Chapitre II : Tests de racine unitaire

Yannick Le Pen

Introduction : Processus TS et DS

- Beaucoup de séries économiques ne sont des réalisations de processus aléatoires stationnaires.
- La non-stationnarité peut provenir de
  1. l'espérance
  2. la variance ou la covariance
- On a vu deux types de processus non-stationnaires :
  1. les processus TS (pour Trend stationnary) ou stationnaire autour d'une tendance déterministe : $x_t = \alpha + \beta t + u_t$
     - x_t n'est pas stationnaire car sa moyenne dépend du temps : $E\left(x_t\right) = \alpha + \beta t$.
  2. les processus DS (pour difference stationnary) ou stationnaire en différence
     - exemple : la marche aléatoire $x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$ avec $\epsilon_t \sim BB\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)$.
     - il s'agit de processus aléatoires non stationnaires

Notion de régression fallacieuse

- Pourquoi mettre l'accent sur la notion de processus stationnaire ?
- La régression d'une variable DS sur une autre variable DS, sans rapport avec elle, peut produire à tort une relation faussement significative. Ce résultat est indépendant de la taille de l'échantillon

Tests de racine unitaire

- Comment faire la distinction entre des processus TS et DS ?
  Application de tests :
- Test de racine unitaire de Dickey-Fuller
- Test de Kwiatkovsky, Phillips, Schmidt and Shin (1992)
- Remarque : il existe beaucoup d'autres tests.

- Point de départ du test de DF :

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \epsilon_t \, avec \, \epsilon_t \sim BB(0, \sigma_\epsilon^2)$$

- Hypothèses du test :

$$\begin{cases} H_0 : \phi_1 = 1 \Rightarrow x_t \text{ non stationnaire} \\ H_1 : \mid \phi_1 \mid < 1 \Rightarrow x_t \text{ stationnaire} \end{cases}$$

- Réécriture de l'équation :
- Régression de Dickey-Fuller simple

$$\begin{aligned} x_t &= \phi_1 x_{t-1} + \epsilon_t \\ \Rightarrow x_t - x_{t-1} &= (\phi_1 - 1)x_{t-1} + \epsilon_t \\ \Rightarrow \Delta x_t &= \rho x_{t-1} + \epsilon_t, \text{ avec } \rho = \phi_1 - 1 \end{aligned}$$

- Reformulation des hypothèses du test :

$$\begin{cases} H_0 : \phi_1 = 1 \iff \rho = 0 \Rightarrow x_t \text{ non stationnaire} \\ H_1 : \mid \phi_1 \mid < 1 \iff \rho < 0 \Rightarrow x_t \text{ stationnaire} \end{cases}$$

Mise en oeuvre du test

1. Estimation de la régression de DF par les MCO : $\Delta x_t = \hat{\rho} x_{t-1} + \hat{\epsilon}_t$
2. La statistique de test est la statistique de Student de $\hat{\rho}$:
   $t_{\hat{\rho}} = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\phi}_1}}$
3. Sous H_0, $t_{\hat{\rho}}$ ne suit pas une loi normale standard.
4. Les seuils critiques dans les tables de Dickey-Fuller.
5. On rejette H_0 quand la statistique de test $t_{\hat{\rho}}$ est plus petite que le seuil critique.
6. On rejette H_0 quand la probabilité critique est inférieure au risque de première espèce choisi (1%, 5% ou 10 %).

gretl: ADF test

```
Test de Dickey-Fuller pour l_SP500
taille de l'échantillon 2651
hypothèse nulle de racine unitaire : a = 1

  test sans constante
  modèle: (1-L)y = (a-1)*y(-1) + e
  valeur estimée de (a - 1): 2,77058e-005
  statistique de test: tau_nc(1) = 0,809263
  p. critique 0,8868
  Coeff. d'autocorrélation du 1er ordre pour e: -0,105

Régression de Dickey-Fuller
MCO, utilisant les observations 2007-01-04:2017-07-14 (T = 2651)
Variable dépendante: d_l_SP500

             coefficient   erreur std.   t de Student   p. critique
  --------------------------------------------------------------
  l_SP500_1  2,77058e-05   3,42359e-05     0,8093        0,8868

  AIC: -15542   BIC: -15536,1   HQC: -15539,9
```

- a correspond à ϕ_1 et *a-1* à ρ,
- $\hat{\rho} = 2,77058 \times 10^{-5}$ et $t_{\hat{\rho}} = 0,809263$.
- Le probabilité critique $= 0,8868 = 88,68\%$
- On ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle H_0 que l'indice S&P 500 n'est pas stationnaire.
- La dernière partie du tableau affiche les résultats de l'estimation de la régression de Dickey-Fuller.

Application au S&P 500 sous Gretl

- L'indice S&P500 en différence première, c'est-à-dire son taux de rendement, est-il stationnaire.
- La valeur est estimée de $\rho = a - 1 = -1,10$ est négative
- $t_{\hat{\rho}} = -57,1415$ et sa probabilité critique est $p.critique = 0,0001$
- On rejette H_0 : le taux de rendement du S&P 500 est stationnaire.
- En différenciant l'indice S&P 500, on s'est ramené à une série stationnaire.
- L'indice S&P 500 est un processus DS : stationnaire en différence.

- Modèle (1) :$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \epsilon_t$ sans constante ni tendance déterministe.
- Pas toujours adapté à toutes les séries économiques. Pourquoi ?
- Si x_t est stationnaire, l'absence de constante implique $E(x_t) = 0$.
- Or beaucoup de séries économiques ne sont pas nulles en moyenne.
- Dans ce cas, estimation de la regression de Dickey-Fuller avec une constante (modèle (2)).
- Si série x_t peut être stationnaire autour d'une tendance déterministe.
- Estimation de la regression de Dickey-Fuller avec une tendance déterministe (modèle (3)).
- Les seuils critiques du test de DF dépendent du modèle estimé.
- Interprétation inchangée de la probabilité critique.

- Modèle avec constante (modèle (2))

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + c + \epsilon_t \text{ avec } \Rightarrow \Delta x_t = \rho x_{t-1} + c + \epsilon_t$$

- A utiliser s'il l'on pense que la série étudiée a une moyenne non-nulle.
- Modèle avec constante et tendance déterministe (modèle (3)) :

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + c + bt + \epsilon_t \Rightarrow \Delta x_t = \rho x_{t-1} + c + bt + \epsilon_t$$

- A utiliser si l'on pense que la série peut-être stationnaire autour d'une tendance déterministe.

Pour les 3 modèles(1), (2) et (3), on aura :

- les mêmes hypothèses de test,
- la même méthode d'estimation par les MCO,
- la même statistique de test,
- la même règle de décision (même interprétation de la probablité critique),
- seuls changent les seuils de rejets

Application au S&P 500

- Indice S&P 500 : moyenne non nulle
- Test de DF avec constante

```
Test de Dickey-Fuller pour l_SP500
taille de l'échantillon 2651
hypothèse nulle de racine unitaire : a = 1

  test avec constante
  modèle: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
  valeur estimée de (a - 1): -0,00047671
  statistique de test: tau_c(1) = -0,535061
  p. critique 0,8819
  Coeff. d'autocorrélation du 1er ordre pour e: -0,104

Régression de Dickey-Fuller
MCO, utilisant les observations 2007-01-04:2017-07-14 (T = 2651)
Variable dépendante: d_l_SP500

             coefficient   erreur std.  t de Student  p. critique
  ---------------------------------------------------------------
  const       0,00369434   0,00652047      0,5666       0,5711
  l_SP500_1  -0,000476710  0,000890946    -0,5351       0,8819

  AIC: -15540,3   BIC: -15528,5   HQC: -15536,1

  avec constante et tendance temporelle
  modèle: (1-L)y = b0 + b1*t + (a-1)*y(-1) + e
  valeur estimée de (a - 1): -0,00347233
  statistique de test: tau_ct(1) = -2,37145
  p. critique 0,3945
  Coeff. d'autocorrélation du 1er ordre pour e: -0,104

Régression de Dickey-Fuller
MCO, utilisant les observations 2007-01-04:2017-07-14 (T = 2651)
Variable dépendante: d_l_SP500

             coefficient   erreur std.  t de Student  p. critique
  ---------------------------------------------------------------
  const       0,0237620    0,0101534       2,340        0,0193    **
  l_SP500_1  -0,00347233   0,00146422     -2,371        0,3945
  time        1,38651e-06  5,38147e-07     2,576        0,0100    **

  AIC: -15545   BIC: -15527,3   HQC: -15538,6
```

- Pprobabilités critiques supérieures aux risques de première espèce standard :
- H_0 pas rejetée

- Le test de DF est fondé sur l'hypothèse $\epsilon_t \sim BB(0, \sigma_\epsilon^2)$
- Cette hypothèse est trop simplificatrice : l'aléa ϵ_t peut-être autocorrélé.
- Les tables de Dickey-Fuller sont valables uniquement dans le cas où le terme d'erreur ϵ_t est un bruit blanc.
- Si ϵ_t n'est pas un bruit blanc, on risque de fausser les résultats du test.
- Il est nécessaire de considérer un modèle plus général prenant en compte cette autocorrélation et permettant d'utiliser ces tables de Dickey-Fuller.
- une façon de se ramener à un ϵ_t sans autocorrélation consiste à ajouter des variables en différence première retardées $\Delta x_{t-1}, \Delta x_{t-2}, ..., \Delta x_{t-p}$

- On retrouve les 3 cas rencontrés pour le test de DF simple :
- Modèle 4 sans constante : $\Delta x_t = \rho x_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \Delta x_{t-j} + \epsilon_t$
- Modèle 5 avec constante : $\Delta x_t = c + \rho x_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \Delta x_{t-j} + \epsilon_t$
- Modèle 6 avec constante et tendance déterministe :

  $\Delta x_t = c + bt + \rho x_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \Delta x_{t-j} + \epsilon_t$

Test ADF : mise en oeuvre

- Mêmes hypothèses que pour le test de DF simple
- Estimation par les MCO
- $t_{\hat{\rho}}$ comme statistique de test.
- Utilisation des seuils critiques de DF simple
- Choix de p
- On choisit un nombre de retards maximum $pmax$
- On estime la régression de Dickey-Fuller augmentée en faisant varier p de 0 à pmax.
- On retient le nombre de retards qui minimise l'un des 3 critères d'information :
  - $AIC(p) = ln(\hat{\sigma}_\epsilon^2) + 2p/T$
  - $SC(p) = ln(\hat{\sigma}_\epsilon^2) + pln(T)/T$

- On a fixé à 10 le nombre de retards maximum pour effectué ce test.
- Critère AIC pour déterminer le nombre de retards optimal
- On sélectionne les 3 regressions
- 5 retards pour le critère AIC.
- Pour les 3 regression, la probabilité critique est largement supérieure au risque de première espèce standards
- Pas de rejet de l'hypothèse nulle de non-stationnarité.
- Le nombre de retards optimal est égal à 4.
- Les probabilités critiques sont toutes nulles : on rejette l'hypothèse de non-stationnarité pour tous les modèles.
- On en déduit que l'indice S&P 500 (en logarithme) n'est pas stationnaire, mais que son taux de rendement (c'est-à-dire la différence première de l'indice en log) est stationnaire.

Conclusion sur les tests de Dickey-Fuller

- Le test de Dickey-Fuller augmenté est le plus ancien et le plus connu des test de recine unitaire
- Il existe beaucoup d'autres tests qui se distinguent :
  - par la façon dont ils résolvent l'autocorrélation des termes d'erreur ϵ_t (exemple : test de Phillips et Perron)
  - dont ils traitent la composante déterministe

- Inversion des hypothèses des tests de Dickey-Fuller :

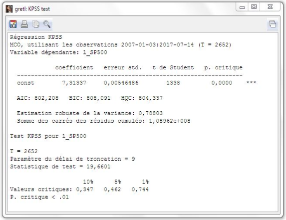
$$\begin{cases} H_0 : x_t \text{ stationnaire} \\ H_1 : x_t \text{ non stationnaire} \end{cases}$$

- Objectif : vérifier la robustesse des conclusions du test de Dickey-Fuller augmenté.

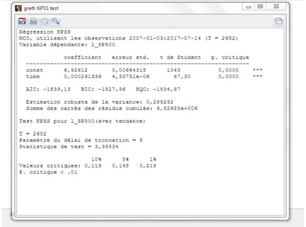
- Test basé sur la décompositions de x_t :
- $x_t = c + \tau_t + u_t \Rightarrow$ stationnarité en niveau,
- ou $x_t = c + bt + \tau_t + u_t \Rightarrow$ stationnarité autour d'une tendance déterministe
- u_t est un processus stationnaire
- τ_t est-il une marche aléatoire ?
  - Si τ_t est une marche aléatoire, alors x_t n'est pas stationnaire
  - Si $\tau_t = \tau_0$, alors x_t est stationnaire en niveau (modèle avec constante) ou stationnaire autour d'une tendance déterministe (modèle avec constante et tendance déterministe).

- On estime le modèle $x_t = c + u_t$ ou $x_t = c + bt + u_t$ par les MCO et l'on calcule la statistique de test [1]
- On rejette l'hypothèse nulle de stationnarité (autour d'une tendance déterministe si $d_t = c + bt$) quand :
  - la statistique de test est supérieure au seuil critique
  - la probabilité critique est inférieure au risque de première espèce retenu

1. On laisse volontaireme de coté l'expression de cette statistique de test



```
gretl: KPSS test

Régression KPSS
MCO, utilisant les observations 2007-01-03:2017-07-14 (T = 2652)
Variable dépendante: l_SP500

             coefficient   erreur std.   t de Student   p. critique
  ------------------------------------------------------------------
  const       7,31337     0,00546486       1338          0,0000    ***

  AIC: 802,208   BIC: 808,091   HQC: 804,337

  Estimation robuste de la variance: 0,78803
  Somme des carrés des résidus cumulés: 1,08962e+008

Test KPSS pour l_SP500

T = 2652
Paramètre du délai de troncation = 9
Statistique de test = 19,6601

                      10%      5%      1%
Valeurs critiques: 0,347   0,462   0,744
P. critique < .01
```



```
gretl: KPSS test

Régression KPSS
MCO, utilisant les observations 2007-01-03:2017-07-14 (T = 2652)
Variable dépendante: l_SP500

             coefficient   erreur std.   t de Student   p. critique
  ------------------------------------------------------------------
  const      6,92612       0,00664318      1043          0,0000    ***
  time       0,000291936   4,33751e-06       67,30       0,0000    ***

  AIC: -1839,13   BIC: -1827,36   HQC: -1834,87

  Estimation robuste de la variance: 0,289292
  Somme des carrés des résidus cumulés: 6,82683e+006

Test KPSS pour l_SP500(avec tendance)

T = 2652
Paramètre du délai de troncation = 9
Statistique de test = 3,35534

                      10%      5%      1%
Valeurs critiques: 0,119   0,148   0,218
P. critique < .01
```

- Des statistiques de tests supérieures aux seuils critiques
- Probabilités critiques sont inférieures à 1%
- On rejette l'hypothèse nulle de stationnarité.
- Application au taux de rendement du S&P 500
- On ne peut rejeter l'hypothèse de stationnarité.

- On considère un processus $x_t \sim I(d)$
- Ce processus doit être différencié d fois pour que l'on se ramène à un processus stationnaire $I(0)$,
- $\Delta^d x_t = (1-L)^d x_t \sim I(0)$
- $\Delta^d x_t$ possède alors une représentation ARMA(p,q) stationnaire :
- $A_p(L)\Delta^d x_t = B_q(L)\epsilon_t$ avec $\epsilon_t \sim BB(0, \sigma_\epsilon^2)$.
- x_t possède alors une représentation ARIMA(p,d,q)
- d est le degré de différenciation de la x_t