

BIENVENUE DANS LA 4^e DIMENSION

Le nouvel espace mathématique

Il existe des espaces biscornus dont la complexité saute immédiatement aux yeux. Mais certains, d'apparence docile, peuvent réserver des surprises. Les variétés de dimension 4, ou 4-variétés, sont de ceux-là : plus les mathématiciennes et mathématiciens les étudient, plus leurs comportements semblent étranges. Et pourtant, une variété, c'est simplement un espace mathématique qui, localement, ressemble à l'espace euclidien classique : quand on le regarde de près, il paraît bien droit, bien plat, tout simple. On y retrouve d'ailleurs des figures géométriques familières. Un cercle est une variété de dimension 1 : une courbe qui, quand on zoome fort dessus, finit par ressembler à une droite. Une sphère est une 2-variété : une surface qui, de très près, ressemble à un plan – c'est pour cela que notre Terre paraît plate si l'on ne prend pas un peu de hauteur. Plus difficile en revanche de se représenter une 3-variété – il faudrait l'imaginer plongée dans un espace de dimension 4. Et c'est quasi impossible pour les 4-variétés et au-delà.

Or ces derniers sont vraiment à part : « En dimensions 1, 2 et 3, on peut visualiser les choses et utiliser la géométrie pour étudier "à la main" les variétés », explique Inanç Baykur, chercheur à l'université du Massachusetts à Amherst. « En dimensions 5 et plus, tout est beaucoup plus libre : l'étude

des variétés devient très algébrique et les choses se simplifient », poursuit Sam Hughes, chercheur à l'université de Bonn. Problème : la dimension 4 est un intermédiaire inconfortable, où tout se révèle beaucoup plus difficile. Au point que certains en ont fait leur spécialité. « Je ne connais aucun autre domaine des mathématiques où l'on peut se spécialiser dans

l'étude d'une dimension », souligne Maggie Miller, de l'université du Texas, à Austin. La liste des particularités des 4-variétés ne cesse de s'allonger. En 2024, Sam Hughes a construit, avec Daniel Ruberman, de l'université Brandeis, des exemples de 4-variétés très simples que l'on peut découper d'une manière contre-intuitive, en créant des morceaux

bien plus compliqués que l'espace initial dont ils sont issus. Et Inanç Baykur vient de construire des 4-variétés particulières en collant des « poignées » sur une boule de dimension 4, lui permettant de résoudre un vieux problème : il n'y a pas de manière de déformer de façon fluide l'espace obtenu pour retrouver un espace standard. En maths, comme en SF, la quatrième dimension est décidément fantastique. **C.L.**

E8

C'est le nom d'une variété de dimension 4 très étrange, très emblématique, découverte en 1982.