



Options Asiatiques

Réalisé par :

BELLALAH OUSSAMA

SAID SAMER

Encadré par :

BETTINELLI JULIEN

Année universitaire 2017/2018

Table des matières

1	Modèle	3
1.1	Existence	3
1.2	Unicité	4
2	Option Asiatique	5
3	Approximation de Turnbull & Wakeman	6
3.1	Cas continu	6
3.2	Cas discret	7
4	Pricing Monte Carlo	8
4.1	Simulation des mouvements Browniens	8
4.2	Simulation Monte-Carlo	8
5	Comparaison des Méthodes	9
5.1	Question 6 : Variance et Intervalle de Confiance	9
5.2	Question 7 : Influence du Strike K sur les estimations du prix P	12
5.3	Question 8 : Influence de la volatilité sur les estimations du prix P	14
5.4	Questions 9 et 10 : Influence du pas de discrétisation sur l'es- timation	18
5.5	Questions 11 et 12 : Temps de Calcul et précision	22
5.6	Questions 13 et 14 : Réduction de variance	23

Enjeu

Ce sujet propose le calcul du prix d'une option asiatique. Une approximation est communément utilisée pour les valoriser, elle présente l'avantage d'être une formule fermée. Nous étudions la pertinence de cette approximation en la comparant à une valorisation par technique de Monte Carlo dans le cadre du modèle de Black & Scholes. Nous étudions aussi l'influence de la discrétisation des observations de la moyenne.

Chapitre 1

Modèle

On considère un modèle de Black Scholes en dimension 1. on pose $S(t)$ le cours de l'actif risqué au temps t . Soit W_t un mouvement Brownien sous probabilité Risque Neutre. Soit r le taux d'intérêt, supposé constant, σ la volatilité et $S(0) = S_0$ la valeur initiale de l'actif, supposée déterministe. La dynamique du cours de l'actif suivante est régie par l'équation

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW_t$$

Vérifions que $S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)$.

1.1 Existence

En effet posons $F(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)$ On a d'après la formule d'Itô :

$$F(t) = f(t, W_t) = S_0 + \int_0^t S_0(r - \frac{\sigma^2}{2})\exp((r - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma W_s)ds \\ + \int_0^t S_0\sigma\exp((r - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma W_s)dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t S_0\sigma^2\exp((r - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma W_s)ds$$

$$F(t) = S_0 + \int_0^t (r - \frac{\sigma^2}{2})F(s)ds + \int_0^t \sigma F(s)dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 F(s)ds$$

$$F(t) = S_0 + \int_0^t rF(s)ds + \int_0^t \sigma F(s)dW_s$$

Donc F est solution de l'équation différentielle stochastique.

1.2 Unicité

Rappelons l'équation :

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW_t$$

de la forme :

$$dS(t) = b(t, S(t))dt + a(t, S(t))dW_t$$

où $b(t, x) = r x$ et $a(t, x) = \sigma x$, a et b ne dépendent pas du temps et sont continus par rapport à la 2^{ème} variable x car ils sont linéaires par rapport à cette variable. Il suffit de montrer que a et b sont Lipschitz

$$\sup_{t \in [0, T]} |a(t, x) - a(t, y)| \leq \sigma |x - y|$$

de même :

$$\sup_{t \in [0, T]} |b(t, x) - b(t, y)| \leq r |x - y|$$

donc a et b sont lipschitz et continus donc sont à croissance linéaire. On conclut donc qu'on a une unique solution et que $S(t)$ vérifie l'équation l'expression mentionnée au préalable.

Chapitre 2

Option Asiatique

Une option asiatique confère à son possesseur le droit d'échanger la moyenne d'un actif sur une période donnée à un prix fixe. Ces options sont très utilisées car elles sont moins chères que les options européennes et couvrent contre les variations moyennes de prix ce qui est le facteur de risque principal pour les entreprises dont l'activité est continue. Le prix de cette option est donc dans notre modèle :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T S(t) dt - K)_+]$$

sous probabilité Risque Neutre pour un Call et pour un Put on a :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T S(t) dt)_+]$$

Puisque 1 euro à l'instant $t = T$ vaut $e^{-r(T-t_0)}$ à la date $t = t_0$ donc le prix d'une option Asiatique déjà commencée ($t_0 < 0$) lorsque son prix aujourd'hui vaut P est $e^{rt_0} P$.

Chapitre 3

Approximation de Turnbull & Wakeman

3.1 Cas continu

Turnbull & Wakeman ont proposé d'approximer la somme de lois log-normales par une loi log-normale. En égalant les 2 premier moments M_1 et M_2 ils proposent d'approximer la distribution de $\frac{1}{T} \int_0^t S(t)$ par celle de $S_A(t)$, avec S_A un sous-jacent ayant la même dynamique que $S(t)$. En choisissant :

$$M_1 = \frac{e^{rT} - 1}{rT}$$

$$M_2 = \frac{2e^{2r+\sigma^2}T}{(r+\sigma^2)(2r\sigma^2)T^2} + \frac{2}{rT^2} \left[\frac{1}{2r+\sigma^2} - \frac{e^{rT}}{r+\sigma^2} \right]$$

Donc $S_A(t)$ suit une loi log-normale de paramètres :

$$\mu = \log(S_0) + (r_A - \sigma_A^2/2)t$$

$$\sigma^2 = \sigma_A^2 t$$

Donc la distribution de $S_A(t)$ est : $f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

$$P = \exp(-rT) \int_K^\infty (x - k) f_X(x) dx$$

Et par un changement de variable $y = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$ on accède à :

$$P = \int_{\frac{\ln(k)-\mu}{\sigma}}^\infty (e^{\sigma y + \mu} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \int_{\frac{\ln(k)-\mu}{\sigma}}^\infty \frac{e^{\sigma y + \mu}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy - \int_{\frac{\ln(k)-\mu}{\sigma}}^\infty \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

Finalement on accède à une formule de calcul de prix suivant :

$$P = e^{-rT} (\exp(\mu + \sigma^2/2) \Phi(\frac{\mu + \sigma^2 - \ln(K)}{\sigma}) - K \Phi(\frac{\mu - \ln(K)}{\sigma}))$$

En prenant en considération que Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On prend pour la simulation $d_1 = \frac{\mu + \sigma^2 - \ln(K)}{\sigma}$ et $d_2 = d_1 - \sigma$

Pour $\sigma = 0.3, S_0 = 1, K = 1, r = 0.01, T = 6$ mois, on obtient la valeur du call égale à $P = 0.0500247$

3.2 Cas discret

Maintenant la moyenne est toujours calculée sur une période discrète. L'intégrale est donc calculée comme

$$\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta_t) = S_A(T) \text{ où } N\Delta_t = T$$

Premièrement, en égalant le premier moment de $\frac{1}{T} \int_0^T S(t)$ et de $S_A(t)$ on trouve :

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{N} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^N S(i\Delta t)] \\ &= \frac{S_0}{N} \sum_{i=1}^N e^{rT/k} \\ &= \frac{S_0}{N} \exp(rT/N) \left(\frac{1 - \exp(rT/N)}{1 - \exp(rT/N)} \right) \end{aligned}$$

deuxièmement, en égalant le deuxième moment de $\frac{1}{T} \int_0^T S(t)$ et de $S_A(t)$ on trouve :

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{1}{N^2} \mathbb{E}[(\sum_{i=1}^N S(i\Delta t))^2] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} S_0^2 e^{\sigma^2 t_i} e^{r t_i} (e^{r t_i} + 2A_i) \text{ tq} \end{aligned}$$

$$A_i = e^{r(i+1)T/N} \left(\frac{1 - e^{rT(N-i)/N}}{1 - e^{rT/N}} \right)$$

On obtient finalement m_2 égale à $\exp(L/N) * ((1 - \exp(L)) / (1 - \exp(L/N))) + 2 * (\exp(r * T/N) / (1 - \exp(r * T/N))) * ((1 - \exp(L * (N-1)/N)) / (1 - \exp(L/N))) * \exp(L/N) - \exp(r * T) * \exp(R/N) * ((1 - \exp(R * (N-1)/N)) / (1 - \exp(R/N)))$

tq

$$L = (2r + \sigma^2)T$$

$$R = (r + \sigma^2)T$$

$$r_A = \log(m_1)/T \quad \sigma_A = \sqrt{\log(m_2)/T - 2 * r_A}$$

Pour $\sigma = 0.3, S_0 = 1, K = 1, r = 0.01, T = 6$ mois, $\Delta_t = \frac{1}{252}$ on obtient une valeur de P égale à $P = 0.0503$

Chapitre 4

Pricing Monte Carlo

4.1 Simulation des mouvements Browniens

Afin d'implémenter la simulation Monte Carlo, on a besoin de créer autant de mouvements Browniens que le nombre de trajectoires n . Ceci revient à créer n Gaussiennes centrées réduites indépendantes G_1, \dots, G_n grâce au théorème de Box-Müller qui nous permet de produire des lois normales indépendantes à partir de lois uniformes.

4.2 Simulation Monte-Carlo

En premier lieu on approxime $\frac{1}{T} \int_0^T S(t)dt$ par

$$\frac{1}{T} \int_0^T S(t)dt = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S(i\Delta_t) = \bar{S}_N$$

Puis on approxime P par une méthode Monte-Carlo :

$$P = \frac{e^{rT}}{n} \sum_{j=1}^n (\bar{S}_{N,j} - K)_+ \text{ où } (\bar{S}_{N,j})_{1 \leq j \leq n} \text{ sont des copies iid de } \bar{S}_N$$

Pour $\sigma = 0.3, S_0 = 1, K = 1, r = 0.01$ $T = 6$ mois, $\Delta_t = \frac{1}{252}$ et $n = 100000$ trajectoires, on obtient un prix du call égal à $P = 0.0504464$. La volatilité et le taux sont annuels

Chapitre 5

Comparaison des Méthodes

Sauf mention contraire, les variables suivantes sont les mêmes pour toutes les questions $\sigma = 0.3$ sauf pour question 8), $S_0 = 1, K = 1$ sauf pour questions 7, 9 et 10, $r = 0.01$, $T = 6$ mois, $\Delta_t = \frac{1}{252}$ et $n = 100000$ trajectoires

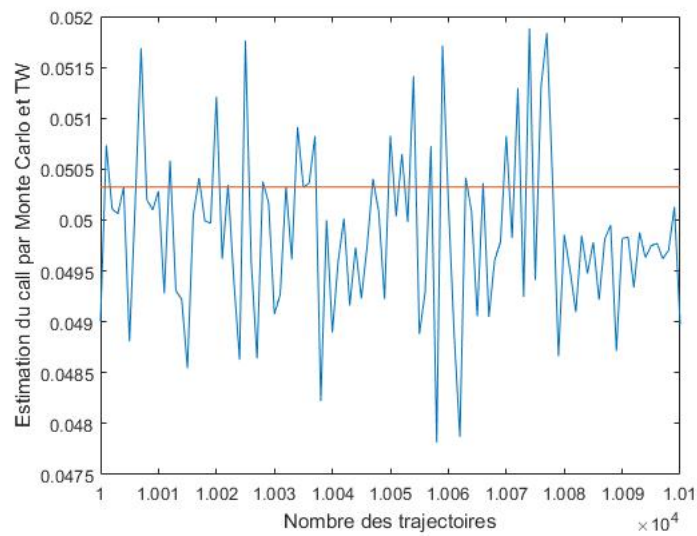
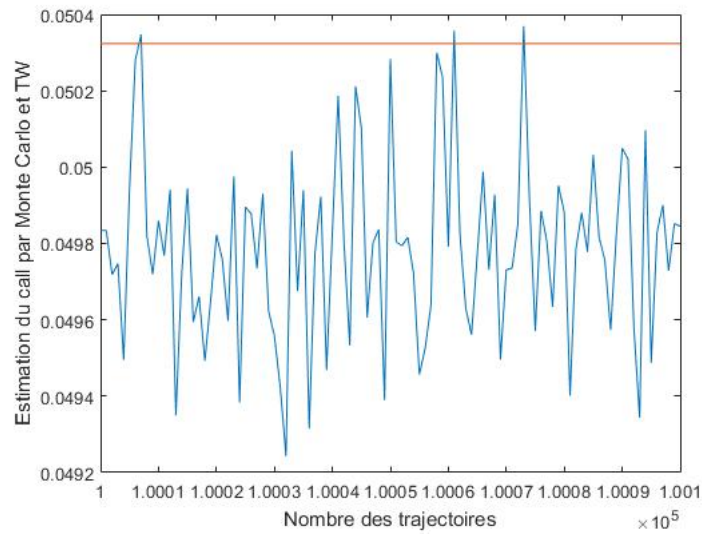
5.1 Question 6 : Variance et Intervalle de Confiance

L'estimateur de la variance empirique s'écrit :

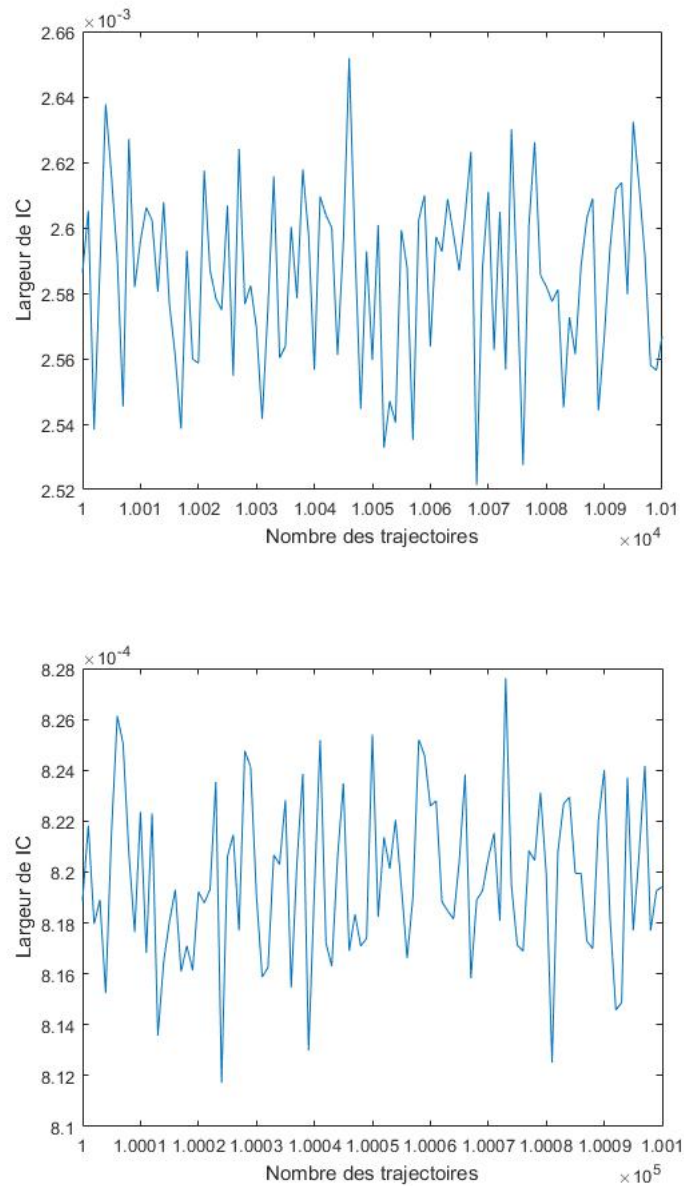
$$\sigma_n^2 = \frac{e^{-2rT}}{n-1} \sum_{j=1}^N (Y_j - \bar{Y})^2 \text{ où } \bar{Y} \text{ est la moyenne empirique des } (Y_j)_{1 \leq j \leq N}$$

et où $Y_j = (\bar{S}_{N,j} - K)_+$ pour tout $j \in [1 : n]$

la largeur de l'intervalle de confiance asymptotique à 90% est égale à $2a\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$ où a est le quantile d'ordre 90% de la loi gaussienne centrée réduite. Les figures suivantes montrent la variation du prix en fonction du nombre des trajectoires pour n entre 10000 et 10100 puis entre 100000 et 100100.



Les figures suivantes illustrent la variation de la largeur de l'intervalle de confiance pour les mêmes variations du nombre des trajectoires.

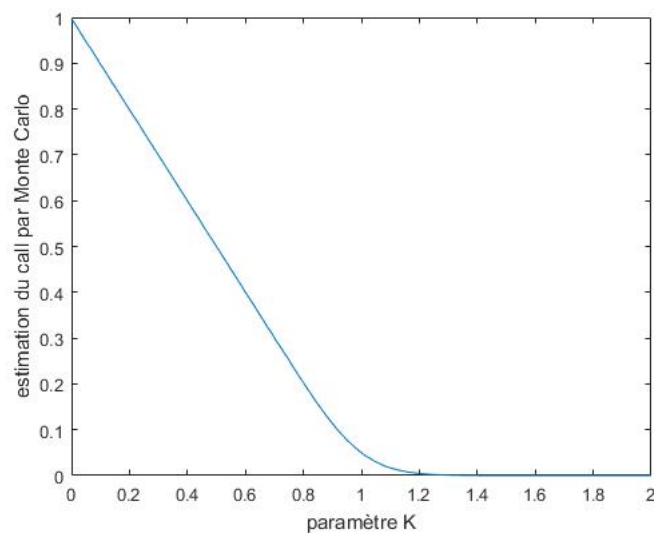
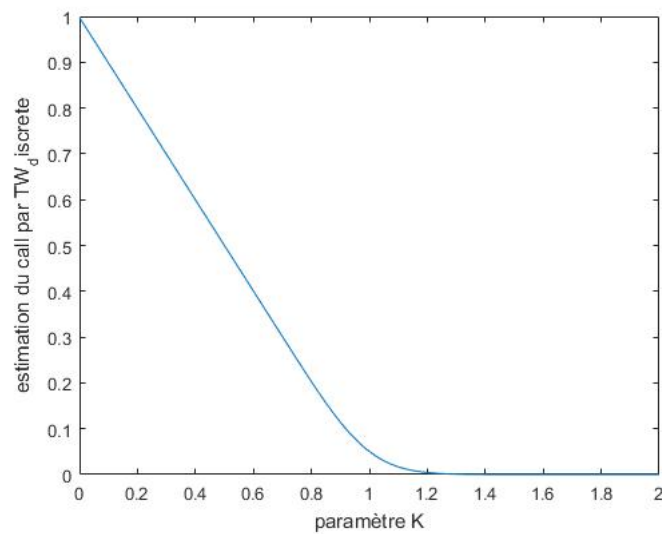


Commentaire sur les courbes

On remarque que les fluctuations de l'estimateur Monte Carlo autour de la valeur de l'estimateur T&W discret sont moins importants que pour un nombre de trajectoires plus important, ceci s'explique par la diminution de la largeur de l'intervalle de confiance de $\frac{\sqrt{100000}}{\sqrt{10000}} = \sqrt{10} = 3,16$ fois, ceci est visible sur les courbes de variation de l'intervalle de confiance en fonction du nombre de trajectoires. Dans toute la suite, on choisira un nombre de trajectoires égale à 100000 pour une plus petite largeur d'intervalle de confiance.

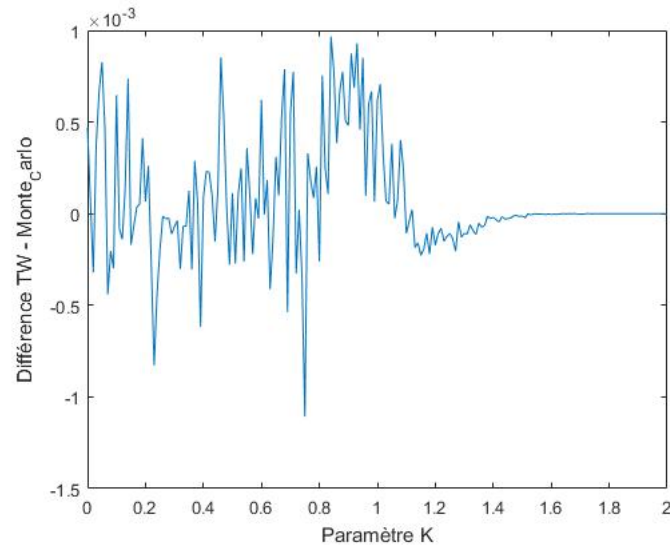
5.2 Question 7 : Influence du Strike K sur les estimations du prix P

Les 2 figures suivantes illustrent la variation du prix P en fonction du strike K pour les 2 estimateurs (Monte-Carlo et T&W discret)

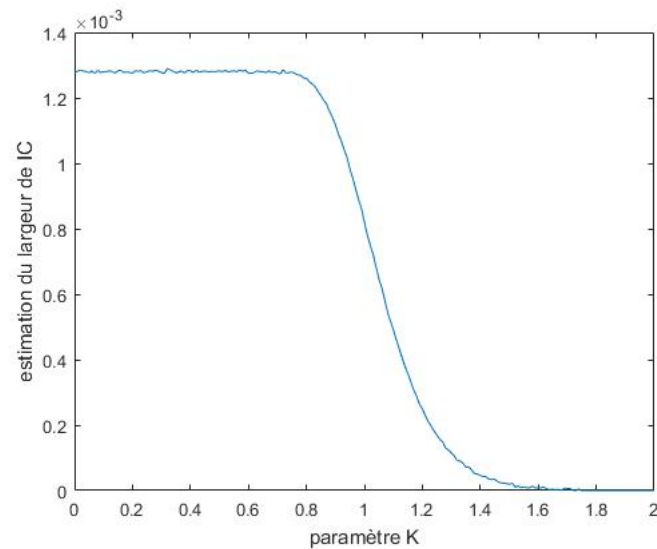


La figure suivante illustre la variation de la différence entre l'estimateur

Monte Carlo et T&W en fonction du paramètre K.



La figure suivante illustre l'évolution de l'intervalle de confiance de l'estimateur Monte-Carlo en fonction de K.



Commentaire sur les courbes

Les 2 premières figures ont la même allure, il s'agit d'un estimateur décrois-

sant en fonction de K , ceci est dû au fait que la fonction définie par :

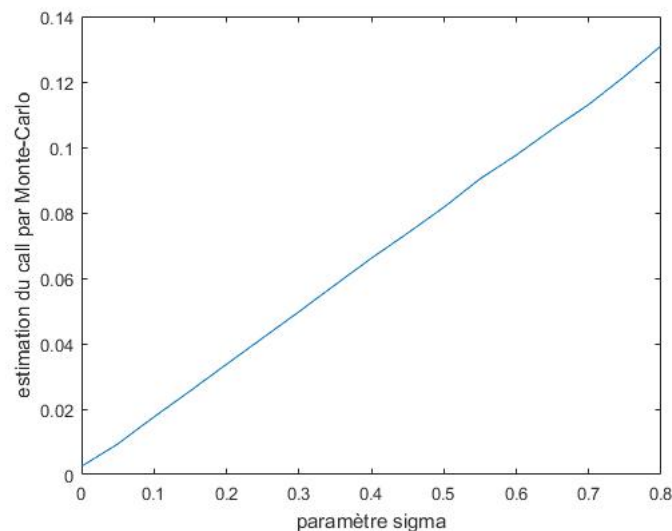
$$\Phi_{S_A(T)}(K) = e^{-rT} \mathbb{E}[(S_A(T) - K)_+]$$

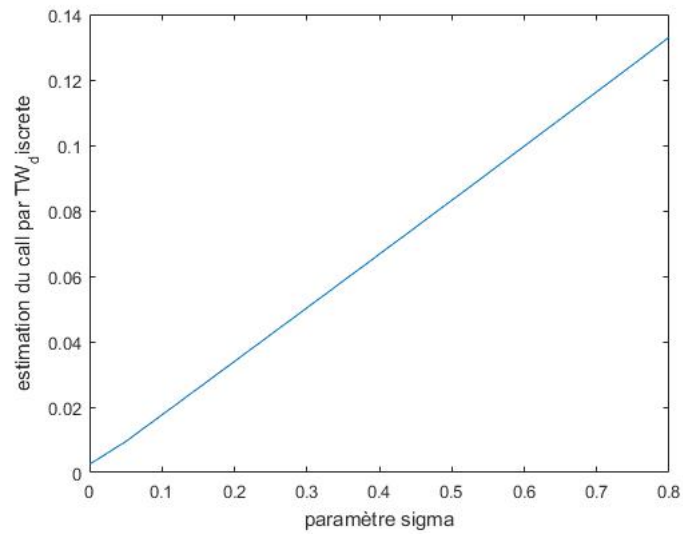
est décroissante en fonction de K (car l'opérateur espérance est croissant)

La troisième figure, illustrant la variation de la différence entre l'estimateur Monte Carlo et T&W en fonction du paramètre K , montre que cette variation tend vers zéro, cette variation est due au fait que les 2 estimateurs ont à la fois tendance à coïncider sur une valeur commune de P qui est nulle, ceci est conséquence directe de la croissance de K jusqu'à la nullité de P , la fluctuation de l'estimateur monte carlo avant $K = 1$ persistent vu que l'intervalle de confiance permet de donner des valeurs plus variées que celles de T&W, ceci est visible sur la quatrième figure où la largeur de l'intervalle de confiance reste aux alentours de $1.3 \cdot 10^{-3}$

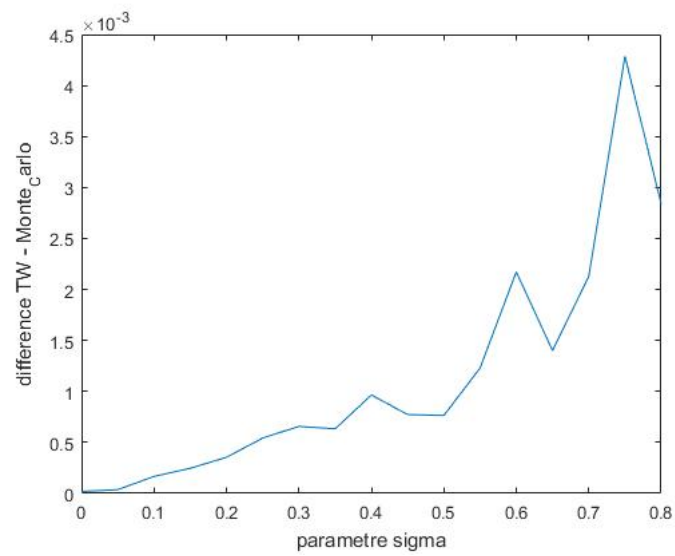
5.3 Question 8 : Influence de la volatilité sur les estimations du prix P

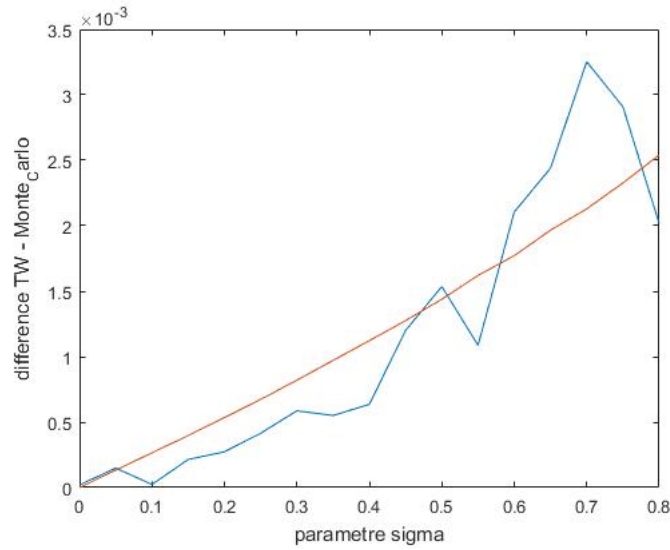
Les 2 figures suivantes illustrent la variation du prix P en fonction de la volatilité σ pour les 2 estimateurs (Monte-Carlo et T&W discret)





La figure suivante illustre la variation de la différence entre ces 2 estimateur en fonction de la volatilité, la figure d'après montre au même temps la variation de la largeur de l'intervalle de confiance





Commentaire sur les courbes

on remarque pour les 2 estimations, que le prix du call Asiatique évolue de manière croissante en fonction de la volatilité, ceci est dû à la preuve située juste après la partie commentaire sur les courbes :

D'autre part on remarque que les fluctuations de la différence entre l'estimateur Monte-Carlo et la valeur de T&W évolue en un trend croissant, on s'éloigne de plus en plus de l'estimation de T&W ceci est dû à la croissance de la largeur de l'intervalle de confiance, quatrième figure, puisque la largeur de l'intervalle de confiance est fonction croissante de σ , en effet elle est égale à $2a\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$ où a est le quantile d'ordre 90% de la loi gaussienne centrée réduite. et où $\sigma_n \sim \sigma$

Preuve de la croissance du prix du call en fonction de la volatilité
rappelons que

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - K)_+]$$

après les approximations :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(S_A(T) - K)_+] = e^{-rT} \mathbb{E}[g(S_A(T))]$$

où $g(x) = (x - K)_+$ est une fonction convexe et S_A vérifie la même dynamique que S avec r remplacé par r_A et σ par σ_A . Soit, $\sigma' > \sigma$, puisque

Test non nul, il existe $t < T$ tel que $\sigma'^2 t = \sigma^2 T$

$$\begin{aligned}
P_{\sigma'} &= e^{-rT} \mathbb{E}[g(S_A(T))] \\
&= \mathbb{E}[e^{-rT} g(S_0 e^{(r-\frac{\sigma'}{2})T + \sigma' W_T})] \\
&= \mathbb{E}[e^{-rT} g(S_0 e^{(r-\frac{\sigma'}{2})T + \frac{\sigma'^2}{2}t - \frac{\sigma'^2}{2}t + \sigma'(W_T - W_t) + \sigma' W_t})] \\
&= \mathbb{E}[e^{-rT} g(S_0 e^{rT - \frac{\sigma'^2}{2}(T-t) - \frac{\sigma'^2}{2}t + \sigma'(W_T - W_t) + \sigma' W_t})] \\
&= \mathbb{E}[e^{-rT} g(S_0 [e^{rT - \frac{\sigma'^2}{2}t + \sigma' W_t}] [e^{-\frac{\sigma'^2}{2}(T-t) + \sigma'(W_T - W_t)}])] \\
&= \mathbb{E}[g(YU)] \text{ où } Y = S_0 [e^{rT - \frac{\sigma'^2}{2}t + \sigma' W_t}] \text{ et } U = [e^{-\frac{\sigma'^2}{2}(T-t) + \sigma'(W_T - W_t)}]
\end{aligned}$$

On va utiliser le lemme suivant :

lemme : Si f est convexe et U une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[U] = 1$ alors :

$$\text{pour toute variable aléatoire } Y, \text{ on a } \mathbb{E}[f(YU)] \geq f(Y)$$

on applique ce lemme avec $f = g$, sachant que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U] &= \mathbb{E}[e^{-\frac{\sigma'^2}{2}(T-t) + \sigma'(W_T - W_t)}] \\
&= e^{-\frac{\sigma'^2}{2}(T-t)} \mathbb{E}[e^{\sigma'(W_T - W_t)}] \\
&= 1
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme on aura

$$\begin{aligned}
P_{\sigma'} &= \mathbb{E}[e^{-rT} g(S_0 [e^{rT - \frac{\sigma'^2}{2}t + \sigma' W_t}] U)] \\
&\geq e^{-rT} g(S_0 e^{rT - \frac{\sigma'^2}{2}t + \sigma' W_t}) \\
&\geq e^{-rT} g(S_0 e^{(r\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{t}} W_t}) \\
&\geq e^{-rT} g(S_0 e^{(r\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T})
\end{aligned}$$

en effet

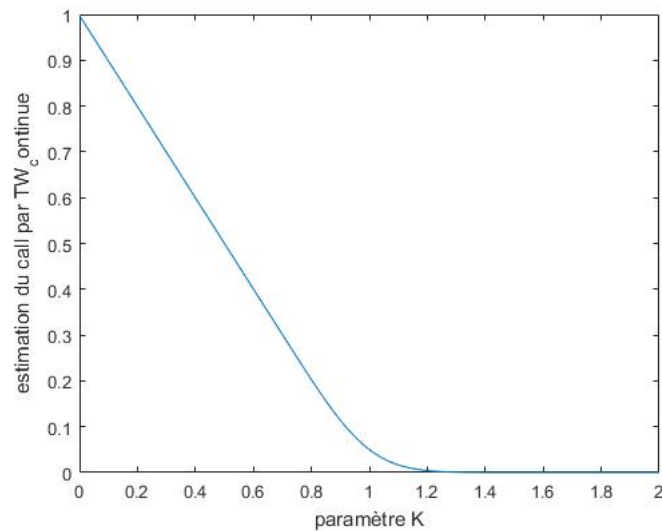
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{t}} W_t &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\
\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{t}} W_t &= W_T
\end{aligned}$$

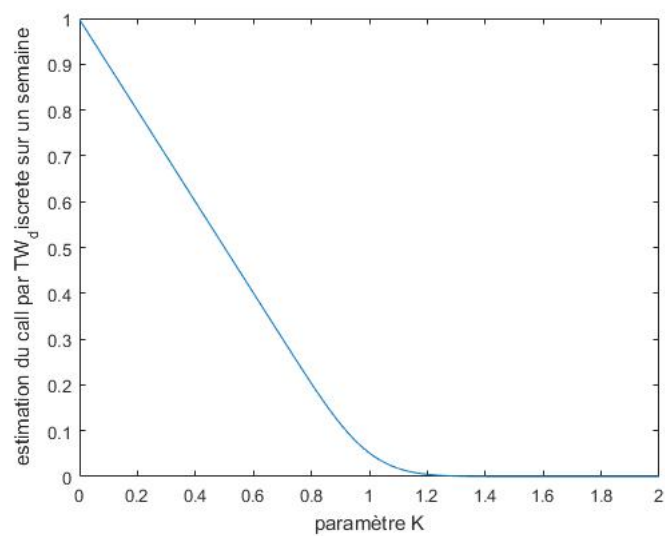
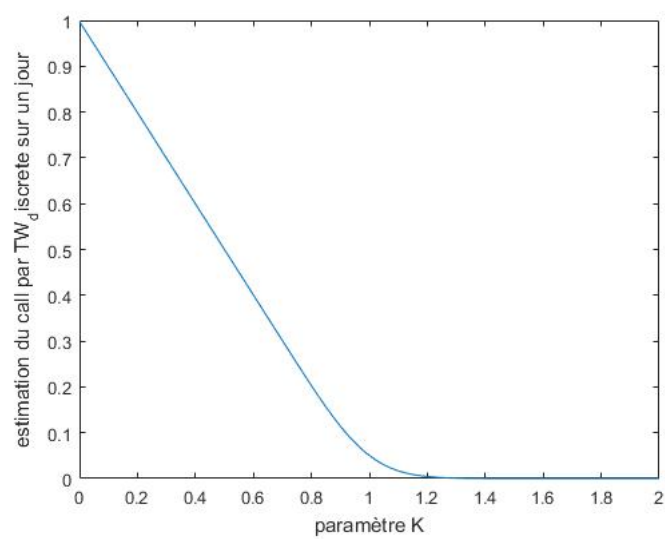
Fin de la preuve.

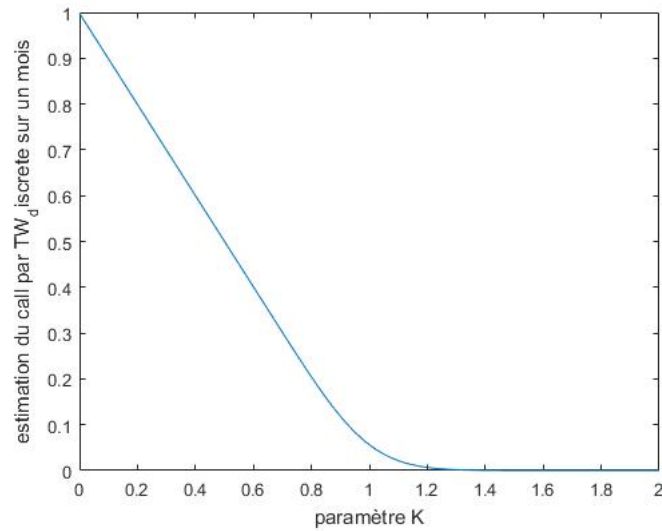
5.4 Questions 9 et 10 : Influence du pas de discrétisation sur l'estimation

Cas de Tunrbull and Wakeman

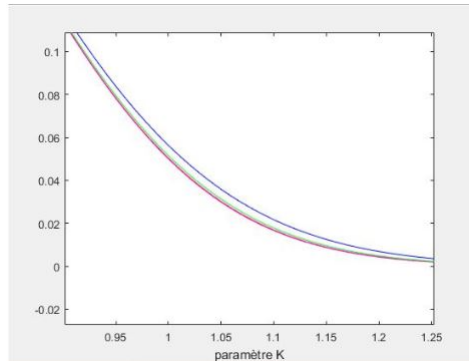
les figures suivantes illustrent la variation du prix du call sous l'approximation T&W en fonction de K , la cinquième figure illustre un zoom sur la différence de ces courbes : le cas continu, correspondant à $\Delta_t = 0$ est coloré en rouge, les cas discrets, correspondant respectivement à $\Delta_t = 1/252$ (1 jour), coloré en magenta, $\Delta_t = 1/52$ (une semaine), coloré en vert, $\Delta_t = 1/12$ (1 mois), coloré en bleu.







La figure suivante illustre un zoom sur la figure de la différence, avec respect des couleurs mentionnés ci dessus

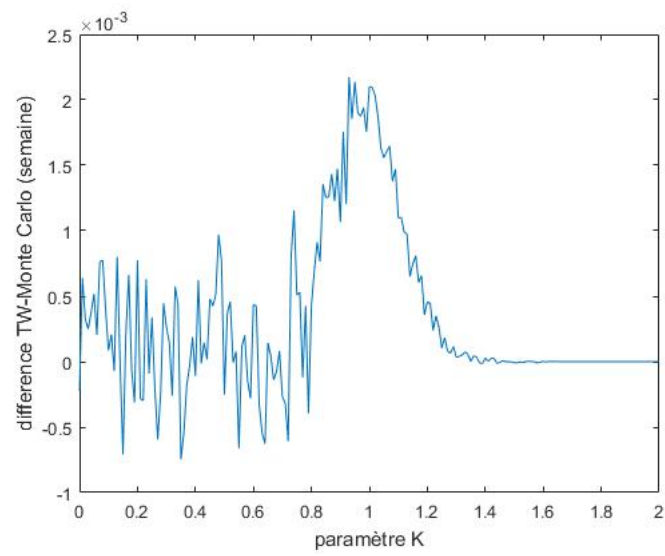
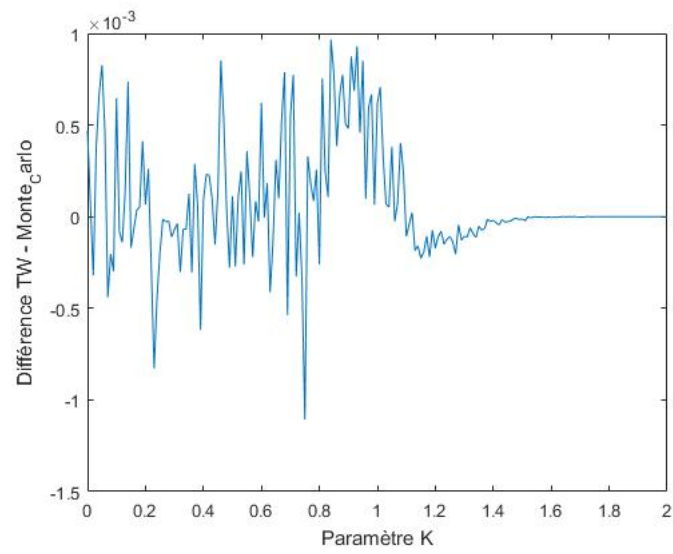


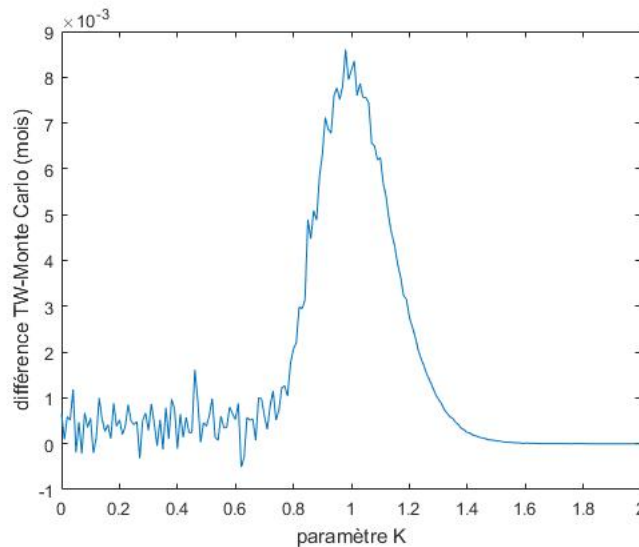
Commentaire sur les courbes

On remarque que le pas de discrétisation n'a pas beaucoup influé sur la précision de l'approximation, on a une marge d'erreur de l'ordre de l'inverse du nombre de discrétisations N , incluse dans la discrétisation de l'intégrale de la moyenne en somme de Riemann.

Cas de Monte Carlo et Comparaison

les figures suivantes illustrent la variation de la différence des estimateurs du prix du call en fonction de K , on a traité 3 cas : $\Delta_t = 1/252$ (1 jour), $\Delta_t = 1/52$ (une semaine), $\Delta_t = 1/12$ (1 mois).





Commentaire sur les courbes On remarque que l'erreur de l'estimation Monte-Carlo vis-à-vis de T&W devient de plus en plus importante lorsque le pas de discrétisation augmente, par exemple sur 1 mois on a $N=6$, on a discrétisé sur 6 intervalles de temps uniquement, ce qui peut fausser les résultats de manière importante, d'autre part, à l'erreur Monte-Carlo de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ s'ajoute l'erreur de discrétisation de l'ordre de $\frac{1}{N}$. On peut dire que l'estimateur T&W est plus précis et stable que l'estimateur Monte-Carlo

5.5 Questions 11 et 12 : Temps de Calcul et précision

on va comparer le temps de calcul de l'approximation de T&W avec celui de Monte-Carlo pour les 3 cas de discrétisation de temps, à savoir pour $\Delta_t = 1/252$ (1 jour), $\Delta_t = 1/52$ (une semaine), $\Delta_t = 1/12$ (1 mois).

Estimateur T&W

les temps écoulés sont :

pour $\Delta_t = 1/252$ (1 jour) 0.024192 secondes

pour $\Delta_t = 1/52$ (1 semaine) 0.019081 secondes

pour $\Delta_t = 1/12$ (1 mois) 0.016837 secondes

Estimateur Monte Carlo

les temps écoulés sont :

pour $\Delta_t = 1/252$ (1 jour) 0.704470 secondes

pour $\Delta_t = 1/52$ (1 semaine) 0.152667 secondes

pour $\Delta_t = 1/52$ (1 semaine) 0.049415 secondes

On remarque, dans les 2 cas, que le temps d'exécution diminue si on réduit le nombre d'intervalles de discrétisation. On remarque aussi que l'estimateur T&W prend significativement moins de temps que l'estimateur Monte-Carlo. D'autre part, l'estimateur T&W est plus précis que l'estimateur Monte-Carlo d'après la question précédente.

5.6 Questions 13 et 14 : Réduction de variance

$$\begin{aligned}
 & e^{-rT} \mathbb{E}[(\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - K)_+] - e^{-rT} \mathbb{E}[(K - \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt)_+] \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}[(\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - K)] \\
 &= e^{-rT} (\mathbb{E}[\frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt] - K) \\
 &= e^{-rT} (e^{\mu + \sigma^2/2} - K) \\
 &= e^{-rT} (e^{\ln(S_0) + (r_A - \sigma_A^2/2)T + \sigma_A^2 T/2} - K) \\
 &= D
 \end{aligned}$$

On a d'après l'égalité précédente :

$$P = D + e^{-rT} \mathbb{E}[(K - \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt)_+]$$

On pose $X = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt$

$\text{var}(K - X)_+ \ll \text{var}(X - K)_+$, car le premier membre est borné.

La figure suivante montre l'évolution de la largeur de l'intervalle de confiance pour la méthode de réduction variance par variable de contrôle en fonction de K.

