accad. di belli arti in V. 1864.
Wien. v. MECHEL, Verz. d. Gem. der K. K. Bildersammlung 1781.

1) Dies ist jedenfalls richtiger, als sie sowohl der einen als der anderen Abteilung ganz zuzurechnen, weil bei den als quadratisch aufgeführten Bildern doch bald die eine, bald die andere Dimension um etwas größer als die andere sein wird, nur dass die Messung sehr kleine Unterschiede nicht berücksichtigt.

Bildern, deren Höhe größer als die Breite u. s. f., endlich h; komb. oder b; komb. Höhenmaße oder Breitenmaße von Bildern der vereinigten Abteilungen $h > b$ und $b > h$.

Die primären Verteilungstafeln der in Untersuchung genommenen Klassen und Abteilungen, deren $i = 1$ cm, besitzen naturgemäß eine große Ausdehnung und sind mit starken Unregelmäßigkeiten behaftet. Die folgende Probe muss genügen, um eine Vorstellung von dem Aussehen derselben zu geben:

I. Probe aus den primären Verteilungstafeln.

Genre: h; $h > b$.

a	z
29	13
30	15
31	13
32	20
33	21
34	9
35	17
36	13
37	22
38	26
39	8
40	9

a	z
41	17
42	14
43	14
44	12
45	15
46	10
47	17
48	10
49	12
50	4
51	12
u. s. w.	

Um sowohl die Ausdehnung als auch die Unregelmäßigkeiten zu beschränken, ist es erforderlich, zu reduzierten Tafeln überzugehen und denselben ein $i = 10$ cm zu Grunde zu legen.

Hier folgen die so reduzierten Tafeln für beide Abteilungen von Genre und Landschaft und für $h > b$ von Stillleben. Die Totalzahl m der Exemplare jeder Klasse und Abteilung ist unten angegeben. Vielen Zahlen der Tabelle sieht man eine Dezimale 0,5 beigefügt. Dies rührt daher, dass Zahlen, die auf den Grenzwert eines Intervalles selbst fielen, nach der Methode der geteilten z, halb dem einen, halb dem anderen der dadurch geschiedenen Intervalle zugerechnet worden sind, was bei ungeraden Zahlen eine halbe Einheit mitführt. Will man die Maßzahlen der h oder b für das kombinierte $h > b$ und $b > h$ haben, so braucht man bloß die Maßzahlen beider Abteilungen dafür zu addieren.

II. Arithmetisch reduzierte Verteilungstafel für Genre, Landschaft und Stillleben.

$i = 10$; $\mathcal{E} = 1$ cm.

a	Genre				Landschaft				Stillleben	
	$h > b$		$b > h$		$h > b$		$b > h$		$h > b$	
	h	b	h	b	h	b	h	b	h	b
5	—	5	—	—	—	—	6,5	1,5	—	—
15	30,5	88	23	6	2	8,5	66	18	—	4
25	133	**190,5**	90,5	38,5	17,5	23	200,5	90	10,5	16,5
35	**161**	167,5	109	78,5	26,5	**53,5**	**278,5**	166	24,5	44
45	127,5	100,5	**114,5**	80,5	32,5	40	257,5	189	**50,5**	45
55	75,5	62,5	79,5	75,5	22	33	219	168	27	**51**
65	70	58,5	65,5	**86**	**41,5**	21	165	**202**	31,5	45
75	47	31,5	40,5	34,5	25	13,5	139	135,5	29	32
85	39,5	18	28	63,5	8,5	20	79	139,5	38	22
95	20,5	21	33	36,5	20,5	14	93	125,5	23,5	17,5
105	12,5	8	17	26,5	13,5	8,5	69	78	17,5	12
115	11,5	10	25,5	29	10	9	45	63	14,5	2,5
125	12,5	2,5	24	24	6,5	5	36,5	58,5	16	6,5
135	12,5	1,5	11	12	7,5	2	28,5	71,5	5,5	3
145	7,5	5	15	19	7,5	10	19,5	39	2	1
155	11	2,5	6	9,5	5	9,5	29	33,5	1	3
Rest	3	2,5	20	82,5	36	11,5	62,5	215,5	17	3
$m =$	775	775	702	702	282	282	1794	1794	308	308

Man sieht, dass die Verteilung überall wesentlich denselben Gang befolgt. Überall giebt es ein Hauptintervall, worin die Maßzahl ein Maximum ist, von wo nach beiden Seiten die Maßzahlen rasch abnehmen, und zwar liegt das Hauptintervall dem oberen Ende der Tafel, welches mit den kleinsten Maßen anfängt, viel näher als dem unteren, welches mit den größten Werten abschließt, was sogar noch viel auffälliger sein würde, wenn nicht die Zahlen für alle Maße über 160 cm in Bausch und Bogen (als Rest) zusammengefasst wären. Hiermit bietet die Tafel ein besonders interessantes Beispiel eines K.-G. von sehr stark asymmetrischer Verteilung dar. Dabei sieht man, dass der Gang der Werte vom Hauptintervalle ab nach beiden Seiten einem regelmäßigen sich sehr genähert hat. Hier und da freilich, so namentlich bei Genre b; $b > h$, Landschaft h; $h > b$ und b; $b > h$ finden auch noch starke Unregelmäßigkeiten statt und fehlen nirgends bei den kleinen Zahlen im untersten Teile der Tafel; aber es lässt sich voraussetzen, dass diese vollends verschwinden oder sich doch sehr mindern würden, wenn eine viel größere Zahl der Exemplare zu Gebote gestanden hätte, so wie sie sich auch um so mehr ausgleichen, in je größere Intervalle man die Maße zusammenfasst.

Einen ganz ähnlichen Gang als die Genre-, Landschafts- und Stillleben-Bilder zeigen auch die religiösen und mythologischen, nur dass bei diesen Klassen, unstreitig wegen ungünstiger Zusammenfassung der darunter gerechneten Bilder, einige sehr große Unregelmäßigkeiten im Gange bleiben, die sich kaum durch vergrößertes m ausgleichen dürften, daher sich diese Klassen nicht zur Prüfung der Verteilungsgesetze eignen und nicht so weit von mir durchgearbeitet worden sind als die anderen. Auch für Stillleben $b > h$ sind verhältnismäßig stärkere Unregelmäßigkeiten geblieben, als dass sich eine vollständige Durcharbeitung gelohnt hätte.

§ 173. Einen genaueren Einblick in die Maßverhältnisse und Asymmetrie der Galleriegemälde erhält man jedoch erst aus den folgenden Angaben über ihre Elemente, zu deren Berechnung die originalen Verteilungstafeln zu Grunde gelegt wurden.

III. Elemente für Genre, Landschaft, Stillleben, Religiöse und Mythologische nach primärer Tafel.

$\mathfrak{E} = 1$ cm.

			m	A_1	G_1	C_1	η	$\eta : A_1$	u
Genre	$h > b$	h	775	54,4	46,7	44,6	24,4	0,45	— 197
		b	775	43,6	37,4	35,8	19,6	0,45	— 191
	$b > h$	h	702	63,8	53,8	51,4	30,3	0,47	— 182
		b	702	86,8	72,0	67,8	42,7	0,49	— 196
	komb.	h	1477	58,9	50,0	47,8	27,4	0,47	— 379
		b	1477	64,0	51,0	49,4	34,7	0,54	— 437
Landschaft	$h > b$	h	282	88,1	73,3	70,1	44,1	0,50	— 60
		b	282	69,1	58,7	54,6	25,3	0,37	— 75
	$b > h$	h	1794	64,7	54,5	53,3	30,3	0,47	— 426
		b	1794	90,3	75,2	74,4	43,6	0,48	— 436
	komb.	h	2076	67,9	56,7	55,7	27,4	0,40	— 520
		b	2076	87,4	72,8	71,2	34,7	0,40	— 522
Stillleben	$h > b$	h	308	80,6	72,6	73,0	29,0	0,36	— 42
		b	308	62,2	57,7	58,9	21,9	0,35	— 34
	$b > h$	h	204	71,0	60,1	55,7	—	—	— 54
		b	204	95,2	83,5	76,6	—	—	— 60
	komb.	h	512	76,8	67,3	67,3	—	—	—
		b	512	76,4	66,8	65,0	—	—	—
Religiöse	$h > b$	h	3730	135,4	—	109,5	75,5	0,56	— 804
		b	3730	107,0	—	76,0	44,5	0,42	—1274
	$b > h$	h	1804	111,6	—	96,1	56,6	0,51	— 316
		b	1804	156,1	—	131,5	80,6	0,52	— 388
Mythologische	$h > b$	h	350	141,7	—	133,3	66,1	0,47	— 30
		b	350	103,8	—	95,0	55,8	0,54	— 42
	$b > h$	h	609	116,9	—	104,9	60,0	0,51	— 89
		b	609	158,0	—	146,1	74,2	0,47	— 57

Zuvörderst lassen sich aus den Werten m in voriger Tabelle Bestimmungen über die relative Häufigkeit des Vorkommens von Bildern gegebener Klasse und Abteilung in Gallerien ableiten, wobei freilich zu erinnern, dass die Verhältnisse dieser Häufigkeit sich nach den einzelnen Gallerien sehr unterscheiden; die Spezialstatistik in dieser Hinsicht würde nur zu viel Raum im Verhältnisse zu ihrem Interesse kosten. Halten wir uns an das Gesamtergebnis der zweiundzwanzig Gallerien, so folgen sich (ohne Unterscheidung der Abteilungen $h > b$ und $b > h$) nach den kombinierten Werten die fünf untersuchten Klassen in betreff der Häufigkeit der Bilder so: Religiöse, Landschaften, Genre, Mythologische, Stillleben. Das Verhältnis der Landschaften zu Genre insbesondere (2076 : 1477) übersteigt etwas das Verhältnis 4 : 3.

Von Genrebildern sind die, deren Höhe größer als die Breite ($h > b$) etwas zahlreicher als die, deren Breite größer als die Höhe ($b > h$), wogegen bei Landschaften die $b > h$ mehr als sechsmal so zahlreich sind als die $h > b$. Einiges Interesse kann es haben, dass bei religiösen Bildern die $h > b$ ungefähr doppelt so zahlreich sind als die $b > h$, unstreitig, weil der Himmel oft in großer Höhe zur Darstellung zugezogen wird, während bei den mythologischen Bildern umgekehrt die Breite bevorzugt ist, indem der $b > h$ fast doppelt so viel (609 gegen 350) sind als der $h > b$.

Die durchschnittliche Größe ist aus den Werten A_1 oder G_1, die durchschnittliche Schwankung aus den bez. A_1 geltenden η zu ersehen. Der Vergleich von η und A_1 insbesondere zeigt, dass mit der durchschnittlichen Größe auch die durchschnittliche Schwankung wächst, so zwar, dass die verhältnismäßige Schwankung $\eta : A_1$ keine sehr starken Unterschiede nach Klasse und Abteilung aufweist.

Um neben der durchschnittlichen Schwankung auch die extreme Schwankung zu berücksichtigen, gebe ich noch in folgender Tabelle die Extreme E' und $E_,$ sowie die Differenz $U' - U_, = (E' - A_1) - (A_1 - E_,)$. Die außerdem angegebenen Werte E'' und $E_{,,}$ stellen die den Extremen E' und $E_,$ unmittelbar vorangehenden und folgenden Werte der Verteilungstafel vor.

IV. Die extremen Werte und die extreme Schwankung für Genre, Landschaft, Stillleben, Religiöse und Mythologische.

$\mathcal{E} = 1$ cm.

			E'	E''	$E_{,,}$	$E_{,}$	$U'-U_{,}$
Genre	$h>b$	h	223	215	13	12	+ 126
		b	212	162	10	9	+ 134
	$b>h$	h	273	240	12	11	+ 156
		b	401	351	16	16	+ 243
Landschaft	$h>b$	h	300	269	16	14	+ 138
		b	244	240	16	11	+ 117
	$b>h$	h	340	340	7	7	+ 218
		b	464	464	10	10	+ 293
Stillleben	$h>b$	h	241	238	22	22	+ 102
		b	228	190	16	16	+ 120
	$b>h$	h	221	204	17	16	+ 95
		b	343	317	20	19	+ 172
Religiöse	$h>b$	h	1000	610	13	10	+ 739
		b	769	568	8	7	+ 562
	$b>h$	h	666	595	11	11	+ 454
		b	1277	1000	17	17	+ 982
Mythologische	$h>b$	h	411	411	21	21	+ 149
		b	325	324	16	14	+ 131
	$b>h$	h	290	222	14	14	+ 70
		b	510	485	20	17	+ 211

Also betrug z. B. die größte Höhe h, die bei einem Genrebilde $h>b$ vorgekommen ist, 223 cm, die nächst größte 215 cm; die kleinste 12 cm, die nächst kleinste 13 cm; u. s. f. Die absolut größte Höhe und Breite ist bei religiösen Bildern vorgekommen. Der Vergleich der Werte E' und E'' einerseits, $E_{,}$ und $E_{,,}$ andererseits lässt erkennen, dass im allgemeinen die mit den größten Werten abschließenden Teile der primären Verteilungstafeln größere Unregelmäßigkeiten zeigen als die mit den kleinsten Werten beginnenden; nur die Landschaften und Mythologischen scheinen dies nicht zu bestätigen, doch würde auch bei diesen beiden Klassen die Hinzunahme der weiterhin benachbarten Werte den angegebenen Unterschied zwischen dem oberen und dem unteren Ende der Tafel hervortreten lassen.

Zur Beurteilung der Asymmetrie dienen am zweckmäßigsten die u-Werte der Tabelle III. Ihnen zufolge ist die Asymmetrie bez. A überall negativ und stark hervortretend. Auch kann man auf Grund jener Werte bemerken, dass h mit dem zugehörigen b in der Asymmetrie übereinstimmt, indem die geringen Unterschiede, welche die Tabelle dazwischen zeigt, als zufällig betrachtet werden können. Nur bei den Religiösen ist der Unterschied in dieser Beziehung etwas größer; aber die großen Unregelmäßigkeiten dieser Klasse erlauben überhaupt nicht, sichere gesetzliche Bestimmungen daraus zu gewinnen.

Die Werte $U' - U,$ der Tabelle IV bestätigen das Vorhandensein wesentlicher Asymmetrie und bewähren zugleich das Umkehrgesetz für die Asymmetrie von $u = \mu' - \mu,$ und $U' - U,$, indem hier beide Wertenreihen durchweg entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Übrigens lässt schon das weite Auseinanderweichen der Werte A und C in Tabelle III, sowie die Lage von C unterhalb A das Vorhandensein starker Asymmetrie von negativer Richtung erkennen. Der Vergleich von G mit C lehrt ferner, dass die Asymmetrie bez. G weit geringer und für Stillleben $h > b$ sogar von entgegengesetzter Richtung als bez. A ist. Dies hängt damit zusammen, dass G notwendig kleiner als A ist und, da auch C kleiner als A ist, oberhalb oder unterhalb C, jedenfalls aber letzterem Werte näher liegt als A.

§ 174. [Um nun noch das logarithmische Verteilungsgesetz an den Dimensionen der Galleriegemälde zu bewähren, müssen die arithmetisch reduzierten Intervalle der Tafel II in logarithmisch reduzierte umgesetzt werden. Zu diesem Zwecke ist mittelst der in Tabelle IV enthaltenen Angaben über die extremen Werte der Gesamtbereich, innerhalb dessen die beobachteten Maße sich bewegen, und insbesondere der Bereich des Intervalles, auf welches die als »Rest« bezeichneten Maßzahlen sich verteilen, abzugrenzen und sodann die Verteilung der arithmetisch reduzierten Maßzahlen auf die logarithmischen Intervalle interpolationsmäßig zu berechnen.]

[Als Beispiele wähle ich: Genre h; $h > b$ und h; komb., ferner Landschaft h; $b > h$ und Stillleben b; $h > b$ und erhalte so folgende Vergleichstabelle zwischen Theorie und Erfahrung, in welcher das logarithmische Intervall gleich 0,08 mit der untersten Grenze 0,76 = log 5,8 angenommen wurde. In unmittelbarem Anschlusse finden sich die Elemente der vier Beispielstabellen verzeichnet.]

V. Logarithmisch reduzierte Verteilungstafel für Genre, Landschaft und Stillleben.

$i = 0{,}08$.

a	Genre				Landschaft		Stillleben	
	h; $h > b$		h; komb.		h; $b > h$		b; $h > b$	
	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.
0,80					—	0,5		
0,88					3	1		
0,96	—	1	—	2	4	3		
1,04	6	2	11	4	13	6	1	—
1,12	8	6	14	10,5	17	14	1	0,5
1,20	9	14	16	24	19	27	1	1
1,28	20	28	34	47,5	35	49	3	3
1,36	56	49	94	82	84	81	7	7
1,44	68	73	114	123	104	119	9	14
1,52	98	94	164	161	170	159	27	23
1,60	**107**	103	190	183	198	192,5	33	34
1,68	99	99	**191**	184	**217**	210	41	43
1,76	79	88	159	170	216	210	**52**	49
1,84	76	72	145	145,5	196	192,5	50	48
1,92	61	55	110	115,5	147	163	37	39
2,00	30	38	75	85	148	128	27	25
2,08	26	24	78	58	89	93	10	13
2,16	27	14	56	37	68	62	6	6
2,24	3	8	11	22	18	38,5	2	2
2,32	2	4	9	12	14	22	1	0,5
2,40	—	2	6	6	13	12		
2,48	—	1	—	3	11	6		
2,56			—	2	10	3		
2,64					—	2		
$m =$	775	775	1477	1477	1794	1794	308	308

VI. Elemente für Genre, Landschaft und Stillleben nach logarithmisch reduzierter Tafel.

	Genre		Landschaft	Stillleben
	h; $b > b$	h; komb.	h; $b > h$	b; $h > b$
$\mathcal{G}$	1,667	1,697	1,738	1,758
$\mathcal{C}$	1,653	1,683	1,731	1,768
$\mathcal{D}_p$	1,605	1,634	1,712	1,796
$\mathcal{D}_i$	1,602	1,642	1,716	1,788
G	46,5 cm	49,8 cm	54,7 cm	57,3 cm
C	45,0 cm	48,2 cm	53,8 cm	58,6 cm
$\mathcal{T}_p$	40,3 cm	43,1 cm	51,5 cm	62,5 cm
$\mathcal{T}_i$	40,0 cm	43,9 cm	52,0 cm	61,4 cm
u	+125	+231	+112	—36
$e_{,}$	0,160	0,170	0,201	0,176
e'	0,222	0,233	0,227	0,138
p	0,774	0,778	0,731	0,737

[Der Vergleich zwischen den beobachteten und berechneten Werten zeigt, dass die vier K.-G. im Verhältnisse zur Zahl m der zu Grunde gelegten Exemplare ziemlich gleichförmig das logarithmische Verteilungsgesetz bewähren. Insonderheit kann man bemerken, dass die kombinierten Maße für die Höhe von Genre sich ebenso wie die anderen Abteilungen den Forderungen der Theorie fügen; wie denn auch in der Beispielstabelle des Kap. XXI die Maße für $h > b$ und $b > h$ nicht geschieden wurden. Beachtet man überdies, dass dort mit der geringen Zahl $m = 253$ eine hinreichende Bewährung der Theorie erzielt wurde, so erscheint es richtiger, bei der Bildung von Klassen und Abteilungen der Gemälde vorsichtig zu sein, als von einer überaus großen Zahl von Exemplaren eine Beseitigung der Gesetzwidrigkeiten, die durch mangelnde Schärfe der Klassifizierung veranlasst werden, zu erwarten. — Bezüglich der Elemente ist hervorzuheben, dass die empirisch und theoretisch bestimmten dichtesten Werte $\mathcal{D}_i$ und $\mathcal{D}_p$ sich wenig unterscheiden, dass jedoch die Verhältnisse p durchweg unterhalb der theoretischen Grenze $\frac{1}{4}\pi$ liegen. Die Asymmetrie ist für Stillleben bez. $\mathcal{D}$ negativ; somit bez. $\mathcal{G}$ — oder, wie bereits oben bemerkt, bez. G — positiv.]

§ 175. Schließlich sind noch folgende Angaben über die Maßbestimmungen für das Verhältnis von Höhe und Breite und für den Flächenraum von Galleriebildern von Interesse.

Im Kap. XXII wurde dargelegt, dass bei Bestimmung von mittleren Verhältnissen wesentlich bloß das summarische oder geometrische Mittel in Betracht kommt. Halten wir uns nun an die aus Tab. III divisorisch zu gewinnenden geometrischen Mittel der $h:b$ oder $b:h$, indem wir zur Vermeidung echter Bruchzahlen $h:b$ für $h > b$ und $b:h$ für $b > h$ vorziehen, so finden wir folgende Tabelle:

VII. Geometrische Mittel $G\left[\frac{h}{b}\right]$ und $G\left[\frac{b}{h}\right]$ der Verhältnisse von Höhe und Breite.

	$h:b$ $h > b$	$b:h$ $b > h$	$b:h$ komb.
Genre	1,25	1,34	1,02
Landschaft .	1,25	1,38	1,28
Stillleben . .	1,26	1,39	0,99

Diese Bestimmungen enthalten das, wie mir scheint, sehr interessante Resultat, dass das Verhältnis der größeren zur kleineren Dimension bei den verschiedenen Bilderklassen denselben (vom goldenen Schnitt sehr abweichenden) Wert hat — denn die Unterschiede in der Tabelle können als zufällig gelten — einen verschiedenen aber, je nachdem $h > b$ oder $b > h$. Bei $h > b$ verhält sich die Höhe zur Breite merklich genau wie 5 : 4, bei $b > h$ die Breite zur Höhe ungefähr wie 4 : 3.

Weiterhin kann man bemerken, dass, während in den beiden Abteilungen $h > b$ und $b > h$ für sich die Höhe von der Breite in so beträchtlichem Verhältnisse abweicht, hingegen das Verhältnis beider sich in den kombinierten Abteilungen bei Genre und Stillleben fast zur Gleichheit (dem Werte 1) akkommodiert. Allerdings könnte man meinen, da h von b in geringerem Verhältnisse bei $h > b$ als bei $b > h$ abweicht, müsste letzteres in der Kombination den Ausschlag nach seiner Seite geben; aber das kompensiert sich ungefähr dadurch, dass sowohl bei Genre als Stillleben die $h > b$ in größerer Zahl in die Kombination eingehen als die $b > h$. Bei Landschaften hingegen, wo die $b > h$ an Zahl ungeheuer überwiegen, findet eine solche Kompensation nicht statt.

Bei Genre habe ich die geometrischen Mittel von $h : b$ für $h > b$ und $b : h$ für $b > h$ noch nach spezialen Richtungen verfolgt. Die Konstanz dieser Verhältnisse erscheint um so merkwürdiger, wenn man sie für Bilder verschiedener Gallerien besonders untersucht, indem man dabei so angenähert dieselben Werte wiederfindet, dass die Abweichung als zufällig gelten kann, wenn nur jede Gallerie oder Zusammenfassung von Gallerien eine hinreichende Zahl solcher Bilder darbietet, um der Unsicherheit der Bestimmung nicht zu viel Spielraum zu lassen. Dies beweist sich durch folgende Tabelle, in welcher die Exemplare von solchen Gallerien, die nur eine kleine Anzahl von Genrebildern darboten, zur Mittelziehung zusammen genommen sind.

VIII. Geometrische Mittel von $h : b$ und $b : h$ bei Genrebildern verschiedener Gallerien.

	$h > b$		$b > h$	
	m	$G\left[\frac{h}{b}\right]$	m	$G\left[\frac{b}{h}\right]$
Dresden	151	1,28	119	1,33
München a) und b); Frankfurt .	126	1,25	103	1,33
Petersburg	122	1,24	87	1,34
Berlin a) und b)	74	1,22	60	1,36
Paris	62	1,23	82	1,36
Braunschweig und Darmstadt .	57	1,24	58	1,32
Amsterdam und Antwerpen . .	48	1,24	24	1,33
Wien, Madrid, London	48	1,30	97	1,37
Leipzig a) und b)	48	1,29	34	1,32
Brüssel, Dijon, Venedig, Mailand, Florenz	39	1,23	38	1,35
	775		702	

Auch mit dem absoluten Werte der Breite b scheint sich nach der Untersuchung an Genrebildern das Verhältnis zwischen h und b

nicht erheblich zu ändern. Ich finde nämlich folgende geometrische Mittel aus folgenden Zahlen m von Exemplaren zwischen folgenden Größengrenzen:

IX. Geometrische Mittel von $h:b$ und $b:h$ bei verschiedener Größe von b (für Genre).

Intervalle von b	$h > b$		$b > h$	
	m	$G\left[\frac{h}{b}\right]$	m	$G\left[\frac{b}{h}\right]$
0 — 29,5	274	1,27	42	1,32
29,5— 49,5	271	1,23	158	1,29
49,5— 69,5	123	1,23	164	1,32
69,5— 89,5	54	1,23	98	1,36
89,5—109,5	28	1,28	63	1,37
Rest	25	1,23	177	1,39

Für die geometrischen Mittel der Flächenräume hb erhält man folgende Werte in qcm.

X. Geometrische Mittel von hb.

$\mathfrak{E} = 1$ qcm.

	$h > b$	$b > h$	komb.
Genre	1747	3874	2550
Landschaft . .	4303	4098	4128
Stillleben . . .	4189	5018	4496

Das arithmetische Mittel der hb habe ich wegen der großen Mühseligkeit seiner Bestimmung bloß für Genre $h > b$ bestimmt und 3289 qcm gefunden, was, wie man sieht, von dem geometrischen Mittel außerordentlich abweicht.

Unter den gesamten 10558 Bildern, welche in Tab. II eingegangen sind, sind die drei größten im Flächenraume drei Bilder von Paul Veronese, sämtlich Gastmahle darstellend, bei denen Christus gegenwärtig war, nämlich:

Gastmahl bei Levi (Luc. V)	$h = 595$ cm	$b = 1277$ cm	(Venedig; Nr. 547)
Hochzeit zu Kana	$h = 666$ -	$b = 990$ -	(Paris; - 103)
Gastmahl beim Pharisäer	$h = 515$ -	$b = 1000$ -	(Venedig; - 513).

Die drei kleinsten Bilder sind drei Landschaften auf Kupfer, zwei gleich große angeblich von Paul Brill: $h = 7{,}4$ cm, $b = 9{,}1$ cm (ältere Pinakothek zu München; 2. Abt. 244 *a* u. *c*) und eine von Jan Breughel: $h = 7{,}4$ cm, $b = 9{,}9$ cm (Mailand Nr. 443); wonach der Flächenraum zwischen 67,34 und 759815 qcm variiert oder das größte Bild 11283 mal das kleinste Bild aufzunehmen vermag.

Quadratische Bilder kamen unter den 10558 zur Untersuchung zugezogenen Bildern nur 84 d. i. 1 auf 126 vor.

XXVII. Kollektivgegenstände aus dem Gebiete der Meteorologie.

§ 176. [Die täglichen Regenhöhen für Genf. — Eine Untersuchung der Genfer Regenverhältnisse hat bereits PLANTAMOUR in seinen »Nouvelles études sur le climat de Genève« in dem Abschnitt »de la pluie« gegeben[1]). Er stützt sich dabei auf die fünfzigjährigen Beobachtungen der Regenhöhen und Regentage während der Jahre 1826—1875. Da er jedoch seinen Berechnungen nur Monatswerte für die Häufigkeit und Menge des Regens zu Grunde legt, und sein Ziel die gesetzmäßige Verteilung des Regens im Verlaufe des Jahres, sowie der Charakter der einzelnen Monate des Jahres hinsichtlich ihrer Trockenheit oder Feuchtigkeit bildet, kann die folgende Untersuchung nicht in Anlehnung an diejenige PLANTAMOUR's geführt werden. Denn hier handelt es sich um den Nachweis der Asymmetrie und um Bewährung des logarithmischen Verteilungsgesetzes für die Regenhöhen, wofür die 50-jährigen Monatswerte bei den überaus großen Schwankungen zwischen den einzelnen Werten keineswegs ausreichen. Es muss vielmehr auf die täglichen Regenhöhen zurückgegangen werden.]

[Das Untersuchungsmaterial findet sich in den Archives des sciences physiques et naturelles der Bibliothèque universelle de Genève unter den allmonatlich gegebenen meteorologischen Tabellen. Dort ist für jeden Regentag die Regenhöhe in Millimetern, und zwar bis auf Zehntelmillimeter, unter der Überschrift: »Eau tombée dans les 24 heures«, verzeichnet. Auf die Form des Niederschlags, ob

---

1) [Publiziert in: Mémoires de la société de physique et d'histoire naturelle de Genève. Tome XXIV; II. Partie. Genève 1875—76. S. 397—658.]

Regen oder Schnee, wird dabei keine Rücksicht genommen[1]). Ich wählte jedoch nicht den von PLANTAMOUR behandelten Zeitraum, sondern die Reihe der 48 Jahre von 1845—1892. Denn vom Jahre 1846 ab wurde ein neuer Apparat benutzt, und es kam gleichzeitig eine sorgfältigere Bestimmung der Regenhöhe, unmittelbar nach Aufhören des Regenfalles, statt wie bis dahin nur einmal des Tages gelegentlich der letzten Beobachtung am Abende, in Übung.[2])]

[Das Aussehen der primären Verteilungstafeln wird aus folgender Probe ersichtlich, die für den Monat Januar den Anfang, einen mittleren Teil und den Schluss der beobachteten Werte angiebt:

I. Probe aus der primären Verteilungstafel für die Regenhöhen des Monats Januar.

$m = 477$; $i = 0{,}1$ mm.

a	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*	*a*	*z*
mm		mm		mm		mm	
0,0	16	5,0	3	6,1	6	19,6	1
0,1	9	5,1	2	6,2	2	19,7	1
0,2	18	5,2	2	6,3	5	19,8	1
0,3	19	5,3	5	6,4	5	21,4	1
0,4	9	5,4	1	6,5	1	21,6	1
0,5	10	5,5	2	6,6	1	21,8	1
0,6	11	5,6	4	6,7	2	23,6	2
0,7	18	5,7	5	6,8	1	28,4	1
0,8	8	5,8	1	6,9	1	30,4	1
0,9	10	5,9	4	7,0	2	32,7	1
1,0	10	6,0	1	7,1	4	40,0	1

1) [PLANTAMOUR sagt a. a. O. (S. 627): Les chutes de neige sont en général très-peu abondantes à Genève, et la neige ne recouvre ordinairement le sol que pendant un petit nombre de jours, rarement plus de quinze jours.]

2) [Diesbezüglich macht PLANTAMOUR a. a. O. (S. 627) folgende Angabe: A partir de l'année 1846 on s'est servi d'un nouvel appareil, dont l'entonnoir avait un diamètre beaucoup plus considérable, 37 centimètres, le vase de jauge est une éprouvette graduée de la capacité d'un litre, portant 100 divisions, ce qui correspond à une chute d'eau de 10 millimètres, chaque division correspondant ainsi à un dixième de millimètre; de plus, on avait le soin de recueillir et de mesurer l'eau immédiatement après que la pluie avait cessé.]

In der That zeigen alle Monate im Intervalle 0 — 1 mm die stärkste Häufung, aber schon von 2 mm ab findet man eine rasche Abnahme der Werte, die nach längerem unentschiedenen Schwanken sehr unregelmäßige Endabteilungen mit zerstreuten *a* bilden. Die Erstreckung der letzteren variiert jedoch für die einzelnen Monate in hohem Maße, indem sie für den Februar mit 31,3 mm, für den Oktober dagegen erst mit 97,6 mm abschließt, während ihr Beginn für jenen Monat etwa auf 12 mm, für diesen auf 18 mm zu legen ist. Für den Monat Januar sind die Grenzen dieser Endabteilung 12 mm und 40 mm.]

[Diese allgemeinen Angaben lassen schon das Vorhandensein einer überaus starken Asymmetrie für alle Monate des Jahres erkennen. Dieselbe tritt zugleich mit dem Gange der Hauptwerte im Verlaufe des Jahres in der folgenden Tabelle der Elemente mit voller Deutlichkeit hervor:

II. Elemente der Regenhöhen für die einzelnen Monate des Jahres nach primären Verteilungstafeln.

$\mathfrak{S} = 1$ mm.

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
m	477	437	532	621	637	596	521	531	497	617	572	505
A_1	4,45	4,17	4,60	4,94	6,12	6,58	6,95	7,93	8,46	8,49	6,09	4,97
C_1	2,5	2,1	2,6	3,0	3,6	3,3	3,8	4,1	4,6	4,9	3,3	3,0
η	3,82	3,79	4,03	4,14	5,24	5,93	6,11	7,10	7,57	7,49	5,23	4,11
$\eta : A_1$	0,86	0,91	0,88	0,84	0,86	0,90	0,88	0,90	0,89	0,88	0,86	0,83
E'	40,0	31,3	51,0	38,3	80,7	82,5	60,6	61,1	82,6	97,6	56,7	40,0
$U'-U_,$	+31,1	+23,0	+41,8	+28,4	+68,5	+69,3	+46,7	+45,2	+65,7	+80,6	+44,5	+30,1
u	−131	−167	−164	−197	−195	−196	−177	−189	−177	−209	−168	−141
$u : m$	0,27	0,38	0,31	0,32	0,31	0,33	0,34	0,36	0,36	0,34	0,29	0,28

Die Werte der unteren Extreme $E_,$ sind hier nicht aufgenommen worden, da sie durchweg gleich 0,0 mm sind. Sie kommen überall, wie die obige Probe zeigt, in mehrfacher Auflage vor.]

[Das Auseinanderweichen der Werte von A und C um 2 bis 4 mm einerseits, die Differenzen $U' - U_, = (E' - A) - (A - E_,)$ andererseits und insbesondere die Differenzen $u = \mu' - \mu_,$ beweisen übereinstimmend das Vorhandensein wesentlicher Asymmetrie bez. A_1 für alle Monate des Jahres. Dieselbe ist, dem Vorzeichen der u gemäß, überall negativ und zeigt auch hinsichtlich ihrer Größe keine erheblichen Schwankungen; denn die relativen Werte der u bez. m, d. i. $u:m$, sind beinahe konstant, und ihre geringen Unterschiede verraten keinen gesetzmäßigen Gang, so dass sie als zufällig zu gelten haben.]

[Weiterhin verdient der Gang der m, A und η in obiger Tabelle beachtet zu werden. Aus den m-Werten folgt, dass die Häufigkeit des Regens zwei Perioden im Verlaufe des Jahres besitzt, deren Minima die Monate Februar und Juli, und deren Maxima die Monate Mai und Oktober bilden, während dazwischen ein ständiges Steigen oder Fallen stattfindet. Nur der September durchbricht die Regelmäßigkeit; diese Störung ist jedoch als zufällig zu betrachten, da sie für die aus Plantamour's Tabellen[1]) zu entnehmenden m-Werte der Jahre 1826—1875 fehlt, wofür dann der Monat Januar störend auftritt. Dies ist aus folgender vergleichender Zusammenstellung der m-Werte für die Zeiträume 1826—1875 und 1845—1892 zu ersehen, wobei die Reihenfolge der Werte von links nach rechts der Reihenfolge der Monate von Januar bis zum Dezember entspricht:

1826—1875	505	413	496	525	589	532	471	503	521	576	539	454
1845—1892	477	437	532	621	637	596	521	531	497	617	572	505

Im Gegensatze zu den m zeigen die A nur eine Periode, die ohne Störung verläuft und ihr Minimum im Februar, ihr Maximum im Oktober hat. Damit parallel gehen die Werte der η, d. i. der mittleren Abweichungen bez. A, deren Minimum gleichfalls auf den Februar fällt, während sie ihr Maximum einen Monat früher, im September, erreichen. Die großen Werte der η, die den A selbst durchweg sehr nahe kommen, lassen die Stärke der Schwankungen, die zwischen den einzelnen Regenhöhen statt hat, erkennen. Die verhältnismäßige mittlere Schwankung ist, wie die Werte $\eta:A$ angeben, annähernd konstant, gleich 0,9.]

---

1) A. a. O. S. 628.

[Hiernach wächst die Durchschnittshöhe des Regens während des Jahres vom Februar bis zum Oktober, um von da ab wieder bis zum Februar zu fallen. Ein richtiges Bild von der Verteilung des Regens auf die einzelnen Monate erhält man aber auf diesem Wege nicht. Denn hierbei kommt auch die Häufigkeit der Niederschläge in Betracht. Verteilt man dementsprechend die Gesamtmenge des Regens, die in einem Monat während des 48-jährigen Zeitraumes vorkommt, nicht auf die einzelnen, wirklich statt gehabten Regentage, sondern auf alle Tage überhaupt, so erhält man auch für die Regenmenge, ebenso wie für die Häufigkeit des Regens, innerhalb des Jahres eine zweifache Periodizität, wie sie PLANTAMOUR nachgewiesen hat. Man findet nämlich für die einzelnen Monate des Jahres folgende Regenmengen durchschnittlich für jeden Tag des Monates, wobei wiederum den für den Zeitraum 1845—1892 geltenden Werten die von PLANTAMOUR für 1826—1875 gefundenen Werte zum Vergleiche gegenübergestellt werden, und die Reihe der Werte von links nach rechts der Reihe der Monate vom Januar bis zum Dezember entspricht:

1826—1875	1,57	1,29	1,52	1,89	2,55	2,53	2,29	2,59	3,14	3,26	2,47	1,65
1845—1892	1,42	1,34	1,64	2,13	2,62	2,72	2,43	2,83	2,92	3,52	2,42	1,68

In der That fallen hier die beiden Minima übereinstimmend auf die Monate Februar und Juli; das erste Maximum schwankt zwischen Mai und Juni, während das zweite Maximum beidenfalls dem Oktober angehört[1].]

[Um nun das logarithmische Verteilungsgesetz an den Regenhöhen zu bewähren, wähle ich die vier Monate Januar, April, Juli und Oktober, die einen vollständigen Einblick in die auftretenden Verhältnisse gestatten. Der logarithmisch reduzierten Verteilungstafel werden ebenso wie der arithmetisch reduzierten die primären

1) [Hinsichtlich dieser zweifachen Periodizität sagt PLANTAMOUR a. a. O. (S. 640): »Cette division de l'année en deux saisons humides et deux saisons sèches, l'une de celles-ci tombant sur l'été, accuse très-nettement l'influence du climat méditerranéen; en effet, le caractère du climat méditerranéen est la sécheresse de l'été, tandis que dans les autres régions de l'Europe continentale, l'été n'est pas une saison sèche.«]

Tafeln direkt zu Grunde gelegt. Sollen aber beim Übergange zu den logarithmischen Intervallen die Werte 0,0 mm, denen der logarithmische Wert $-\infty$ entsprechen würde, nicht aus der Tafel verschwinden, so muss eine Festsetzung über die Auffassung der mit diesen Werten verzeichneten Regentage getroffen werden. Da nun dieses Maß der Regenhöhe offenbar einen wirklich stattgefundenen, jedoch verschwindend geringen Niederschlag von weniger als 0,1 mm Höhe andeuten soll, erscheint es gerechtfertigt, statt 0,0 vielmehr 0,05 mm zu setzen. Zur Milderung dieser Willkürlichkeit wird zugleich $\log 0{,}05 = -1{,}3$ als Grenze des ersten und zweiten logarithmischen Intervalles gewählt, so dass durchweg die eine Hälfte jener Werte in das erste auftretende Intervall, die andere Hälfte in das nächstfolgende fällt. Die Größe der logarithmischen Intervalle ferner wurde gleich 0,2 festgesetzt. Somit schwanken die a-Werte zwischen den Grenzen 0 und 100 mm, die logarithmischen a-Werte dagegen zwischen den Grenzen $-1{,}5$ und $+2{,}1$, wie aus den folgenden Verteilungstafeln zu ersehen. In der logarithmischen Tafel sind zugleich die theoretischen Werte, wie sie das Gesetz hergiebt, angegeben. Im unmittelbaren Anschlusse werden die Elemente aufgeführt:

III. Arithmetisch reduzierte Tafel der Regenhöhen für Genf während der Monate Januar, April, Juli, Oktober 1845—1892.

Intervalle	Januar	April	Juli	Oktober
mm				
0— 1	133	164,5	112,5	125
1— 2	88	81	78,5	72,5
2— 3	43,5	65	31	60
3— 4	28	49,5	48	31
4— 5	27	51	28	24,5
5— 6	28	20,5	28,5	39
6— 7	27,5	37,5	23	26
7— 8	14,5	25	23,5	19,5
8— 9	16	22	15,5	26,5
9—10	11,5	15,5	11,5	14
10—11	12	16	13	21
11—12	10	15	14	12,5
12—13	6,5	9	10	14,5
13—14	5,5	8,5	8	10,5
14—15	3	3,5	9	11,5
15—16	3	5,5	5	13
16—17	2	3,5	3,5	8,5
17—18	5	3,5	5,5	9
18—19	1	4	3	4,5
19—20	3	3	7	6,5
20—25	5	6	17	22
25—30	1	8	12	17,5
30—40	2,5	4	9	17
40—50	0,5	—	3	2
50—70	—	—	2	6
70–100	—	—	—	3
$m =$	477	621	521	617

IV. Logarithmisch reduzierte Tafel der Regenhöhen für Genf während der Monate Januar, April, Juli, Oktober 1845—1892.

$i = 0{,}2$.

a	Januar		April		Juli		Oktober	
	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.
—	—	5	—	2	—	1	—	3
— 1,4	8	4	10	2	4	2	1	3
— 1,2	8	6	10	5	4	4	1	5
— 1,0	9	9	17	8	12	7	17	7
— 0,8	9	14	10,5	13	9	11	10,5	11
— 0,6	28	19	30,5	21	20	16	23,5	17
— 0,4	14	26	18,5	31	11,5	23	22,5	24
— 0,2	34	34	33,5	42,5	28,5	31	22,5	32
0	45	42	62	55,5	50	39	47	42
+ 0,2	66	50	53,5	68	52	49	52,5	51
+ 0,4	47	56	72,5	78	38	57	65,5	61
+ 0,6	53	60	95	85	72	63	52	69
+ 0,8	67	63	80	85	68	66	80	74
+ 1,0	53	52	74	67	64	64[1])	82	77
+ 1,2	27	27	36	38	45	47	72	69
+ 1,4	7	8	14	15	31	26	42	44
+ 1,6	2	2	4	4	10	11	17	20
+ 1,8			—	1	2	3	6	6,5
+ 2,0					—	1	3	1,5
m =	477	477	621	621	521	521	617	617

1) [Wenn hier auf das theoretisch dichteste Intervall 0,9—1,1, das den dichtesten Wert $\mathfrak{D}_p$ einschließt, weniger Werte fallen als auf das vorhergehende, so beruht dies nicht auf einem Versehen, sondern auf der Zusammenfassung der theoretischen Werte in die vorgegebenen Intervalle. Werden beide Intervalle in je vier gleiche Teilintervalle von der Größe 0,05 gesondert, so erhält man an Stelle von 66 und 64 vielmehr:

| 16,2 ; 16,3 ; 16,6 ; 16,6 | und | 16,7 ; 16,4 ; 15,6 ; 14,9 | ,

so dass nun in der That das Maximum 16,7 auf das mit $\mathfrak{D}_p$ behaftete Teilintervall 0,9—0,95 fällt.]

V. Elemente der Regenhöhen nach logarithmisch reduzierter Tafel.

	Januar	April	Juli	Oktober
$\mathfrak{G}$	0,313	0,387	0,484	0,563
$\mathfrak{C}$	0,374	0,479	0,588	0,675
$\mathfrak{D}_p$	0,843	0,762	0,901	1,046
$\mathfrak{D}_i$	0,800	0,620	0,679	0,933
G	2,06 mm	2,44 mm	3,05 mm	3,66 mm
C	2,37 mm	3,02 mm	3,87 mm	4,73 mm
$\mathfrak{T}_p$	6,97 mm	5,78 mm	7,97 mm	11,1 mm
$\mathfrak{T}_i$	6,31 mm	4,17 mm	4,77 mm	8,58 mm
u	−261	−255	−218	−293
$e_{,}$	0,749	0,645	0,707	0,750
e'	0,219	0,270	0,290	0,267
p	0,885	0,755	0,751	0,772

Den starken Unregelmäßigkeiten der empirischen Werte entsprechend zeigen sich auch zwischen den empirischen und theoretischen Werten mitunter erhebliche Differenzen, die sich jedoch beim Zusammennehmen benachbarter Intervalle mildern. Dieselben sind daher als unwesentliche Störungen aufzufassen, so dass die theoretischen Werte eine Ausgleichung der Zufälligkeiten, die den empirischen Werten anhaften, darstellen. Bemerkenswert ist bezüglich der Elemente, dass G unterhalb C und somit, mit Rücksicht auf die Tabelle II, C zwischen G und A liegt. Auch hierdurch beweist sich die überaus große Schwankung der Regenhöhen. Damit hängt ferner zusammen, dass die u-Werte bez. $\mathfrak{D}_p$ ebenso wie die u-Werte bez. A_1 negativ sind. Der relative Wert der Asymmetrie bez. $\mathfrak{D}_p$, d. i. $u : m$, ist wiederum ziemlich konstant und im Durchschnitte gleich 0,46.]

§ 177. [Die Barometerabweichungen vom Normalstande für Utrecht. — Die Asymmetrie der Barometerabweichungen ist bekannt. QUETELET sagt diesbezüglich[1]): »On a reconnu,

---

1) [Lettres sur la théorie des probabilités, S. 168. — Hierzu ist es von Interesse, die von QUETELET in den angehängten Noten mitgeteilten brieflichen

depuis longtemps, que l'abaissement du mercure au-dessous de la moyenne est en général plus grand que son élévation au-dessus de ce terme«. Es ist hiernach positive Asymmetrie bez. A durchweg oder wenigstens in der Mehrzahl der Fälle zu erwarten. Um dies zu erproben und zugleich das zweiseitige G. G. an den Barometerabweichungen zu bewähren, entnehme ich dem Niederländischen Jahrbuche für Meteorologie[1]) die in der Abteilung »Thermo- en Barometer-afwijkingen« mitgeteilten Abweichungswerte vom monatlichen Normalstande, für den Beobachtungsort »Utrecht« und die Beobachtungszeit »2 Uhr nachmittags«, während des zehnjährigen Zeitraumes von 1884 bis 1893. Ich gebe jedoch diese Werte nicht für alle Monate, sondern nur für Januar, April, Juli und August. Ich teile ferner lediglich die reduzierten Verteilungstafeln, sowie die aus ihnen berechneten Elemente mit. Dabei genügt es, die arithmetische Behandlungsweise zu Grunde zu legen; denn der Schwankungsbereich der Abweichungswerte ist nicht so groß, dass die Mühe der logarithmischen Behandlung sich lohnen würde. Es wurden daher auch die den empirischen Werten beigegebenen theoretischen Vergleichswerte aus dem arithmetischen zweiseitigen Verteilungsgesetze abgeleitet. Die Wahl des reduzierten $i = 3$ mm an Stelle des primären $i = 0{,}1$ mm wurde durch die extreme Schwankung des Januar veranlasst. Der einheitlichen Darstellbarkeit wegen wurde dieses Intervall auch für die drei anderen Monate beibehalten. Noch ist zu bemerken, dass im Niederl. Jahrbuche der 31. Januar (wie auch der 1. März) dem

---

Äußerungen von Bravais über verschiedene Formen möglicher Wahrscheinlichkeitsgesetze zu vergleichen, weil sie zeigen, dass auch Bravais ebenso wie Quetelet selbst die Möglichkeit eines asymmetrischen Verteilungsgesetzes zwar einsah, dabei jedoch dem Mittelwerte irrtümlicherweise die Rolle des dichtesten Wertes zuerteilte und somit die Auffassung des asymmetrischen Gesetzes prinzipiell verfehlte. Die diesbezügliche Stelle des Bravais'schen Briefes lautet (a. a. O. S. 413): »On sait que les plus grands écarts du baromètre vers le haut de la colonne, ne sont guère que la moitié ou les 2/3 des écarts du baromètre vers le bas; de sorte que l'on aura une courbe de possibilité de la forme . . . dont les deux moitiés ne seront pas symmétriques; seulement l'ordonnée moyenne doit toujours partager le segment total en deux aires égales.«].

1) [Meteorologisch Jaarboek uitgegeven door het Kon. Nederlandsch Meteorologisch Instituut.]

Februar beigezählt wird, woraus sich die für den Januar geltende Gesamtzahl von 300 statt 310 Beobachtungswerten erklärt.]

[Die gewonnenen Resultate sind in den beiden folgenden Tabellen enthalten:

VI. Reduzierte Tafel der Barometerabweichungen vom Normalstand für Utrecht, mittags 2 Uhr, während der Monate Januar, April, Juli und Oktober 1884—1893.

$\mathfrak{E} = 1$ mm; $i = 3$.

a	Januar		April		Juli		Oktober	
	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.
— 33	1	0,5						
— 30	1	0,5						
— 27	1	1					—	0,5
— 24	2	2					2	1
— 21	4	4	1	0,5			2	3
— 18	6	6	1	2	—	1	8	6
— 15	9	9	6	5,5	2	3	11	12
— 12	16	13,5	16,5	14	12,5	9	23	20,5
— 9	11,5	19	22	28	20,5	21	22	30
— 6	25,5	24	42	43,5	32	39	42	38
— 3	31	30	59	54	63,5	58,5	42,5	41
0	31	34,5	50	53	70	69	34,5	40
+ 3	39,5	38	48,5	43	57	60,5	32	35
+ 6	44,5	39	26	29	44,5	34	30	29
+ 9	31	34	19	16	7	12	26	21
+ 12	22	24	7	7,5	1	3	27	14
+ 15	17	13	1	3			5	9
+ 18	7	5,5	1	1			3	5
+ 21	—	2					—	3
+ 23	—	0,5					—	2
m =	300	300	300	300	310	310	310	310

VII. Elemente der Barometerabweichungen.

$\mathfrak{i} = 1$ mm.

	Januar	April	Juli	Oktober
Normalstand	760,16	759,64	760,62	759,01
A_2	+ 1,01	— 1,22	— 0,76	— 0,93
C_2	+ 2,34	— 1,35	— 0,45	— 1,28
D_p	+ 6,06	— 1,82	+ 0,71	— 2,60
D_i	+ 5,31	— 2,54	— 0,45	— 4,32
η[1]	7,72	5,15	4,05	7,15
$\varepsilon_,$	9,86	4,86	4,93	6,31
ε'	4,81	5,47	3,46	7,98
u	+ 32	— 5	+15	— 7
u	—103	+18	—54	+36
p	0,737	0,783	0,789	0,790

Hier zeigt sich nun das Vorhandensein wesentlicher Asymmetrie zugleich mit der Gültigkeit des zweiseitigen G. G. einerseits an der Übereinstimmung der empirischen und theoretischen Werte und andererseits an der Lage der Hauptwerte A, C, D_p, D_i, an den Verhältniswerten p, sowie den Werten von u und u. Zugleich erhellt dass die Successionsabhängigkeit, deren Bestehen im XXIII. Kap. insbesondere für die Barometerabweichungen des Januar zahlenmäßig nachgewiesen wurde, die Bewährung der Verteilungsgesetze jedenfalls nicht unmöglich macht. Indessen lehren die Werte von u und u übereinstimmend, dass die Asymmetrie im Verlaufe des Jahres keineswegs konstant ist. Vielmehr verrät sich ein gesetzmäßiger Gang im Verlaufe des Jahres, wonach die starke Asymmetrie des Winters und die weniger starke des Sommers durch eine verschwindende oder ins Gegenteil umschlagende im Frühjahre und Herbste unterbrochen wird. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass die vier Monate nicht ausreichen, um ein vollständiges Bild für das ganze

1) [Die Werte der η wurden, ohne Rücksicht auf die A_2 und die hieraus ersichtliche geringe Abweichung des zehnjährigen Mittels vom Normalstande, als Durchschnittswerte der Abweichungen vom Normalstande berechnet.]

Jahr mit Sicherheit zu gewinnen. Immerhin wird der Schluss gestattet sein, dass die Asymmetrie während der Wintermonate am stärksten ist und im Verlaufe des Jahres wenigstens die Tendenz zu den angegebenen Schwankungen zeigt. — Auch die Mittelwerte η lassen einen gesetzlichen Verlauf erkennen, wonach die Abweichungen vom Normalstande — wie übrigens schon das Aussehen der Verteilungstafeln zeigt — im Winter durchschnittlich am stärksten, im Sommer am schwächsten sind. Den Gang des Normalstandes selbst, der als Mittel aus vieljährigen Beobachtungen gewonnen wurde, zeigt folgende Zusammenstellung:

Monat	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
Normalstand	760,16	760,62	760,61	759,64	760,09	760,78

Monat	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember
Normalstand	760,62	760,42	760,71	759,01	759,30	760,34

Somit kommt im Januar der Normalstand dem jährlichen Durchschnittswerte 760,19 sehr nahe; im April und Oktober ist er kleiner, im Juli dagegen größer als der Jahresmittelwert.]

§ 178. [Die Thermometerabweichungen vom Normalstande für Utrecht. — In entsprechender Weise, wie es für die Barometerabweichungen geschah, soll nun auch für die Abweichungen des Thermometers vom Normalstande die Asymmetrie untersucht und die Gültigkeit des zweiseitigen G. G. bei arithmetischer Behandlung nachgewiesen werden. Hierzu werden wiederum dem Niederl. Jahrbuche für Meteorologie die für Utrecht während der Jahre 1884—1893, nachmittags 2 Uhr, in den Monaten Januar, April, Juli und Oktober beobachteten Abweichungswerte vom vieljährigen Mittel entnommen. Die Werte sind in Graden der 100-teiligen Skala, und zwar bis auf Zehntelgrade angegeben. Sie beziehen sich jedoch für den Verlauf eines Monats nicht wie die Barometerabweichungen auf den Mittelwert des ganzen Monats, sondern, um dem lebhafteren Gange der Mitteltemperatur Rechnung zu tragen, auf die Normalwerte der ersten, zweiten und dritten Dekade des jeweiligen Monats. Das Steigen und Fallen der letzteren während des Jahres zeigt folgende Zusammenstellung:

Monat		Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
Normal-stand	1. Dekade	+ 2°,78	3°,97	6°,56	9°,88	15°,15	18°,97
	2. »	+ 2°,73	4°,95	7°,43	12°,46	16°,15	19°,86
	3. »	+ 3°,30	5°,94	8°,45	14°,26	17°,25	20°,37

Monat		Juli	August	Septbr.	Oktbr.	Novbr.	Dezbr.
Normal-stand	1. Dekade	+ 20°,86	21°,28	19°,05	15°,52	8°,65	4°,71
	2. »	+ 21°,30	20°,94	18°,07	13°,22	6°,82	3°,82
	3. »	+ 21°,50	20°,32	17°,13	10°,94	5°,72	3°,23

Hiernach ist der mittlere Normalstand für Januar, April, Juli und Oktober der Reihe nach: 2°,94; 12°,20; 21°,22 und 13°,23.]

[Bestimmt man nun die Größe des reduzierten Intervalles gleich 1°, so erhält man folgende Ergebnisse:

VIII. Reduzierte Tafel der Thermometerabweichungen vom Normalstande für Utrecht, nachmittags 2 Uhr, während der Monate Januar, April, Juli, Oktober 1884—1893.

$\mathcal{E} = 1^{\circ}$ Celsius; $i = 1$.

a	Januar		April		Juli		Oktober	
	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.
— 12	—	1						
— 11	—	1,5						
— 10	2,5	2,5	—	1	1	—		
— 9	4,5	4	2	2,5	1	1	2	0,5
— 8	3,5	6	2	5	1	3	1	1,5
— 7	10	8	11,5	9,5	7,5	7	2	4
— 6	13,5	11	21,5	15	6	13	12,5	11
— 5	18	15	25	22	21	21	20	21
— 4	20,5	19	15,5	26	31,5	29	26,5	32
— 3	26	22,5	37,5	28	38	34	45,5	40
— 2	22,5	26	28	28	48	36	41,5	41
— 1	23,5	28	32	26	38	34	33	38
0	31	30	18	24,5	25	31	42	34
+ 1	25,5	30	17,5	22	14,5	27	27	27
+ 2	32,5	27,5	15	19,5	27	22	24,5	21
+ 3	22,5	23	12	16,5	10,5	17	9,5	15
+ 4	15	17,5	16,5	14	11,5	12,5	5	10
+ 5	14	12	10	11	7	8,5	10	6
+ 6	8,5	7,5	12,5	9	8,5	6	3,5	4
+ 7	4	4,5	5,5	6	4	4	1,5	2
+ 8	1,5	2	6,5	5	5	2	3	1
+ 9	1	1	4,5	3	1,5	1	—	1
+ 10	—	0,5	2	2	2	1		
+ 11			3	2	0,5	—		
+ 12			2	1				
+ 13			—	1				
+ 14			—	0,5				
m =	300	300	300	300	310	310	310	310

IX. Elemente der Thermometerabweichungen.

$\mathfrak{S} = 1^\circ$ Celsius.

	Januar	April	Juli	Oktober
mittl. Normalstand	+ 2,94	+ 12,20	+21,22	+13,23
A_2	− 0,58	− 0,50	− 0,89	− 1,11
C_2	− 0,32	− 1,28	− 1,50	− 1,38
D_p	+ 0,61	− 3,11	− 2,37	− 2,49
D_i	+ 0,08	− 2,80	− 2,00	− 2,67
η [1])	3,17	3,71	3,08	2,59
$e_,$	3,76	2,09	2,01	1,68
e'	2,57	4,70	3,49	3,06
u	+19	− 50	−46	−18
u	−57	+115	+84	+91
p	0,782	0,701	0,588	0,804

Auch hier ist die Ubereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung befriedigend, wenn auch, der relativ kleineren Reduktionsstufe entsprechend, anscheinend weniger gut als für die Barometerabweichungen. Die Asymmetrie ist nur für den Januar positiv bez. A; für die drei anderen Monate dagegen negativ. Jene Ausnahme könnte nun als zufällig angesehen werden, da der beobachtete u-Wert überdies klein ist. Da sich jedoch auch für den Dezember, den ich diesbezüglich zum Vergleiche heranzog, die nämliche Richtung der Asymmetrie, wiederum mit einem ähnlich schwachen Werte, wie für den Januar ergab, so darf man wohl annehmen, dass die Asymmetrie während des größten Teiles des Jahres negativ bez. A ist, während des Winters dagegen dem Nullwerte sich nähert mit der Neigung, ins Positive umzuschlagen. Schließlich verdient noch Erwähnung, dass die durchschnittliche Schwankung η für die untersuchten Monate (und wohl auch für das ganze Jahr) ziemlich konstant ist.]

§ 179. [Die täglichen Variationen der Temperatur für Utrecht. — Während die Thermometerabweichungen auf eine bestimmte Stunde des Tages (2 Uhr nachmittags) sich beziehen, geben

1) [Die η beziehen sich hier, wie bei den Barometerabweichungen, auf den Normalstand.]

die täglichen Variationen die Differenzen zwischen Maximum und Minimum der Tagestemperaturen an. Ihre kollektive Behandlung nach arithmetischem Prinzip hat auf Grund der Bemerkungen in § 21 ein doppeltes Interesse. Denn sie können als frei von Successionsabhängigkeit gelten und gestatten somit eine ungehinderte Bewährung der Verteilungsgesetze. Sie wurden ferner von QUETELET als Unterlage für die Erörterung der Asymmetrie benutzt; es ermöglicht daher der Vergleich zwischen der Behandlung dieser K.-G. nach zweiseitigem G. G. und den Darlegungen QUETELET's in den »Lettres sur la théorie des probabilités« einen unmittelbaren Einblick, in wie weit die Theorie QUETELET's unvollständig oder unzutreffend ist.]

[Zunächst teile ich in den beiden folgenden Tabellen die erhaltenen Resultate mit. Das Untersuchungsmaterial wurde wie für die Barometer- und Thermometerabweichungen dem Niederländischen Jahrbuche für den Zeitraum 1884—1893 und den Beobachtungsort Utrecht unter Beschränkung auf die Monate Januar, April, Juli und Oktober entnommen. Man findet es dort in der Abteilung »driemaaldaagsche Waarnemingen« unter der Rubrik »Temperatuur«. Als reduziertes Intervall wurde (wie in den entsprechenden, von QUETELET für Brüssel gegebenen Verteilungstafeln) 1° Celsius gewählt:

X. Reduzierte Tafel der täglichen Variationen der Temperatur für Utrecht während der Monate Januar, April, Juli, Oktober 1884—1893.

$\mathfrak{G} = 1^{\circ}$ Celsius; $i = 1$.

a	Januar		April		Juli		Oktober	
	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.
—	—	1						
0,5	3,5	5	—	2	1	—	—	1
1,5	22,5	22	4	4	0	0,5	6	5
2,5	49	48	5,5	8	2,5	2	21	18,5
3,5	**62**	59	18,5	16	8	8,5	32,5	41
4,5	51	53	33,5	25	18,5	24	**65,5**	58
5,5	48	43	29,5	34	47,5	43	54	57
6,5	29,5	31	38	40	55	54	48	48
7,5	16,5	19	**38,5**	40	**56,5**	52	37,5	35
8,5	7,5	11	37	36	43	44	25,5	23
9,5	4,5	5	31	30	29	33	8,5	13
10,5	4	2	17	23	21,5	22,5	7	6
11,5	0	1	24,5	17	15	13,5	4,5	3
12,5	0	—	11	11	4,5	7	—	1,5
13,5	2	—	10	7	5	3,5		
14,5			1	4	2	1,5		
15,5			0	2	1	1		
16,5			1	1				
$m =$	300	300	300	300	310	310	310	310

XI. Elemente der täglichen Variationen der Temperatur.

$\mathfrak{G} = 1^{\circ}$ Celsius.

	Januar	April	Juli	Oktober
A_2	4,53	7,69	7,64	5,75
C_2	4,26	7,55	7,40	5,56
D_p	3,24	6,87	6,59	4,73
D_i	3,54	7,25	7,10	4,74
$e_{,}$	0,97	1,95	1,28	1,15
e'	2,26	2,77	2,33	2,17
u	— 28	—11	—27	—21
u	+120	+52	+90	+95
p	0,791	0,829	0,771	0,814

Auf Grund dieser Ergebnisse kann die Gültigkeit des zweiseitigen G. G. nicht bezweifelt werden. Die Differenzen zwischen den empirischen und theoretischen Werten sind hier im Durchschnitte geringer als in den entsprechenden Vergleichstabellen der Barometer- und Thermometerabweichungen. Ebenso genügen die Hauptwerte und die Verhältniswerte der p den theoretischen Forderungen, während zugleich die Asymmetrie einesteils durch die Beständigkeit ihrer Richtung, anderenteils durch ihre besonders im u-Werte des Januar hervortretende Stärke als wesentliche sich dokumentiert. Indem so die täglichen Variationen im ganzen günstigere Resultate liefern als die Barometer- und Thermometerabweichungen, die beide mit Successionsabhängigkeit behaftet sind, scheint in der That das Fehlen von Successionsabhängigkeit die Entwicklung der Gesetze des reinen Zufalls zu begünstigen.]

[Um ferner hierzu die Erörterungen QUETELET's über Asymmetrie[1]) zu vergleichen, ist folgendes über die Methode seiner Untersuchung mitzuteilen. QUETELET geht davon aus, dass bei wesentlicher Symmetrie die W. positiver und negativer Abweichungen vom arithmetischen Mittel gleich groß sind, und knüpft daran den Schluss, dass die Asymmetrie in der Ungleichheit der W. für die beiderseitigen Abweichungen vom Mittel ihren Grund hat. Er illustriert demgemäß die hier auftretenden Wahrscheinlichkeitsverhältnisse durch die Urne, die eine unendlich große Anzahl schwarzer und weißer Kugeln in verschiedenen, aber in jedem Falle bestimmt zu wählenden Verhältnissen enthält. Insbesondere giebt er eine tabellarische Zusammenstellung der W., die beim Ziehen von 16 Kugeln für das Auftreten von Kugeln der einen Art bestehen, wenn 50; 55; 60; .... 90; 95 Kugeln der einen Art unter je 100 Kugeln vorkommen. Mit diesen Tabellen der theoretischen W. vergleicht er nun die Tabellen der empirischen W., die aus den reduzierten Verteilungstafeln für die täglichen Variationen der Temperaturen (für Brüssel) resultieren, indem das z jedes Intervalles durch das zugehörige m dividiert wird.

---

1) [Lettres sur la théorie des prob.; Lettre XXV: Des causes accidentelles quand les chances sont inégales; Lettre XXVI: Loi de sortie de deux événements, dont les chances sont inégales. Hierzu die Tabellen S. 408—411.

So findet er für den Monat Januar, den er seinen Ausführungen zu Grunde legt, dass der Gang der empirischen W. sich beträchtlich dem Gange derjenigen theoretischen W. nähert, für welche die Anzahlen der weißen und schwarzen Kugeln das Verhältnis 80 zu 20 besitzen, und bemerkt, dass die Analogie noch größer wäre, wenn das Verhältnis 80 : 20 durch 81 : 19 ersetzt würde. Hieraus schließt er mit Rücksicht auf den früher von ihm mitgeteilten Mittelwert folgendes[1]: »1) il existe une variation diurne de température de quatre à cinq degrés, ou plus exactement de $4^{\circ},7$; elle est donnée par la moyenne de toutes les observations; 2) cette variation subit l'influence de causes inégales; 3) les causes qui tendent à faire tomber la variation diurne à son minimum, ont plus de chances en leur faveur que celles qui tendent à l'élever à son maximum, et les chances sont dans le rapport de 81 à 19, ou plus simplement de 4 à 1; 4) les distances de la moyenne aux deux valeurs limites sont réglées par ce même rapport de 4 à 1«].

[Hieraus ist zu ersehen, dass die Theorie QUETELET's insofern prinzipiell unzulässig ist, als der arithmetische Mittelwert auch bei vorherrschender Asymmetrie als wahrscheinlichster Wert angesehen wird. Wenn aber trotzdem diese irrtümliche Annahme durch die Erfahrung eine Stütze zu erhalten scheint, so ist weiterhin zu beachten, dass der Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung nur auf das Aussehen der Tafeln, d. i. die Lage der extremen Werte bezüglich des Mittelwertes und den Gang der dazwischen liegenden Werte, sich stützt. Infolge davon besitzt die ganze Untersuchungsweise nur geringe Schärfe und trägt den Charakter des Unvollständigen. Andererseits ist jedoch hervorzuheben, dass die Auffassungsweise QUETELET's zum zweiseitigen G. G. führt, sobald der dichteste Wert, wie ihn das Proportionalgesetz definiert, an die Stelle des arithmetischen Mittels tritt. Der Zusatz zum XIX. Kapitel (§ 136) stellt diesen Zusammenhang vor Augen.]

1) A. a. O. S. 181.

XXVIII. Die Asymmetrie der Fehlerreihen.

§ 180. [Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Fehlerreihen K.-G. darstellen, welche die nämliche Behandlung wie die K.-G. der vorstehenden Kapitel gestatten. Es ist jedoch fraglich, ob es einerseits prinzipiell geboten sei, andererseits in der Erfahrung sich vorteilhaft zeige, hierfür die Methoden der kollektiven Asymmetrie in Anwendung zu bringen, oder ob nicht vielmehr die Voraussetzung wesentlicher Symmetrie theoretisch und empirisch zu Grunde zu legen sei. Nachdem diese Frage in § 8 offen gelassen worden ist, soll sie hier ihre Beantwortung finden. Dabei ist die Trennung des theoretischen Standpunktes vom empirischen nicht müßig. Denn bei prinzipieller Geltung der Asymmetriegesetze wird zwar die Anwendung derselben stets auch empirische Vorteile mit sich führen, wenn nur die Behandlung eine hinreichend scharfe ist, um die zwischen dem arithmetischen Mittel und dem dichtesten Werte bestehende Differenz hervortreten zu lassen. Es ist aber denkbar, dass das zweiseitige G. G., selbst wenn es nicht von der Theorie gefordert wird, dennoch in der Erfahrung sich bewähre, insofern es — vergl. § 95 — den empirisch verschiedenen m' und $m_,$ bez. D Rechnung trägt, wogegen nach einfachem G. G. an Stelle der gleichfalls empirisch verschiedenen μ' und $\mu_,$ bez. A beiderseits $\frac{1}{2}m$ zu setzen ist.]

[Zur Erledigung der hauptsächlich interessierenden theoretischen Seite der gestellten Frage ist die Asymmetrie von Fehlerreihen zu untersuchen, wozu ein System gleichartiger, den nämlichen Bedingungen unterliegender Reihen von Beobachtungswerten am besten sich eignet. Etwaige bloß empirisch hervortretende Vorteile ferner werden sich zeigen, wenn sowohl das zweiseitige als auch das einfache G. G. an den Verteilungstafeln von Fehlerreihen vergleichsweise erprobt wird; hierbei wird man Reihen mit großem *m* bevorzugen, weil zu erwarten ist, dass solche die typische Form der Fehlertabellen in möglichster Reinheit zur Entwicklung kommen lassen.]

[Dem einen wie dem anderen Zwecke genügen die in diesem Kapitel untersuchten Reihen astronomischer Beobachtungsfehler, die mir von dem Observator der Sternwarte zu Straßburg, Herrn Dr. Kobold, zugleich mit folgenden Angaben über die Herkunft derselben mitgeteilt wurden.]

[Zu Grunde liegen Beobachtungen am Repsold'schen Meridiankreise der Sternwarte, die in den Jahren 1884—1886 von einem und demselben Beobachter angestellt wurden. Eine solche Beobachtung soll einesteils den Zeitpunkt feststellen, in welchem der beobachtete Stern durch den Meridian geht, anderenteils die Zenithdistanz bestimmen, in welcher der Durchgang stattfindet. Sie ist sonach aus zwei verschiedenen Akten zusammengesetzt. Der erste Akt besteht, da die Durchgangszeit elektrisch registriert wird, in einem Druck auf den Taster in demjenigen Augenblicke, in welchem der Stern einen Vertikalfaden des Instrumentes passiert. Er kann, da dreiundzwanzig solcher Vertikalfäden vorhanden sind, entsprechend oft wiederholt werden, wodurch jedesmal der zugehörige Zeitpunkt fixiert wird. Der zweite Akt dient der genauen Einstellung des Instrumentes, sobald der Stern dem mittleren der 23 Fäden sich nähert. Bezüglich seiner Ausführung ist folgendes zu bemerken. Die Einrichtung des Instrumentes war eine von der gewöhnlichen abweichende, indem die Feineinstellung in Zenithdistanz nicht (wie üblich) mittelst eines Schlüssels ausgeführt, sondern durch einen Kettenlauf vermittelt wurde, der um einen am Klemmarme des Instrumentes befindlichen Knopf lief und, da der Klemmarm in fester Verbindung mit dem Instrumente war, stets in unmittelbarer Nähe des Okulars sich befand. Beide Akte können daher ohne jede gegenseitige Störung ausgeführt werden, wenn das Instrument diejenige Lage hat, in welcher die Klemme auf der Ostseite sich befindet. Dann kann nämlich der Beobachter in der rechten Hand den Taster halten und mit der linken die Feineinstellung besorgen. Hat jedoch das Instrument die entgegengesetzte Lage, so tritt ein Konflikt zwischen beiden Akten insofern ein, als die Einstellung in Zenithdistanz zum Ablegen des Tasters nötigt, der erst nach Ausführung derselben wieder aufgenommen werden kann, um die Durchgangszeit für den Mittelfaden zu registrieren. Hierdurch tritt eine bei verschiedenen Beobachtern verschieden starke Verspätung ein, so dass die Beobachtung für den Mittelfaden durch die Feineinstellung in Zenithdistanz gestört wird. Die beiden Lagen des Instrumentes werden durch die Bezeichnungen »Klemme Ost« und »Klemme West« unterschieden. — Noch ist zu bemerken, dass dieser Konflikt nicht eintreten würde, falls ein Beobachter im stande sein sollte, mit der einen wie mit der anderen Hand gleich sicher zu registrieren, und dass ferner die bezeichneten Verhältnisse gerade umgekehrt liegen würden, wenn der Beobachter mit der linken statt mit der rechten Hand zu registrieren gewohnt wäre.

[Von diesen Beobachtungen wurde der auf die Bestimmung der Durchgangszeit sich beziehende Teil benutzt, um die Distanzen der erwähnten Vertikalfäden, d. i. die Zeit, deren ein Stern im Äquator zum Durchlaufen des Intervalles zweier Fäden bedarf, zu berechnen. Die Fäden wurden der Reihe nach durch die Nummern 1 bis 23 markiert. Bestimmt wurden die Distanzen zwischen dem Mittelfaden 12 und den Fäden 2, 5, 6, 10, 14, 18, 19, 22; sie werden als Fadendistanzen 2—12; 5—12 u. s. w. bezeichnet. Das Beobachtungsmaterial ferner wurde in vier Gruppen geteilt, da einerseits — nach obigen Bemerkungen — die Instrumentlage Klemme Ost von der Lage Klemme West mit Rücksicht auf die gleichzeitig vorzunehmende Bestimmung der Zenithdistanz sich unterscheidet, und andererseits außer den in der Mehrzahl vorhandenen Nachtbeobachtungen auch Tagbeobachtungen vorlagen, bei welchen andere Beleuchtungsverhältnisse obwalten. Allerdings konnte durch Vermeiden des Mittelfadens 12, der allein bei der Störung durch die Feineinstellung in Zenithdistanz in Betracht kommt, der Unterschied zwischen den beiden Lagen Klemme Ost und Klemme West im wesentlichen beseitigt werden; und in der That ergaben die nämlichen Beobachtungsreihen die

Distanzen gegen den Faden 2 in beiden Lagen übereinstimmend. Es schien jedoch gerade von Interesse, jenen Unterschied beizubehalten, um einen etwaigen Einfluss desselben auf die Resultate der folgenden Untersuchung beobachten zu können. Zur Beurteilung der verhältnismäßig großen Beobachtungsfehler ist ferner zu bedenken, dass die Beobachtungen, weil sie zur Ermittelung der Fadendistanzen dienen sollten, aus dem über mehrere Jahre sich erstreckenden Material so ausgewählt sind, dass die verschiedenen Verhältnisse möglichst zur Geltung kommen. Hätte man den mittleren Beobachtungsfehler bestimmen wollen, so wären zeitlich nahe bei einander gelegene Beobachtungen zu wählen gewesen.]

§ 181. [Das zur Verfügung gestellte Material besteht sonach aus vier Gruppen, die wie folgt bezeichnet werden:

α) Klemme Ost; Nachtbeobachtungen
β) Klemme Ost; Tagbeobachtungen
γ) Klemme West; Nachtbeobachtungen
δ) Klemme West; Tagbeobachtungen.

Jede Gruppe enthält, den acht Fadendistanzen entsprechend, ebenso viele Reihen von Beobachtungswerten, deren Form aus folgender, der Gruppe α) entnommener Probe zu ersehen ist. Als Maßeinheit dient hier und im Folgenden durchweg die Zeitsekunde $= 1^s$.

I. Probe aus der Beobachtungsreihe α) Klemme Ost; Nachtbeobachtungen.

$\mathfrak{E} = 1^s$.

Zeit der Beobachtung	Stern	2—12	5—12	6—12	10—12	14—12	18—12	19—12	22—12
1884 Juni 24	δ Ophiuchi	37,28	31,10	22,28	13,87	14,60	22,80	31,70	37,96
Juli 1	η Librae	37,34	31,14	22,39	14,07	14,61	22,87	31,70	37,92
1885 Januar 14	α Orionis	37,65	31,31	22,51	14,11	14,48	22,65	31,60	37,98
1886 März 25	η Bootis	37,55	31,17	22,35	14,03	14,68	22,77	31,80	38,02

Aus diesen Beobachtungsreihen lassen sich folgende Elemente für die acht Fadendistanzen gewinnen:

II. Elemente der Fadendistanzen.

$\mathfrak{S} = 1^s$.

α) Klemme Ost; Nachtbeobachtungen.

Faden-distanz	2—12	5—12	6—12	10—12	14—12	18—12	19—12	22—12
m	115	115	114	114	115	114	115	112
A	37,428	31,190	22,333	14,036	14,591	22,894	31,711	37,989
η	0,099	0,094	0,084	0,099	0,098	0,099	0,094	0,082
E'	38,09	31,48	22,66	14,38	14,96	23,19	32,00	38,28
$E_,$	37,14	30,91	22,07	13,78	14,30	22,64	31,42	37,73
u	−3	+2	−2	−13	−4	−5	−6	+5
$U'-U_,$	+0,37	+0,01	+0,06	+0,09	+0,08	+0,04	0,00	+0,03

β) Klemme Ost; Tagbeobachtungen.

Faden-distanz	2—12	5—12	6—12	10—12	14—12	18—12	19—12	22—12
m	41	41	40	40	40	40	41	40
A	37,405	31,146	22,314	13,994	14,633	22,938	31,759	38,028
η	0,062	0,077	0,084	0,074	0,080	0,074	0,072	0,069
E'	37,57	31,38	22,54	14,17	14,81	23,21	31,93	38,22
$E_,$	37,16	30,96	22,03	13,78	14,41	22,73	31,56	37,78
u	−4	−3	+5	+1	+2	+2	0	+2
$U'-U_,$	−0,08	+0,05	−0,06	−0,04	+0,05	+0,06	−0,03	−0,06

γ) Klemme West; Nachtbeobachtungen.

Faden-distanz	2—12	5—12	6—12	10—12	14—12	18—12	19—12	22—12
m	124	124	124	124	124	123	123	123
A	37,453	31,229	22,374	14,050	14,593	22,864	31,713	37,976
η	0,090	0,089	0,085	0,089	0,089	0,083	0,105	0,094
E'	37,92	31,53	22,61	14,33	14,91	23,16	31,99	38,28
$E_,$	37,13	30,92	22,10	13,75	14,30	22,62	31,41	37,67
u	−8	+8	+2	−2	+2	−4	0	+6
$U'-U_,$	+0,14	−0,01	−0,04	−0,02	+0,02	+0,05	−0,03	0,00

δ) Klemme West; Tagbeobachtungen.

Fadendistanz	2—12	5—12	6—12	10—12	14—12	18—12	19—12	22—12
m	50	50	49	50	50	49	50	49
A	37,463	31,234	22,406	14,061	14,528	22,836	31,717	37,944
η	0,087	0,092	0,084	0,092	0,091	0,079	0,104	0,098
E'	37,76	31,45	22,62	14,30	14,82	23,06	32,13	38,28
$E_{,}$	37,25	31,04	22,19	13,75	14,30	22,63	31,42	37,70
u	−5	−1	+2	+10	+2	+2	+1	−1
$U'-U_{,}$	+0,08	+0,02	0,00	−0,07	+0,06	+0,02	+0,12	+0,09

Hier stellen die A die gesuchten Fadendistanzen dar, indem sie als die arithmetischen Mittel aus den m Beobachtungswerten zugleich die wahrscheinlichsten Werte bezeichnen, falls das einfache G. G. als zutreffend anzusehen ist. Diese Werte weichen für die verschiedenen Gruppen von einander ab, was zunächst wegen der Endlichkeit der m, die der Bestimmung unterliegen, nicht anders zu erwarten ist, außerdem aber auch durch den zwischen den Lagen Klemme Ost und West bestehenden Unterschied bedingt wird. Denn in den Gruppen γ und δ sind die vier ersten Distanzen durchweg größer, die vier letzten in der Mehrzahl der Fälle kleiner als die entsprechenden Distanzen der Gruppen α und β, wie es bei der verspäteten Fixierung des Durchganges durch den Mittelfaden in der Lage Klemme West vorauszusetzen ist. Das Entsprechende zeigt der Vergleich obiger Werte mit den von Herrn Dr. KOBOLD[1]) aus anderweitigen Beobachtungen mit größerer Zuverlässigkeit gewonnenen Werten, die der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen sind:

Fadendistanz	2—12	5—12	6—12	10—12	14—12	18—12	19—12	22—12
A	$37^s,443$	$31^s,195$	$22^s,355$	$14^s,030$	$14^s,591$	$22^s,893$	$31^s,735$	$38^s,006$

Die η geben als Mittelwerte der Differenzen zwischen den beobachteten Werten und den A die einfachen Durchschnittsfehler an.

1) [Vergl. Annalen der Kaiserl. Universitäts-Sternwarte in Straßburg; I. Bd. 1896. S. XXII: Die Fadendistanzen und die Winkelwerte der Schraube.]

Dieselben zeigen innerhalb der einzelnen Gruppen nur geringe Schwankungen, wonach die acht Fehlerreihen jeder Gruppe ein gleichartiges System bilden, wie schon auf Grund ihrer Entstehung anzunehmen war. Die Schwankungsweite der Fehler ist aus den Differenzen der oberen und unteren Extreme E' und $E_,$ zu ersehen; sie beträgt nur für die Fadendistanz 2—12 der Gruppe α $0^s,95$; die Größe dieses Wertes ist aber wesentlich durch den Betrag der oberen extremen Abweichung $U' = 0^s,66$ bedingt, der den durchschnittlich zu erwartenden Betrag erheblich übersteigt und als abnorm zu betrachten ist.]

[Vor Allem aber interessieren die Werte der u und im Zusammenhange damit diejenigen der $U' - U_,$, da sie eine Beantwortung der Frage gestatten, ob die Asymmetrie der Fehlerreihen als wesentliche oder unwesentliche zu gelten habe. Nun sind die u-Werte durchweg sehr klein und besitzen in ungeregelter Folge bald positives, bald negatives Vorzeichen. Entsprechendes ist von den Differenzen $U' - U_,$ zu sagen, die nur in der Gruppe α keinen Wechsel zwischen den Vorzeichen aufweisen und hier nur in dem einen Werte $0^s,37$ zu einer bedeutenden Höhe ansteigen, der nach den obigen Bemerkungen bezüglich der zugehörigen oberen extremen Abweichung nicht in Betracht kommen kann. Hieraus folgt mit Entschiedenheit der Schluss, dass keine wesentliche Asymmetrie vorhanden ist. Eine Bestätigung hiervon kann man überdies darin finden, dass nur in 18 unter 32 Fällen die Vorzeichen von u und $U' - U_,$ einander entgegengesetzt sind, und somit das Umkehrgesetz der Asymmetrie zwischen der Differenz der Abweichungszahlen und derjenigen der extremen Abweichungen bez. A sich nicht bewährt, während dasselbe bei vorwaltender wesentlicher Asymmetrie erfahrungsgemäß Geltung hat.]

§ 182. [Es ist sonach kein Grund vorhanden, für die Fehlerreihen die Prinzipien der kollektiven Asymmetrie in Anwendung zu bringen. Um jedoch zu zeigen, dass auch bezüglich der Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung mit der Anwendung des zweiseitigen G. G. keine Vorteile gegenüber dem einfachen Gesetze verknüpft sind, gebe ich im Folgenden Vergleichstabellen in solcher Form, dass den empirischen Werten sowohl die nach einfachem G. G. bez. A als auch die nach zweiseitigem G. G. bez. D berechneten theoretischen Werte zur Seite stehen. Die empirischen Werte wurden aus den vier Gruppen von je acht Beobachtungsreihen in der Weise gewonnen, dass zunächst in jeder Beobachtungsreihe die beobachteten Werte durch ihre Differenzen mit dem zugehörigen A d. i. durch die Beobachtungsfehler $\varDelta$ ersetzt und sodann die acht Fehlerreihen jeder Gruppe zu einer einzigen Reihe zusammengelegt wurden. Den vier Gruppen α, β, γ, δ entsprechend enstanden so vier Fehlerreihen, die als die Reihen α, β, γ, δ bezeichnet werden sollen. Das Zusammenlegen der ursprünglichen Reihen unterlag keinem Bedenken, da sie auf Grund der Übereinstimmung zwischen den zugehörigen Durchschnittsfehlern η als gleichartig sich erwiesen hatten.]

[Bei Reduktion auf ein $i = 0^s,05$ erhält man so folgende Resultate:

III. Reduzierte Verteilungstafeln der Fehlerreihen α, β, γ, δ.

$\mathfrak{S} = 1^s$; $i = 0,05$.

Reihe α

$\varDelta$	emp.	theor. bez. A	theor. bez. D_p
— 0,35	—	2,5	2
— 0,30	6	6,5	5,5
— 0,25	21	17	16
— 0,20	38	37	37
— 0,15	59	69	71
— 0,10	108	107	111
— 0,05	154	139	143
0,00	151	152	151,5
+ 0,05	152	140	136
+ 0,10	100	108	104
+ 0,15	55	70	68
+ 0,20	36	38,5	38,5
+ 0,25	18	17,5	18,5
+ 0,30	12	7	8
+ 0,35	3	2	3
+ 0,40	—	1	1
+ 0,65	1	—	—
$m =$	914	914	914

Reihe β

$\varDelta$	emp.	theor. bez. A	theor. bez. D_p
— 0,30	1	0,5	0,5
— 0,25	2	2	2
— 0,20	9	8	8
— 0,15	21	20,5	20,5
— 0,10	29	40	40,5
— 0,05	70	60	60
0,00	67	67,5	67,5
+ 0,05	59	58	57,5
+ 0,10	39	38	38
+ 0,15	17	19	19
+ 0,20	6	7	7
+ 0,25	3	2	2
+ 0,30	—	0,5	0,5
$m =$	323	323	323

Reihe γ

Δ	emp.	theor. bez. A	theor. bez. D_p
— 0,40	—	0,5	0,5
— 0,35	—	2	2
— 0,30	10	6	7
— 0,25	19	17	18
— 0,20	42	39	39
— 0,15	69	74	72,5
— 0,10	101	117	114
— 0,05	159	154,5	151
0,00	174	169	169
+ 0,05	163	154,5	158
+ 0,10	120	117	121
+ 0,15	73	74	75,5
+ 0,20	37	39	38,5
+ 0,25	14	17	16
+ 0,30	7	6	5
+ 0,35	0	2	1,5
+ 0,40	0	0,5	0,5
+ 0,45	1	—	—
$m =$	989	989	989

Reihe δ

Δ	emp.	theor. bez. A	theor. bez. D_p
— 0,35	—	1	1
— 0,30	3	3	3
— 0,25	5	7,5	7
— 0,20	15	16	16
— 0,15	29	30	31
— 0,10	55	47	47,5
— 0,05	61	61	61,5
0,00	64	66	66,5
+ 0,05	71	61	60
+ 0,10	44	47	46
+ 0,15	22	30	30
+ 0,20	17	16	16
+ 0,25	4	7,5	7,5
+ 0,30	5	3	3
+ 0,35	1	1	1
+ 0,40	1	—	—
$m =$	397	397	397

IV. Elemente der Fehlerreihen α, β, γ, δ nach reduzierten Tafeln.

$\mathfrak{S} = 1^s$.

	α	β	γ	δ
m	914	323	989	397
A	+ 0,0009	— 0,0025	0,0000	— 0,0004
C	— 0,0015	— 0,0030	+ 0,0022	— 0,0012
D_p	— 0,0111	— 0,0050	+ 0,0094	— 0,0048
D_i	— 0,0281	— 0,0284	+ 0,0038	+ 0,0353
η	0,0949	0,0753	0,0923	0,0946
$e_,$	0,0888	0,0741	0,0969	0,0924
e'	0,1008	0,0766	0,0875	0,0968
u	— 9	— 8	+15	— 3
u	+58	+ 5	—50	+ 9
p	0,80	0,80	0,77	0,82

In denselben zeigt sich überall eine so weit gehende Übereinstimmung zwischen den theoretischen Werten des symmetrischen und des asymmetrischen Verteilungsgesetzes, dass es belanglos erscheint, welches von beiden man zu Grunde legen will.]

[Dann wird aber der Vorzug der Einfachheit zu Gunsten des symmetrischen Gesetzes den Ausschlag geben, wobei noch ins Gewicht fällt, dass man zur Berechnung der Elemente nicht auf reduzierte Tafeln zurückgehen muss, sondern den primär bestimmten Durchschnittsfehler η oder (quadratischen) Mittelfehler q bei der Verteilungsrechnung benutzen kann. Im vorliegenden Falle erhält man so aus den primären Verteilungstafeln für die η der Reihen α, β, γ, δ respektiv $0^s,0937$; $0^s,0738$; $0^s,0906$; $0^s,0911$, was zu folgender Vergleichstabelle zwischen Theorie und Erfahrung führt:

V. Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung für das einfache G. G.

$\pm \Delta$	α		β		γ		δ	
	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.	emp.	theor.
0,00	151	154	67	69	174	169	64	69
0,05	306	282	129	119	322	309	132	125
0,10	208	216	68	78	221	234	99	94,5
0,15	114	138	38	38	142	148	51	59
0,20	74	74	15	14	79	78	32	30,5
0,25	39	33	5	4	33	34	9	13
0,30	18	12	1	1	17	12	8	5
0,35	3	4			0	4	1	1
0,40	—	1			0	1	1	—
0,45	—	—			1	—		
0,65	1	—						
$m =$	914	914	323	323	989	989	397	397

Hier müsste das durch 0,00 bezeichnete Intervall mit den Grenzen $\pm 0,025$ verdoppelt werden, um mit den anderen Intervallen direkt vergleichbar zu sein, so dass natürlich der theoretische Maximalwert stets auf den Nullwert fällt.]

[Indem nun in der Theorie und Erfahrung das zweiseitige G. G. zwar als anwendbar sich zeigt, aber keinen Vorteil vor dem einfachen G. G. bietet, wird man es als ein charakteristisches Merkmal der Fehlerreihen betrachten dürfen, dass ihre Asymmetrie eine bloß unwesentliche, in den unausgeglichenen Zufälligkeiten begründete ist. Man könnte hiernach, falls man um ein Kriterium für die Beurteilung von Fehlerreihen verlegen wäre, geradezu die Asymmetrie als ein solches benutzen und den Grundsatz aufstellen, dass Fehlerreihen mit den Merkmalen wesentlicher Asymmetrie zu verwerfen seien.]

Anhang.

Die t-Tabelle.

§ 183. [Die t-Tabelle giebt die Werte des G. G., d. i. des Integrals

$$\Phi[t] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp[-\tau^2]\, d\tau$$

in ihrer Abhängigkeit vom Argumente $t = \Theta : \varepsilon\sqrt{\pi}$. Da vierstellige Integralwerte im allgemeinen den Bedürfnissen der Kollektivmaßlehre genügen, so wird zunächst die vierstellige Tafel, die Kämpfe in Wundt's Philosophischen Studien, im IX. Band, S. 147—150, publiziert hat, als t-Tabelle I hier zum Abdrucke gebracht. Um jedoch für besondere Fälle noch eine weitere Stelle zur Verfügung zu haben, wird auch die fünfstellige Tafel als t-Tabelle II in entsprechender Ausdehnung mitgeteilt.]

[Beiden Tabellen liegt in gleicher Weise die siebenstellige Tafel, die sich in Meyer's Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung S. 545—549 findet, zu Grunde. Da aber dort, wie üblich, die Argumentwerte t nur bis zur zweiten Dezimale aufgeführt sind, müßten in der Regel die zweiten Differenzen zur Interpolation beigezogen werden. Um dies zu ersparen, wurde in der vierstelligen Tafel im Intervalle $t = 0$ bis $t = 1{,}51$, in der fünfstelligen Tafel im Intervalle $t = 0$ bis $t = 2{,}01$ das Argument bis zur dritten Dezimale weitergeführt, so daß man überall mit einfacher Interpolation ausreicht. Zu diesem Zwecke wurde in den bezeichneten Intervallen mittelst der Formel:

$$f(a + xi) = f(a + \tfrac{1}{2}) + (x - \tfrac{1}{2}) f'(a + \tfrac{1}{2}) + \\ + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} f''(a + \tfrac{1}{2}) + \frac{x(x-1)(x-\tfrac{1}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a + \tfrac{1}{2}) + \cdots$$

auf Grund der siebenstelligen Tafelwerte, unter Benutzung ihrer zweiten Differenzen interpoliert. Die dritten Differenzen konnten unberücksichtigt bleiben.]

[Die Einrichtung der Tabellen ist derjenigen der Logarithmentafeln nachgebildet. Insbesondere haben die Sternchen, die in einzelnen Horizontalreihen der Tafel II sich vorfinden, die Bedeutung, daß die der Zeile vorgedruckte erste Dezimale um 1 zu erhöhen ist.]

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0000	0011	0023	0034	0045	0056	0068	0079	0090	0102
01	0,0113	0124	0135	0147	0158	0169	0181	0192	0203	0214
02	0,0226	0237	0248	0259	0271	0282	0293	0305	0316	0327
03	0,0338	0350	0361	0372	0384	0395	0406	0417	0429	0440
04	0,0451	0462	0474	0485	0496	0507	0519	0530	0541	0552
05	0,0564	0575	0586	0597	0609	0620	0631	0642	0654	0665
06	0,0676	0687	0699	0710	0721	0732	0744	0755	0766	0777
07	0,0789	0800	0811	0822	0833	0845	0856	0867	0878	0890
08	0,0901	0912	0923	0934	0946	0957	0968	0979	0990	1002
09	0,1013	1024	1035	1046	1058	1069	1080	1091	1102	1113
0,10	0,1125	1136	1147	1158	1169	1180	1192	1203	1214	1225
11	0,1236	1247	1259	1270	1281	1292	1303	1314	1325	1336
12	0,1348	1359	1370	1381	1392	1403	1414	1425	1436	1448
13	0,1459	1470	1481	1492	1503	1514	1525	1536	1547	1558
14	0,1569	1581	1592	1603	1614	1625	1636	1647	1658	1669
15	0,1680	1691	1702	1713	1724	1735	1746	1757	1768	1779
16	0,1790	1801	1812	1823	1834	1845	1856	1867	1878	1889
17	0,1900	1911	1922	1933	1944	1955	1966	1977	1988	1998
18	0,2009	2020	2031	2042	2053	2064	2075	2086	2097	2108
19	0,2118	2129	2140	2151	2162	2173	2184	2194	2205	2216
0,20	0,2227	2238	2249	2260	2270	2281	2292	2303	2314	2324
21	0,2335	2346	2357	2368	2378	2389	2400	2411	2421	2432
22	0,2443	2454	2464	2475	2486	2497	2507	2518	2529	2540
23	0,2550	2561	2572	2582	2593	2604	2614	2625	2636	2646
24	0,2657	2668	2678	2689	2700	2710	2721	2731	2742	2753
25	0,2763	2774	2784	2795	2806	2816	2827	2837	2848	2858
26	0,2869	2880	2890	2901	2911	2922	2932	2943	2953	2964
27	0,2974	2985	2995	3006	3016	3027	3037	3047	3058	3068
28	0,3079	3089	3100	3110	3120	3131	3141	3152	3162	3172
29	0,3183	3193	3204	3214	3224	3235	3245	3255	3266	3276
0,30	0,3286	3297	3307	3317	3327	3338	3348	3358	3369	3379
31	0,3389	3399	3410	3420	3430	3440	3450	3461	3471	3481
32	0,3491	3501	3512	3522	3532	3542	3552	3562	3573	3583
33	0,3593	3603	3613	3623	3633	3643	3653	3663	3674	3684
34	0,3694	3704	3714	3724	3734	3744	3754	3764	3774	3784
35	0,3794	3804	3814	3824	3834	3844	3854	3864	3873	3883
36	0,3893	3903	3913	3923	3933	3943	3953	3963	3972	3982
37	0,3992	4002	4012	4022	4031	4041	4051	4061	4071	4080
38	0,4090	4100	4110	4119	4129	4139	4149	4158	4168	4178
39	0,4187	4197	4207	4216	4226	4236	4245	4255	4265	4274
0,40	0,4284	4294	4303	4313	4322	4332	4341	4351	4361	4370
41	0,4380	4389	4399	4408	4418	4427	4437	4446	4456	4465
42	0,4475	4484	4494	4503	4512	4522	4531	4541	4550	4559
43	0,4569	4578	4588	4597	4606	4616	4625	4634	4644	4653
44	0,4662	4672	4681	4690	4699	4709	4718	4727	4736	4746
45	0,4755	4764	4773	4782	4792	4801	4810	4819	4828	4837
46	0,4847	4856	4865	4874	4883	4892	4901	4910	4919	4928
47	0,4937	4946	4956	4965	4974	4983	4992	5001	5010	5019
48	0,5027	5036	5045	5054	5063	5072	5081	5090	5099	5108
49	0,5117	5126	5134	5143	5152	5161	5170	5179	5187	5196
0,50	0,5205	5214	5223	5231	5240	5249	5258	5266	5275	5284
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,50	0,5205	5214	5223	5231	5240	5249	5258	5266	5275	5284
51	0,5292	5301	5310	5318	5327	5336	5344	5353	5362	5370
52	0,5379	5388	5396	5405	5413	5422	5430	5439	5448	5456
53	0,5465	5473	5482	5490	5499	5507	5516	5524	5533	5541
54	0,5549	5558	5566	5575	5583	5591	5600	5608	5617	5625
55	0,5633	5642	5650	5658	5667	5675	5683	5691	5700	5708
56	0,5716	5724	5733	5741	5749	5757	5765	5774	5782	5790
57	0,5798	5806	5814	5823	5831	5839	5847	5855	5863	5871
58	0,5879	5887	5895	5903	5911	5919	5927	5935	5943	5951
59	0,5959	5967	5975	5983	5991	5999	6007	6015	6023	6031
0,60	0,6039	6046	6054	6062	6070	6078	6086	6093	6101	6109
61	0,6117	6125	6132	6140	6148	6156	6163	6171	6179	6186
62	0,6194	6202	6209	6217	6225	6232	6240	6248	6255	6263
63	0,6270	6278	6286	6293	6301	6308	6316	6323	6331	6338
64	0,6346	6353	6361	6368	6376	6383	6391	6398	6405	6413
65	0,6420	6428	6435	6442	6450	6457	6464	6472	6479	6486
66	0,6494	6501	6508	6516	6523	6530	6537	6545	6552	6559
67	0,6566	6573	6581	6588	6595	6602	6609	6616	6624	6631
68	0,6638	6645	6652	6659	6666	6673	6680	6687	6694	6701
69	0,6708	6715	6722	6729	6736	6743	6750	6757	6764	6771
0,70	0,6778	6785	6792	6799	6806	6812	6819	6826	6833	6840
71	0,6847	6853	6860	6867	6874	6881	6887	6894	6901	6908
72	0,6914	6921	6928	6934	6941	6948	6954	6961	6968	6974
73	0,6981	6988	6994	7001	7007	7014	7021	7027	7034	7040
74	0,7047	7053	7060	7066	7073	7079	7086	7092	7099	7105
75	0,7112	7118	7124	7131	7137	7144	7150	7156	7163	7169
76	0,7175	7182	7188	7194	7201	7207	7213	7219	7226	7232
77	0,7238	7244	7251	7257	7263	7269	7275	7282	7288	7294
78	0,7300	7306	7312	7318	7325	7331	7337	7343	7349	7355
79	0,7361	7367	7373	7379	7385	7391	7397	7403	7409	7415
0,80	0,7421	7427	7433	7439	7445	7451	7457	7462	7468	7474
81	0,7480	7486	7492	7498	7503	7509	7515	7521	7527	7532
82	0,7538	7544	7550	7555	7561	7567	7572	7578	7584	7590
83	0,7595	7601	7607	7612	7618	7623	7629	7635	7640	7646
84	0,7651	7657	7663	7668	7674	7679	7685	7690	7696	7701
85	0,7707	7712	7718	7723	7729	7734	7739	7745	7750	7756
86	0,7761	7766	7772	7777	7782	7788	7793	7798	7804	7809
87	0,7814	7820	7825	7830	7835	7841	7846	7851	7856	7862
88	0,7867	7872	7877	7882	7888	7893	7898	7903	7908	7913
89	0,7918	7924	7929	7934	7939	7944	7949	7954	7959	7964
0,90	0,7969	7974	7979	7984	7989	7994	7999	8004	8009	8014
91	0,8019	8024	8029	8034	8038	8043	8048	8053	8058	8063
92	0,8068	8073	8077	8082	8087	8092	8097	8101	8106	8111
93	0,8116	8120	8125	8130	8135	8139	8144	8149	8153	8158
94	0,8163	8167	8172	8177	8181	8186	8191	8195	8200	8204
95	0,8209	8213	8218	8223	8227	8232	8236	8241	8245	8250
96	0,8254	8259	8263	8268	8272	8277	8281	8285	8290	8294
97	0,8299	8303	8307	8312	8316	8321	8325	8329	8334	8338
98	0,8342	8347	8351	8355	8360	8364	8368	8372	8377	8381
99	0,8385	8389	8394	8398	8402	8406	8410	8415	8419	8423
1,00	0,8427	8431	8435	8439	8444	8448	8452	8456	8460	8464
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	0,8427	8431	8435	8439	8444	8448	8452	8456	8460	8464
01	0,8468	8472	8476	8480	8484	8488	8492	8496	8500	8504
02	0,8508	8512	8516	8520	8524	8528	8532	8536	8540	8544
03	0,8548	8552	8556	8560	8563	8567	8571	8575	8579	8583
04	0,8586	8590	8594	8598	8602	8606	8609	8613	8617	8621
05	0,8624	8628	8632	8636	8639	8643	8647	8650	8654	8658
06	0,8661	8665	8669	8672	8676	8680	8683	8687	8691	8694
07	0,8698	8701	8705	8708	8712	8716	8719	8723	8726	8730
08	0,8733	8737	8740	8744	8747	8751	8754	8758	8761	8765
09	0,8768	8771	8775	8778	8782	8785	8789	8792	8795	8799
1,10	0,8802	8805	8809	8812	8815	8819	8822	8825	8829	8832
11	0,8835	8839	8842	8845	8848	8852	8855	8858	8861	8865
12	0,8868	8871	8874	8878	8881	8884	8887	8890	8893	8897
13	0,8900	8903	8906	8909	8912	8915	8918	8922	8925	8928
14	0,8931	8934	8937	8940	8943	8946	8949	8952	8955	8958
15	0,8961	8964	8967	8970	8973	8976	8979	8982	8985	8988
16	0,8991	8994	8997	9000	9003	9006	9008	9011	9014	9017
17	0,9020	9023	9026	9029	9031	9034	9037	9040	9043	9046
18	0,9048	9051	9054	9057	9060	9062	9065	9068	9071	9073
19	0,9076	9079	9082	9084	9087	9090	9092	9095	9098	9100
1,20	0,9103	9106	9108	9111	9114	9116	9119	9122	9124	9127
21	0,9130	9132	9135	9137	9140	9143	9145	9148	9150	9153
22	0,9155	9158	9160	9163	9165	9168	9171	9173	9176	9178
23	0,9181	9183	9185	9188	9190	9193	9195	9198	9200	9203
24	0,9205	9207	9210	9212	9215	9217	9219	9222	9224	9227
25	0,9229	9231	9234	9236	9238	9241	9243	9245	9248	9250
26	0,9252	9255	9257	9259	9262	9264	9266	9268	9271	9273
27	0,9275	9277	9280	9282	9284	9286	9289	9291	9293	9295
28	0,9297	9300	9302	9304	9306	9308	9310	9313	9315	9317
29	0,9319	9321	9323	9325	9327	9330	9332	9334	9336	9338
1,30	0,9340	9342	9344	9346	9348	9350	9352	9355	9357	9359
31	0,9361	9363	9365	9367	9369	9371	9373	9375	9377	9379
32	0,9381	9383	9385	9387	9389	9390	9392	9394	9396	9398
33	0,9400	9402	9404	9406	9408	9410	9412	9413	9415	9417
34	0,9419	9421	9423	9425	9427	9428	9430	9432	9434	9436
35	0,9438	9439	9441	9443	9445	9447	9448	9450	9452	9454
36	0,9456	9457	9459	9461	9463	9464	9466	9468	9470	9471
37	0,9473	9475	9477	9478	9480	9482	9483	9485	9487	9488
38	0,9490	9492	9494	9495	9497	9499	9500	9502	9503	9505
39	0,9507	9508	9510	9512	9513	9515	9516	9518	9520	9521
1,40	0,9523	9524	9526	9528	9529	9531	9532	9534	9535	9537
41	0,9539	9540	9542	9543	9545	9546	9548	9549	9551	9552
42	0,9554	9555	9557	9558	9560	9561	9563	9564	9566	9567
43	0,9569	9570	9571	9573	9574	9576	9577	9579	9580	9582
44	0,9583	9584	9586	9587	9589	9590	9591	9593	9594	9596
45	0,9597	9598	9600	9601	9602	9604	9605	9607	9608	9609
46	0,9611	9612	9613	9615	9616	9617	9618	9620	9621	9622
47	0,9624	9625	9626	9628	9629	9630	9631	9633	9634	9635
48	0,9637	9638	9639	9640	9642	9643	9644	9645	9647	9648
49	0 9649	9650	9651	9653	9654	9655	9656	9657	9659	9660
1,50	0,9661	9662	9663	9665	9666	9667	9668	9669	9670	9672
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,5	0,9661	9673	9684	9695	9706	9716	9726	9736	9745	9755
1,6	0,9763	9772	9780	9788	9796	9804	9811	9818	9825	9832
1,7	0,9838	9844	9850	9856	9861	9867	9872	9877	9882	9886
1,8	0,9891	9895	9899	9903	9907	9911	9915	9918	9922	9925
1,9	0,9928	9931	9934	9937	9939	9942	9944	9947	9949	9951
2,0	0,9953	9955	9957	9959	9961	9963	9964	9966	9967	9969
2,1	0,9970	9972	9973	9974	9975	9976	9977	9979	9980	9980
2,2	0,9981	9982	9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988
2,3	0,9989	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9992	9993
2,4	0,9993	9993	9994	9994	9994	9995	9995	9995	9995	9996
2,5	0,9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
2,6	0,9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9999
2,7	0,9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
2,8	0,9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	0000	0000	0000

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,0 0000	0113	0226	0339	0451	0564	0677	0790	0903	1016
01	1128	1241	1354	1467	1580	1692	1805	1918	2031	2144
02	2256	2369	2482	2595	2708	2820	2933	3046	3159	3271
03	3384	3497	3610	3722	3835	3948	4060	4173	4286	4398
04	4511	4624	4736	4849	4962	5074	5187	5299	5412	5525
05	0,0 5637	5750	5862	5975	6087	6200	6312	6425	6537	6650
06	6762	6875	6987	7099	7212	7324	7436	7549	7661	7773
07	7886	7998	8110	8223	8335	8447	8559	8671	8784	8896
08	0,0 9008	9120	9232	9344	9456	9568	9680	9792	9904	*0016
09	0,1 0128	0240	0352	0464	0576	0687	0799	0911	1023	1135
0,10	0,1 1246	1358	1470	1581	1693	1805	1916	2028	2139	2251
11	2362	2474	2585	2697	2808	2919	3031	3142	3253	3365
12	3476	3587	3698	3809	3921	4032	4143	4254	4365	4476
13	4587	4698	4809	4919	5030	5141	5252	5363	5473	5584
14	5695	5805	5916	6027	6137	6248	6358	6468	6579	6689
15	0,1 6800	6910	7020	7130	7241	7351	7461	7571	7681	7791
16	7901	8011	8121	8231	8341	8451	8560	8670	8780	8890
17	0,1 8999	9109	9218	9328	9437	9547	9656	9766	9875	9984
18	0,2 0094	0203	0312	0421	0530	0639	0748	0857	0966	1075
19	1184	1293	1402	1510	1619	1728	1836	1945	2053	2162
0,20	0,2 2270	2379	2487	2595	2704	2812	2920	3028	3136	3244
21	3352	3460	3568	3676	3784	3891	3999	4107	4214	4322
22	4430	4537	4645	4752	4859	4967	5074	5181	5288	5395
23	5502	5609	5716	5823	5930	6037	6144	6250	6357	6463
24	6570	6676	6783	6889	6996	7102	7208	7314	7421	7527
25	0,2 7633	7739	7845	7950	8056	8162	8268	8373	8479	8584
26	8690	8795	8901	9006	9111	9217	9322	9427	9532	9637
27	0,2 9742	9847	9952	*0056	*0161	*0266	*0370	*0475	*0579	*0684
28	0,3 0788	0892	0997	1101	1205	1309	1413	1517	1621	1725
29	1828	1932	2036	2139	2243	2346	2450	2553	2656	2760
0,30	0,3 2863	2966	3069	3172	3275	3378	3480	3583	3686	3788
31	3891	3993	4096	4198	4300	4403	4505	4607	4709	4811
32	4913	5014	5116	5218	5319	5421	5523	5624	5725	5827
33	5928	6029	6130	6231	6332	6433	6534	6635	6735	6836
34	6936	7037	7137	7238	7338	7438	7538	7638	7738	7838
35	0,3 7938	8038	8138	8237	8337	8436	8536	8635	8735	8834
36	8933	9032	9131	9230	9329	9428	9526	9625	9724	9822
37	0,3 9921	*0019	*0117	*0215	*0314	*0412	*0510	*0608	*0705	*0803
38	0,4 0901	0999	1096	1194	1291	1388	1486	1583	1680	1777
39	1874	1971	2068	2164	2261	2357	2454	2550	2647	2743
0,40	0,4 2839	2935	3031	3127	3223	3319	3415	3510	3606	3701
41	3797	3892	3988	4083	4178	4273	4368	4463	4557	4652
42	4747	4841	4936	5030	5124	5219	5313	5407	5501	5595
43	5689	5782	5876	5970	6063	6157	6250	6343	6436	6529
44	6623	6715	6808	6901	6994	7086	7179	7271	7364	7456
45	0,4 7548	7640	7732	7824	7916	8008	8100	8191	8283	8374
46	8466	8557	8648	8739	8830	8921	9012	9103	9193	9284
47	0,4 9375	9465	9555	9646	9736	9826	9916	*0006	*0096	*0185
48	0,5 0275	0365	0454	0543	0633	0722	0811	0900	0989	1078
49	1167	1256	1344	1433	1521	1610	1698	1786	1874	1962
0,50	0,5 2050	2138	2226	2313	2401	2488	2576	2663	2750	2837
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,50	0,5 2050	2138	2226	2313	2401	2488	2576	2663	2750	2837
51	2924	3011	3098	3185	3272	3358	3445	3531	3617	3704
52	3790	3876	3962	4048	4134	4219	4305	4390	4476	4561
53	4646	4732	4817	4902	4987	5071	5156	5241	5325	5410
54	5494	5578	5662	5746	5830	5914	5998	6082	6165	6249
55	0,5 6332	6416	6499	6582	6665	6748	6831	6914	6996	7079
56	7162	7244	7326	7409	7491	7573	7655	7737	7818	7900
57	7982	8063	8144	8226	8307	8388	8469	8550	8631	8712
58	8792	8873	8953	9034	9114	9194	9274	9354	9434	9514
59	0,5 9594	9673	9753	9832	9912	9991	*0070	*0149	*0228	*0307
0,60	0,6 0386	0464	0543	0621	0700	0778	0856	0934	1012	1090
61	1168	1246	1323	1401	1478	1556	1633	1710	1787	1864
62	1941	2018	2095	2171	2248	2324	2400	2477	2553	2629
63	2705	2780	2856	2932	3007	3083	3158	3233	3309	3384
64	3459	3533	3608	3683	3757	3832	3906	3981	4055	4129
65	0,6 4203	4277	4351	4424	4498	4571	4645	4718	4791	4865
66	4938	5011	5083	5156	5229	5301	5374	5446	5519	5591
67	5663	5735	5807	5878	5950	6022	6093	6165	6236	6307
68	6378	6449	6520	6591	6662	6732	6803	6873	6944	7014
69	7084	7154	7224	7294	7364	7433	7503	7572	7642	7711
0,70	0,6 7780	7849	7918	7987	8056	8125	8193	8262	8330	8398
71	8467	8535	8603	8671	8738	8806	8874	8941	9009	9076
72	9143	9210	9277	9344	9411	9478	9545	9611	9678	9744
73	0,6 9810	9877	9943	*0009	*0075	*0140	*0206	*0272	*0337	*0402
74	0,7 0468	0533	0598	0663	0728	0793	0858	0922	0987	1051
75	0,7 1116	1180	1244	1308	1372	1436	1500	1563	1627	1690
76	1754	1817	1880	1943	2006	2069	2132	2195	2257	2320
77	2382	2444	2507	2569	2631	2693	2755	2816	2878	2940
78	3001	3062	3124	3185	3246	3307	3368	3429	3489	3550
79	3610	3671	3731	3791	3851	3911	3971	4031	4091	4151
0,80	0,7 4210	4270	4329	4388	4447	4506	4565	4624	4683	4742
81	4800	4859	4917	4976	5034	5092	5150	5208	5266	5323
82	5381	5439	5496	5553	5611	5668	5725	5782	5839	5896
83	5952	6009	6066	6122	6178	6234	6291	6347	6403	6459
84	6514	6570	6626	6681	6736	6792	6847	6902	6957	7012
85	0,7 7067	7122	7176	7231	7285	7340	7394	7448	7502	7556
86	7610	7664	7718	7771	7825	7878	7932	7985	8038	8091
87	8144	8197	8250	8302	8355	8408	8460	8512	8565	8617
88	8669	8721	8773	8824	8876	8928	8979	9031	9082	9133
89	9184	9235	9286	9337	9388	9439	9489	9540	9590	9641
0,90	0,7 9691	9741	9791	9841	9891	9941	9990	*0040	*0090	*0139
91	0,8 0188	0238	0287	0336	0385	0434	0482	0531	0580	0628
92	0677	0725	0773	0822	0870	0918	0966	1013	1061	1109
93	1156	1204	1251	1298	1346	1393	1440	1487	1534	1580
94	1627	1674	1720	1767	1813	1859	1905	1951	1997	2043
95	0,8 2089	2135	2180	2226	2271	2317	2362	2407	2452	2497
96	2542	2587	2632	2677	2721	2766	2810	2855	2899	2943
97	2987	3031	3075	3119	3162	3206	3250	3293	3337	3380
98	3423	3466	3509	3552	3595	3638	3681	3723	3766	3808
99	3851	3893	3935	3977	4020	4061	4103	4145	4187	4229
1,00	0,8 4270	4312	4353	4394	4435	4477	4518	4559	4600	4640
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,00	0,8 4270	4312	4353	4394	4435	4477	4518	4559	4600	4640
01	4681	4722	4762	4803	4843	4883	4924	4964	5004	5044
02	5084	5124	5163	5203	5243	5282	5322	5361	5400	5439
03	5478	5517	5556	5595	5634	5673	5711	5750	5788	5827
04	5865	5903	5941	5979	6017	6055	6093	6131	6169	6206
05	0,8 6244	6281	6318	6356	6393	6430	6467	6504	6541	6578
06	6614	6651	6688	6724	6760	6797	6833	6869	6905	6941
07	6977	7013	7049	7085	7120	7156	7191	7227	7262	7297
08	7333	7368	7403	7438	7473	7507	7542	7577	7611	7646
09	7680	7715	7749	7783	7817	7851	7885	7919	7953	7987
1,10	0,8 8021	8054	8088	8121	8155	8188	8221	8254	8287	8320
11	8353	8386	8419	8452	8484	8517	8549	8582	8614	8647
12	8679	8711	8743	8775	8807	8839	8871	8902	8934	8966
13	8997	9029	9060	9091	9122	9154	9185	9216	9247	9277
14	9308	9339	9370	9400	9431	9461	9492	9522	9552	9582
15	0,8 9612	9642	9672	9702	9732	9762	9792	9821	9851	9880
16	0,8 9910	9939	9968	9997	*0027	*0056	*0085	*0114	*0142	*0171
17	0,9 0200	0229	0257	0286	0314	0343	0371	0399	0428	0456
18	0484	0512	0540	0568	0595	0623	0651	0678	0706	0733
19	0761	0788	0815	0843	0870	0897	0924	0951	0978	1005
1,20	0,9 1031	1058	1085	1111	1138	1164	1191	1217	1243	1269
21	1296	1322	1348	1374	1399	1425	1451	1477	1502	1528
22	1553	1579	1604	1630	1655	1680	1705	1730	1755	1780
23	1805	1830	1855	1879	1904	1929	1953	1978	2002	2026
24	2051	2075	2099	2123	2147	2171	2195	2219	2243	2266
25	0,9 2290	2314	2337	2361	2384	2408	2431	2454	2477	2500
26	2524	2547	2570	2593	2615	2638	2661	2684	2706	2729
27	2751	2774	2796	2819	2841	2863	2885	2907	2929	2951
28	2973	2995	3017	3039	3061	3082	3104	3126	3147	3168
29	3190	3211	3232	3254	3275	3296	3317	3338	3359	3380
1,30	0,9 3401	3422	3442	3463	3484	3504	3525	3545	3566	3586
31	3606	3627	3647	3667	3687	3707	3727	3747	3767	3787
32	3807	3826	3846	3866	3885	3905	3924	3944	3963	3982
33	4002	4021	4040	4059	4078	4097	4116	4135	4154	4173
34	4191	4210	4229	4247	4266	4284	4303	4321	4340	4358
35	0,9 4376	4394	4413	4431	4449	4467	4485	4503	4521	4538
36	4556	4574	4592	4609	4627	4644	4662	4679	4697	4714
37	4731	4748	4766	4783	4800	4817	4834	4851	4868	4885
38	4902	4918	4935	4952	4968	4985	5002	5018	5035	5051
39	5067	5084	5100	5116	5132	5148	5165	5181	5197	5213
1,40	0,9 5229	5244	5260	5276	5292	5307	5323	5339	5354	5370
41	5385	5401	5416	5431	5447	5462	5477	5492	5507	5523
42	5538	5553	5568	5582	5597	5612	5627	5642	5656	5671
43	5686	5700	5715	5729	5744	5758	5773	5787	5801	5815
44	5830	5844	5858	5872	5886	5900	5914	5928	5942	5956
45	0,9 5970	5983	5997	6011	6024	6038	6051	6065	6078	6092
46	6105	6119	6132	6145	6159	6172	6185	6198	6211	6224
47	6237	6250	6263	6276	6289	6302	6315	6327	6340	6353
48	6365	6378	6391	6403	6416	6428	6440	6453	6465	6478
49	6490	6502	6514	6526	6539	6551	6563	6575	6587	6599
1,50	0,9 6611	6622	6634	6646	6658	6670	6681	6693	6705	6716
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,50	0,9 6611	6622	6634	6646	6658	6670	6681	6693	6705	6716
51	6728	6739	6751	6762	6774	6785	6796	6808	6819	6830
52	6841	6853	6864	6875	6886	6897	6908	6919	6930	6941
53	6952	6962	6973	6984	6995	7006	7016	7027	7037	7048
54	7059	7069	7080	7090	7100	7111	7121	7131	7142	7152
55	0,9 7162	7172	7183	7193	7203	7213	7223	7233	7243	7253
56	7263	7273	7283	7292	7302	7312	7322	7331	7341	7351
57	7360	7370	7379	7389	7398	7408	7417	7427	7436	7445
58	7455	7464	7473	7482	7492	7501	7510	7519	7528	7537
59	7546	7555	7564	7573	7582	7591	7600	7609	7617	7626
1,60	0,9 7635	7644	7652	7661	7670	7678	7687	7695	7704	7712
61	7721	7729	7738	7746	7754	7763	7771	7779	7787	7796
62	7804	7812	7820	7828	7836	7844	7852	7860	7868	7876
63	7884	7892	7900	7908	7916	7924	7931	7939	7947	7955
64	7962	7970	7977	7985	7993	8000	8008	8015	8023	8030
65	0,9 8038	8045	8052	8060	8067	8074	8082	8089	8096	8103
66	8110	8118	8125	8132	8139	8146	8153	8160	8167	8174
67	8181	8188	8195	8202	8209	8215	8222	8229	8236	8243
68	8249	8256	8263	8269	8276	8283	8289	8296	8302	8309
69	8315	8322	8328	8335	8341	8347	8354	8360	8366	8373
1,70	0,9 8379	8385	8392	8398	8404	8410	8416	8422	8429	8435
71	8441	8447	8453	8459	8465	8471	8477	8483	8489	8494
72	8500	8506	8512	8518	8524	8529	8535	8541	8546	8552
73	8558	8563	8569	8575	8580	8586	8591	8597	8602	8608
74	8613	8619	8624	8630	8635	8641	8646	8651	8657	8662
75	0,9 8667	8672	8678	8683	8688	8693	8699	8704	8709	8714
76	8719	8724	8729	8734	8739	8744	8749	8754	8759	8764
77	8769	8774	8779	8784	8789	8793	8798	8803	8808	8813
78	8817	8822	8827	8832	8836	8841	8846	8850	8855	8859
79	8864	8869	8873	8878	8882	8887	8891	8896	8900	8905
1,80	0,9 8909	8913	8918	8922	8927	8931	8935	8940	8944	8948
81	8952	8957	8961	8965	8969	8974	8978	8982	8986	8990
82	8994	8998	9002	9007	9011	9015	9019	9023	9027	9031
83	9035	9039	9043	9046	9050	9054	9058	9062	9066	9070
84	9074	9077	9081	9085	9089	9093	9096	9100	9104	9107
85	0,9 9111	9115	9118	9122	9126	9129	9133	9137	9140	9144
86	9147	9151	9154	9158	9161	9165	9168	9172	9175	9179
87	9182	9185	9189	9192	9196	9199	9202	9206	9209	9212
88	9216	9219	9222	9225	9229	9232	9235	9238	9242	9245
89	9248	9251	9254	9257	9261	9264	9267	9270	9273	9276
1,90	0,9 9279	9282	9285	9288	9291	9294	9297	9300	9303	9306
91	9309	9312	9315	9318	9321	9324	9326	9329	9332	9335
92	9338	9341	9343	9346	9349	9352	9355	9357	9360	9363
93	9366	9368	9371	9374	9376	9379	9382	9384	9387	9390
94	9392	9395	9397	9400	9403	9405	9408	9410	9413	9415
95	0,9 9418	9420	9423	9425	9428	9430	9433	9435	9438	9440
96	9443	9445	9447	9450	9452	9455	9457	9459	9462	9464
97	9466	9469	9471	9473	9476	9478	9480	9482	9485	9487
98	9489	9491	9494	9496	9498	9500	9502	9505	9507	9509
99	9511	9513	9515	9518	9520	9522	9524	9526	9528	9530
2,00	0,9 9532	9534	9536	9538	9540	9542	9544	9546	9548	9550
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,9 9532	9552	9572	9591	9609	9626	9642	9658	9673	9688
2,1	9702	9715	9728	9741	9753	9764	9775	9785	9795	9805
2,2	9814	9822	9831	9839	9846	9854	9861	9867	9874	9880
2,3	9886	9891	9897	9902	9906	9911	9915	9920	9924	9928
2,4	9931	9935	9938	9941	9944	9947	9950	9952	9955	9957
2,5	0,9 9959	9961	9963	9965	9967	9969	9971	9972	9974	9975
2,6	9976	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986
2,7	9987	9987	9988	9989	9989	9990	9991	9991	9992	9992
2,8	9992	9993	9993	9994	9994	9994	9995	9995	9995	9996
2,9	9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,0	0,9 9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999
3,1	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,2	0,9 9999	9999	9999	*0000	*0000	*0000	*0000	*0000	*0000	*0000

Register.

Abhängigkeit, wechselweise von Dimensionen 372.
Abhängigkeitsmaß 367, 371.
Abhängigkeitsverhältnisse 365—375.
Abnormitäten 51.
Abstandsgesetze 71, 303, für Verhältnisabweichungen 348.
Abstandsverhältnisse 73, 304.
Abweichung, arithmetische 17, von *A* 23, W. ders. 271, von *D* 23, W. ders. 296;
—— extreme 23, W. ders. 332;
—— logarithmische 79, 339, W. ders. 347.
—— mittlere 18, bez. *A* 23, bez. *D* 23, Bestimmung ders. 159;
—— mittlere, zweiter Ordnung 277;
—— quadratische mittlere 21;
—— wahrscheinliche 21;
Abweichungen, extreme, Mittelwert ders. 334, Zentralwert ders. 332, dichtester Wert ders. 333, Unterschied ders. 97.
—— mittlere, Beziehungen zwischen denselben 273.
Abweichungsschwerwert 178, Bestimmung dess. 180.
Abweichungssumme 18, emp. Bestimmung ders. 154, theor. Bestimmung ders. 283.
Abweichungszahlen 18, Unterschied ders. 23, emp. Bestimmung ders. 152, theor. Bestimmung ders. 57, 272.
Adresskarten 29, 41.
Antiparallelismus der Bewegung zweier Größen 382.
Asymmetrie, wesentliche u. zufällige 66;
Asymmetrie der Barometerabweichungen 445, 447, der Fehlerreihen 462, 466, der Galleriebilder 429, der Regenhöhen 438, 439, 444, der Rekrutenmaße 137, 202, der Roggenglieder 410—415, der Schädelmaße 135, 197, der Thermometerabweichungen 451, der täglichen Variationen 454, 455.
——, Gründe für 198 flgd.;
——, Merkmale der 67, 97, vergl. W.-Bestimmungen für A.;
——, Mischung von wesentl. und unwesentl. 204;
——, Richtung d. für verschiedene K.-G. 202;
——, W.-Bestimmungen für 208, 213, 217, 218, 250.
Asymmetriegesetze 69 flgd., Ableitung ders. 295 flgd., Bewährung derselben 197 flgd.
Asymmetriewerte vgl. Verzeichnis der Tabellen.
a-Tafel 113.
Ausgangsgesetz 69, Ableitung dess. 295.
Ausgangswert des einfachen G. G. 55, 271, des zweiseitigen G. G. 69, 297.
a-Werte 7, 17; Bestimmung ihrer Summe 143 flgd.; äquidistante *a* 106; leere *a* 107; nackte *a* 110; reduzierte *a* 111 zerstreute *a* 106.

Barometerabweichungen 368, 444 flgd.
Behandlung der K.-G., arithmetische 25, 99 flgd., 271 flgd.

Behandlung der K.-G., logarithmische 25, 80, 339—351.
——, Vergleich zwischen arithm. u. log. 342—346.
Beobachtungsfehler 457.
Berechnung s. Bestimmung.
BERNOULLI's Theorem 217, 243, 367, 370.
BESSEL 55, 89.
Bestimmung von Σa 143; $\Sigma a'$, Σa, 148; m', m, 152; $\Sigma\Theta'$, $\Sigma\Theta$, 154; η 159;
——, fundamentale (ideale, normale) 52;
——, rohe 11;
—— scharfe 11, 142, der Eingriffssumme 149—151, der Eingriffszahl 152, 153;
——, unwesentliche 9;
——, wesentliche (normale) 9.
Bestimmungsstück s. Element.
Bewährung des G. G. siehe Verzeichnis der Tabellen.
Beweglichkeit der Rekrutengröße 391.
Bewegung der Rekrutengröße 382; sächsischer Rekruten 387, 390, 398; belgischer Rekruten 396, 399, 400.
Bezeichnungen 7—26, 77—81, 208.
BODIO 65.
BOYD 28, 202.
BRAVAIS 445.
BREUGHEL 435.
BRILL 435.

Charakteristik der K.-G. durch den Mittelwert 87, 89, 90; durch den Zentralwert 87; durch den dichtesten Wert 87, 88, 90, 91; durch Schwankungsweite und mittl. Schwankung 93; durch Asymmetriewerte 97.

Dichtester Wert 12, 17; Eigenschaften dess. 171;
——, empirisch dichtester 182, Bestimmung dess. 184, 185;
——, theoretisch wahrscheinlichster 182, Existenz dess. 188, Eigenschaften dess. 189, Bestimmung dess. 190 flgd.;
——, Zusammenhang mit dem zweiseitigen G. G. 91, 307 flgd.;
——, logarithmisch dichtester 80, 340, Zusammenhang mit dem arithmetisch dichtesten Werte 349.
Dimensionen der K.-G. 4.
Dimensionsverhältnisse 352—361; Kollektive Behandlung ders. 362—364.
DOVE 29, 322, 368.
Durchgang durch den Meridian 457.
Durchschnittsfehler 461, 465.

Eingriffsintervall 142.
Eingriffsmaß 143.
Eingriffssumme 143, Bestimmung ders. 149—151.
Eingriffszahl 143, Bestimmung ders. 152, 153.
Einschieben leerer a 107.
Elemente 17—24, 80, 81; Bestimmungsweise ders. 141 flgd., 161 flgd.; vgl. das Verzeichnis der Tabellen.
ELLIOTT 19, 65, 146, 159.
ENCKE 88, 245, 275, 323.
Endabteilungen 106, Reduktion ders. 118, 119.
EULER 238.
Extreme 22, 93, 321 flgd.; der Rekrutenmaße 35, 36; abnorme E. 323; Mittelwerte der E. 325; vergl. d. Verzeichnis d. Tabellen.
Extremgesetze 74, 330 flgd.

Fadendistanzen 458, 461.
Fehler, mittlerer s. mittl. Abweichung.
—— der ungleichförmigen Schätzung 53, 108.
——, wahrscheinlicher von ε, q, w 275, von A 278; des Abhängigkeitsmaßes 367.
Fehlergesetz s. GAUSS'sches Gesetz.
Fehlerreihen, astronomische 456, 463, Asymmetrie ders. 462, 466.
Fehlertheorie 5, 15, 55, 88.
Funktionsbezeichnung 22.

Galleriegemälde, Dimensionen ders. 29, 49, 418 flgd.; Bilderklassen 419; Verhältnis der Dimensionen 432 flgd.; Flächenraum 434; vergl. das Verzeichnis der Tabellen.
GAUSS 20, 55, 64, 275.
GAUSS'sches Gesetz, einfaches 55 flgd., 271 flgd., beschränkte Gültigkeit dess.

64 flgd., Gültigkeit in der Fehlertheorie 465; Tabelle d. G. G. s. Verzeichnis d. Tabellen.
——, zweiseitiges 69, 271; Vergleich dess. mit dem einfachen G. G. 279; ein empirischer Vorzug dess. 198; theoretische Begründung dess. 306 flgd.; Bewährung dess. siehe Verzeichnis der Tabellen.; Motivierung dess. 65 flgd.
GAUSS'sches Gesetz, logarithmische Verallgemeinerung, Motivierung ders. 77; Vergleich mit dem arithm. Gesetze 341 flgd.; Bewährung siehe Verzeichnis der Tabellen.
Genrebilder, Dimensionen ders. 341—344, 423 flgd.
Gesamtzahl 17.
Gewicht der Organe des menschlichen Körpers 28; Asymmetrie 202.
Gliederung des Roggens 408—410.
GOULD 65.
Goldener Schnitt 41, 409.

HAGEN 319.
HAUBER 217.
Hauptabteilungen 108.
Hauptabweichungssumme s. Abweichungssumme.
Hauptabweichungszahl s. Abweichungszahl.
Hauptbestand 106.
Hauptwerte 8, 17; Eigenschaften ders. 160 flgd.
——, logarithmische 80, 340.
Hypothesen zur Ableitung des asymm. Verteilungsgesetzes 307, 313; des logarithmischen Gesetzes 351.

Integralausdruck d. G. G. 272.
Interpolation zur Berechnung des dichtesten Wertes 183—186, der Eingriffssumme 149—151, der Eingriffszahl 152, 153, des Zentralwertes 169.
Intervall 10; primäres 109; reduziertes 111.
Intervalltafel 113.

Jahresabweichungen und Jahreswerte, meteorologische 42.

KÄMPFE 64, 467.
Kataloge der Galleriebilder 421.
Kern der Verteilungstafel 122.
KOBOLD 457, 461.
Kollektivabweichungen 8.
Kollektivgegenstand 3, 31; disparater 33; einheitlicher 33; einstimmiger 33; einwurfsfreier 51; fehlerloser oder normaler 31; reiner, ungemischter 32; verstümmelter 32; vollzahliger 31; zwiespältiger 33; Umfang des K.-G. 3; Weite (räumliche, zeitliche) des K.-G. 38; Merkmal des einheitlichen und zwiespältigen K.-G. 39, 40.
Kollektivgegenstände, Arten ders. 28, 29; artistische 40, meteorologische 42—48; Verteilungstafeln und Elemente der K.-G. s. das Verzeichnis der Tabellen.
Kollektivmaßlehre 6, Verschiedenheit ders. von der Fehlertheorie 15, 16.
Korrektion wegen des endlichen *m* 20, 95, 96.
KRAMP 64.
Kreismittelfehler 276.

Lagengesetz 74, 194, 200, Ableitung dess. 306; der Verhältnisabweichungen 348.
Landschaftsbilder, Dimensionen ders. 423 flgd.
LE SUEUR 420.
Lotterielisten (Ziehungslisten sächsischer Lotterien) verwendet zur Bestimmung der Successionsabhängigkeit 45; als Ersatz der Wahrscheinlichkeitsurne 229; zur Bestimmung der Asymmetriewerte 230, 251, 266 flgd.

Maßlehre, astronomische und physikalische. siehe Fehlertheorie.
Meridiankreis 457.
MEYER 63, 217, 240, 467.
Mittel, arithmetisches 17, 86—92, Bestimmung dess. 146, Eigenschaften dess. 161; arithmetisches, von Verhältnissen 353.
——, falsches 207, 237.
——, geometrisches 81, Zusammenhang

dess. mit dem arithm. 349; geom. M. von Verhältnissen 354, 357 flgd.
——, harmonisches v. Verhältnissen 355.
——, logarithmisches 80, 340.
——, prozentisches v. Verhältnissen 353.
——, singuläres 164.
——, summarisches 164, von Verhältnissen 353, 357 flgd.
——, wahres 207, 237.
Mittelfehler 459, 465, s. mittl. Abweichung.
Mittelwert siehe Mittel.
Monatsabweichungen und Monatswerte, thermische 29, 42, 46, 368, 371.
Mythologische Bilder 419, 426 flgd.

Nachsumme 24.
Nachzahl 24.

Parallelismus der Bewegung zweier Größen 382.
—— der Bewegung sächsischer Rekrutenmaße 386 flgd.
—— der Bewegung belgischer Rekrutenmaße 394 flgd.
π-Gesetze 71, 201; Ableitung ders. 305; —— der Verhältnisabweichungen 348.
P-Gleichung 275.
Plantamour 436, 437, 440.
Poisson 217.
Prinzip, symmetrisches und asymmetrisches 81, 83.
Proportionalgesetz 70, 199; Ableitung dess. 297.
p-Wert 71, 72, 305.

Quetelet 28, 44, 48, 50, 65, 66, 196, 292, 444, 452, 454, 455.

Reduktion d. Verteilungstafeln 111 flgd.
—— der Endabteilungen ders. 118.
—— des Hauptbestandes ders. 111.
—— mit geteilten z 115.
Reduktionslage 132; Einfluss ders. auf die Werte der Elemente 135, 137, 138; Wahl ders. 139.
Reduktionsstufe 123; Einfluss ders. auf die Werte der Elemente 127, 130, 132; Vorteile und Nachteile der Größe ders. 124.
Regenhöhen, tägliche für Genf 29, 48, 49, 344—347, 369, 436 flgd..
Regenmesser 437.
Rekrutenmaße 28, 381, 382, sächsische 34—37, 293, 325, 369, 386 flgd.; belgische 394 flgd., französische 292, 397; vergl. das Verzeichnis der Tabellen.
Religiöse Bilder, Dimensionen ders. 419, 426 flgd.
Requisiten der K.-G. 31—52; der Untersuchung 52—54.
Roggenähren s. Roggenhalme.
Roggenhalme 28, 403 flgd.; Gliederung ders. 408—410.
Roggenglieder 404, Verhältnisse ders. 416, 417; vergl. das Verzeichnis der Tabellen.

Schädel, Breitenindex dess. 375.
Schädelmaße 28, 101, 362, 373; vgl. d. Verzeichnis der Tabellen.
Schädelmodulus, Welcker'scher 373.
Schätzung, ungleichförmige 53, 108.
Scheibner 349, 356, 361.
Scheidewert 160, Bestimmung dess. 173, 174.
Schmid 323.
Schwankung 19, 20; starke 76.
Schwankungsweite 92, 93.
Schwankungswert, mittlerer, s. Abweichung, mittlere.
Schwerster Wert 160; Bestimmung dess. 175.
Spezialgesetze wesentlich asymmetrischer Verteilung 69—74; Ableitung ders. 295—306.
Stadtmaße, Leipziger 28.
Stilllebenbilder 419, 424 flgd.
Studentenrekruten 28.
Successionsabhängigkeit 45; Bestimmung ders. 366—372.
Summenformel von Euler oder Mac Laurin 227, 238.
Summengesetz 283, 284; Ableitung dess. 286, 287; vergl. d. Verzeichnis der Tabellen.
Supplementarverfahren 289—293.
S-Verfahren 144—146.
S-Wert 142.

Tafel s. Verteilungstafel.
Tagesabweichungen und Tageswerte, meteorologische 29, 42, 368, 369, 436, 444, 448, 451.
Tagesmittel, allgemeines thermisches 43.
Thermometerabweichungen 368, 448 flgd.
t-Tabelle, Einrichtung ders. 467.
t-Wert 25.

Umkehr der Asymmetrie, bei thermischen Monatsabweichungen 202, bei Barometerabweichungen 447, bei Thermometerabweichuugen 451.
—— bei den Roggengliedern 202, 411, 416.
Umkehrgesetz 74; Ableitung dess. 306; der extremen Abweichungen 336, 337.
Umkreisintervall 109.
Unterschied der Abweichungszahlen 23, 97; der extremen Abweichungen 97.
Untersuchungsmaterial 27—30.
Urliste 7, 100.

Variationen der Rekrutengröße 379 flgd.; räumlicher Zusammenhang derselben 386 flgd.; zeitlicher Zusammenhang ders. 398 flgd.; sächsischer Rekruten 387, 390; belgischer Rekruten 396, 397, 400.
——, tägliche der Temperatur 29, 50, 451 flgd., Asymmetrie ders. 454, 455.
Vergleichstabelle, Einrichtung ders. 279.
Verhältnisabweichungen 77, 339.
Verhältnisse, kollektive Behandlung ders. 361 flgd.;
——, mittlere 353 flgd.; siehe Mittel von Verhältnissen.
Verhältniswert, dichtester 81, 340; Eigenschaften dess. 348.
Verhältniszahlen 58, 59, 272.
VERONESE 434.
Verteilung 4; geometrische Darstellung 110; asymmetrische V. 14, 312, 313; symmetrische V. 9, 311, 313.
Verteilungsgesetz 4, 55, Anwendung dess. 57, asymmetrisches 295, 317; logarithmisches 82, 347; s. GAUSS'sches Gesetz.
Verteilungsgesetze, asymmetrische siehe Spezialgesetze.
Verteilungstafel 7, ideale 8, 10, empirische 9, 10, primäre 11, 100, Beispiele 102 flgd., reduzierte 11, 111, Beispiele 121 flgd.
Vertikalfaden des Meridiankreises 457.
Visitenkarten 29, 41, 354.
Vorsumme 24.
Vorzahl 24.

Wahrscheinlichkeit, asymmetrische 14, 66 flgd., 214, 313.
——, symmetrische 10, 14, 60 flgd.; 219.
Wahrscheinlichkeitsbestimmungen für unwesentliche Asymmetrie 208, bez. d. wahren Mittels 217, 218, 227, bez. d. falschen Mittels 250, 258 flgd.; für wesentl. Asymmetrie 213; für Kollektivabweichungen 271, 296, 297; für extreme Abweichungen 332; für logarithm. Abweichungen 347; für Successionsabhängigkeit 366, 371; für Abhängigkeit zwischen Dimens. 372; Anwendung derselben in der Statistik 232 flgd.
Wahrscheinlichkeitsgesetze siehe Wahrscheinlichkeitsbestimmungen.
Wasserhöhen s. Regenhöhen.
WELCKER 28, 101, 362, 373, 374.
Wert, dichtester s. dichtester Wert.
—— extremer s. Extrem.
Wertmitte s. Zentralwert.

ZEISING 409.
Zenithdistanz 457.
Zentralwert 13, 17, 165; Bestimmung dess. 167, 169; logarithmischer 80.
Zufall, negativ bestimmt 6.
Zufallsgesetze 5, 31; Störung derselben durch Nebenzwecke 41, durch Periodizität 44, durch Successionsabhängigkeit 45; vergl. Wahrscheinlichkeitsbestimmungen.
Zusammenfallen der Hauptwerte 14, 61, 62, 304.
Zusammenhang der Variationen der Rekrutengröße, räumlicher 386 flgd., zeitlicher 398 flgd.
Zusammenhang der logarithmischen und arithmetischen Hauptwerte 349.
z-Wert 8, 100; reduziertes *z* 110.

Verzeichnis der Tabellen.

a) Verteilungstafeln und Tabellen der Elemente für K.-G.

Primäre Verteilungstafeln:
Rekrutenmaße der Studenten 104.
Roggenhalme, oberstes Glied 105.
Schädelmaße, Vertikalumfang 102, Horizontalumfang 103.
Probe für die Fadendistanzen (Klemme Ost, Nachtbeobachtungen) 459.
Probe für die Galleriegemälde (Genre) 423.
Probe für die Regenhöhen (Januar) 437.

Arithmetisch reduzierte Verteilungstafeln:
Barometerabweichungen 446.
Fehlerreihen, astronomische 463, 464.
Galleriegemälde 342, 424.
Regenhöhen, tägliche 345, 442.
Rekrutenmaße der Studenten 129, 136, extreme Abweichungen 329.
Roggenhalme, oberstes Glied 131, 138, sechsgliedrige Halme 413.
Schädelmaße, Vertikalumfang 121, 123, 124, 134, Abweichungswerte 179, Abweichungssummen 289.
——, Horizontalumfang 121, 123.
Thermometerabweichungen 450.
Variationen, tägliche, der Temperatur 453.
Willkürlich aufgestellte Verteilungstafel 141.

Logarithmisch reduzierte Verteilungstafeln:
Galleriegemälde 343, 430.
Regenhöhen 346, 443.
Verhältnisse der Roggenglieder 417.
Verhältnisse der Schädeldimensionen 363.

Tabellen der Elemente:
Barometerabweichungen 447, 448.
Fadendistanzen 460, 461.
Fehlerreihen 464.
Galleriegemälde 342, 343, 426, 428, 431, 432, 433, 434.
Regenhöhen 345, 346, 438, 444.

Rekrutenmaße der Studenten 130, 137, Mittelwerte der Extreme 326, Mittelwerte der extremen Abweichungen 330, Mittelwerte sächsischer Rekruten 387, 388, Größenbewegung ders. 390, Bewegungssumme ders. 393, Größenbewegung belgischer Rekruten 396, 397, Zentralwerte ders. 400.
Roggenglieder 132, 138, 406, 407, 412, 414, Verhältnisse 417.
Schädelmaße 127, 135, roh und scharf bestimmte Werte von μ und $\Sigma\Delta$ 157, 159, Verhältnisse der Dimensionen 363.
Thermometerabweichungen 449, 451.
Variationen, tägliche, der Temperatur 453.

b) Tabellen des Gauss'schen Gesetzes und der Bewährungen desselben.

Tabelle der Abweichungszahlen bezogen auf ε, ε-Tabelle, 58, 59.
—— bezogen auf $\varepsilon\sqrt{\pi}$, t-Tabelle I und II, 468—476.
—— bezogen auf w 235.
Umsetzung der t-Tabelle für Lotterieversuche 269.
Tabelle der Abweichungssummen 285, 286, 291.
Bewährung des einfachen G. G. 280, 281, 463, 464, 465.
—— des zweiseitigen G. G. 280, 281, 342, 345, 413, 446, 450, 453, 463, 464.
—— des logarithmischen Gesetzes 343, 346, 363, 417, 430, 443.
—— des Summengesetzes 289.
—— der Extremgesetze 335.

c) Tabellen der Asymmetriewerte u und v.

Vergleich zwischen genauen und angenäherten Mittelwerten von u 224.
—— —— angenähert berechneten wahrscheinlichen Werten von u 226, 228.
—— —— theoretischen und empirischen u 230, 231.
—— —— theoretischen und empirischen mittleren und wahrscheinlichen u 232.
Empirisch bestimmte Anzahlen der v und u 252, 253, 254.
Vergleich zwischen theoretischen und empirischen v 258.
—— —— theoretischen und empirischen mittleren und wahrscheinlichen v 255.
—— —— empirischen Mittelwerten von u und v 256.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.