Aflevering 3/4

Afleveringen består af 10 del-spørgsmål der vægtes ligeligt. De fleste spørgsmål kan løses uafhængigt af hinanden, med følgende undtagelser: Spørgsmål 6 afhænger af spørgsmål 5 og spørgsmål 10 afhænger af spørgsmål 9.

Friedmannligningen og Universets alder

Læs eller genlæs afsnit 11.3.1 i Astrofysik omkring Friedmann-ligningen, https://astrofysik.systime.dk/?id=c2681. Friedmann-ligningen beskriver udviklingen i skalafaktoren $a(t)$ i et homogent og isotropt Univers givet andelen i dag af mørk energi (Ω_Λ), stof og mørkt stof (Ω_M) samt stråling (Ω_R):

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_\Lambda + \Omega_\mathrm{M} a^{-3} + \Omega_\mathrm{R} a^{-4}\right) . \qquad (1)$$

Her fraviger vi lidt fra bogens notation idet vi bruger $\Omega_\mathrm{R} \equiv \Omega_{\gamma,0}$ og $\Omega_\mathrm{M} \equiv \Omega_{s,0}$ for andelen af henholdsvis stråling og stof i dag. Ligesom bogen definerer vi Hubbleraten $H(t) \equiv \frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ samt Hubblekonstanten H_0. Skalafaktoren er normeret således at den er 1 i dag, dvs $a(t = t_\mathrm{today}) = 1$.

Spørgsmål 1: Vis at ligning (1) kan skrives som

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda a^2 + \frac{\Omega_\mathrm{M}}{a} + \frac{\Omega_\mathrm{R}}{a^2}} . \qquad (2)$$

Spørgsmål 2: Vis ved hjælp af separation af variable at ligning (2) har løsningen

$$t - t(a = 0) = \int_0^a \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda a'^2 + \frac{\Omega_\mathrm{M}}{a'} + \frac{\Omega_\mathrm{R}}{a'^2}}} \mathrm{d}a' . \qquad (3)$$

Vi vil i resten af opgaven sætte $t(a = 0) = 0$, sådan at nulpunktet for tiden svarer til det tidspunkt hvor skalafaktoren var 0.

Spørgsmål 3: Under antagelse af et strålingsdomineret Univers, altså $\Omega_\mathrm{M} = \Omega_\Lambda = 0$, udled $t(a)$ ved at løse integralet i ligning (3).

Spørgsmål 4: Antag nu at vi kan se bort fra stråling, dvs $\Omega_\mathrm{R} = 0$. Ligning (3) bliver da

$$t = \int_0^a \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda a'^2 + \frac{\Omega_\mathrm{M}}{a'}}} \mathrm{d}a' .$$

Vis at man efter substitutionen $v \equiv a^3$ kan nå frem til

$$t = \frac{1}{3H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{M}}}}\int_0^v \frac{1}{\sqrt{v'\left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{\mathrm{M}}}v'+1\right)}}\mathrm{d}v' \,. \tag{4}$$

Spørgsmål 5: Benyt den generelle stamfunktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{(Ax+B)(Px+Q)}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{AP}}\ln\left(\sqrt{A(Px+Q)}+\sqrt{P(Ax+B)}\right) , & AP > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-AP}}\arctan\left(\sqrt{\frac{-P(Ax+B)}{A(Px+Q)}}\right) , & AP < 0 \end{cases}$$

til at løse integralet i ligning (4).

Spørgsmål 6: Benyt identiteten

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = \mathrm{arcsinh}(x) \,,$$

til at vise at løsningen fra spørgsmål 5 kan skrives som

$$t = \frac{2}{3H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}}\mathrm{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{\mathrm{M}}}a^3}\right) \,. \tag{5}$$

(Identiteten kan fx vises ved først at definere $y \equiv \sinh(x)$ og så isolere x i ligningen $y = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$, men dette giver *ikke* ekstra point!)

Spørgsmål 7: Angiv H_0^{-1} i enheden Gyr (giga-år). Vi antager $H_0 = 67,7\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s\,Mpc}}$.

Spørgsmål 8: Data fra Planck satellitten er i god overensstemmelse med værdierne $\Omega_{\mathrm{M}} = 0,31$, $\Omega_\Lambda = 0,69$ og $H_0 = 67,7\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s\,Mpc}}$. Indsæt tallene i ligning (5) og find alderen af Universet i dag hvor $a = 1$.

Spørgsmål 9: Find $a(t)$ ved at isolere a i ligning (5).

Spørgsmål 10: Den 17 august 2017 observerede man for første gang en kollision af to neutronstjerner ved hjælp af både gravitationsbølger og optiske signaler. Ved at analysere det optiske signal har man målt en rødforskydning på $z = 0.0099$. Benyt relationen $a = (1+z)^{-1}$ til at udregne Universets alder da kollisionen skete ved hjælp af svaret på spørgsmål 9.