



MACHINE LEARNING POUR LA FINANCE

Valorisation d'option US par deep learning et regression

15 AVRIL 2019

ENSEIGNANT : MONSIEUR ROMUALD

Étudiants : Guilluy (M2 S&F) –Said (M2 S&F)– Nogha (M2 S&F)- Bernoussi (M2 S&F)

Table of contents

I. Introduction	3
II. Utilisation de la méthode de Longstaff Schwartz pour le pricing des options American	4
A. Introduction.....	4
1. Préambule	4
1. Présentation sur un exemple	4
2. Présentation théorique de la méthode Longstaff Schwartz.....	6
B. Méthode des éléments finies	7
3. Résolution numériques par différences finies.....	8
C. La méthode binomiale de Cox, Ross et Rubinstein (CRR).....	9
D. La méthode de Longstaff Schwartz (LSM).....	10
1. Présentation de la méthode	10
2. Présentation des résultats	11
E. Comparaison des méthodes LSM vs CRR en temps de calcul.....	12
F. Application de la méthode LSM au cas d'une option American-Bermudan-Asiatique ...	13
G. Application de la méthode LSM pour un modèle à saut	16
1. Présentation de la méthode	16
2. Présentation des résultats	17
III. Pricing d'options américaines à grande dimension	18
1. Présentation du cadre d'étude.....	18
2. Estimation des valeurs de continuité qt	19
3. Quelques résultats théoriques	20
4. Quelques résultats numériques.	21
IV. Conclusion.....	23
V. Références des articles étudiés	24

I. Introduction

Une option américaine est un le contrat qui donne le droit (et non l'obligation) à son détenteur d'exercer celle-ci à toute date précédant la maturité T , à un prix fixé à la signature du contrat K .

Cette option est dite bermudéenne si on peut l'exercer seulement à un nombre de dates fini compris entre la signature du contrat et la maturité T .

Le pricing d'options américaines revêt un caractère singulier dans la mesure où contrairement aux options européennes classiques, les payoffs de ce type d'options dépendent très fortement de la trajectoire des sous-jacents au cours de leur évolution dans le temps. Les méthodes usuelles de pricing du type différences finies ou binomiales conviennent pour des options dont le payoff ne dépend que d'un faible nombre de sous-jacents. Dans le cas de payoffs généraux, en grande dimension, une approche d'estimation des flux par réseaux de neurones permet de pricer nos produits en des temps de calcul raisonnables. Notre étude porte sur les différentes méthodes de pricing d'options américaines en utilisant les méthodes LSM dans le cas des petites dimensions et une approche deep learning qui consiste à estimer les flux intermédiaires par des réseaux de neurones afin de déterminer le temps d'arrêt optimal donnant le prix de l'option.

Afin de pouvoir interpréter nos résultats en petite dimension, il nous est nécessaire de les comparer à d'autres méthodes de pricing d'option Américaine. Nous allons donc comme dans l'article implémenter la méthode des éléments finies afin de calculer le prix d'un put Américain.

Nous utiliserons trois méthodes de pricing du put américain dans cette première partie :

- La méthodes des éléments finies avec le schéma d'Euler implicite en se basant l'EDP du prix.
- La méthode binomiale par Cox, Ross et Rubinstein (CRR).
- La méthode Longstaff Schwartz présentée dans l'article.

Puis pour aller plus loin dans cette étude nous détaillerons les points suivants :

- Application de la méthode LSM au cas d'une option American-Bermudan-Asiatique
- Application de la méthode LSM au cas d'une option American avec présence de saut

II. Utilisation de la méthode de Longstaff Schwartz pour le pricing des options American

A. Introduction

1. Préambule

A la date finale T , la stratégie optimale pour exercer l'option américaine est d'exercer l'option si elle est dans la monnaie. Avant la date finale, la stratégie optimale sert à comparer la valeur de l'exercice immédiat avec le cash-flow espéré de la continuation, et ensuite exercer si la valeur de l'exercice immédiat est plus grande. Par conséquent, la clé de la stratégie optimale est l'identification de l'espérance conditionnelle de la continuation. Ici, on va présenter la méthode LSM (Least square Monte Carlo) pour identifier l'espérance conditionnelle. C'est fait par la régression de cash-flow obtenu de la continuation sur un ensemble des fonctions de base de valeurs des variables d'état pertinentes. La valeur ajustée par la régression est l'estimation efficiente sans biais de l'espérance conditionnelle et nous permet d'estimer précisément la règle de l'arrêt optimal pour l'option

1. Présentation sur un exemple

Pour mieux expliquer la méthode, on va étudier le cas de put américain puis on peut appliquer l'approche à tout problème markovien de type américain. On prend comme dates d'exercice $t=1, 2$ et 4 qui est la date d'expiration de l'option. Le but est de maximiser le cash-flow à chaque point de chaque chemin, donc le problème est récursif. Les prix de stock sont générés par le modèle de Black Sholes en considérant la mesure risque neutre et comme taux risque neutre $r=0.06$, le prix strike est par exemple $1,1$.

Stock price paths				
Path	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	.93	.97	.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	.76	.77	.90
7	1.00	.92	.84	1.01
8	1.00	.88	1.22	1.34

On résout notre problème en commençant à partir de la date d'expiration $t=3$, conditionnellement de ne pas exercer l'option avant son expiration, le cash-flow réalisé par le détenteur de l'option suivant la stratégie optimale à la date 3 est donné par :

Cash-flow matrix at time 3			
Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	—	—	.00
2	—	—	.00
3	—	—	.07
4	—	—	.18
5	—	—	.00
6	—	—	.20
7	—	—	.09
8	—	—	.00

A la date 2 on va comparer la valeur de l'exercice immédiat et le cash-flow de la continuation, en effet, si le put est dans la monnaie à la date 2, le détenteur doit donc décider soit exercer l'option, soit continuer jusqu'à l'expiration $t=3$. A partir de la matrice des prix de stock, il y a 5 trajectoires sur lesquelles l'option est dans la monnaie à la date 2. On va modéliser le prix de stock par la variable S pour ces trajectoires et Y les cash-flows actualisés reçus à la date 3 si l'option n'est pas exercée à la date 2. On utilise seulement les chemins dans la monnaie puisqu'ils nous permettent d'avoir l'estimation la plus proche de la réalité pour la fonction de l'espérance conditionnelle dans la région où le fait d'exercer est pertinent et significativement améliore l'algorithme. On va présenter les vecteur X et Y au-dessous.

Regression at time 2		
Path	Y	X
1	$.00 \times .94176$	1.08
2	—	—
3	$.07 \times .94176$	1.07
4	$.18 \times .94176$.97
5	—	—
6	$.20 \times .94176$.77
7	$.09 \times .94176$.84
8	—	—

Pour estimer le cash-flow espéré obtenu de la continuation de l'option conditionnellement au prix de stock à la date 2, on fait la régression Y sur une constante, S et S^2 . C'est une spécification simple, on peut trouver d'autres régressions. Avec les valeurs ajustées de la régression et qui simulent les cash-flows espérés, on peut comparer la valeur de l'exercice immédiat à la date 2 avec la valeur obtenue de la continuation,

Optimal early exercise decision at time 2		
Path	Exercise	Continuation
1	.02	.0369
2	—	—
3	.03	.0461
4	.13	.1176
5	—	—
6	.33	.1520
7	.26	.1565
8	—	—

La valeur de l'exercice immédiat est $(1.1-S)$ pour les chemins dans la monnaie, et la valeur de la continuation est donnée par la substitution de S dans la fonction d'espérance conditionnelle. Cette comparaison implique qu'il est optimal d'exercer l'option à la date 2

pour le quatrième, sixième et septième chemin. Ça conduit à la matrice suivante, qui montre le cash-flow reçu par le détenteur de l'option si on ne l'exerce pas avant la date 2.

Cash-flow matrix at time 2			
Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	—	.00	.00
2	—	.00	.00
3	—	.00	.07
4	—	.13	.00
5	—	.00	.00
6	—	.33	.00
7	—	.26	.00
8	—	.00	.00

On note que si l'option est exercée à la date 2, le cash-flow à la date finale devient nul. Puisque l'option est une fois exercée il n'y a plus de cash-flow car l'option ne peut être exercée qu'une fois seulement.

En procédant récursivement, on examine si l'option doit être exercée aux dates antérieures, en effet on répète ces étapes à chaque date jusqu'à déterminer finalement la règle de l'arrêt optimale, d'où l'identification de la matrice finale de cash-flows générée par le put américain à chaque date le long de chaque trajectoire.

Option cash flow matrix			
Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	.00	.00	.00
2	.00	.00	.00
3	.00	.00	.07
4	.17	.00	.00
5	.00	.00	.00
6	.34	.00	.00
7	.18	.00	.00
8	.22	.00	.00

L'option peut être évalué par actualisation sur chaque cash-flow dans cette matrice par retour à la date 0, et moyennant sur tous les trajectoires. Appliquant cette procédure, on obtient 1.144 comme valeur de put américain, c'est deux fois la valeur de put européen, 0.564 obtenu par l'actualisation les cash-flows à la date 3 par retour à la date 0.

2. Présentation théorique de la méthode Longstaff Schwartz

On suppose un espace probabilisé complet (Ω, \mathcal{F}, P) et l'horizon fini $(0, T)$, tel que l'espace Ω est l'espace de toutes les réalisations possibles de la variable stochastique entre 0 et T et ayant w représentant un trajectoire, \mathcal{F} est le σ -field des événements distinguables à la date T, et P est la mesure de probabilité définie par les éléments de \mathcal{F} . On définit l'ensemble de filtration augmentée $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t \text{ entre } 0 \text{ et } T\}$ générée par les prix pertinents de stock, on suppose que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, pas d'arbitrage donc l'existence de la mesure martingale équivalente. On cherche à trouver le prix des titres à caractère américain avec des cash-flows dans l'intervalle $(0, T)$. Comme on a mentionné avant, la valeur de l'option américaine est égale à

la valeur maximale des cash-flows actualisés de l'option, où le maximum est pris sur toutes les dates d'arrêt avec respect à la filtration \mathcal{F} . On introduit la notation $C(w, s, t, T)$ pour désigner le chemin de cash-flow généré par l'option, sur condition que l'option n'étant pas exercé à ou avant la date t et le détenteur suivant la stratégie d'arrêt optimale pour tout $s, t < s < T$. Cette fonction est analogue à la matrice de cash-flow intermédiaire utilisée dans la partie précédente. Pour l'intuition derrière l'algorithme LSM, on se concentre sur la discussion dans le cas où l'option américaine ne peut être exercée qu'aux K dates discrètes $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_K = T$, et considère la stratégie optimale d'arrêt à chaque date d'exercice. En pratique, puisque l'option américaine est continûment exerçable ; la méthode LSM peut être utilisée afin d'approximer la valeur de ces options en prenant K suffisamment large. En se basant sur le raisonnement de la première partie, on a défini à la date t_k , la valeur de la continuation $F(w, t_k)$:

$$F(w; t_k) = E_Q \left[\sum_{j=k+1}^K \exp \left(- \int_{t_k}^{t_j} r(w, s) ds \right) C(w, t_j; t_k, T) \mid \mathcal{F}_{t_k} \right],$$

Où r est le taux sans risque d'actualisation et l'espérance est prise conditionnellement à l'ensemble des informations \mathcal{F}_{t_k} à la date t_k . Avec cette représentation, le problème de l'exercice optimal sert à comparer la valeur de l'exercice immédiat avec la valeur de continuation. Mais cette fois, pour la régression on va définir d'autres fonctions de base sur lesquelles on va régresser. Un choix possible est l'ensemble des polynômes de Laguerre :

$$\begin{aligned}
 L_0(X) &= \exp(-X/2), \\
 L_1(X) &= \exp(-X/2) (1 - X), \\
 L_2(X) &= \exp(-X/2) (1 - 2X + X^2/2), \\
 L_n(X) &= \exp(-X/2) \frac{e^X}{n!} \frac{d^n}{dX^n} (X^n e^{-X}).
 \end{aligned}$$

Pour implémenter l'approche LSM, on approxime $F(w; t_{(K-1)})$ utilisant les premières $M < \infty$ fonctions de base, et noter cette approximation $F_M(w, t_{(K-1)})$. On procède comme dans la première partie pour trouver la stratégie optimale, il faut mentionner que M dépend aussi de la dimension du problème.

B. Méthode des éléments finies

Afin de trouver une formulation de l'EDP de Black Scholes facile à résoudre par les méthodes classiques de différences finies, on repart de l'EDP de Black Scholes et on applique un renversement du temps puis un passage aux variables logarithmique.

L'équation revient alors à :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, y) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\tau, y) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial y}(\tau, y) + ru(\tau, y) = 0$$

Avec comme condition initiale : $u(0, y) = (e^y - K)_+$

La formulation en différence finie revient alors à :

$$\frac{du_i}{d\tau}(\tau) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}(\tau) - 2u_i(\tau) + u_{i-1}(\tau)}{h^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{u_{i+1}(\tau) - u_{i-1}(\tau)}{h} + ru_i(\tau) = 0$$

Ce qui donne sous forme matricielle : $\frac{dU}{d\tau}(\tau) = \mathbf{A}U(\tau)$, avec \mathbf{A} tridiagonale.

Les coefficients de \mathbf{A} sont :

- Pour la valeur du terme en « i-1 », la diagonale inférieure $a = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{h}\right)^2 - \frac{(r-\sigma^2)}{2h}$
- Pour la valeur du terme en « i », la diagonale inférieure $b = \left(\frac{\sigma}{h}\right)^2 - r$
- Pour la valeur du terme en « i+1 », la diagonale supérieure $c = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{h}\right)^2 + \frac{(r-\sigma^2)}{2h}$

Où $h = \frac{2L}{N}$

3. Résolution numériques par différences finies

Par la suite, nous allons utiliser 3 schémas de résolutions numériques différents afin de résoudre ce problème de EDP.

En posant : $\Delta T = \frac{T}{M}$ le pas de discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ en M parties.

a) Schéma de Euler explicite

$$U^{j+1} = (\mathbf{I} + \Delta T \mathbf{A}) U^j$$

b) Schéma de Euler Implicite

$$(\mathbf{I} - \Delta T \mathbf{A}) U^{j+1} = U^j$$

c) Schéma de Crank Nicholson

$$(\mathbf{I} - \theta \Delta T \mathbf{A}) U^{j+1} = (\mathbf{I} + (1 - \theta) \Delta T \mathbf{A}) U^j$$

Les Schémas d'Euler Implicite et de Crank Nicholson imposent une inversion de matrice afin de calculer le terme $j+1$. En remarquant que la matrice à inverser est tridiagonale à coefficients égaux par diagonale, on peut appliquer une méthode d'inversion de complexité temporelle inférieure aux méthodes classiques telles que Gauss-Jordan.

La figure ci-dessous montre donc le pricing d'un call européen de strike $K=100$, $r=5\%$, $\sigma=20\%$ en fonction de S_0 .

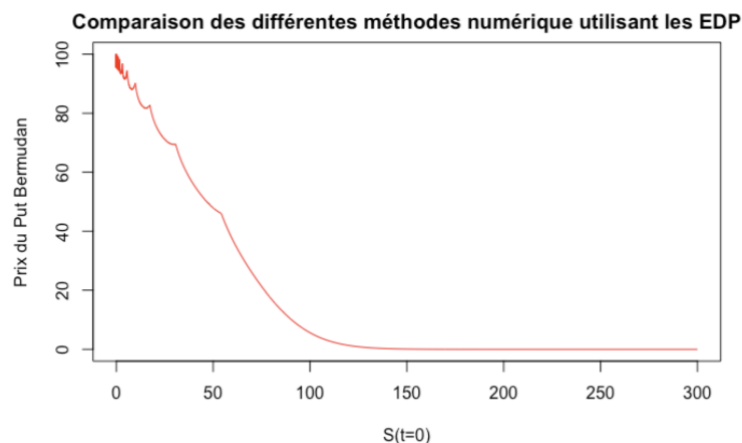
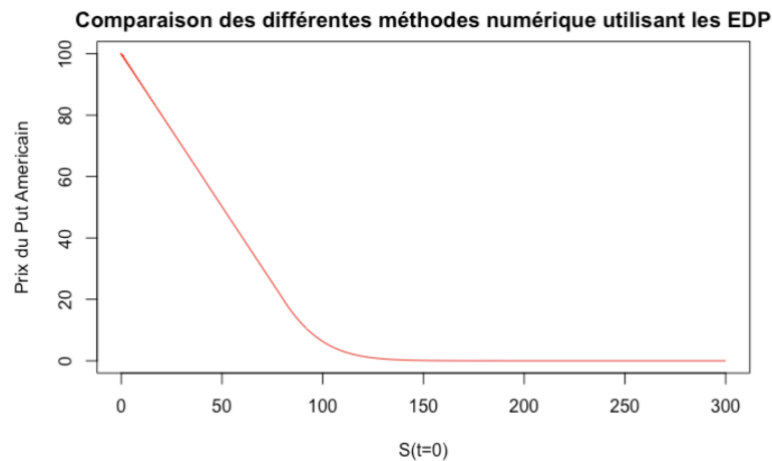
Afin de passer du pricing d'un call Européen au pricing d'un call Américain il suffit que à chaque pas de temps de calcul de notre option le prix soit $\max(U, K-S)$ où U est le prix du calcul par la méthode des éléments finies et $K-S$ l'argent reçu si on sort décide d'exercer le produit immédiatement.


```

for(int i=N-2; i>0; i--){
  Uj[i] = dprime[i] - cprime[i]*Uj[i+1] ;
  // Compare to immediate exercise when allowed
  if(j%nStepsPerDate==0){
    double S = exp(-L+i*h) ;
    if(Uj[i]<K-S){
      Uj[i] = K-S ;
    }
  }
}

```

Figure 1 Changement dans le code afin de pricer un put Bermudan



C. La méthode binomiale de Cox, Ross et Rubinstein (CRR)

Principe : Il s'agit ici de faire un pricing Backward avec un arbre binomial.

- Tout d'abord, on discrétise notre temps avec un pas : $\Delta T = \frac{T}{N}$.
- A tout pas de temps $n = 0, \dots, N - 1$, le sous-jacent traité peut ainsi prendre deux valeurs :

$$S_{n+1}^N = \begin{cases} uS_n^N & \text{avec probabilité } p_u \\ dS_n^N & \text{avec probabilité } p_d \end{cases}$$

○ $u = \frac{1}{d} = e^{\sigma\sqrt{\Delta T}}$

- $p_u = 1 - p_d = \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta T}} - d}{u - d}$
- Pricing d'un put bermudéen/Américain par le mécanisme backward suivant :
 - $V_T(S_0, \dots, S_T) = h(S_T)$
 - $V_t(S_0, \dots, S_t) = \max(h(S_t), e^{-r\Delta T} [p_u V_{t+1}(S_0, \dots, S_t, uS_t) + p_d V_{t+1}(S_0, \dots, S_t, dS_t)])$

Nous obtenons la convergence suivante pour le put américain ainsi que pour le put bermudéen:

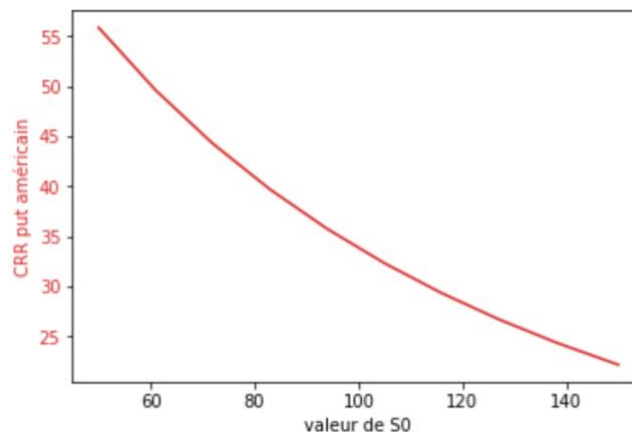


Figure 2 Prix d'un put American par la méthode CRR en fonction de S0

D. La méthode de Longstaff Schwartz (LSM)

1. Présentation de la méthode

Pour les options un peu plus complexes, l'approche binomiale n'est pas applicable. Dans ce cas, la simulation par Monte Carlo reste la meilleure méthode afin de calculer la valeur de l'option.

Une des méthodes Monte Carlo est le LSM proposé. C'est un modèle qui utilise de simples régressions par moindres carrés ordinaires afin d'estimer les espérances des flux futurs à chaque période de notre discrétisation temporelle.

Nous avons pu extraire la méthode de calcul suivante à partir de la lecture de l'article :

Notations : Soit N le nombre de chemin de la simulation, M le nombre de date d'exercice, on les supposera équidistante : $t_j = j\Delta$ avec $\Delta = \frac{T}{M}$
 h le payoff de l'option, $g=(g_1, g_2, \dots, g_d)$ le vecteur des fonction de base pour la régression

1) Initialisation d'un vecteur de taille N des prix à maturité du sous-jacent:

$$S_M = (S_T^0, S_T^1, \dots, S_T^{N-1})$$

2) Initialisation d'un vecteur de taille N du payoff associé à S_M :

$$P_M = (h(S_T^0), h(S_T^1), \dots, h(S_T^{N-1}))$$

3) Pour $j = M-1$ à 1 (boucle décroissante)

- Simulation du vecteur des prix : $S_{j\Delta} = (S_{j\Delta}^0, S_{j\Delta}^1, \dots, S_{j\Delta}^{N-1})$ conditionnellement à $S_{(j+1)\Delta}$

Pour calculer ce terme, nous allons utiliser la formule suivante :

$$(B_{t_j} | B_0 = 0, B_{t_{j+1}} = x) \sim N\left(\frac{t_j}{t_{j+1}}x, \frac{t_j}{t_{j+1}}(t_j - t_{j+1})I_N\right)$$

- Calcul du coefficient permettant de conserver uniquement les chemins ITM (In the Money)

$$\alpha_j = (\sum_{n \in \{ITM \text{ paths}\}} (g(S^n)^t g(S^n))^{-1} \sum_{n \in \{ITM \text{ paths}\}} P_j^n g(S^n)$$

L'approximation des valeurs continue à l'instant j de l'état x est : $\langle \alpha_j, g(x) \rangle$

- On met ensuite à jour les prix en comparant la valeur continue et d'exercice des chemins ITM

$$P_j^n = \begin{cases} h(S^n) & \text{if } h(S^n) > \langle \alpha_j, g(S^n) \rangle \\ \text{inchangé sinon} & \end{cases}$$

- Actualisation de tous les prix : $P_{j-1}^n = e^{-\Delta r} P_j^n$ pour $n = 1, \dots, N$

4) Le prix final de l'option est : $\max(h(S_0), \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P_0^n)$

2. Présentation des résultats

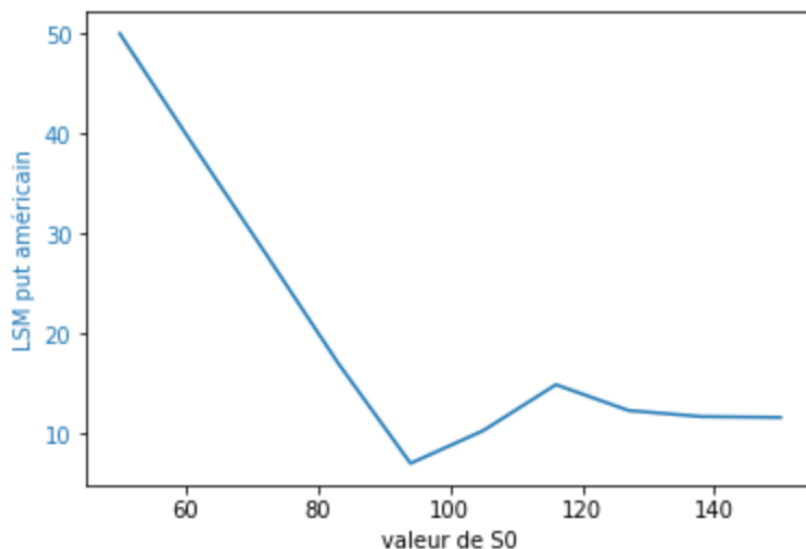


Figure 3 Prix d'un put American par la méthode LSM en fonction de S_0

On retrouve bien l'allure du payoff des autres méthodes avec plus de discontinuité surement du au faible nombre de points utilisé pour faire ce graphe. En effet cette méthode nécessite un très long temps de calcul qui détériore nos résultats.

E. Comparaison des méthodes LSM vs CRR en temps de calcul

Ci-dessous, deux graphes afin de comparer les deux méthodes étudiées, à savoir CRR et LSM pour un put américain.

Nous remarquons que la méthode LSM prend nettement plus de temps que la méthode CRR, du aux simulations Monte Carlo ainsi qu'aux régressions linéaires.

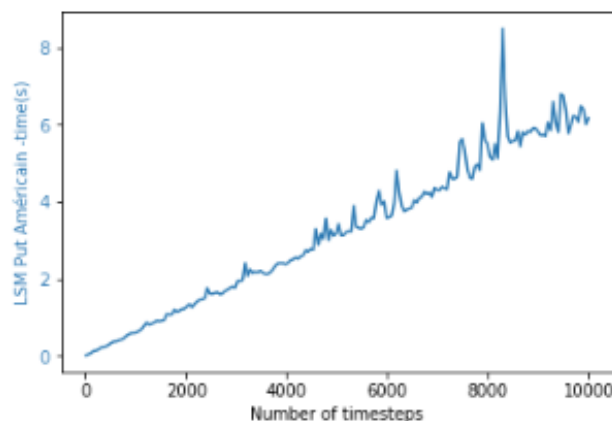


Figure 4 Temps de calcul du prix d'une option American par la méthode LSM

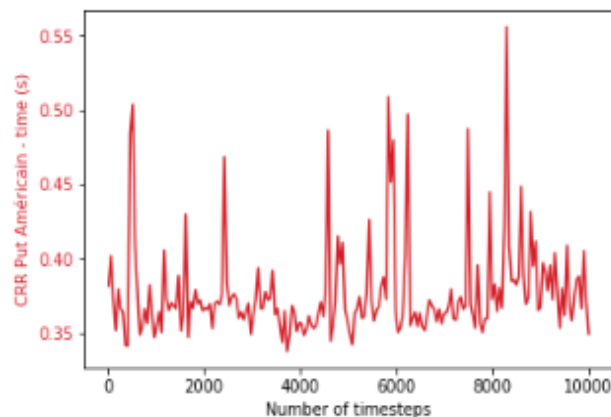
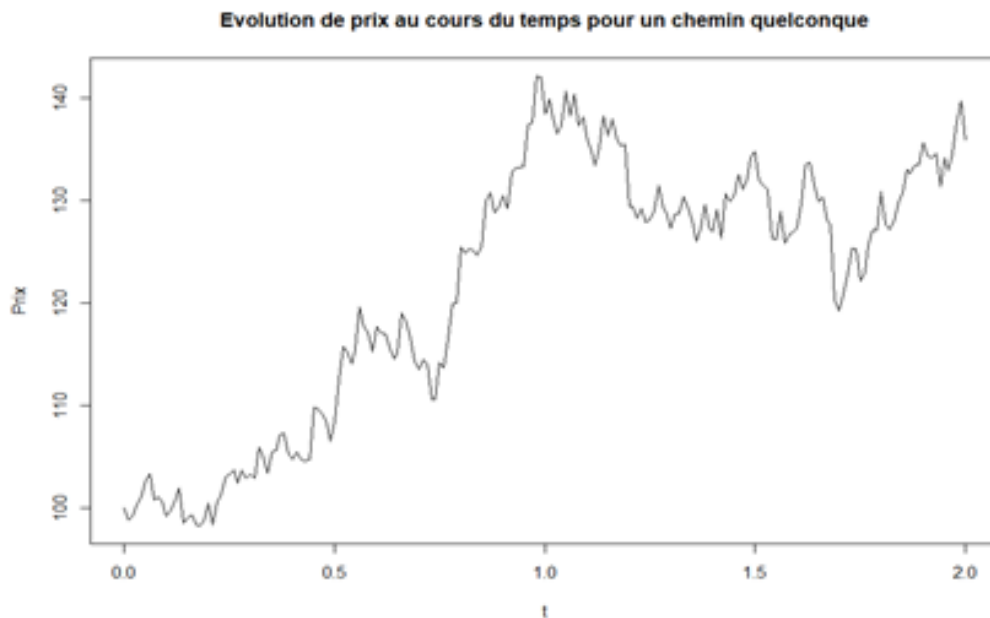


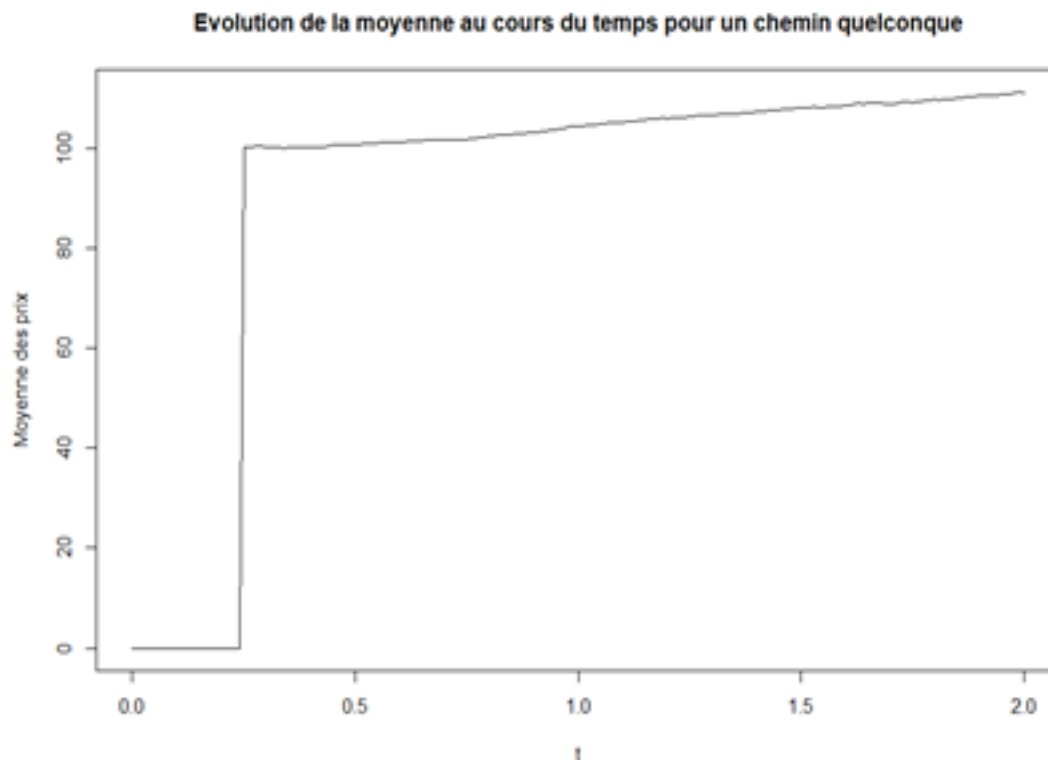
Figure 5 Temps de calcul du prix d'une option American par la méthode CRR

Ainsi, on remarque que la méthode CRR est plus rapide que la méthode LSM. Cela peut être due notamment à la nécessité d'utiliser scikit learn pour le pricing de LSM.

F. Application de la méthode LSM au cas d'une option American-Bermudan-Asiatique

Dans cette section, on applique l'approche LSM pour une option call exotique path-dependent. Particulièrement, on considère une option call sur la moyenne des prix de stock sur un horizon prédéfini et ne peut être exercé qu'après une certaine période qui s'appelle « *lockout period* ». C'est l'option Asiatique-Bermuda-Américaine puisqu'elle est une option sur la moyenne, et elle a des caractéristiques Bermuda et américaines. On a toujours les mêmes paramètres que la partie précédente, N : nombre de chemin de la simulation, K : nombre de dates d'exercice, etc. Mais cette fois, on ajoute t : La durée de la période après laquelle on a le droit à exercer l'option qu'on va prendre $t=3$ mois. On a défini premièrement la matrice A , la matrice de moyenne des prix sur un horizon de 3 mois telle que à la date s , $0,25 \leq t \leq T$, A_{st} reçoit la moyenne de prix sur 3 mois avant la date t . On a défini après la matrice $\max(A-K)$, la matrice de cash-flow obtenue de la faite d'exercer l'option.



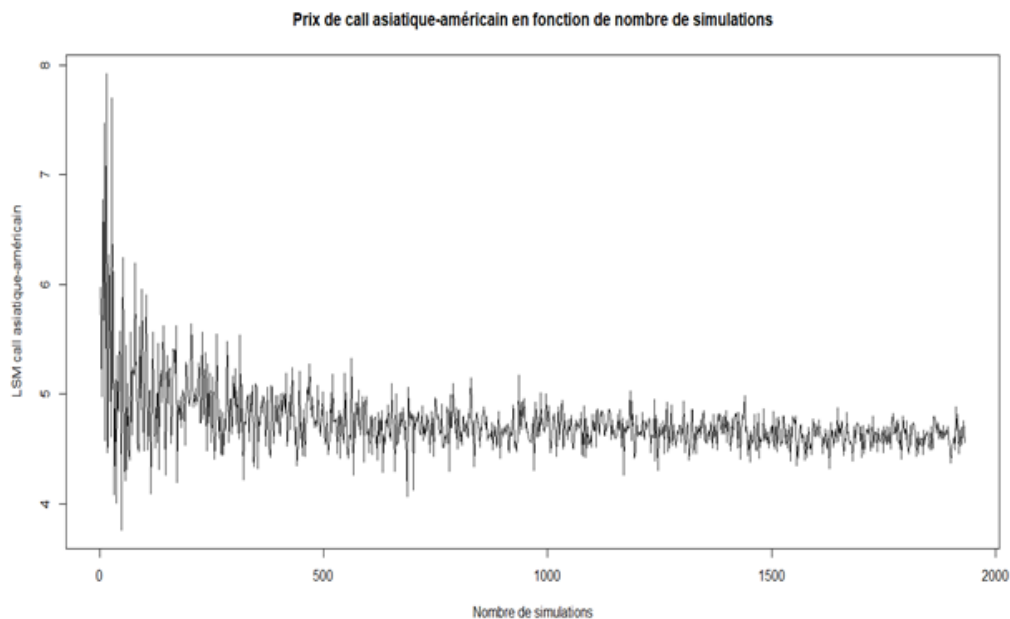


La complexité de l'option comme la dépendance de cash-flow à la trajectoire rend la résolution du problème compliquée comme pour les différences finies, on a transformé le problème à un markovien en prenant comme variables d'état, le prix et la moyenne. Par conséquent, le prix de l'option $H(S, A, t)$ est la solution de l'équation partielle différentielle de deux dimensions :

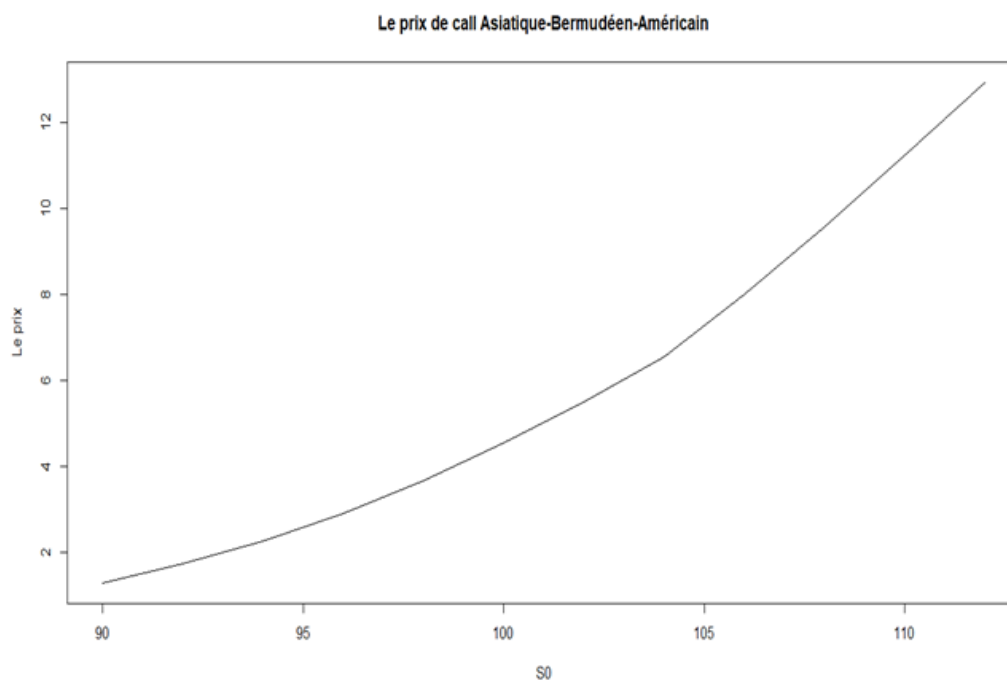
$$(\sigma^2 S^2 / 2) H_{SS} + r S H_S + \frac{1}{.25 + t} (S - A) H_A - r H + H_t = 0,$$

$$H(S, A, T) = \max(0, A_T - K).$$

Pour la méthode de LSM, on utilise 50000 (25,000 plus 25000 antithétiques) chemins et 100 dates d'exercice par an. Comme fonctions de base pour la régression, on utilise une constante, les deux premiers polynômes de Laguerre évalués au prix de stock et les deux premiers aussi évalués en moyenne des prix et le produit croisé des trois premiers polynômes de Laguerre, finalement on a 8 fonctions de base.



Pour cette méthode, on remarque une convergence assez rapide.



Dans le cas d'un call Asiatique Bermudéen American, on retrouve bien comme le souhaite la théorie l'allure de la courbe d'un call asiatique européen. En effet, lorsque le payoff du produit est un call, la prime d'exercice anticipé est nulle.

G. Application de la méthode LSM pour un modèle à saut

1. Présentation de la méthode

On se place maintenant dans un modèle de Black Scholes où on rajoute en plus un processus à saut.

Avec les mêmes notations que précédemment :

1) Initialisation d'un vecteur de taille N des prix à maturité du sous-jacent: $S_M = (S_T^0, S_T^1, \dots, S_T^{N-1})$

Soit U^i la variable égale à (Poisson($\lambda \times T$) > 0) multiplié par une loi Uniforme(0,T)

Si U^i est non nul 0 alors il y a eu un saut en U^i

donc $S_T^i = 0$

2) Initialisation d'un vecteur de taille N du payoff associé à S_M : $P_M =$

$(h(S_T^0), h(S_T^1), \dots, h(S_T^{N-1}))$

3) Pour $j = M-1$ à 1 (boucle décroissante)

- Simulation du vecteur des prix : $S_{j\Delta} = (S_{j\Delta}^0, S_{j\Delta}^1, \dots, S_{j\Delta}^{N-1})$ conditionnellement à $S_{(j+1)\Delta}$

Pour calculer ce terme, nous allons utiliser la formule suivante :

$$(B_{t_j} | B_0 = 0, B_{t_{j+1}} = x) \sim N\left(\frac{t_j}{t_{j+1}}x, \frac{t_j}{t_{j+1}}(t_j - t_{j+1})I_N\right)$$

Et si U^i est après l'instant $i \times \Delta$ alors $S_{j\Delta}^i$ est nul

- Calcul du coefficient permettant de conserver uniquement les chemins ITM (In the Money)

$$\alpha_j = (\sum_{n \in \{ITM \text{ paths}\}} (g(S^n)^t g(S^n))^{-1} \sum_{n \in \{ITM \text{ paths}\}} P_j^n g(S^n)$$

L'approximation des valeurs continue à l'instant j de l'état x est : $\langle \alpha_j, g(x) \rangle$

- On met ensuite à jour les prix en comparant la valeur continue et d'exercice des chemins ITM

$$P_j^n = \begin{cases} h(S^n) & \text{if } h(S^n) > \langle \alpha_j, g(S^n) \rangle \\ \text{inchangé sinon} & \end{cases}$$

- Actualisation de tous les prix : $P_{j-1}^n = e^{-\Delta r} P_j^n$ pour $n = 1, \dots, N$

4) Le prix final de l'option est : $\max(h(S_0), \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P_0^n)$

2. Présentation des résultats

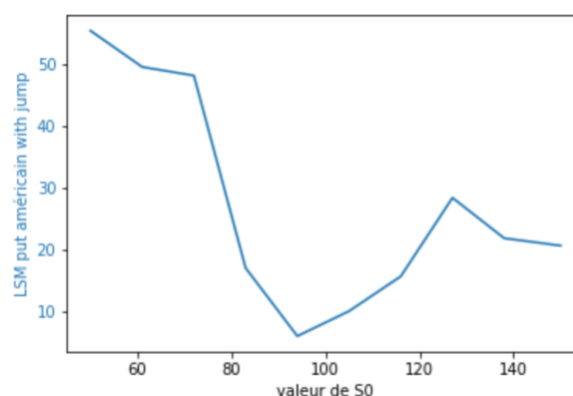


Figure 6 Prix d'un put American dans un modèle à saut en fonction de S_0

Ainsi, on retrouve l'allure global du prix d'un put Americain classique avec une remonté pour des valeurs S_0 importante du au fait que le saut annule totalement S_0 et donc permet d'activé le put à l'instant du saut de manière très profitable.

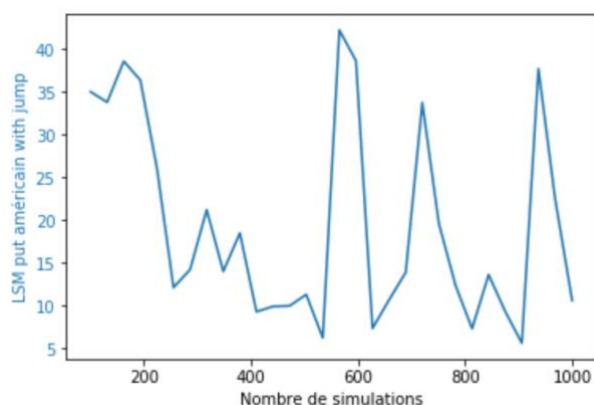


Figure 7 Prix d'un put American dans un modèle à saut en fonction du nombre de simulation

Ainsi, on n'a pas convergente rapide de cette méthode lorsque le nombre de simulation augmente. Il faut donc effectuer beaucoup de simulation ce qui nécessite un grand temps de calcul comme pour la figure 6.

III. Pricing d'options américaines à grande dimension

1. Présentation du cadre d'étude

On se place dans un cadre où on aimerait pricer une option américaine en temps discret et dont le payoff dépend de plusieurs sous-jacents. L'hypothèse majeure étant qu'on admet que les-dits sous-jacents sont des processus markoviens. La méthode consiste alors à générer des trajectoires Monte-Carlo des sous-jacents. Ensuite, on utilise des régressions par des réseaux de neurones avec fonction de perte quadratique pour déterminer un temps d'arrêt optimal permettant de calculer le prix de l'option.

En temps discret, le prix d'une option américaine est donné par:

$$V_0 = \sup \{E\{f_\tau(X_\tau)\}, \tau \in T(0, \dots, T)\}$$

f_τ étant la fonction de payoff discountée, et les X_τ $\tau \in T(0, \dots, T)$ étant les sous-jacents.

On admet de plus que les sous-jacents sont modélisés par:

$$X_{i,t} = x_{i,0} \cdot e^{r \cdot t} \cdot e^{\sum_{j=1}^m (\sigma_{i,j} \cdot W_j(t) - \frac{1}{2} \sigma_{i,j}^2 t)} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Le processus X_τ possèdent donc m composantes modélisées par un modèle de Black-Scholes. Dans le cas d'un payoff sur ce type de sous-jacents, le payoff de cette option serait donné à un instant t où les composantes du sous-jacent prennent respectivement les valeurs x_1, x_2, \dots, x_m par:

$$\max \left\{ K - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j, 0 \right\}$$

et le payoff discounté à un taux sans risque r serait donné dans ce cas par :

$$f_t(x_1, \dots, x_m) = e^{-r \cdot t} \cdot \max \left\{ K - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j, 0 \right\}$$

Pour un tel payoff, en temps discret le prix de l'option est donné par :

$$V_0 = \sup_{\tau \in T(0, \dots, T)} E \left\{ e^{-r \cdot \tau} \cdot \max \left\{ K - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{i,\tau}, 0 \right\} \right\}$$

Si on reste dans le cadre d'un modèle de Black-Scholes on peut déterminer ce prix en résolvant un problème d'équations aux dérivées partielles avec bornes. Mais la solution numérique devient difficile à estimer lorsque le nombre d'actifs corrélés m devient trop grand. Dans les cas m inférieur à 2, comme nous l'avons avec les méthodes type différences finies cela reste possible mais pour m supérieur à 3 il devient très difficile de modéliser les corrélations des actifs dans ce cas. Les avantages de notre approche ici sont donc qu'elle permet d'estimer de proche en proche le prix de l'option même dans le cas d'un payoff dépendant de plusieurs dimensions de sous-jacents, elle permet aussi de déterminer le prix de

l'option lorsque les sous-jacents de celle-ci ne suivent pas un modèle de Black-Scholes, et enfin elle reste valable même pour des options au payoff plus complexe.

En conservant l'hypothèse que les processus X_{τ} $\tau \in T(0, \dots, T)$ sont markoviens, on arrive à montrer que le prix de l'option peut se ramener à la détermination d'un temps d'arrêt optimal

$$\tau^* \in T(0, \dots, T)$$

et vérifiant :

$$V_0 = \mathbf{E}\{f_{\tau^*}(X_{\tau^*})\}.$$

On définit les valeurs de continuité par :

$$q_t(x) = \sup_{\tau \in T(t+1, \dots, T)} \mathbf{E}\{f_{\tau}(X_{\tau}) | X_t = x\}$$

On peut montrer à partir de ces valeurs que le temps d'arrêt optimal est donné par:

$$\tau^* = \inf\{s \geq 0 : q_s(X_s) \leq f_s(X_s)\}$$

Ainsi pour déterminer le temps d'arrêt optimal et donc le prix, il suffit de déterminer les valeurs de continuité, pour ce faire on observe tout d'abord que les valeurs de continuité vérifient les équations suivantes:

$$q_T(x) = 0,$$

$$q_t(x) = \mathbf{E}\{\max\{f_{t+1}(X_{t+1}), q_{t+1}(X_{t+1})\} | X_t = x\} \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

Pour estimer les valeurs de continuité, on se propose donc de simuler des trajectoires de

$$(X_t, \max\{f_{t+1}(X_{t+1}), \hat{q}_{t+1}(X_{t+1})\})$$

Ensuite pour les calculs d'expérience conditionnelles afin d'estimer q_t , on fait une regression quadratique par des réseaux de neurones. On montre que les estimées ainsi calculées sont universellement consistents dans le sens où leur erreur en norme L2 converge vers 0 en probabilités pour toutes les distributions. De plus sous certaines hypothèses de régularité cette convergence peut être nettement améliorée.

2. Estimation des valeurs de continuité q_t

Considérons la classe de réseaux de neurones définie par:

$$\mathcal{F}_k(\beta_n) = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i \cdot \sigma(a_i^T x + b_i) + c_0 \quad : \quad a_i \in \mathbb{R}^d, b_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^k |c_i| \leq \beta_n \right\}$$

σ étant la fonction sigmoid et β_n étant choisi de limite infini lorsque n tend vers l'infini.

L'algorithme pour estimer les valeurs de continuité q_t consiste alors à :

- générer des trajectoires artificielles de processus de markov indépendants $\{X_{i,t}^{(l)}\}_{t=0,\dots,T}$

$l=0,1,\dots,T-1, i=1,2,\dots,n$, distribués suivant la même loi que les $\{X_t\}_{t=0,\dots,T}$.

- Ensuite, on initialise l'algorithme par :

$$\hat{q}_{n,T}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

- Etant donnée une estimation de q_{t+1} , on estime q_t par :

$$q_t(x) = \mathbf{E}\{\max\{f_{t+1}(X_{t+1}), q_{t+1}(X_{t+1})\} | X_t = x\}$$

- En utilisant une régression par réseau de neurones sur un échantillon $(X_t, \max\{f_{t+1}(X_{t+1}), q_{t+1}(X_{t+1})\})$.

on détermine alors un nouvel échantillon de test

$$\left\{ \left(X_{i,t}^{(l)}, \hat{Y}_{i,t}^{(l)} \right) : i = 1, \dots, n \right\}$$

- Le choix du paramètre k à utiliser dans la régression se fait en résolvant le problème d'optimisation:

$$\hat{q}_{n_l,t}^k(\cdot) = \arg \min_{f \in \mathcal{F}_k(\beta_n)} \left(\frac{1}{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} |f(X_{i,t}^{(l)}) - \hat{Y}_{i,t}^{(l)}|^2 \right)$$

$$\hat{k} = \arg \min_{k \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{n_t} \sum_{i=n_l+1}^n |\hat{q}_{n_l,t}^k(X_{i,t}^{(l)}) - \hat{Y}_{i,t}^{(l)}|^2$$

Une fois k choisi, l'estimation des valeurs de continuité se fait alors en posant:

$$\hat{q}_{n,t}(x) = \hat{q}_{n_l,t}^{\hat{k}}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

3. Quelques résultats théoriques

On peut montrer que si la fonction de payoff est bornée par une constante L , et si β_n est choisi tel qu'on vérifie:

$$\beta_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad k_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad \frac{\beta_n^4 \cdot k_n \cdot \log n}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

alors,

$$\begin{aligned} & \int |\hat{q}_{n,t}(x) - q_t(x)|^2 \mathbf{P}_{X_t}(dx) \\ &= O_{\mathbf{P}} \left(\frac{\beta_n^4 \cdot k_n \cdot \log n}{n} + \max_{s \in \{t, t+1, \dots, T-1\}} \inf_{f \in \mathcal{F}_{k_n}(\beta_n)} \int |f(x) - q_t(x)|^2 \mathbf{P}_{X_s}(dx) \right) \end{aligned}$$

pour tout t dans $(0,1,...,T)$.

Comme conséquence, on en déduit que pour l'estimateur des valeurs de continuité $q_{n,t}$, et pour une fonction de payoff bornée, on a le résultat suivant en choisissant toujours β_n comme précédemment :

$$\int |\hat{q}_{n,t}(x) - q_t(x)|^2 \mathbf{P}_{X_t}(dx) \rightarrow 0$$

la convergence se faisant en probabilité.

Si de plus on choisit β_n vérifiant $\beta_n = \text{constante} \cdot \log n$, on obtient cette fois en terme de convergence que :

$$\int |\hat{q}_{n,t}(x) - q_t(x)|^2 \mathbf{P}_{X_t}(dx) = O_{\mathbf{P}} \left(\left(\frac{\log^5 n}{n} \right)^{1/2} \right)$$

En notant l'estimation du prix par cette méthode

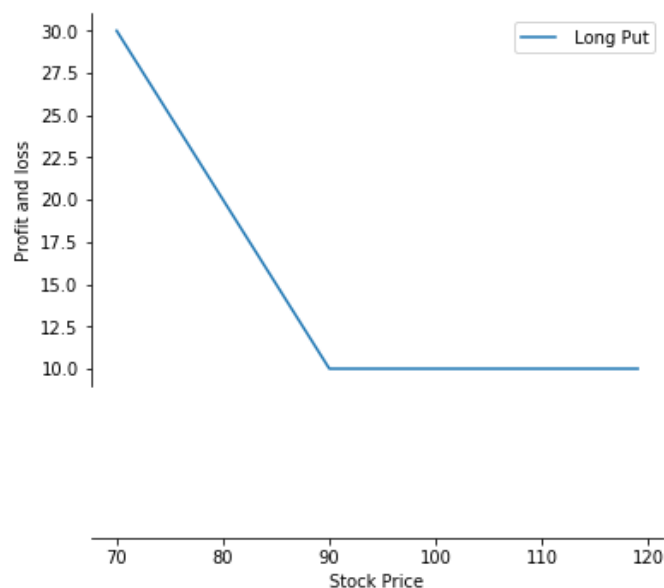
$$\hat{V}_0 = \max\{f_0(x_0), \hat{q}_{n,0}(x_0)\}$$

on obtient une majoration de l'erreur d'estimation par :

$$\begin{aligned} |\hat{V}_0 - V_0|^2 &= |\max\{f_0(x_0), \hat{q}_{n,0}(x_0)\} - \max\{f_0(x_0), q_0(x_0)\}|^2 \\ &\leq |\hat{q}_{n,0}(x_0) - q_0(x_0)|^2 \\ &= O_{\mathbf{P}} \left(\left(\frac{\log^5 n}{n} \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

4. Quelques résultats numériques.

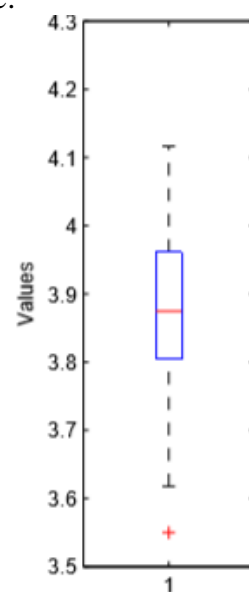
On considère dans un premier temps comme fonction de payoff bornée un put de strike $K = 90$, de maturité $T=1$ an. La discrétisation temporelle se fait en posant $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = 1$, avec $m=12$. On pose également comme fonction $r=0.05$, x_0 valeur initiale des stocks à 100



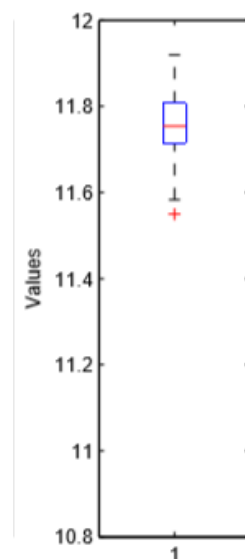
Considérons maintenant un payoff sur 5 actifs sous-jacents dont la matrice de volatilité est donnée par:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0.3024 & 0.1354 & 0.0722 & 0.1367 & 0.1641 \\ 0.1354 & 0.2270 & 0.0613 & 0.1264 & 0.1610 \\ 0.0722 & 0.0613 & 0.0717 & 0.0884 & 0.0699 \\ 0.1367 & 0.1264 & 0.0884 & 0.2937 & 0.1394 \\ 0.1641 & 0.1610 & 0.0699 & 0.1394 & 0.2535 \end{pmatrix}$$

En prenant des échantillons de taille $n=2000$, on obtient le boxplot suivant pour l'estimation du prix avec notre algorithme:



En prenant un nombre de simulation $n = 10\,000$, une discrétisation de pas $m=48$, on obtient:



IV. Conclusion

Ainsi, nous avons présentés 3 méthodes différentes afin de pricer un put American :

- La méthode des éléments finis
- La méthode CRR
- La méthode LSM

Cela nous a permis de comparer les résultats de la méthode LSM à ceux des méthodes des éléments finis et CRR.

Cette comparaison étant faite, nous avons pu aller plus loin dans notre analyse en utilisant la méthode LSM cette fois pour le pricing d'options plus complexes.

Cette méthode LSM peut aussi être utilisée pour le calcul d'autres produits tels que les swap de taux et surtout avec d'autres modèles que celui de Black & Scholes tant que l'on arrive à calculer les espérances conditionnelles pour la récursion inversion.

Cela étant fait, nous avons effectué une seconde analyse concernant le pricing d'option American en grande dimension. La méthode KKT a l'avantage sur les méthodes LSM et CRR de permettre de calculer des prix d'options américaines de payoff très variés et sur des sous-jacents markoviens quelconques et de dimension supérieure à 3 (plus de 3 actifs corrélés) cependant pour des pas de discrétisation très grands et une dimension élevée, l'estimation des valeurs de continuité et du k optimal prend énormément de temps, de plus vu qu'on estime le prix final en déterminant un temps d'arrêt optimal, il est difficile d'avoir à nouveau aux valeurs des trajectoires permettant d'évaluer les grecs.

V. Références des articles étudiés

- **Francis A. Longstaff , Eduardo S. Schwartz, Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach**
- **Michael Kohler, Adam Krzyzak and Nebojsa Todorovic, Pricing of high-dimensional American options by neural networks**