Chapitre IV : Modèles GARCH

Yannick Le Pen

3 faits stylisés sur les séries financières

- Alternance de périodes “agitées” et tranquilles (volatility clustering)

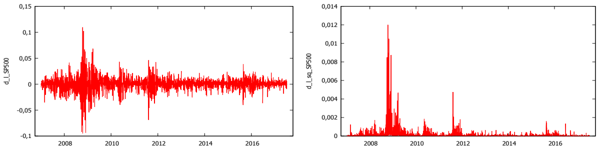
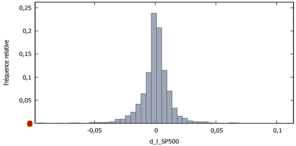
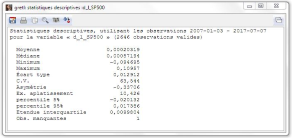


Figure – Rendement *(à gauche)* et rendement au carré *(à droite)* du S&P 500.

3 faits stylisés sur les séries financières

2 La loi des rendements non Gaussienne : (skewness $\neq 0$ et d'excès de kurtosis)





gretl: statistiques descriptives :d_l_SP500

Statistiques descriptives, utilisant les observations 2007-01-03 - 2017-07-07
pour la variable « d_l_SP500 » (2646 observations valides)

Moyenne	0,00020319
Médiane	0,00057194
Minimum	-0,094695
Maximum	0,10957
Écart type	0,012912
C.V.	63,544
Asymétrie	-0,33706
Ex. aplatissement	10,426
percentile 5%	-0,020132
percentile 95%	0,017386
Etendue interquartile	0,0099804
Obs. manquantes	1

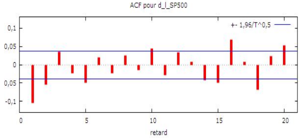
Figure – Histogramme et statistiques descriptives du taux de rendement de l'indice S&P 500.

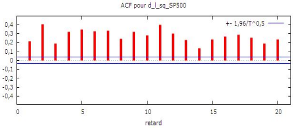
3 faits stylisés sur les séries financières

- Effet d'asymétrie : la volatilité a tendance à augmenter davantage suite à un rendement négatif qu'à un rendement positif égal en valeur absolue.

Introduction : détection d'un effet ARCH

1. Représentation graphique des rendements et des rendements au carré (vu dans le chapitre précédent).
2. Autocorrélogramme des rendements au carré





   - Rendements sont peu autocorrélés et donc peu prédictibles .
   - Rendements au carré davantage autocorrélés.
   - Des prévisions plus précises pour la volatilité que pour les rendements.
3. Test d'un effet ARCH (vu dans le chapitre précédent).

Modèles GARCH

- Les modèles ARCH/GARCH sont des modèles permettant d'estimer et de prévoir la volatilité.
- Ces modèles sont constitués de deux équations :
  1. Une equation de la moyenne décrivant la dynamique des rendements
  2. Une equation de la variance décrivant l'évolution de la variance des rendements au cours du temps
- Principales références : Engle (1982), Bollerslev (1986).
- Une présentation simple de la modélisation GARCH : Engle, Patton (2001), "What good is a volatility model", *Quantitative Finance*, vol 1, 237-245.

Modélisation des rendements

- On considère la série de rendements r_t, $t = 1, ..., T$.
- On suppose que r_t peut s'écrire comme la somme :
  - d'une équation décrivant la dynamique des rendements
    - $r_t = m + u_t$
    - ou $r_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + u_t$
    - ou autre spécification
  - d'un terme d'erreur $u_t = \sigma_t z_t$ avec $z_t \sim iid\ N(0, 1)$.
- la variance de u_t dépend du temps : $V(u_t) = \sigma_t^2$
- On s'intéresse à la modélisation de σ_t^2

- Cas particulier du modèle ARCH(1)
- La volatilité conditionnelle est représentée par le modèle ARCH(1) : $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2$
- On peut imposer les contraintes $\omega > 0$ et $\alpha_1 \geq 0$ sur les paramètres pour une volatilité toujours positive.
- Généralisation : ARCH(p) Le modèle précédent se généralise en supposant que σ_t^2 dépend des p chocs passés (au carré) :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_{t-i}^2$$

avec $\omega > 0$ et $\alpha_i \geq 0, \forall i = 1, ..., p$.

Commentaires

1. Comment choisir le nombre de retards p ?
   Utilisation de la log-vraisemblance (à maximiser) ou de critères d'information à minimiser
2. Dans les modèles ARCH(p), le nombre de retards a prendre en compte est souvent trop important
3. Il y a un risque élevé que les contraintes de non négativité sur les coefficients du modèle ARCH ne soient pas satisfaites.

- ans ces modèles σ_t^2 dépend de :
  - ses p valeurs passées $\sigma_{t-1}^2, \ldots, \ \sigma_{t-p}^2$
  - des q chocs passés $u_{t-1}^2, \ldots, u_{t-q}^2$
- Modèle GARCH(1,1) :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

- Possibilité de contraintes sur les paramètres $\omega > 0$, $\alpha_1 \geq$, $\beta_1 \geq 0$ pour assurer une variance positive.
- Modèle GARCH(p,q)
- L'équation de la volatilité est :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-1}^2$$

- On peut imposer les contraintes de positivité $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, ..., p\}$, $\beta_i \geq 0$, $\forall j \in \{1, ..., q\}$

Dynamique de σ_t^2

- σ_t^2 : variance des rendements en t, compte tenu de tous les évènements observés jusqu'à cette date.
- $\sigma^2 = V(r_t)$ mesure la dispersion des rendements indépendamment de l'historique.
- σ^2 est la moyenne des σ_t^2 et l'on a $\sigma^2 = E\left(\sigma_t^2\right)$
- Relation entre σ_t^2 et σ^2 pour un modèle GARCH(1,1).

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ \Rightarrow E\left(\sigma_t^2\right) &= \omega + \alpha_1 E\left(u_{t-1}^2\right) + \beta_1 E\left(\sigma_{t-1}^2\right) \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \omega + \alpha_1 \sigma^2 + \beta_1 \sigma^2 \end{aligned}$$

- Si $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, on a : $\sigma^2 = E(\sigma_t^2) = \frac{\omega}{1-(\alpha_1+\beta_1)}$
- Si $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, la variance inconditionnelle σ^2 n'est pas définie.

Modèle GARCH et kurtosis

- On a vu qu'une des caractéristiques des séries financières est d'avoir un excès de kurtosis[1].
- On peut montrer que l'introduction d'une equation GARCH permet d'obtenir une distribution des rendements supérieur à 3. Le modèle des rendemets se rapproche de la distribution observée des ces rendements.

1. La valeur de leur kurtosis est supérieure à 3, valeur de référence de la loi N(0,1).

- Une méthode d'estimation standard est celle du Quasi-Maximum de vraisemblance Bollerslev et Wooldridge (1992).
- On utilise l'expression de la log-vraisemblance d'une loi normale pour estimer les paramètres du modèle, même si la vraie loi des rendements n'est pas une loi normale.
- l'estimateur du QMV est convergent si les équations de la moyenne et de la variance conditionnelle sont bien spécifiées.

gretl : modèle 2

Fichier Édition Tests Sauvegarder Graphiques Analyse LaTeX

```
Évaluations de la fonction : 85
Évaluations du gradient : 23

Modèle 2: GARCH, utilisant les observations 2007-01-08:2017-07-14 (T = 2649)
Variable dépendante: d_l_SP500
Écarts type basés sur la matrice hessienne

               coefficient   erreur std.      z       p. critique
  ---------------------------------------------------------------
  const         0,000643719   0,000159751    4,030     5,59e-05   ***
  d_l_SP500_1  -0,0762983     0,0213696     -3,570     0,0004     ***
  d_l_SP500_2  -0,0106223     0,0209087     -0,5080    0,6114

  alpha(0)      2,72904e-06   4,68569e-07    5,824     5,74e-09   ***
  alpha(1)      0,119407      0,0135166      8,834     1,01e-018  ***
  beta(1)       0,859351      0,0143608     59,84      0,0000     ***

Moy. var. dép.        0,000210   Éc. type var. dép.    0,012905
Log de vraisemblance  8519,896   Critère d'Akaike     -17025,79
Critère de Schwarz   -16984,62   Hannan-Quinn         -17010,89

Variance non conditionnelle des erreurs = 0,000128477
Test du ratio de vraisemblance pour les termes (G)ARCH:
  Chi-deux(2) = 1468,41 [0]
```

gretl : modèle 2

Fichier Édition Tests Sauvegarder Graphiques Analyse LaTeX

```
Évaluations de la fonction : 86
Évaluations du gradient : 21

Modèle 2: GARCH, utilisant les observations 2007-01-05:2017-07-14 (T = 2650)
Variable dépendante: d_l_SP500
Écarts type basés sur la matrice hessienne

               coefficient   erreur std.      z       p. critique
  ---------------------------------------------------------------
  const         0,000635743   0,000158975    3,999     6,36e-05   ***
  d_l_SP500_1  -0,0756441     0,0213083     -3,550     0,0004     ***

  alpha(0)      2,73226e-06   4,67107e-07    5,849     4,94e-09   ***
  alpha(1)      0,119686      0,0135106      8,859     8,10e-019  ***
  beta(1)       0,859064      0,0143278     59,96      0,0000     ***

Moy. var. dép.        0,000208   Éc. type var. dép.    0,012903
Log de vraisemblance  8523,459   Critère d'Akaike     -17034,92
Critère de Schwarz   -16999,62   Hannan-Quinn         -17022,14

Variance non conditionnelle des erreurs = 0,000128577
Test du ratio de vraisemblance pour les termes (G)ARCH:
  Chi-deux(2) = 1480,66 [0]
```

Figure – Estimation du AR(2)-GARCH(1,1) *(à gauche)* et d'un AR(1)-GARCH(1,1) *(à droite)*

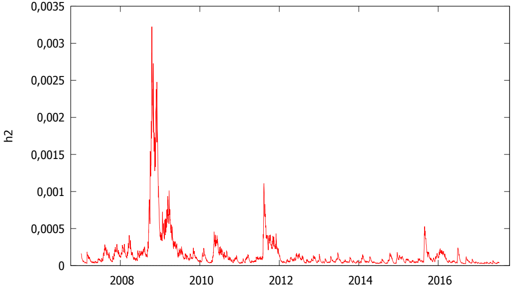
- Dans l'équation de l'AR(2), le coefficient du second retard plus significatif : on réestime avec un AR(1).
- Dans le modèles AR(1)-GARCH(1,1), tous les coefficients sont significatifs.

Commentaire des coefficients estimés

- alpha(0)= 2,73226e-06 est la constante
- alpha(1)= 0,119686 est le coefficient de u_{t-1}^2
- beta(1) = 0,859064 est le coefficient de σ_{t-1}^2
- On en déduit que la valeur passée de la variance est plus importante que le choc en *t-1* dans la détermination de la dynamique de la volatilité.
- On voit que $\mathrm{alpha}(1)+\mathrm{beta}(1) < 1$: la condition d'existence de la variance σ^2 est satisfaite.

Volatilité estimée

- Représentation graphique de la volatilité estimée σ_t^2 :

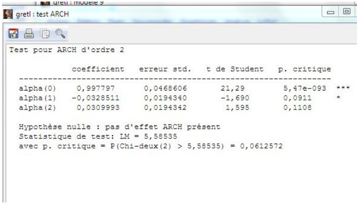


- Fluctuations plus lisses par rapport au rendement au carré.

- On veut savoir si le modèle GARCH(1,1) estimé a bien pris en compte toute la volatilité.
- L'équation de la moyenne des rendements est $r_t = c + \phi_1 r_{t-1} + u_t$ avec $V(u_t) = \sigma_t^2$.
- A l'issue de l'estimation on peut calculer le résidu standardisé $z_t = \frac{u_t}{\sigma_t}$.
- Si le modèle GARCH(1,1) est bien spécifié, alors $V(z_t) = 1$ et le résidu standardisé ne doit pas présenter d'effet de volatilité.
- Si l'on applique le test d'un effet ARCH au résidu standardisé, on ne doit pas rejeter l'hypothèse nulle d'absence d'effet ARCH.

Test d'absence d'effet ARCH sur les résidus standardisés

- Dans la fenêtre des résultats, on sauvegarde residu qui doit apparaitre dans l'espace de travail.
- On fait ensuite la regression des résidus sur une constante (instruction OLS ou séries temporelles dans Modèle) et puis l'on fait le test d'un effet ARCH avec 2 retards. On obtient les résultats suivants :


gretl : test ARCH

Test pour ARCH d'ordre 2

	coefficient	erreur std.	t de Student	p. critique	
alpha(0)	0,997797	0,0468606	21,29	5,47e-093	***
alpha(1)	-0,0328511	0,0194340	-1,690	0,0911	*
alpha(2)	0,0309993	0,0194342	1,595	0,1108	

Hypothèse nulle : pas d'effet ARCH présent
Statistique de test: LM = 5,58535
avec p. critique = P(Chi-deux(2) > 5,58535) = 0,0612572

Figure – Test d'absence d'effet ARCH sur les résidus standardisés

- Exemple à partir d'un modèle GARCH(1,1) :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

- On note t_0 la date à laquelle on fait la prévision.
- Calcul de la volatilité en t_0 :

$$\sigma_{t_0}^2 = \omega + \alpha_1 u_{t_0-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t_0-1}^2$$

- Prévision en t_0 de la volatilité en $t_0 + 1$ (Prévision à l'horizon $h = 1$)

$$\sigma_{t_0+1}^2 = \omega + \alpha_1 u_{t_0}^2 + \beta_1 \sigma_{t_0}^2$$

- Prévision en t_0 de la volatilité en t_0+2 (Prévision à l'horizon $h=2$)

  Le modèle GARCH(1,1) nous donne

$$\sigma^2_{t_0+2} = \omega + \alpha_1 u^2_{t_0+1} + \beta_1 \sigma^2_{t_0+1}$$

  - en t_0, $\sigma^2_{t_0+1}$ est connu
  - par contre $u^2_{t_0+1}$ est inconnu, mais on sait que $E\left(u^2_{t_0+1}\right) = V\left(u_{t_0+1}\right) = \sigma^2_{t_0+1}$
  - On remplace donc $u^2_{t_0+1}$ par son espérance et on obtient la prévision $\sigma^{f,2}_{t_0,(2)}$ en t_0 à l'horizon $h=2$:

$$\begin{aligned} \sigma^{f,2}_{t_0,(2)} &= \omega + \alpha_1 \sigma^2_{t_0+1} + \beta_1 \sigma^2_{t_0+1} \\ &= \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\, \sigma^2_{t_0+1} \end{aligned}$$

- Généralisation : prévision à l'horizon h

$$\sigma^{f,2}_{t_0,(h)} = \omega \sum_{i=0}^{h-1} (\alpha_1 + \beta_1)^i + (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1} \sigma^2_{t_0+1}$$

Sous l'hypothèse $|\alpha_1 + \beta_1| < 1$, la prévision converge vers la variance inconditionnelle $\sigma^2 = \frac{\omega}{1-(\alpha_1+\beta_1)}$ de r_t

4 limites du modèle GARCH

1. Le modèle GARCH(p,q) ne prend pas en compte les effets d'asymétrie,
2. Le modèle GARCH ne prend pas en compte les effets de feedback entre la volatilité et la moyenne conditionnelle,
3. Les rendements suivent le plus souvent des lois non gaussiennes,
4. Des variables exogènes peuvent influencer la volatilité.

- Reproduire l'effet d'asymétrie : un choc négatif sur le rendement augmente davantage la volatilité qu'un choc positif (égal en valeur absolue).
- Pourquoi un effet d'asymétrie ?
  1. Effet de levier : un rendement négatif incite les intervenants sur les marchés financiers à réduire leurs positions, ce qui accroît la volatilité.
  2. Une hausse de la volatilité implique une hausse de l'incertitude sur les rendements financiers et peut amener les acteurs financiers à vendre une partie de leur portefeuille.

Le modèle GJR

- Modèle GARCH avec effet d'asymétrie de Glosten, Jannagathan et Runkle (1993)
- Introduction d'une variable indicatrice pour distinguer les chocs négatifs et positifs.
- Exemple : modèle GJR(1,1)

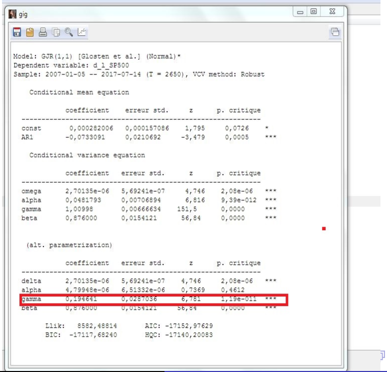
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma^- u_{t-1}^2 I(u_{t-1} < 0)$$

avec $\omega > 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta_1 \geqslant 0$ et $\alpha_1 + \gamma^- > 0$. On a un effet d'asymétrie si $\gamma^- > 0$

- Généralisation : modèle GJR(p,q)

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i^- u_{t-i}^2 I(u_{t-i} < 0)$$

- Dans le menu Modèle on sélectionne Garch variant :
- On spécifie un modèle ARCH(1)-TGARCH(1,1)
- Les résultats de l'estimation montrent que le coefficient d'asymétrie gamma est significativement différent de 0 : il existe un effet d'asymétrie.


gig

Model: GJR(1,1) [Glosten et al.] (Normal)*
Dependent variable: d_l_SP500
Sample: 2007-01-05 -- 2017-07-14 (T = 2650), VCV method: Robust

Conditional mean equation

	coefficient	erreur std.	z	p. critique	
const	0,000282006	0,000157086	1,795	0,0726	*
AR1	-0,0733091	0,0210692	-3,479	0,0005	***

Conditional variance equation

	coefficient	erreur std.	z	p. critique	
omega	2,70135e-06	5,69241e-07	4,746	2,08e-06	***
alpha	0,0481793	0,00706894	6,816	9,39e-012	***
gamma	1,00998	0,00666634	151,5	0,0000	***
beta	0,876000	0,0154121	56,84	0,0000	***

(alt. parametrization)

	coefficient	erreur std.	z	p. critique	
delta	2,70135e-06	5,69241e-07	4,746	2,08e-06	***
alpha	4,79948e-06	6,51332e-06	0,7369	0,4612	
gamma	0,194641	0,0287036	6,781	1,19e-011	***
beta	0,876000	0,0154121	56,84	0,0000	***

Llik: 8582,48814 AIC: -17152,97629
BIC: -17117,68240 HQC: -17140,20083

- Engle, Lilien et Robins (1987)
- Evaluation de la relation entre rendement et risque : la volatilité conditionnnelle entre dans l'équation du rendement.

$$\begin{cases} r_t = m + \delta\sigma_{t-1} + u_t,\ u_t = \sigma_t z_t \ avec\ z_i \sim i.i.d(0,1) \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

- Si $\delta > 0$, il mesure la prime de risque
- Estimation simultanée des équations de la moyenne et de la variance conditionnelle par le QMV.
- On peut trouver la variance conditionnelle σ_{t-1}^2 ou σ_t^2 ou σ_t à la place de σ_{t-1}
- pas directement estimable sous Gretl (à ma connaissance)

- Dans la présentation des modèles GARCH, on a écrit : $r_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + u_t$ en faisant l'hypothèse que $u_t = \sigma_t z_t$ avec $z_t \sim N(0, 1)$.
- La plupart des séries financières ne suivent pas une loi normale.
- Estimation d'un modèle GARCH en supposant des lois différentes de la loi normale.
- Deux lois non Gaussiennes souvent utilisées :
  1. la loi de Student standardisée (Bollerslev (1987))
  2. la loi GED (Generalized Error distribution) (Nelson (1989))
- Elles reproduisent l'excess kurtosis mais pas l'asymétrie.

- Extensions : modèles GARCH multivariés
- modèles des variances et des covariances et des corrélations
- utiles notamment dans les problèmes d'allocation d'actifs qui nécessitent d'estimer la matrice de corrélation
- modèle BEKK, le modèle à correlation constante (modèle CCC) ou le modèle à corrélation dynamique (DCC)