ANNALES 2009

OLYMPIADES ACADÉMIQUES

DE

MATHÉMATIQUES

Volume 1

Table des matières

Sujet national

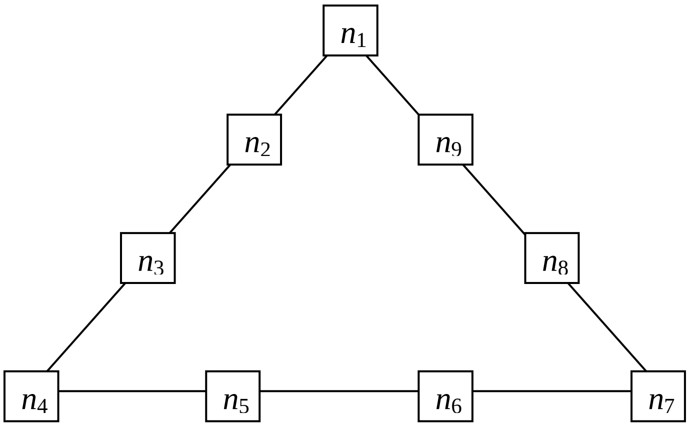
Exercice 1

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

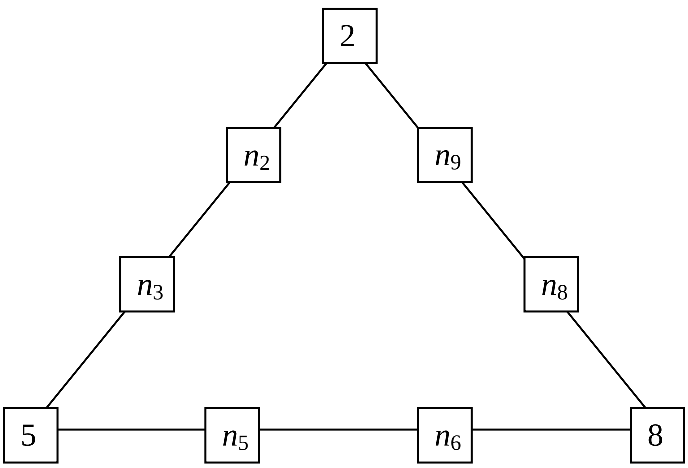
On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur *S*, on dit que le triangle est *S*-magique.
(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
c. Donner la liste des couples (S , T) ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice 2 :

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Éléments de solution (sujet national)

Exercice 1 :

Partie A

1- Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)
2- Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :

1- Triangle 20-magique :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & & & \\ & & 7 & & 1 & & \\ & 6 & & & & 9 & \\ 5 & & 3 & & 4 & & 8 \end{array}$$

2- a. $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\frac{6+45}{3} \leq S \leq \frac{24+45}{3}$

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3- Triangle 17-magique :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 8 & & 4 & & \\ & 6 & & & & 9 & \\ 2 & & 5 & & 7 & & 3 \end{array}$$

4- Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.
Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.
Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où
$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.
(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5- a. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

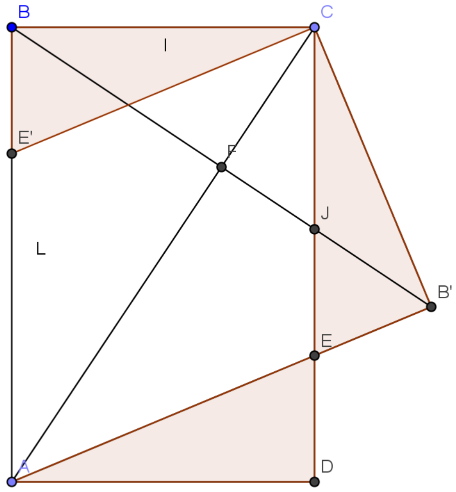
b. Triangle 19-magique

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 7 & & & \\ & & 4 & & 1 & & \\ & 5 & & & & 9 & \\ 3 & & 8 & & 6 & & 2 \end{array}$$

6- Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle *S*-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).
18 n'est pas *S*-magique. Donc 22 ne l'est pas non plus.

Exercice 2 :



2- Sachant que AE'CE est un losange on a :
$(16-c)^2+8^2=c^2$ soit $c=10$

3- On a nécessairement : $(L-7{,}5)^2+l^2=7{,}5^2$
avec $L\geq 8$
soit : $l^2=L(15-L)$
d'où les seules réponses entières : L=12 et l=6.
Et ces deux dimensions conduisent à un losange de côté 7,5 cm.

4- Sachant que AE'CE est un losange, on a ED=E'B donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.

D'où l'égalité : $(L-c)l=0{,}25Ll$ d'où $c=0{,}75L$

5- Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE'=CE et AE=AE'
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').

Académie d'Aix-Marseille

Sujets

<u>*Exercice 1 (pour tous)*</u>

Une épreuve de mathématiques comporte quatre questions.
Pour chaque question, on obtient 0 point si la réponse est fausse ou 5 points si la réponse est bonne.
Une des questions consiste à trouver l'aire totale des six faces d'un cube dont le côté s'exprime par un nombre entier de mètres.
Une autre des questions est la suivante :
« Le prix d'une chemise, vendue avant les soldes à 20 €, baisse de 20 %. Quel est son nouveau prix ? »
Les réponses des élèves, sans unité, sont données par le tableau suivant :

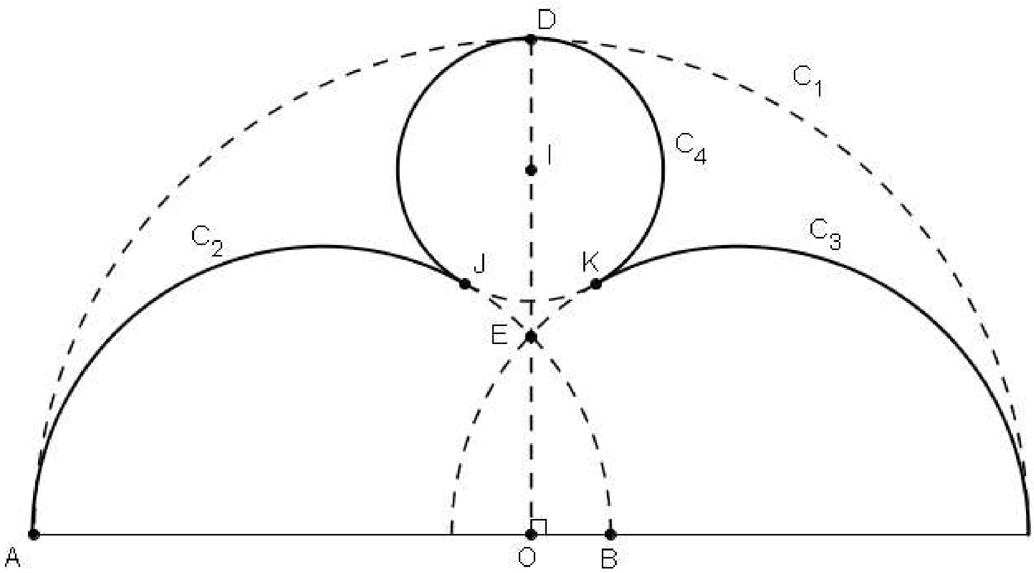
	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	18	16	10
Carina	12	24	12	14
Jérôme	12	24	16	18
Lucille	8	18	14	10
Myriam	16	26	16	14
Nicole	8	24	18	18
Saïda	8	20	16	10
Yves	16	24	18	10

Les notes 0 et 20 ont toutes deux été attribuées.

Quelles sont les notes de chacun des élèves ?
Justifier les réponses données.

Exercice 2 (série S)

Pour les besoins de son nouveau spectacle, le célèbre chanteur Johnny Rockstar souhaite créer une scène de spectacle moderne.
Cette scène est représentée vue de dessus par le schéma suivant :



Le demi-cercle C_1 de centre O passant par le point A et le demi-cercle C_2 de diamètre $[AB]$ sont tangents en A.
La droite (OD) est axe de symétrie de la figure et le point D appartient à C_1.
Le demi–cercle C_3 est le symétrique de C_2 par rapport à (OD).
Le point E est le point d'intersection du segment $[OD]$ et de C_2.
Des contraintes de constructions imposent que $OA = 10\,\text{m}$ et $DE = 6\,\text{m}$.

1– Calculer le rayon de C_2.

2– C_4 est le cercle de centre I passant par le point D.
C_4 est tangent à C_1 en D, tangent à C_2 en J, et tangent à C_3 en K.
Calculer le rayon de C_4.

Propriété admise :
Si deux cercles de centre Ω et Ω' sont tangents en un point M, alors Ω, Ω' et M sont alignés.

<u>Exercice 3 (séries autres que S)</u>

1– Question préliminaire :

À l'aide de la calculatrice, déterminer tous les entiers naturels a et b avec $a \leq b$ tels que : $a^2 + b^2 = 225$.

2– On cherche tous les triangles ABC rectangles en A, tels que AB = 8 et tels que BC et AC s'expriment à l'aide de nombres entiers.

a. Calculer $\mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2$.

b. Donner toutes les décompositions possibles de 64 sous la forme d'un produit de deux entiers naturels.

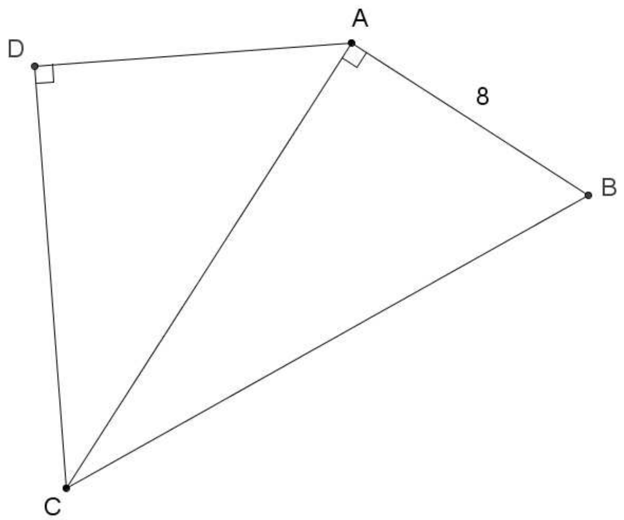
c. y et z étant deux nombres entiers naturels, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} z + y = 16 \\ z - y = 4 \end{cases}.$$

En déduire un couple de valeurs possibles pour AC et BC.

d. Peut-on trouver d'autres couples de valeurs pour AC et BC ?

3– On considère la figure suivante :



Déterminer les longueurs AC, BC, AD et CD sachant que ces longueurs s'expriment à l'aide de nombres entiers.

Éléments de solution (Aix-Marseille)

<u>*Exercice 1 (pour tous)*</u>

En ce qui concerne la surface totale des six faces du cube, les réponses possibles sont : $\{6\times 1^2 ; 6\times 2^2 ; 6\times 3^2 ; ...\}$, c'est-à-dire $\{6 ; 24 ; 54 ; ...\}$.
Parmi les réponses proposées, seule 24 convient puisque nous savons qu'un élève a eu 20.

La réponse à la deuxième question est 24.

La réponse à la question :
« Le prix d'une chemise, vendue avant les soldes à 20 €, baisse de 20 %. Quel est son nouveau prix ? » est : $20\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=16$.

◆ Supposons que 16 soit la bonne réponse à la première question.

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	***16***	18	16	***10***
Carina	12	***24***	12	14
Jérôme	12	***24***	16	18
Lucille	8	18	14	***10***
Myriam	***16***	26	16	14
Nicole	8	***24***	***18***	18
Saïda	8	20	16	***10***
Yves	***16***	***24***	***18***	***10***

Dans ce cas, comme nous le voyons sur le tableau ci-dessus, seul Yves aurait 20, et en considérant les bonnes réponses d'Yves, personne n'aurait 0.
Ce cas est exclu.

16 est donc la réponse à la troisième question.

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	18	***16***	10
Carina	***12***	***24***	12	14
Jérôme	***12***	***24***	***16***	***18***
Lucille	8	18	14	10
Myriam	16	26	***16***	14
Nicole	8	***24***	18	***18***

Saïda	8	20	***16***	10
Yves	16	***24***	18	10

Jérôme est le seul a pouvoir avoir 20. En considérant les bonnes réponses de Jérôme, les autres notes en découlent : Lucille a eu 0, Alex, Myriam, Saïda et Yves ont eu 5, Carina et Nicole ont eu 10.

Exercice 2 (série S)

1– $E \in [OD]$, donc $OE = OD - ED = 10 - 6 = 4$.

Dans le triangle AOE rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$AE^2 = AO^2 + OE^2$,

$AE^2 = 10^2 + 4^2 = 116$,

On en déduit : $AE = \sqrt{116}$.

Le point E appartient à C_2, donc le triangle ABE est rectangle en E.

Les AOE et ABE sont deux triangles rectangles qui ont un angle aigu en commun. Ils sont donc semblables. Dès lors : $\frac{AO}{AE} = \frac{AE}{AB}$. Il vient : $AB = \frac{AE^2}{AO} = 11,6$.

Le rayon de C_2 a donc pour mesure 5,8 m.

2– Soit Ω le centre du cercle C_2, et *r* le rayon de C_3. $\Omega I = 5,8 + r$.

D'autre part, $I \in [OD]$, donc $OI = OD - ID = 10 - r$, et $\Omega \in [AO]$, donc $\Omega O = AO - A\Omega = 10 - 5,8 = 4,2$.

Dans le triangle ΩOI rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$\Omega I^2 = \Omega O^2 + OI^2$,

$(5,8 + r)^2 = 4,2^2 + (10 - r)^2$.

En développant, il vient : $31,6r = 84$, c'est-à-dire $r = \frac{210}{79}$ m.

Exercice 3 (séries autres que S)

1– Question préliminaire :

À l'aide de la calculatrice, $a = 9$ et $b = 12$ sont les seuls entiers naturels avec $a \leq b$ tels que : $a^2 + b^2 = 225$.

2– **a.** Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'où : $BC^2 - AC^2 = AB^2 = 8^2 = 64$.

b.

$64 = 1 \times 64$

$64 = 2 \times 32$

$64 = 4 \times 16$

$64 = 8 \times 8$

c. Le couple $(y = 6\ ;\ z = 10)$ est solution du système.

Dès lors, $64 = 16\times 4 = (z+y)(z-y) = z^2 - y^2 = \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2$.

Le couple $(\mathrm{AC} = 6\ ;\ \mathrm{BC} = 10)$ répond donc à la question.

d. y et z ont joué le rôle de AC et BC.
Seules des valeurs entières positives de y et z nous intéressent.
Considérons les autres décompositions de 64 et étudions les systèmes associés compte tenu que $z+y \geq z-y$:

$$\begin{cases} z+y=64 \\ z-y=1 \end{cases} ; \begin{cases} z+y=32 \\ z-y=2 \end{cases} ; \begin{cases} z+y=8 \\ z-y=8 \end{cases}$$

Seul le deuxième système permet d'obtenir des valeurs entières strictement positives. Le couple $(\mathrm{AC} = 15\ ;\ \mathrm{BC} = 17)$ répond donc à la question.

Remarque : on a déterminé tous les couples $(\mathrm{AC}\ ;\ \mathrm{BC})$ répondant à la question.

3– D'après ce qui précède, soit $\mathrm{AC} = 6$, soit $\mathrm{AC} = 15$.

Or, il n'existe pas d'entiers naturels avec $a \leq b$ tels que : $a^2 + b^2 = 36$.
Le cas $\mathrm{AC} = 6$ est donc exclu.

D'autre part, d'après la question préliminaire, $9^2 + 12^2 = 15^2$, 9 et 12 étant les seuls entiers vérifiant $a^2 + b^2 = 225$.
On en déduit : $\mathrm{AC} = 15$, $\mathrm{BC} = 17$, $\mathrm{AD} = 9$ et $\mathrm{DC} = 12$.

Académie d'Amiens

Sujets

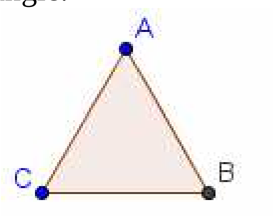
<u>*Exercice 1 (série S)*</u>

Initialement, *n* oiseaux se trouvent chacun au sommet d'un poteau, ces *n* sommets formant un polygone régulier à *n* côtés. Lorsqu'ils sont apeurés, ces oiseaux s'envolent. Puis après quelques temps, ils reviennent se poser sur les *n* poteaux, mais pas nécessairement à leurs positions initiales. Deux oiseaux ne peuvent pas se poser sur un même poteau.
On dit que *n* oiseaux forment un groupe de « bons géomètres » lorsque, quelles que soient les positions avant et après l'envol, on peut trouver trois oiseaux (parmi les *n*) qui forment, avant et après l'envol, deux triangles

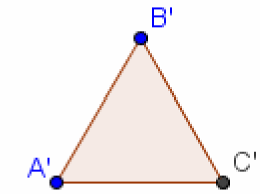
- soit tous deux rectangles ;
- soit tous deux acutangles (triangle dont les trois angles sont aigus).

Par exemple, pour $n = 3$, on peut schématiser le problème de la manière suivante.
Appelons A l'oiseau posé en A avant l'envol. Sa position une fois reposé sera notée A'.

Avant l'envol, les oiseaux A, B, C forment un triangle acutangle.



Après l'envol, les oiseaux peuvent se reposer selon plusieurs combinaisons, par exemple :



Dans tous les cas, le triangle A'B'C' est un triangle acutangle.

Ainsi 3 oiseaux forment un groupe de « bons géomètres ».

On rappelle que tous les polygones réguliers sont inscrits dans un cercle.

1- Vérifier que 4 oiseaux forment un groupe de « bons géomètres ».

2- Pour $n = 5$, donner une position initiale et une position d'arrivée qui justifient que 5 oiseaux ne forment pas un groupe de « bons géomètres ».

3- Pour $n = 6$, les sommets des poteaux forment un hexagone régulier.
Montrer qu'il existe toujours 3 oiseaux qui, avant et après l'envol, forment un triangle rectangle.
Que peut-on en conclure quant au fait que 6 oiseaux forment ou non un groupe de « bons géomètres » ?

4- Montrer que si *n* est pair, *n* oiseaux forment nécessairement un groupe de « bons géomètres ».

Exercice 2 (série S)

L'intérieur d'un quadrilatère ABCD est partagé en 4 triangles par ses diagonales.
Les centres des cercles circonscrits à ces 4 triangles forment un quadrilatère STUV.

1- Montrer que STUV est toujours un parallélogramme.

2- Quelles propriétés doit avoir le quadrilatère ABCD pour que STUV soit un carré ?

Exercice 3 (séries L, ES, STG, ST2S)

Un ensemble *E* de nombres entiers positifs ou nuls possède les deux propriétés suivantes :

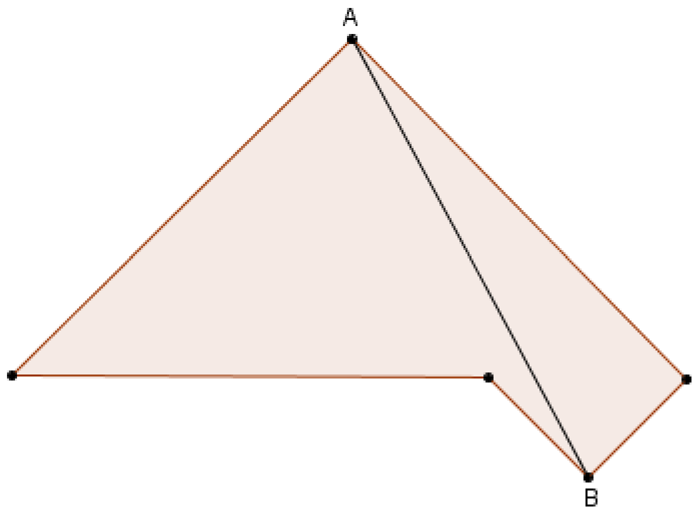
- (P1) si $x \in E$, alors $2x^3 + 2 \in E$;
- (P2) si *x* et *y* sont deux éléments de *E*, leur différence, si elle est positive ou nulle, est aussi un élément de *E*.

1- On suppose ici que $2 \in E$.
  a. 18 est-il un élément de *E* ?
  b. Montrer que 0 est dans *E*.
  c. 2008 est-il dans *E* ?

2- On suppose désormais que *E* est non vide. 2008 appartient-il à *E* ?

Exercice 4 (séries L, ES, STG, ST2S)

Le père Iclès possède un terrain en forme d'hexagone.
Comme l'indique la figure, les deux plus petits côtés ont la même longueur et ses angles intérieurs mesurent tous 90, 45 ou 225 degrés.
Lorsqu'on lui demande la superficie de son terrain, le père Iclès répond : « La diagonale [AB] mesure 152 mètres exactement. Vous en savez assez pour calculer la superficie du terrain. »
Quelle est l'aire du terrain du père Iclès ?



Exercice 5 (séries STI, STL)

Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x-4\sqrt{x-1}+3}+\sqrt{x-6\sqrt{x-1}+8}$.

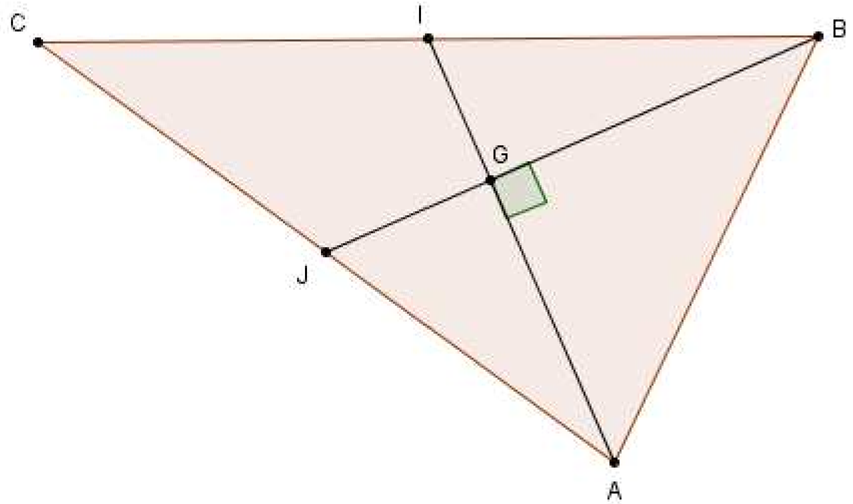
1- A l'aide de votre calculatrice, étudier le comportement de f sur l'intervalle $I_1=[5;10]$.
Quelle conjecture vous suggère cette méthode ?

2- Démontrer cette conjecture (on pourra poser $x=u^2+1$, avec $u\geq 0$).

3- Donner une expression simplifiée de f sur les intervalles $I_2=[1;5]$ et $I_3=[10;+\infty[$.

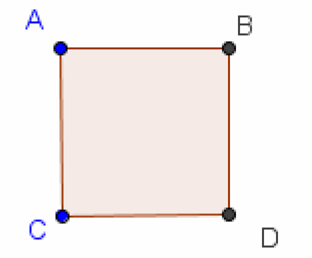
Exercice 6 (séries STI, STL)

Dans la figure suivante, le triangle ABC est tel que les médianes (AI) et (BJ) sont perpendiculaires.
Exprimer $\mathrm{CA}^2+\mathrm{CB}^2$ en fonction de AB^2 .

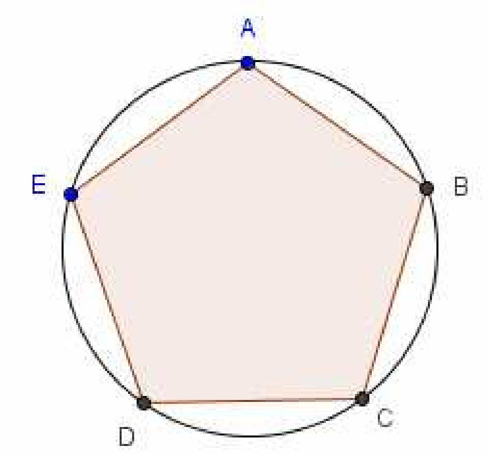


Éléments de solution (Amiens)

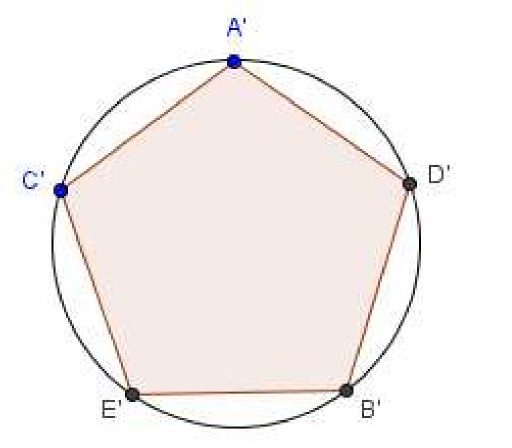
<u>*Exercice 1 (série S)*</u>



1) 4 oiseaux forment un carré avant l'envol.
ABC est un triangle rectangle.
Quelles que soient les positions des oiseaux après l'envol, le triangle A'B'C' sera rectangle.
4 oiseaux forment donc un groupe de « bons géomètres ».

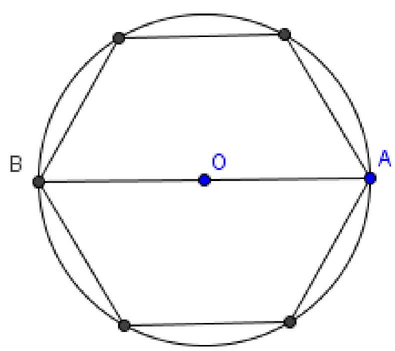


2) On considère le cercle circonscrit au pentagone régulier.
On remarque qu'il est impossible que 3 oiseaux forment un triangle rectangle, car aucun des points A, B, C, D ou E n'est diamétralement opposé à un autre de ces points.
Deux oiseaux parmi 3 sont nécessairement sur deux poteaux voisins.
Les seuls triangles acutangles en position initiale sont ABD, BCE, CDA, DEB, EAC.



Les oiseaux A, B, C, D, E s'envolent …
S'ils se posent dans la position ci-contre, on observe que A'B'D', B'C'E', C'D'A', D'E'B' et E'A'C' sont tous des triangles obtus.

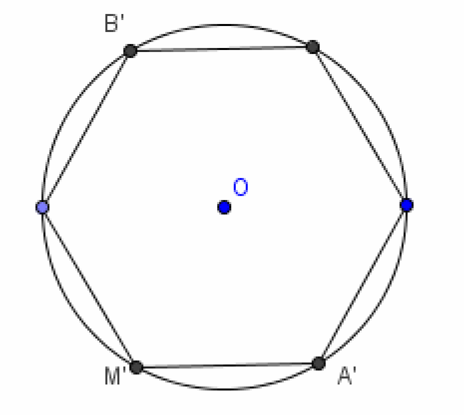
Un groupe de 5 oiseaux ne peut donc pas former un groupe de « bons géomètres ».



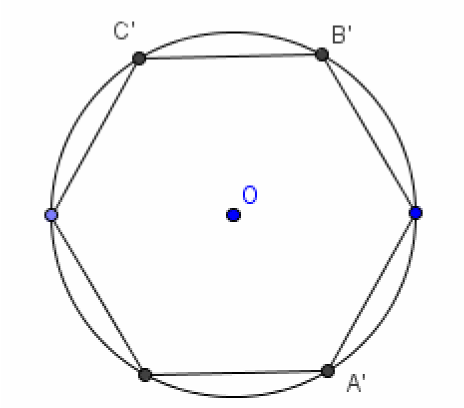
3) Les 6 oiseaux forment un hexagone régulier.
Considérons les oiseaux A et B diamétralement opposés sur le cercle circonscrit à l'hexagone.
Quel que soit le troisième oiseau, noté M, le triangle ABM est rectangle.

Notons A’, B’ et M’ les positions respectives des oiseaux A, B et M après leur envol.

Soit A’ et B’ sont diamétralement opposés.
Alors, quelle que soit la position M’, les triangles ABM et A’B’M’ sont tous deux rectangles respectivement en M et M’.



Soit A’ et B’ ne sont pas diamétralement opposés.
Notons C’ le point diamétralement opposé à A’. L’oiseau qui se repose en C’ vient d’un point C (4 positions conviennent). Le triangle ABC est rectangle en C et le triangle A’B’C’ est rectangle en B’.



Dans les deux cas, on peut toujours trouver 3 oiseaux qui forment, avant et après l'envol, un triangle rectangle. On en déduit donc que 6 oiseaux forment un groupe de « bons géomètres ».

4) n est pair donc chaque sommet du polygone admet un sommet diamétralement opposé sur le cercle circonscrit.
Considérons deux oiseaux A et B diamétralement opposés sur ce cercle.
Quel que soit le troisième oiseau noté M, le triangle ABM est rectangle.
Notons A', B' et M' les positions respectives des oiseaux A, B et M après leur envol.

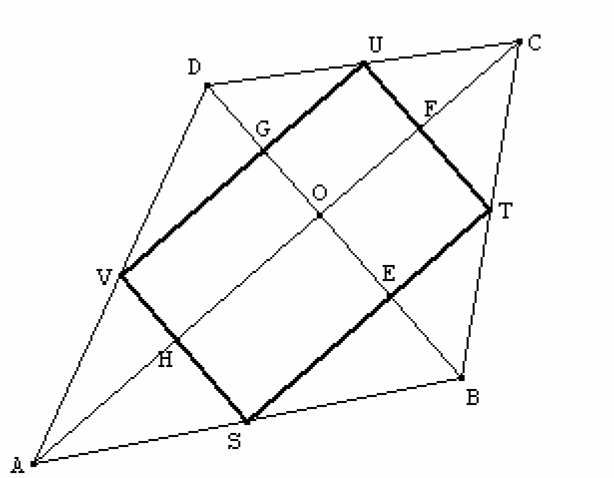
- Soit A' et B' sont diamétralement opposés.
  Alors, quelle que soit la position M', les triangles ABM et A'B'M' sont tous deux rectangles respectivement en M et M'.
- Soit A' et B' ne sont pas diamétralement opposés.
  Notons C' le point diamétralement opposé à A'. L'oiseau qui se repose en C' vient d'un point C ($n-2$ positions conviennent). Le triangle ABC est rectangle en C et le triangle A'B'C' est rectangle en B'.

Conclusion : si n est pair, n oiseaux forment nécessairement un groupe de « bons géomètres ».

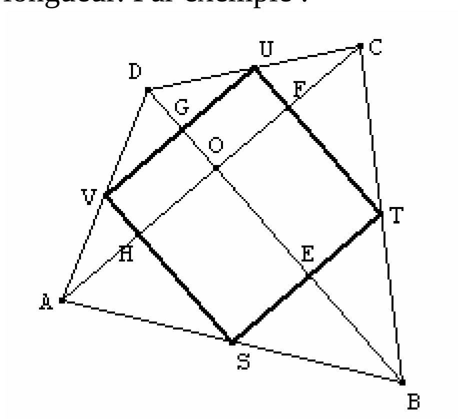
Exercice 2 (série S)

1) On raisonne sur la figure suivante :
S et T se trouvent sur la médiatrice de [OB], donc (ST) est perpendiculaire à (OB).
De même, (UV) est perpendiculaire à (OD).
Et puisque D, O et B sont alignés, on obtient que (ST) est parallèle à (UV).
De même, (TU) est parallèle à (VS).
Le quadrilatère STUV est donc un parallélogramme.

2) Ensuite, grâce à la somme des angles dans le quadrilatère OETF, il vient que les angles $\widehat{EOF}$ et $\widehat{ETF}$ sont supplémentaires (car $\widehat{OET} = \widehat{OFT} = 90°$).
Or $\widehat{EOF}$ et $\widehat{COD}$ sont aussi supplémentaires. Donc $\widehat{ETF} = \widehat{COD}$.
Pour que STUV soit un carré, il faut déjà avoir $\widehat{ETF} = 90°$. Donc $\widehat{COD} = 90°$: le quadrilatère ABCD doit avoir ses diagonales perpendiculaires.
On obtient l'exemple ci-contre.
STUV est un rectangle, mais pas encore un carré !
Les quatre triangles OAB, OBC, OCD et ODA sont rectangles en O. Et les cercles circonscrits sont centrés sur les milieux des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Donc par application des propriétés de la droite des milieux, on obtient $ST = \frac{AC}{2}$ et $TU = \frac{BD}{2}$.
Pour que STUV soit un carré, il faut alors ajouter la contrainte $ST = TU$, ce qui donne $AC = BD$.



Pour que STUV soit un carré, le quadrilatère ABCD doit donc avoir ses diagonales perpendiculaires et de même longueur. Par exemple :

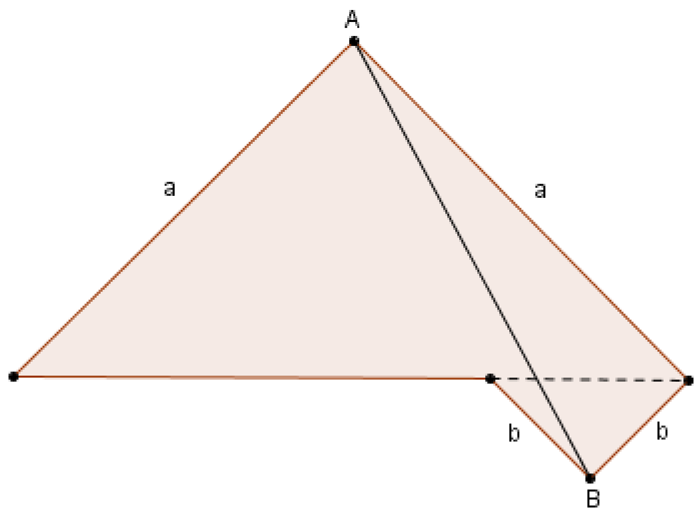


Exercice 3 (séries L, ES, STG, ST2S)

1) a) On a : $18 = 2\times 2^3 + 2$, et $2 \in E$, donc $18 \in E$ d'après (P1).
 b) D'après (P2), $2 - 2 = 0 \in E$.
 c) D'après (P2), itérée 3 fois, on a : $18 - 2 - 2 - 2 = 12 \in E$. De même, 16, 8 et $4 \in E$.
Ensuite, $2\times 12^3 + 2 = 3458 \in E$ d'après (P1).
De même, $2\times 8^3 + 2 = 1026 \in E$ et $2\times 4^3 + 2 = 130 \in E$.
Ensuite, à l'aide de (P2), on a : $3458 - 1026 = 2432 \in E$, $2432 - 130 - 130 - 130 = 2042 \in E$.
Enfin, $2042 - 18 - 16 = 2008 \in E$.
On peut aussi appliquer (P2) 725 fois en retranchant 2 à 3458, ce qui donne 2008.

2) Si E est non vide, alors il contient un élément x.
D'après (P2), $x - x = 0 \in E$.
Ensuite, d'après (P1), $2\times 0^3 + 2 = 2 \in E$. On se ramène donc à la question 1, donc $2008 \in E$ dès que E est non vide.

Exercice 4 (séries L, ES, STG, ST2S)



Découpons le terrain en deux triangles rectangles isocèles de sommets A et B.
Posons a le côté du grand triangle rectangle de sommet A et b le côté du petit triangle rectangle de sommet B.
On a donc : $aire = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2} = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.
Or, d'après le théorème de Pythagore, on a : $a^2 + b^2 = \mathrm{AB}^2 = 152^2 = 23104$.
Par conséquent, le terrain du père Iclès a une superficie de 11552 m^2.
A noter : ce n'est pas un hexagone mais un pentagone …

Exercice 5 (séries STI, STL)

1) D'après la calculatrice, il semblerait que la fonction f soit constante sur $[5;10]$, égale à 1.

2) Posons $x = u^2 + 1$, avec $u \geq 0$ (donc $\sqrt{u^2} = u$).
On a : $f(x) = \sqrt{u^2 + 1 - 4\sqrt{u^2} + 3} + \sqrt{u^2 + 1 - 6\sqrt{u^2} + 8} = \sqrt{u^2 - 4u + 4} + \sqrt{u^2 - 6u + 9}$

$$= \sqrt{(u-2)^2} + \sqrt{(3-u)^2}$$

Ensuite, $x = u^2 + 1$, donc $u = \sqrt{x-1}$.
Puisque $5 \leq x \leq 10$, donc $2 \leq u \leq 3$. Donc $u - 2 \geq 0$ et $3 - u \geq 0$.
Alors $f(x) = (u-2) + (3-u) = 1$.

3) Le changement de variable $x = u^2 + 1$ est valable pour tout x supérieur à 1.
Donc l'expression $f(x) = \sqrt{(u-2)^2} + \sqrt{(3-u)^2}$ est toujours valable.
Alors, si $1 \leq x \leq 5$, on a $0 \leq u \leq 2$. Donc $u - 2 \leq 0$ et $3 - u > 0$.
Ce qui donne : $f(x) = (2-u) + (3-u) = 5 - 2u = 5 - 2\sqrt{x-1}$.
Et si $x \geq 10$, alors $u \geq 3$. Alors $u - 2 > 0$ et $3 - u \leq 0$.
D'où $f(x) = (u-2) + (u-3) = 2u - 5 = 2\sqrt{x-1} - 5$.

Exercice 5 (séries STI, STL)

On a $\mathrm{CA} = 2\mathrm{JA}$ et $\mathrm{CB} = 2\mathrm{IB}$. Et d'après le théorème de la droite des milieux, $\mathrm{IJ} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$.
Alors $\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2 = 4\left(\mathrm{JA}^2 + \mathrm{IB}^2\right) = 4\left(\mathrm{JG}^2 + \mathrm{GA}^2 + \mathrm{IG}^2 + \mathrm{GB}^2\right) = 4\left(\mathrm{JG}^2 + \mathrm{IG}^2 + \mathrm{GA}^2 + \mathrm{GB}^2\right)$

$$= 4\left(\mathrm{IJ}^2 + \mathrm{AB}^2\right) = 4\left(\left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2 + \mathrm{AB}^2\right) = 5\mathrm{AB}^2$$

Académie de Besançon

Sujets

Exercice 1 : promenade parmi les nombres

On part du nombre 5 et on s'autorise à utiliser deux opérateurs :

- L'opérateur (M) « multiplier par 2 » : $n \to 2 \times n$
- L'opérateur (R) « retrancher 3 » : $n \to n - 3$

Un entier naturel N est dit admissible s'il est possible, en partant de 5 et en n'utilisant que les deux opérateurs ci-dessus, de parvenir en un certain nombre d'étapes au nombre N.

Par exemple 25 est admissible par le chemin à cinq étapes :

$$5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14 \xrightarrow{M} 28 \xrightarrow{R} 25 .$$

On considérera par convention que 5 est admissible (chemin avec 0 étape)

1. Quels sont les entiers naturels admissibles en au plus 3 étapes ?

2. Montrer que 11, 13, 16 et 19 sont aussi admissibles.

3. Certains entiers naturels sont non admissibles : lesquels ? Justifier.

4. Montrer que 2009 est admissible en présentant une méthode permettant de trouver le chemin menant de 5 à 2009 (une telle méthode est aussi appelée *algorithme*).

Exercice 2 : tableau des scores d'une poule de championnat

On s'intéresse aux tableaux de score obtenus à l'issue d'une poule d'un championnat sportif.
Dans une telle poule, chaque équipe rencontre chacune des autres ;

- en cas de match nul on attribue 1 point à chaque équipe ;
- sinon : on attribue 3 points à l'équipe gagnante et 0 point à l'équipe perdante.

Par exemple : si une poule comporte 3 équipes nommées A, B et C, on aura 3 matchs : A contre B, A contre C, B contre C. Si A perd ses deux matchs et que B gagne contre C, A totalisera 0 point, B 6 points et C 3 points.
Le tableau de la poule sera dans ce cas le suivant :

1°	B	6
2°	C	3
3°	A	0

Seule nous intéresse ici la troisième colonne ; nous la coderons $\boxed{630}$.
Attention, dans un tel code $\boxed{xyz}$, on aura toujours $x \geq y \geq z$.

Autre exemple : si les trois matchs donnent un résultat nul, le code obtenu sera $\boxed{222}$.

1. Dans cette question, la poule comporte 3 équipes. Combien de codes possibles obtient-on ? (on connaît déjà 630 et 222)

2. Dans toute la suite, la poule comporte 4 équipes.

   a. Si on sait qu'une équipe gagne tous ses matchs, combien de codes possibles peut-on obtenir ?

   b. Si on sait que le premier du groupe a totalisé 4 points, combien de codes possibles peut-on obtenir ?

Les candidats intéressés pourront poursuivre leur recherche hors-olympiades et rechercher tous les codes possibles avec 4 équipes…

Réponse sur le site…http://catice.ac-besancon.fr/Mathematiques/Olympiades-1S

Éléments de solution (Besançon)

Eléments de correction exercice 1 (Promenade parmi les nombres)

1. Les six nombres admissibles en trois 4 étapes sont :
   le nombre 1 : $5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{R} 1$
   le nombre 8 : $5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8$
   le nombre 4 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{R} 4$
   le nombre 14 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14$
   le nombre 17 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{M} 20 \xrightarrow{R} 17$
   le nombre 40 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{M} 20 \xrightarrow{M} 40$
   Le raisonnement précédent laisse apparaître aussi les nombres admissibles en 0 étape (5), une étape (2 ; 10) et deux étapes (4 ; 7 ; 20). Les onze nombres admissibles en moins de 4 étapes sont donc :
   $\boxed{1-2-4-5-7-8-10-14-17-20-40}$

2. Les deux chemins suivants donnent la réponse :
   $5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8 \xrightarrow{M} 16 \xrightarrow{R} 13$
   $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14 \xrightarrow{R} 11 \xrightarrow{M} 22 \xrightarrow{R} 19$

3. Les nombres divisibles par 3 ne sont pas accessibles puisque :
   - 5 n'est pas divisible par 3
   - en multipliant par 2 un nombre non divisible par 3, on obtient un nombre non divisible par 3
   - en retranchant 3 à un nombre non divisible par 3, on obtient un nombre non divisible par 3

Ainsi partant d'un nombre non divisible par 3, on ne trouvera sur son chemin (et donc au final) aucun nombre divisible par 3.

4. Un chemin menant de 5 à 2009 :
   $$5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8 \xrightarrow{M} 16 \xrightarrow{M} 32$$
   $$\xrightarrow{M} 64 \xrightarrow{M} 128 \xrightarrow{M} 256 \xrightarrow{R} 253$$
   $$\xrightarrow{M} 506 \xrightarrow{R} 503 \xrightarrow{M} 1006 \xrightarrow{M} 2012 \xrightarrow{R} 2009$$
   Ce chemin a été trouvé par l'algorithme décrit ci-dessous.

Algorithme de création du chemin :
On crée en fait **le chemin inverse** : en partant de N, on obtient un chemin qui mène à 5 de la manière suivante :

- Si n est divisible par 2, son prédécesseur (père) est $n/2$.
  L'opérateur est le réciproque de (M) : $n \xrightarrow{D} n/2$
- Sinon, son prédécesseur est $n+3$
  L'opérateur est le réciproque de (R) : $n \xrightarrow{A} n+3$

Ainsi, pour 2009 ; on obtient successivement :
2009 – 2012 – 1006 – 503 – 506 – 253 – …… – 16 – 8 – 4 – 2 – 5

Complément 1 : justification de cet algorithme

Il est clair que le chemin inverse est bien constitué des seuls opérateurs autorisés (M) et (R).

On montre que l'ancêtre de degré 2 (le « grand-père ») de *n* est

$\frac{n}{4}$, $\frac{n+3}{2}$ ou $\frac{n}{2}+3$: on montre alors que tant que $n > 6$, il est strictement inférieur à *n*.

Ainsi la suite des grands-pères successifs décroît strictement, elle ne peut être infinie en restant supérieure à 6 et donc on atteint à un instant donné pour la première fois une valeur strictement inférieure à 6.

On montre la valeur précédente ne peut être que 8 ou 10.

Si c'est 8 , on finit le trajet par $8 \xrightarrow{D} 4 \xrightarrow{D} 2 \xrightarrow{A} 5$

Si c'est 10, on finit le trajet par $10 \xrightarrow{D} 5$

Ce qui montre que l'algorithme aboutit à 5 et donc le chemin inverse mène de 5 à N.

Complément 2 : caractère optimal de cet algorithme

L'algorithme précédent est optimal car :

- Lorsque *n* est impair, on n'a pas d'autre choix que lui ajouter 3
- Lorsque $n = 2v$ n est pair, au lieu de le diviser par 2 on pourrait lui ajouter un certain nombre (*q*) de fois le nombre 3 puis seulement ensuite le diviser par 2 (ce qui doit nécessairement arriver pour décroître). Mais ceci impose que *q* soit pair pour pouvoir diviser par 2 ; ainsi $q = 2r$.

  On arrive ainsi au nombre $\frac{2v+3q}{2} = \frac{2v+3r}{2} = v + 3r$.

  Mais dans l'algorithme choisi on peut arriver à ce même nombre par une division par 2 et *r* ajouts de 3. Ce que résume le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} u = 2v & \xrightarrow{D} & v \\ \downarrow \text{2r fois (A)} & & \downarrow \text{r fois (A)} \\ 2v+6r & \xrightarrow{D} & v+3r \end{array}$$

  En notant : c_u : le coût minimal pour aller de *u* à 5,

  c : le coût minimal pour aller de *u* à 5 en commençant par l'opérateur (D)

  k : le coût minimal pour aller de *u* à 5 en commençant par l'opérateur (A)

  on aura : $c \leq 1 + r + c_{v+3r} \leq 1 + 2r + c_{v+3r} = k$

  et donc $c \leq 1 + r + c_{v+3r} \leq 1 + 2r + c_{v+3r} = k$

  et $[c = k] \Leftrightarrow [r = 0]$

On a bien établi l'algorithme minimal.

Complément 3 : nombre minimal d'étapes

En notant pour *N* non divisible par 3 :

- $p = Min\left(\left\{k \in \mathbf{N} /\ 2^k \geq N \text{ et } 3 \text{ divise } 2^k - N\right\}\right)$
- $b = \frac{2^p - N}{3}$
- c le nombre de chiffres dans l'écriture en base 2 de b
- u le nombre de 1 dans l'écriture en base 2 de b

pour $N \in \mathbf{N}^* - \{1,4\}$ avec N non divisible par 3, la longueur du trajet minimal est : • $p+u-4$ si $p-c=2$ • $p+u$ si $p-c \neq 2$

<u>Exercice 2 (Tableau des scores d'une poule de championnat)</u>

<u>Question 1</u>

On obtient facilement 7 codes possibles : 630, 611, 440, 431, 421, 333 et 222

<u>Question 2a</u>

En fait le premier a 9 points. Le reste de la poule revient à effectuer une mini-poule entre les 3 autres. On utilise donc les résultats de la première question et on obtient 7 codes possibles : 9630, 9611, 9440, 9431, 9421, 9333 et 9222.

<u>Question 2b</u>

Notons A le joueur classé premier avec 4 points, B, C et D les trois autres..

Il a nécessairement : une victoire (contre B par exemple)
un nul (avec C par exemple)
une défaite (contre D)

A ce stade, le score est : B : 0 C : 1 D : 3.

Il reste les trois matchs : B-C, B-D et C-D à considérer.

D ne peut gagner aucun match (sinon il aurait au moins 6 points) et a au moins une défaite (car avec 2 nuls il totaliserait 5 points).

- ou il perd contre B et contre C ;
  à ce stade : B : 3 C : 4 D : 3
  impossible car il reste à jouer B-C et B ou C va dépasser 4 points au final
- ou il perd contre B et fait nul contre C
  à ce stade : B : 3 C : 2 D : 4
  le match B-C ne peut plus qu'être nul : on obtient B : 4 C : 3 D : 4
  et le code $\boxed{4\ 4\ 4\ 3}$
- ou il perd contre C et fait nul contre B
  à ce stade : B : 1 C : 4 D : 4
  le match B-C sera alors gagné par B : on obtient B : 4 C : 4 D : 4
  et le code $\boxed{4\ 4\ 4\ 4}$

Les deux seuls codes possibles commençant par 4 sont donc $\boxed{4\ 4\ 4\ 3}$ et $\boxed{4\ 4\ 4\ 4}$

<u>Complément : nombre de codes possibles avec quatre équipes</u>

On peut raisonner comme en 4 b et raisonner sur tous les scores possibles du vainqueur (9,7,6,5,4 ou 3) puis traiter chacun de ces 6 cas comme on l'a afit pour 9 et 4 en question 2a et 2b.

Mieux : on appelle A le vainqueur ; on considère alors deux temps :

- une mini-poule entre B, C et D qui donne les 7 codes possibles de la question 1 (on appelle B le premier, C le second et D le troisième de cette mini-poule) ; il suffit de rajouter un 0 devant chaque code pour avoir les scores de ABCD avant que A ne joue.
  Par exemple 630 de la mini-poule donne 0630, 611 donne 0611
- il reste à faire jouer à A ses 3 matches ; on code le résultat de ces 3 matches : par exemple si A gagne B et C et perd contre D, on obtient 6003
  si A gagne D et fait nul contre B et C, on obtient 5110 ;
  il n'y a plus qu'à ajouter chacun des 7 codes de la mini-poule à chacun des code des matches

de A pour obtenir les codes terminaux ; on élimine ceux pour lequel A ne serait pas vainqueur :

par exemple 0630 + 6003 = 6630 est recevable,

mais 0611 + 5110 = 5721 ne l'est pas (B serait vainqueur)

Cette méthode est beaucoup plus rapide et peut être effectuée dans un tableau.
Je me suis aidé d'Excel pour le corrigé.
On se convaincra vite que les colonnes 4310, 4301, 4130, 4103 et 4013 ne donnent aucun résultat recevable.
De même que toutes celles où A aurait deux points ou moins.

On obtient 40 solutions.
Ce résultat a été vérifié par deux autres méthodes :

- une méthode du type de celle décrite en question 2.b et début de question 2.c
- une programmation des $729 = 3^6$ résultats possibles des 6 matches de poule qui ne donnent au final que ces 40 tableaux possibles

Traitement Excel

	9000	7100	7010	7001	6300	6030	6003	5110	5101	5011	4013	3111
630	9630	7730	7640	7631		6660	6633					
611	9611	7711	7621	7612		6641	6614					
440	9440	7540	7450	7441			6443	5550	5541	5451		
431	9431	7531	7441	7432		6461	6434	5541	5532	5442	4444	
421	9421	7521	7431	7422		6451	6424	5531	5522	5432	4434	
333	9333	7433	7343	7334	6633	6363	6336	5443	5434	5344		
222	9222	7322	7232	7223	6522	6252	6225	5332	5323	5233		3333

	9000	7100	7010	7001	6300	6030	6003	5110	5101	5011	4013	3111
630	1	8	10	11		22						
611	2	9	12			23						
440	3	13					27	29	30			
431	4	14	16	18					31	35	38	
421	5	15	19	20		25	28	32	33	36	39	
333	6	17			24			34				
222	7	21			26			37				40

On imagine que A est le vainqueur, que les trois matches entre B, C et D ont lieu d'abord. Puis interviennent les 3 matches concernant A.
La colonne d'entrée donne les scores BCD de la mini-poule entre B, C et D, B étant le meilleur de cette mini-poule, C le second, D le troisième.
La ligne d'entrée donne les scores ABCD après les trois matches AB AC AD ; seuls sont inscrits ceux pour lesquels A finira premier au total des six matches.
On additionne alors dans une case les nombres respectivement en entrée ligne et entrée colonne.
Les numéros des 40 solutions sont attribués par codes décroissants et correspondent aux résultats trouvés par l'informatique.

Codes-source CaML pour information et vérification

```
let appliquer_score x a b =
   if x = 2 then a:= !a +3 else
     if x = 1 then begin a:= !a +1 ; b:= !b +1 end
       else b:= !b +3 ;;
```

```
let rec max_list l = match l with
  | [ ]     -> failwith " "       | [t]     ->  t      | (t::q) ->  max t (max_list q) ;;
let rec supprime a l = match l with
  | [ ]     ->  [ ]            | (t::q) -> if a = t then q else t :: (supprime a q);;
let rec ordonne l = match l with
  | [ ]  ->  [ ]               | l  ->  let m=max_list l in m :: (ordonne (supprime m l)) ;;
```

```
let tableau k = let a = ref 0 and b = ref 0 and c = ref 0 and d = ref 0 in
  let res = ref k in
  let ab = !res mod 3  in appliquer_score ab a b ; res := !res / 3;
  let ac = !res mod 3  in appliquer_score ac a c ; res := !res / 3;
  let ad = !res mod 3  in  appliquer_score ad a d ; res := !res / 3;
  let bc = !res mod 3  in  appliquer_score bc b c ; res := !res / 3;
  let bd = !res mod 3  in  appliquer_score bd b d ; res := !res / 3;
  let cd = !res  in  appliquer_score cd c d ;
  ordonne [ !a ; !b ; !c ; !d ] ;;
```

```
let rec range l ll = match ll with
   | [ ]     ->  [ l ]
   | (t::q) ->  if l > t
                    then l :: (t::q) else
                    if l = t then (t::q)
                         else t :: (range l q) ;;
```

```
let rec print_list l = match l with
        |    [ ]     -> print_newline ()
        | (t::q)   -> print_int t ; print_char ` `;print_list q ;;
let affiche l =
   let rec aux l compt = match l with         |  [ ]    -> ( )
        | (t::q) ->  if compt < 10 then print_char ` `; print_int compt ;
                 print_string "    " ; print_list t; aux q (compt + 1) in  aux l 1 ;;
let liste_des_solutions () =  let ll = ref [ ] in
  for k = 0 to 728 do ll := range (tableau k) !ll  done ;
  print_newline (); affiche !ll ;;
```

```
liste_des_solutions () ;;
```

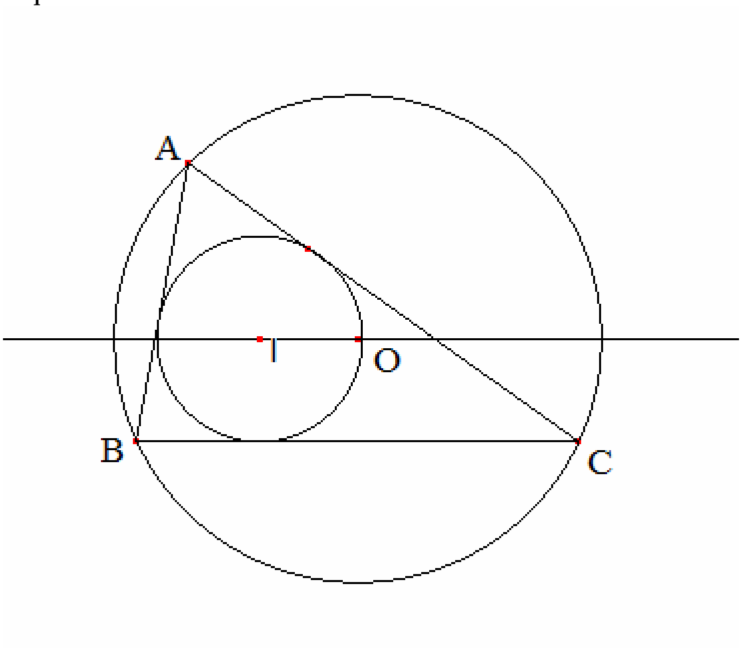
1	9 6 3 0	9	7 7 1 1	17	7 4 3 3	25	6 5 4 1	33	5 5 2 2
2	9 6 1 1	10	7 6 4 0	18	7 4 3 2	26	6 5 2 2	34	5 4 4 3
3	9 4 4 0	11	7 6 3 1	19	7 4 3 1	27	6 4 4 3	35	5 4 4 2
4	9 4 3 1	12	7 6 2 1	20	7 4 2 2	28	6 4 4 2	36	5 4 3 2
5	9 4 2 1	13	7 5 4 0	21	7 3 2 2	29	5 5 5 0	37	5 3 3 2
6	9 3 3 3	14	7 5 3 1	22	6 6 6 0	30	5 5 4 1	38	4 4 4 4
7	9 2 2 2	15	7 5 2 1	23	6 6 4 1	31	5 5 3 2	39	4 4 4 3
8	7 7 3 0	16	7 4 4 1	24	6 6 3 3	32	5 5 3 1	40	3 3 3 3

Académie de Bordeaux

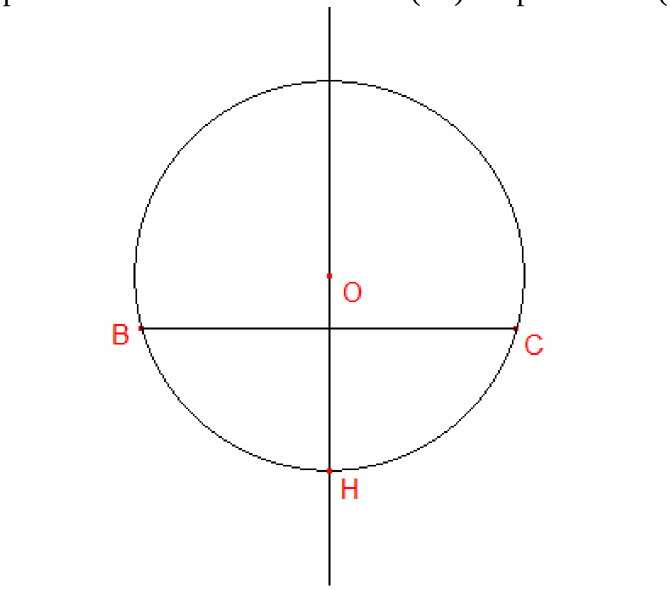
Sujets

Exercice 1(série S)

Triangles olympiadiques



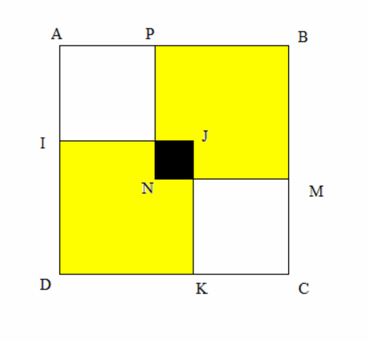
On appelle triangle olympiadique de sommet A, un triangle tel que, si O et I désignent respectivement les centres des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC, alors ces deux points sont distincts et la droite (OI) est parallèle à (BC).

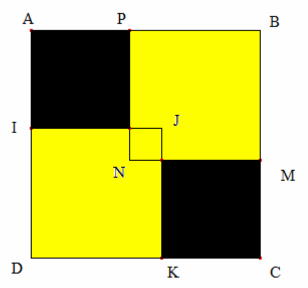


1. (OH) désignant la médiatrice du segment [BC], reproduire la figure ci-contre et construire le point A tel que le triangle ABC soit olympiadique de sommet A.
2. Cette construction est-elle toujours réalisable ? En déduire une condition sur l'angle BAC pour qu'il existe un triangle olympiadique de sommet A.

Exercice 2 (séries autres que S)

Des carrés dans un carré.
ABCD est un carré de côté 1, x est un nombre réel compris entre 0 et 1.
IJKD et PBMN sont deux carrés de côté x.
On désigne par $S_1(x)$ l'aire de la partie commune à ces deux carrés si elle existe, nulle si elle n'existe pas et par S_2 (x) l'aire de la partie extérieure à ces deux carrés et contenue dans ABCD.





Visualisation de $S_1(x)$

Visualisation de $S_2(x)$

1. Retrouver parmi les huit courbes suivantes celle qui représente S_1 et celle qui représente S_2.

On s'appliquera à justifier ses choix.

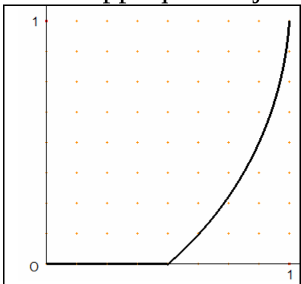


Schéma 1

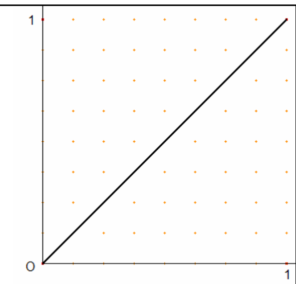


Schéma 2

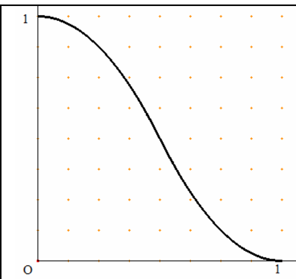


Schéma 3

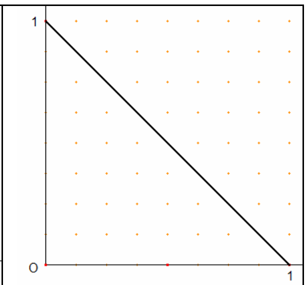


Schéma 4

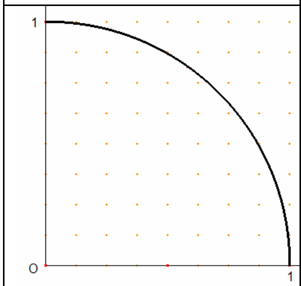


Schéma 5

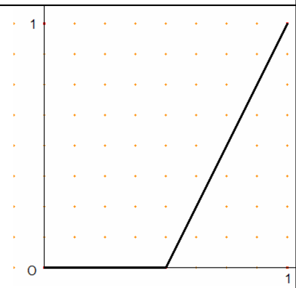


Schéma 6

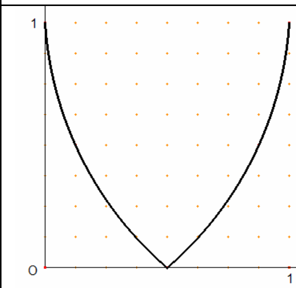


Schéma 7

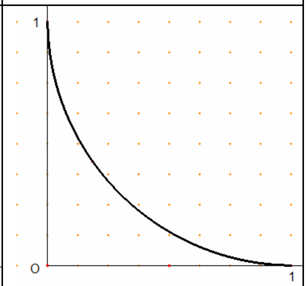


Schéma 8

2. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x)=1/4$?
3. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x)=S_2(x)$?
4. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x)+S_2(x)$ minimum ? Quel est ce minimum ?

Exercice 3 (pour tous)

Carrés magiques multiplicatifs

a, b, c, d, e, f, g, h et i étant des entiers naturels n'ayant aucun diviseur autre que 1 en commun, on dit que le tableau $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un carré magique multiplicatif (CMM) de produit P si et seulement si le produit des entiers de chacune des lignes, le produit des entiers de chacune des colonnes et celui des entiers de chacune des deux diagonales est égal à P.

1. Compléter les deux CMM suivants :

$\begin{pmatrix} 2 & 9 & . \\ . & . & 1 \\ 3 & 4 & . \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & . \\ 2^8 & . & . \\ . & 2^6 & . \end{pmatrix}$.

2. Montrer que si $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un CMM de produit P alors e^3=P. Ce résultat, même non démontré peut être utilisé par la suite.

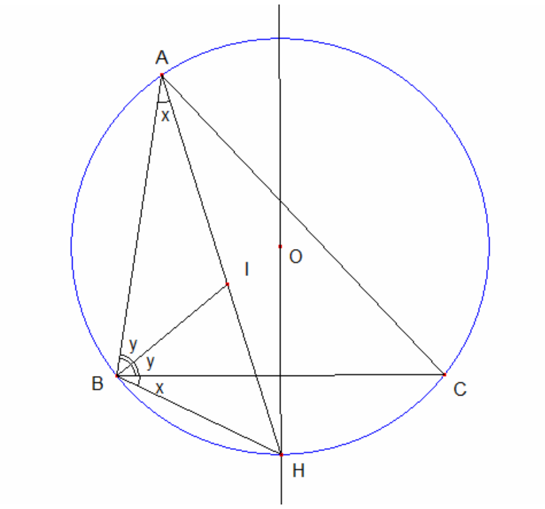
3. Construire un CMM utilisant tous les diviseurs de 100.

4. Montrer que si *e* est un nombre premier, alors il n'y a que quatre carrés magiques possibles.

5 Construire un carré magique de produit 27000 dont tous les termes sont différents.

Éléments de solution (Bordeaux)

<u>*Exercice 1 (série S)*</u>



1. H étant le milieu de l'arc BC, (AH) est la bissectrice de l'angle BAC et donc I appartient à (AH).
   D'autre part, BIH=180-BIA=x+y=IBH.
   Le triangle BIH est donc isocèle en H et HB=HI.
   Si le triangle est olympiadique, I est un point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par O et du cercle de centre H passant par B.
   On construit donc le point A intersection du cercle circonscrit à ABC avec (HI)
2. La construction n'est donc possible que si HB>HO, donc si HOB>60° donc si BAC>60°

<u>*Exercice 2 (séries autres que S)*</u>

1. $S_1(x)=0$ si $x<0.5$ et $S_1(x)=(2x-1)^2$ sinon donc schéma1 ; $S_2(x)=1-2x^2$ si $x<0.5$ et $S_2(x)=2(x-1)^2$ sinon donc schéma 3.
2. $S_1(x)=1/4$ pour $2x-1=1/2$, donc pour $x=3/4$
3. $S_1(x)=S_2(x)$ pour $(2x-1)^2=2(x-1)^2$ donc pour $2x^2=1$ donc pour x=rac(2)/2
4. $S_1(x)+S_2(x)= 2(x-1)^2$ si $x<0.5$ et $S_1(x)+S_2(x)=(2x-1)^2+2(x-1)^2=6x^2-8x+3$ sinon.

Le minimum est pour x=2/3, il est égal à 1/3.

<u>*Exercice 3 (pour tous)*</u>

1. $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 12 \\ 36 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 18 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & 2^7 \\ 2^8 & 2^4 & 1 \\ 2 & 2^6 & 2^5 \end{pmatrix}$

2. $(aei)(gec)(beh)(def)=P^4=abcdefghe^3=P^3e^3$. Donc $e^3=P$.

3. D(100)={1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100}. Leur produit est 10^9, donc $P=10^3$, donc 10 est au milieu.

$\begin{pmatrix} 2 & 25 & 20 \\ 100 & 10 & 1 \\ 5 & 4 & 50 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & e^2 & e \\ e^2 & e & 1 \\ e & 1 & e^2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} e & e^2 & 1 \\ 1 & e & e^2 \\ e^2 & 1 & e \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} e & 1 & e^2 \\ e^2 & e & 1 \\ 1 & e^2 & e \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} e^2 & 1 & e \\ 1 & e & e^2 \\ e & e^2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 25 \\ 25 & 5 & 1 \\ 1 & 25 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 90 & 1 & 300 \\ 100 & 30 & 9 \\ 3 & 900 & 10 \end{pmatrix}$

Académie de Clermont-Ferrand

Sujets

Exercice 1

Quand la somme est égale au produit…

Tous les nombres considérés sont des **nombres entiers naturels non nuls.**

A. 1) Peut-on trouver deux nombres entiers naturels dont la somme et le produit sont égaux à 4 ?
   2) Peut-on trouver deux nombres entiers naturels dont la somme et le produit sont égaux à 2009 ?
   3) La somme de deux entiers naturels x et y, avec $0 < x \leq y$, est égale à leur produit.
   Combien y a-t-il de solutions distinctes (x, y) ?

B. La somme de trois entiers naturels x, y et z, avec $0 < x \leq y \leq z$, est égale à leur produit.
   1) Montrer que $xy \leq 3$.
   2) Combien y a-t-il de solutions distinctes (x, y, z) ?

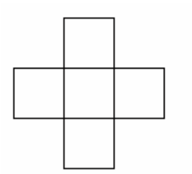
C. La somme de cinq entiers naturels x, y, z, u et v, avec $0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v$, est égale à leur produit.
   Combien y a-t-il de solutions possibles (x, y, z, u, v) ?

(inspiré d'un exercice du concours australien de mathématiques)

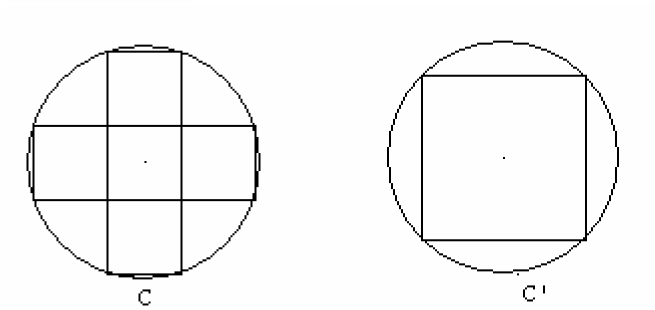
Exercice 2

La croix, le carré, l'hexagone et l'hexamier.[1]

1° Croix et carré :



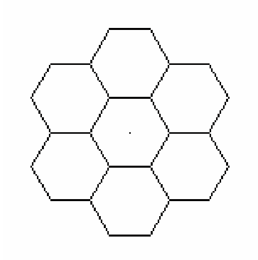
Une croix est dans cet exercice une figure géométrique formée de cinq carrés de même dimension et disposés comme l'indique la figure ci-contre.



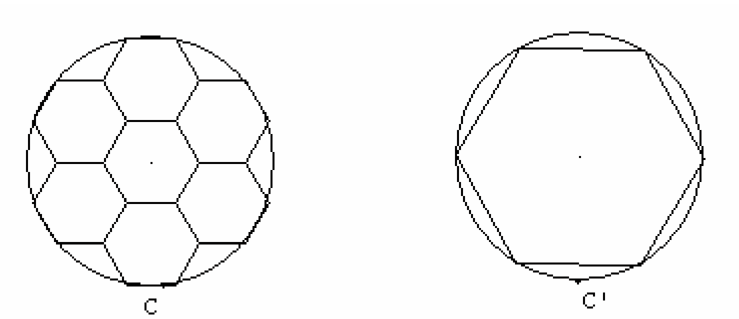
Soit deux cercles C et C' de même rayon. Dans le premier on inscrit une croix, dans le second un carré. **Comparer les aires du carré et de la croix**.

[1] Source: Activités mathématiques au collège, Ed IREM de Paris-Nord, Edition de 2001.

2° Hexagone et hexamier :



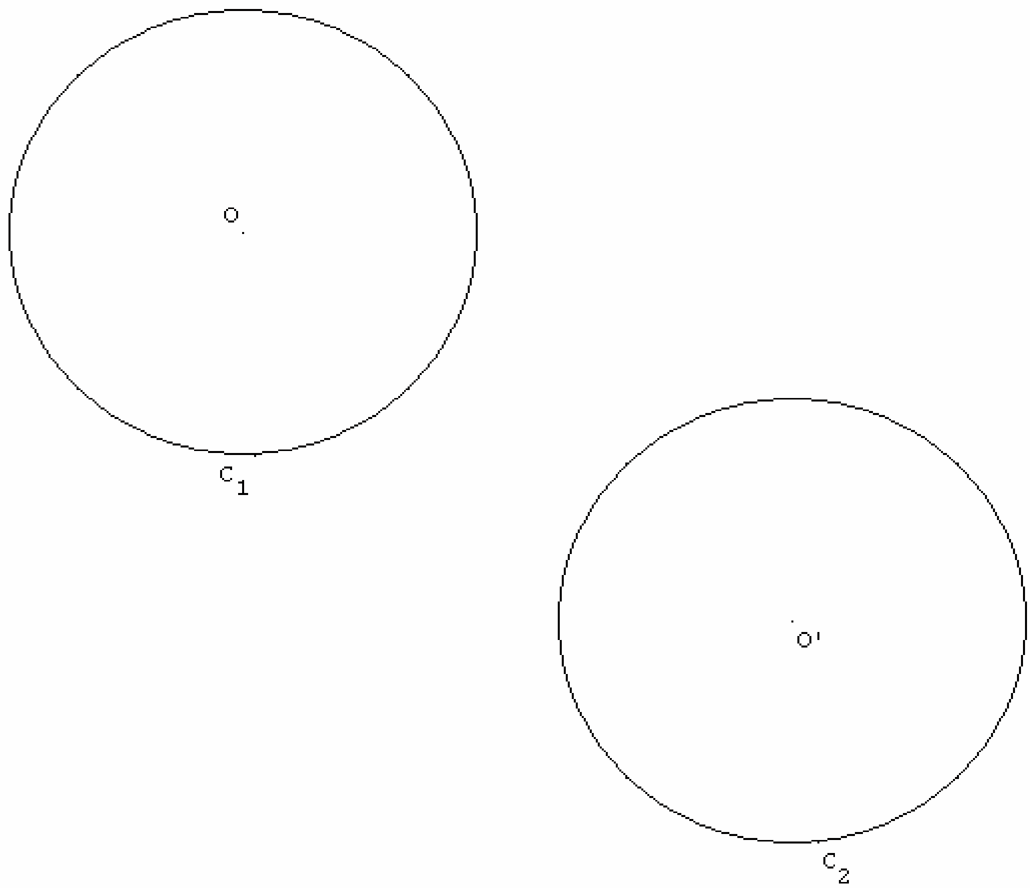
Un hexamier est une figure géométrique formée de sept hexagones réguliers de même dimension et disposés comme l'indique la figure ci contre.



Soit deux cercles C et C' de même rayon. Dans le premier on inscrit un hexamier, dans le second un hexagone régulier. **Comparer les aires de l'hexamier et de l'hexagone.**

3° Sur une feuille annexe, vous avez deux cercles C_1 et C_2.
A l'aide seulement d'une règle non graduée et d'un compas inscrire une croix dans C_1 et un hexamier dans C_2. Vous donnerez en quelques lignes, les éléments de constructions que vous utilisez : on suppose connu le tracé d'une perpendiculaire et d'une parallèle à une droite ainsi que la construction d'un carré.

Feuille annexe:


O
C_1
O'
C_2

Éléments de solution (Clermont-Ferrand)

Exercice 1

A. 1) Trivialement 2 et 2.

2) $xy = 2009$ implique que x et y sont des entiers impairs. Mais alors $x + y$ est un entier pair et par conséquent $x + y \neq 2009$. On ne peut pas trouver deux entiers naturels dont la somme et le produit soient égaux à 2009.

3) Soit x et y deux entiers naturels non nuls tels que $0 < x \leq y$.

Si $x \leq y$ alors $x + y \leq 2y$. Et comme $x + y = xy$ alors $xy \leq 2y$ alors $\boxed{x \leq 2}$ puisque y n'est pas nul.

Soit $x = 1$. Alors $x + y = xy$ s'écrit $1 + y = y$. On ne peut pas trouver y.

Soit $x = 2$. Alors $x + y = xy$ s'écrit $2 + y = 2y$ donc $y = 2$.

Le seul couple possible est (2,2).

B. 1) Soit x, y et z trois entiers naturels non nuls tels que $0 < x \leq y \leq z$.

Si $x \leq y \leq z$ alors $x + y + z \leq 3z$. Et comme $x + y + z = xyz$ alors $xyz \leq 3z$ alors $\boxed{xy \leq 3}$ car $z \neq 0$.

2) $xy \leq 3$ donne :

Soit $x = y = 1$. Alors $x + y + z = xyz$ s'écrit $2 + z = z$. On ne peut pas trouver z.

Soit $x = 1$ et $y = 2$. Alors $x + y + z = xyz$ s'écrit $3 + z = 2z$ donc $z = 3$.

Soit $x = 1$ et $y = 3$. Alors $x + y + z = xyz$ s'écrit $4 + z = 3z$. On ne peut pas trouver $z \geq y$.

Le seul triplet possible est (1,2,3).

C. Soit x, y, z, u et v cinq entiers naturels non nuls tels que $0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v$.

Un raisonnement analogue à celui utilisé à la question B conduit à :

Si $x \leq y \leq z \leq u \leq v$ alors $x + y + z + u + v \leq 5v$.

Et comme $x + y + z + u + v = xyzuv$ alors $xyzuv \leq 5v$ alors $\boxed{xyzu \leq 5}$ puisque v n'est pas nul.

On en déduit déjà que $\boxed{x = y = 1}$. Examinons les différents cas possibles.

Soit $z = 1$ et $u = 1$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $4 + v = v$. On ne peut pas trouver v.

Soit $z = 1$ et $u = 2$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $5 + v = 2v$ et $v = 5$.

Soit $z = 1$ et $u = 3$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $6 + v = 3v$ et $v = 3$.

Soit $z = 1$ et $u = 4$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $7 + v = 4v$. On ne peut pas trouver v.

Soit $z = 1$ et $u = 5$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $8 + v = 5v$. On ne peut pas trouver v.

Soit $z = 2$ et $u = 2$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $6 + v = 4v$ et $v = 2$.

Les seuls quintuplets possibles sont (1,1,1,2,5), (1,1,1,3,3) et (1,1,2,2,2).

Exercice 2

1° Solution algébrique :

Soit r le rayon commun des deux cercles

L'aire du carré inscrit dans le cercle C est $A_1 = 2r^2$.

Soit a la longueur commune des côtés des carrés formant une croix.

A l'aide Pythagore, on établit la relation suivante entre a et r :

$$\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{4} = r^2$$

D'où $a^2 = \frac{2}{5} r^2$

Et comme A_2 l'aire de la croix vaut $5a^2$, nous obtenons : $A_2 = A_1 = 2r^2$.

2°

Soit r le rayon commun des deux cercles

L'aire de l'hexagone régulier inscrit dans C est $A_3 = 3.\frac{\sqrt{3}}{2} r^2$

Soit b la longueur commune des côtés des hexagones formant l'hexamier.

On obtient toujours à l'aide Pythagore, la relation suivante entre b et r :

$$\frac{25}{4} b^2 + \frac{3}{4} b^2 = r^2$$

D'où $b^2 = \frac{1}{7} r^2$

L'aire d'un hexagone intervenant dans la construction d'un hexamier est donc :

$$A = 3.\frac{\sqrt{3}}{2} b^2 = 3\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{7} r^2$$

et l'aire A_4 de l'hexamier vaut donc : $A_4 = 7.A = 7x3\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{7} r^2 = 3\frac{\sqrt{3}}{2} r^2 = A_3$

3° Constructions :

Le principe consiste à s'affranchir de la contrainte « inscription dans un cercle donné », de construire, ce que l'on sait faire, une croix et un hexamier avec pour centre de la construction le centre du cercle correspondant. Ceci fait, on se ramène à la figure demandée à l'aide d'une homothétie, ce que l'on sait faire avec les instruments autorisés.

Académie de Corse

Sujets

Exercice 1

Soit ABC un triangle dont une mesure de l'angle A en degrés est un réel α de]0, 90[. On note a b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA , AB en cm

1. Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}bc.\sin\alpha$ en cm^2

2. **a.** Par un point I du segment [AB] on mène une parallèle à la droite (BC) qui recoupe [AC] en J. Déterminer un point de I de [AB] tel que le triangle AIJ et le quadrilatère BCJI aient la même aire.

b. Dans un tel cas, est-il possible que AIJ et BCJI aient aussi le même périmètre ?

3. Un triangle ABC est tel que AB = 8 cm, AC = 9 cm et BC = 7 cm.
Déterminer s'ils existent, tous les points I de [AB] et J de [AC] tels que le triangle AIJ et le quadrilatère BCJI aient même aire et même périmètre (*Dans cette question la droite (IJ) n'est plus nécessairement parallèle à (BC)*)

Exercice 2

Dans cet exercice on admet que tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, se factorise de façon unique en produit de facteurs premiers.
On appelle « *L-liste* » un ensemble fini de nombres distincts, entiers naturels non nuls, telles que

- Il y a au moins deux nombres entiers distincts dans la *L-liste*
- l'un au moins des entiers de la *L-liste* est pair
- Quels que soient les entiers pairs m et n de cette *L-liste*, le nombre $(m+n)/2$ est aussi un nombre entier de cette *L-liste*.

1.

a) Les ensembles $\{1,2\},\{2,5,6\},\{2,5,7\}$, sont-ils des *L-listes* ?

b) Déterminer toutes les *L-listes* ayant exactement deux éléments.

c) Donner un exemple de *L-liste* ayant 5 éléments et un exemple de *L-liste* ayant 2009 éléments.

2. Démontrer que dans toute *L-liste* il existe au moins un nombre entier naturel impair.

3. Démontrer que si deux nombres pairs distincts d'une *L-liste* ont le même nombre k de facteurs 2 dans leur décomposition en facteurs premiers, alors il existe un entier de cette *L-liste* qui a dans sa décomposition en facteurs premiers un nombre de facteurs 2 strictement supérieur à k.

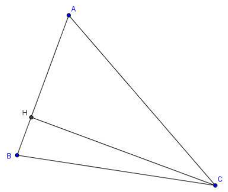
4. On considère un ensemble fini de fractions positives et irréductibles dont les dénominateurs forment une *L-liste*. Leur somme peut-elle être un nombre entier naturel ?

5. La somme suivante est-elle un entier naturel ?

$$\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+....+\frac{2008}{2007}+\frac{2009}{2008}$$

Éléments de solution (Corse)

Exercice 1



1. L’aire du triangle ABC est $\dfrac{AB \times CH}{2} = \dfrac{AB \times AC\ \sin\alpha}{2} = \dfrac{1}{2} bc.\sin\alpha$

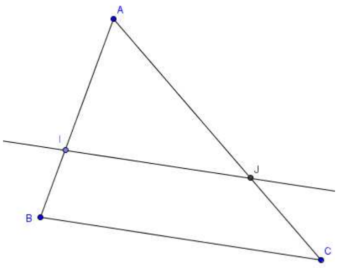
2. a) D’après le théorème de Thalès $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AC} = \dfrac{IJ}{BC}$. Posons $k = \dfrac{AI}{AB}$, alors $\dfrac{AI}{c} = \dfrac{AJ}{b} = \dfrac{IJ}{c} = k$.

   Ainsi $AI = kc, AJ = kb, IJ = ka$.

   L’aire du triangle AIJ est donc égale à $\dfrac{1}{2} kc.kb.\sin\alpha = \dfrac{1}{2} k^2 bc \sin\alpha.$

   L’aire de ABC étant $\dfrac{1}{2} bc.\sin\alpha$, l’aire de AIJ est la moitié de celle de ABC si et seulement si $k^2 = \dfrac{1}{2}$ soit $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi $AI = \dfrac{1}{\sqrt{2}} AB$, donc il existe un unique point I du segment [AB] tel que l’aire de AIJ soit la moitié de celle de ABC.

   Il est possible de remarquer qu’un des triangles étant un agrandissement de l’autre, les aires seront dans le rapport 2 si et seulement si les longueurs des côtés sont dans le rapport $\sqrt{2}$.

   b) AIJ et BCJI ont le même périmètre si et seulement si

   $$ka + kb + kc = ka + b - kb + c - kc + a$$

   Soit $2k(b + c) = a + b + c$ soit $(\sqrt{2} - 1)(b + c) = a$

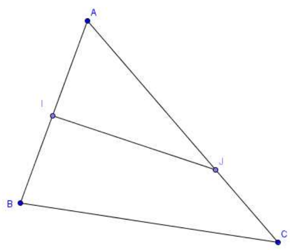
   Ainsi les périmètres seront égaux si et seulement si cette relation est vérifiée.

   Posons $AI = x$ et $AJ = y$.

   L’égalité des aires impose $\dfrac{1}{2} xy.\sin\alpha = \dfrac{1}{4} bc.\sin\alpha$ soit $xy = \dfrac{1}{2} bc = \dfrac{1}{2} 8 \times 9 = 36$

   L’égalité des périmètres impose $x + y = c - x + a + b - y$ soit $2(x + y) = a + b + c$

   c'est-à-dire $2(x + y) = 24$.

   AIJ et BCJI ont le même périmètre si et seulement si x et y sont solutions du système
   $$\begin{cases} 2(x+y) = 24 \\ xy = 36 \\ 0 < x < 8 \\ 0 < y < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ x(12 - x) = 36 \\ 0 < x < 8 \\ 0 < y < 9 \end{cases}$$

   x est donc solution du trinôme

   $x(12 - x) = 36 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

On a ainsi $\begin{cases} x = 6 \\ y = 12 - x = 6 \\ 0 < x < 8 \\ 0 < y < 9 \end{cases}$

Il existe donc des points uniques, I appartenant à [AB] et J appartenant à [AC], tels que le triangle AIJ et le quadrilatère BCJI aient même aire et même périmètre.

Exercice 2 :

1.a. $\{1,2\}$ est une *L-liste* car le seul entier pair est 2, et (2+2)/2=2 appartient bien à $\{1,2\}$.
$\{2,5,6\}$ n'est pas une *L-liste*, car (2+6)/2=4, n'appartient pas à $\{2,5,6\}$.
$\{2,5,7\}$ est une *L-liste*, car le seul entier pair est 2, et (2+2)/2=2 appartient bien à $\{2,5,7\}$.

1.b.
Soit $\{a, b\}$ une *L-liste* de deux éléments, ou par exemple *a* est pair. Si *b* est pair différent de *a*, la liste doit contenir $\frac{a+b}{2}$, qui n'est ni a ni *b*, donc *b* est nécessairement impair.
Réciproquement une paire contenant un entier naturel pair non nul et un entier naturel impair est une *L-liste*.

1.c.
$\{2,3,4,5,7\}$ et $\{1,2,3,\ldots,2008,2009\}$ sont des *L-listes*.

2. Considérons L une *L-liste* ; si elle ne contient qu' un seul nombre pair, elle contient au moins un autre nombre impair. Si elle contient au moins deux nombres pairs, notons *a* et *a'* les deux plus petits nombres pairs de la *L-liste*. Le nombre $\frac{a+a'}{2}$ est entier et appartient à L ; or il est compris entre *a* et *a'* . Il ne peut donc pas être pair puisque *a* et *a*' sont les deux plus petits entiers pairs de L. Donc $\frac{a+a'}{2}$ est impair.

3. Soit L une *L-liste* . Soit *k* un entier donné, et l'ensemble L_k des éléments de L de la forme $u = 2^k \times u'$, ou *u'* est impair . On suppose qu'il existe au moins deux éléments distincts dans L_k, dont on ordonne les éléments puis on considère alors des éléments consécutifs de L_k, $a = 2^k \times a'$ et $b = 2^k \times b'$ où *a'* et *b'* sont impairs, avec *a'*< *b'*.

Les éléments *a* et *b* de L étant pairs, le nombre $\frac{a+b}{2}$ est un élément de L. De plus,

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2^k a' + 2^k b'}{2} = \frac{2^k (a'+b')}{2} = 2^{k-1}(a'+b')$$

Or *a'*+ *b'* est la somme de deux nombres impairs, donc c'est un entier pair : il existe un entier naturel *m* tel que *a'*+*b'*=2*m* d'où $\frac{a+b}{2} = 2^k m$

$m = \frac{a'+b'}{2}$ est entre *a'* et *b'* ; $2^k m$ n'est donc pas dans L_k et donc *m* est pair, et donc il existe un entier naturel m' tel que $\frac{a+b}{2} = 2^{k+1} m'$. Le nombre $\frac{a+b}{2}$ est un élément de L, donc il existe donc un élément de L qui a dans sa décomposition en facteurs premiers un exposant strictement supérieur à *k*.

4 . Considérons la *L-liste* L des dénominateurs d'un ensemble fini de fractions irréductibles. Soit *a* un entier naturel de la liste pour lequel l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers est maximal. D'après la question précédente *a* est unique.. La somme des fractions s'écrit donc

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+....+\frac{b_n}{a_n}+\frac{b}{a}=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+....+\frac{b_n}{a_n}+\frac{b}{2^k a'}$$

où l'exposant k de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de a est supérieur ou égal à 1.
La fraction de dénominateur a étant irréductible son numérateur est impair .
La mise au même dénominateur impose de multiplier chaque entier b_i par un nombre pair et b par un nombre impair.
Ainsi $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+....+\frac{b_n}{a_n}+\frac{b}{2^k a'}=\frac{2B}{2^k m}+\frac{C}{2^k m}=\frac{2B+C}{2^k m}$ ou m et C sont impairs. Cette fraction irréductible a un numérateur impair et un dénominateur pair, et le quotient ne peut donc être un entier.

5.

$\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+....+\frac{2008}{2007}+\frac{2009}{2008}$ est une somme de fractions positives irréductibles , les dénominateurs formant une L-liste. Cette somme n'est donc pas un entier.

Académie de Dijon

Sujets

<u>*Exercice 1 :*</u> les nombres « *sigma* »

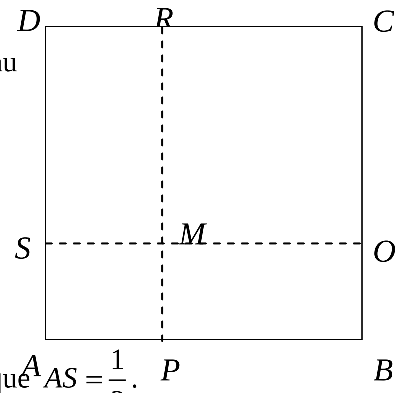
Prérequis – Dans cet exercice, on suppose connus les deux résultats suivants :

- *il existe une infinité de nombres premiers ;*
- *si un entier N supérieur ou égal à 2 admet la décomposition en facteurs premiers :* $N = p^a \times q^b \times \ldots$ *, où p, q, … sont des nombres premiers distincts, alors le nombre de diviseurs positifs de N est égal à :* $(a+1)\times(b+1)\times\ldots$*. Par exemple* $12 = 2^2 \times 3^1$ *admet* $3\times 2 = 6$ *diviseurs :* 1, 2, 3, 4 , 6 *et* 12.

On dit qu'un nombre entier naturel non nul est « *sigma* » lorsqu'il est divisible par le nombre de ses diviseurs positifs. Par exemple, 12 est « *sigma* » car il possède 6 diviseurs positifs et 6 divise 12. En revanche, 22 n'est pas « *sigma* » car il possède 4 diviseurs positifs : 1, 2, 11, 22, et 4 ne divise pas 22.

1) 69 est-il « *sigma* »? 84 est-il « *sigma* »?
2) Un nombre premier peut-il être « *sigma* » ?
3) Démontrer que si *N* est un entier « *sigma* » impair supérieur à 1, alors l'entier $2N$ est « *sigma* ».
4) Démontrer que si *N* est un entier « *sigma* » impair, alors *N* est nécessairement un carré parfait. La réciproque est-elle vraie ?
5) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres « *sigma* ».
6)

<u>*Exercice 2 :*</u> « concourantes ou parallèles »



Sur la figure ci-contre, *ABCD* est un carré de côté 1, *M* est un point intérieur au carré, les quadrilatères *APMS* et *MQCR* sont des rectangles.

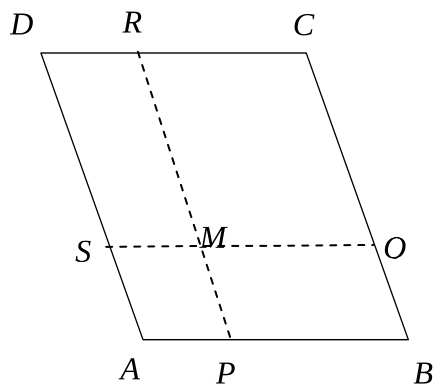
1) Premier cas particulier

Dans cette question, on suppose que $AP = \frac{3}{4}$ et que $AS = \frac{1}{4}$.

Démontrer que les droites (*AC*), (*PQ*) et (*RS*) sont parallèles.

2) Deuxième cas particulier. Dans cette question, on suppose que $AP = \frac{1}{4}$ et que $AS = \frac{1}{3}$.

Déterminer une équation des droites (*PQ*) et (*RS*) dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ et en déduire que les droites (*AC*), (*PQ*) et (*RS*) sont concourantes.



3) Généralisation

Cette fois *ABCD* est un parallélogramme, *M* est un point intérieur à ce parallélogramme et les quadrilatères *APMS* et *MQCR* sont des parallélogrammes.

Démontrer que les droites (*AC*), (*PQ*) et (*RS*) sont en général concourantes sauf pour certaines positions particulières de *M* que l'on précisera.

Éléments de solution (Dijon)

<u>*Exercice 1 :*</u>

1) 69 admet 4 diviseurs positifs : 1, 3, 23, 69, et 4 ne divise pas 69. Donc 69 n'est pas « *sigma* ».
2) Le seul nombre premier « *sigma* » est 2 car si p est un nombre premier impair, p admet exactement 2 diviseurs positifs, et 2 ne divise pas p.Si N est supérieur à 1, impair et « *sigma* », alors N admet une décomposition en facteurs premiers : $N = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$ avec $2 < p_1 < ...p_r$, où les α_i sont des entiers non nuls tels que $(\alpha_1+1)...(\alpha_r+1)$ divise N. La décomposition de $2N$ est alors : $2N = 2\times p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$, ce qui montre que le nombre de diviseurs de $2N$ est le double de celui de N. Donc ce nombre divise $2N$, ce qui prouve que $2N$ est « *sigma* ».
3) Si $N=1$, le cas est trivial : 1 est « *sigma* » et c'est un carré. Si $N \geq 2$, N admet une décomposition en facteurs premiers : $N = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$ avec $2 < p_1 < ...p_r$, où les α_i sont des entiers non nuls tels que $(\alpha_1+1)...(\alpha_r+1)$ divise N. cela impose que tous les facteurs α_i+1 soient impairs, donc que tous les α_i soient pairs : il existe β_i tel que $\alpha_i = 2\beta_i$. Ainsi $N = (p_1^{\beta_1}...p_r^{\beta_r})^2$.
   La réciproque est fausse : 25 est un carré parfait impair qui n'est pas « *sigma* », car 25 admet 3 diviseurs.
4) Si p est un nombre premier impair, p^{p-1} est impair et admet p diviseurs ; comme p divise p^{p-1}, ce nombre est « *sigma* ». Comme il existe une infinité de nombres premiers, il en résulte qu'il existe une infinité de nombres « *sigma* ».

<u>*Exercice 2 :*</u>

1) Dans ce cas , les quadrilatères *PBQM* et *MRDS* sont des carrés, les angles $\widehat{BPQ}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MSR}$ mesurent 45° et les droites (*AC*), (*PQ*) et (*RS*) sont parallèles.
2) Les droites (*AC*), (*PQ*) et (*RS*) ont pour équations respectives $y = x, 4x-9y=1, -8x+3y=1$, elles sont concourantes au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$.
3) Appelons (a,b), les coordonnées de M dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. Les équations des droites (*PQ*) et (*RS*) sont respectivement $bx+(a-1)y = ab$ et $(b-1)x+ay=ab$.

   Le système : $\begin{cases} bx+(a-1)y=ab \\ (b-1)x+ay=ab \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} bx+(a-1)y=ab \\ (a+b-1)x=ab \end{cases}$

   Si $a+b-1=0$ c'est-à-dire si le point M appartient à la droite (*BD*), alors les droites (*AC*), (*PQ*) et (*RS*) ont pour équations respectives $y=x, y=x-a, y=x+b$ et sont parallèles.

   Si $a+b-1\neq 0$ alors elles sont concourantes au point de coordonnées $\left(\frac{ab}{a+b-1},\frac{ab}{a+b-1}\right)$.

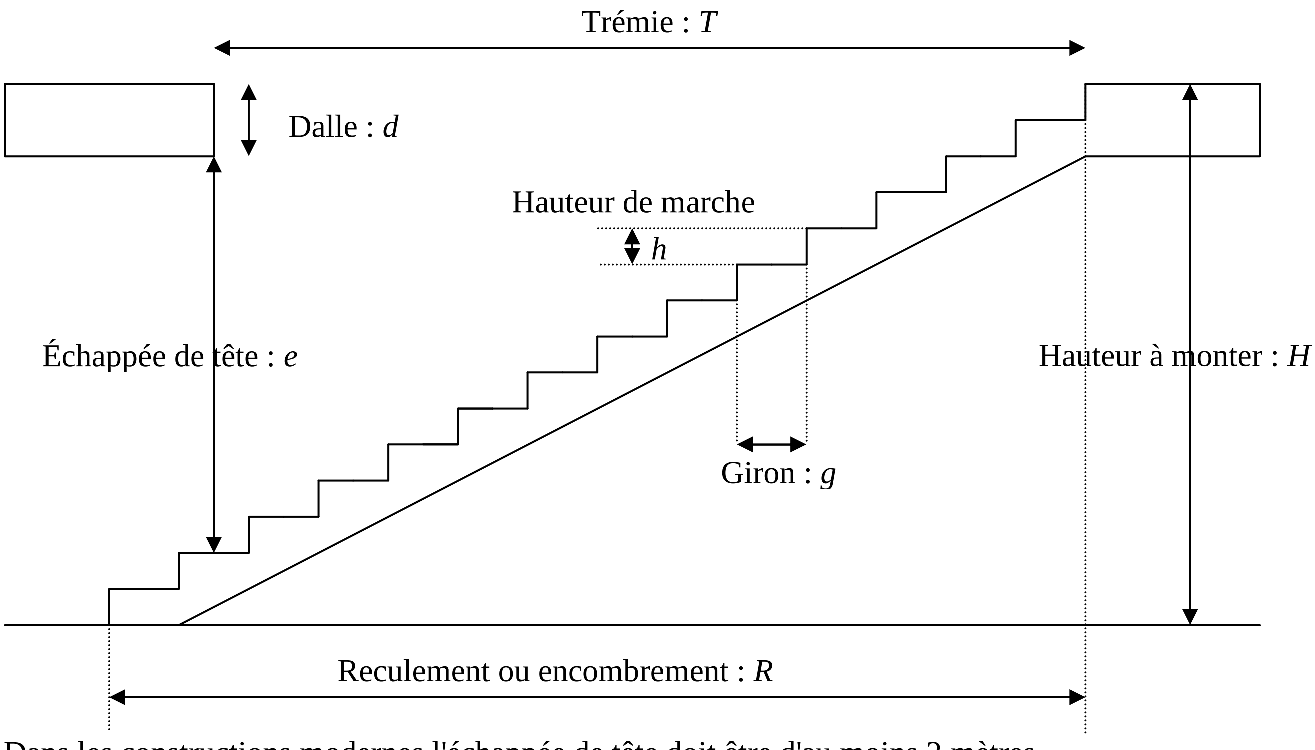
Académie de Grenoble

Sujets

<u>*Exercice 1 (séries S et STI)*</u>

En 1675, François Blondel se penche sur la question du calcul de l'escalier dans son *Cours d'architecture enseigné à l'académie royale d'architecture*. Il constate « qu'à chaque fois qu'on s'élève d'un pouce, la valeur de la partie horizontale se trouve réduite de deux pouces et que la somme du double de la hauteur de la marche et de son giron doit demeurer constante et être de deux pieds ».
Autrement dit : $M = 2h + g$, où M est le module ou pas et vaut 2 pieds (64,8 cm), h la hauteur de la marche, et g son giron (profondeur d'une marche d'escalier mesurée en son milieu).
L'idée directrice est que l'effort fait par la personne qui monte soit constant que l'escalier soit ou non droit.

De nos jours, le pas usuel est de 63 cm.
Ainsi on a : $2h + g = 63$.
Dans cet exercice toutes les longueurs sont exprimées en centimètres. Les réponses seront arrondies à 0,1 cm.



Dans les constructions modernes l'échappée de tête doit être d'au moins 2 mètres.
Dans l'étude qui suit, la hauteur à monter H est de 3 mètres, la dalle a une épaisseur de 30 centimètres.
Un escalier est déterminé par le nombre de marches, leur hauteur et leur giron.

1- On réalise un escalier droit de 19 marches. La trémie mesure 4,8 mètres. Calculer le giron, le reculement et l'échappée de tête de l'escalier.
2- On dispose d'un reculement maximum de 4 mètres. Calculer les dimensions de l'escalier le moins pentu possible. Quelle doit être la dimension minimale de la trémie ?
3- On dispose d'une trémie de 2,60 mètres. Quelles sont les dimensions de l'escalier le moins pentu possible ? Quel est son reculement ?

Exercice 2 (séries autres que S et STI)

On appelle fraction unitaire ou fraction égyptienne une fraction d'entiers dont le numérateur est égal à 1. On démontre et nous admettrons que toute fraction comprise entre 0 et 1 peut s'exprimer comme somme de fractions unitaires dont tous les dénominateurs sont distincts deux à deux.
Cette somme est appelée un développement égyptien.
Par exemple : $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ est un développement égyptien.

1- Donner un développement égyptien en une somme de deux fractions de :

a. $\frac{3}{20}$

b. $\frac{2}{17}$

2- Montrer qu'aucune fraction strictement comprise entre $\frac{5}{6}$ et 1 ne peut se décomposer comme somme de 2 fractions égyptiennes.

3- Donner un développement égyptien en une somme de trois fractions de :

a. $\frac{19}{20}$

b. $\frac{5}{121}$

c. $\frac{4}{17}$

Exercice 3 (pour tous)

Voici un petit jeu. Au départ, on dispose de 16 cases numérotées comme indiquées ci-dessous.

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

On s'autorise à faire autant de fois que l'on veut les actions suivantes :

- Choisir les deux premières lignes ou les deux dernières et les échanger.
- Choisir les deux premières colonnes ou les deux dernières et les échanger.
- Choisir une ligne ou une colonne et échanger le premier terme avec le dernier et le deuxième avec le troisième.

1- Montrer que l'on peut obtenir la position suivante :

22	21	24	23
12	11	14	13
42	41	44	43
32	31	34	33

2- Peut-on obtenir n'importe quelle position ? Si oui pourquoi, sinon donner une position impossible et expliquer pourquoi.

Éléments de solution (Grenoble)

Exercice 1

Principales formules $h\text{ (hauteur d'une marche)} = \dfrac{H\text{ (hauteur à monter)}}{n\text{ (nombre de marches)}}$ et $R\text{ (reculement)} = (n-1)\times g\text{ (giron)}$.

1- n est le nombre de marches.

Dans cette question, n = 19 donc $h = \dfrac{300}{19} \approx 15{,}8\text{cm}$.

$g = 63 - 2h = 63 - 2\times\left(\dfrac{300}{19}\right) \approx 31{,}4\text{cm}$.

$R = (n-1)g = 18\times\left(63 - \dfrac{600}{19}\right) \approx 565{,}6\text{cm}$.

Le nombre de marches descendues est alors de $\mathrm{E}\left(\dfrac{T}{g}\right)+1 \approx \mathrm{E}\left(\dfrac{480}{31{,}4}\right)+1 = 16$.

L'échappée de tête est donc égale à $e = 16h - 30 \approx 16\times\dfrac{300}{19} - 30 \approx 222{,}6\text{cm}$.

2- Dans cette question, on doit avoir $R = (n-1)\left(63 - \dfrac{600}{n}\right) \leq 400$.

Résolvons cette inéquation. Elle équivaut à
$(n-1)(63n - 600) \leq 400n \Leftrightarrow 63n^2 - 63n - 600n + 600 \leq 400n \Leftrightarrow 63n^2 - 1063n + 600 \leq 0$.

On a Δ = 978769 puis $n_1 = \dfrac{1063 - \sqrt{\Delta}}{2\times 63} \approx 0{,}58$ et $n_2 = \dfrac{1063 + \sqrt{\Delta}}{2\times 63} \approx 16{,}30$.
16 est le plus grand nombre possible de marches.
L'escalier comporte donc 16 marches d'une hauteur de 18,75 cm.
Le giron est alors de $63 - 2\times 18{,}75 = 25{,}5\text{cm}$.
On note x le nombre de marches descendues. On doit avoir
$\dfrac{230}{x} \leq 18{,}75 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{230}{18{,}75} \approx 12{,}27$.

Il faut descendre d'au moins 13 marches : la trémie vérifie donc $T \geq 13\times 25{,}5$. Elle doit donc dépasser 331,5 cm.

3- Pour que l'échappée soit d'au moins deux mètres on doit avoir
$\left[\mathrm{E}\left(\dfrac{T}{63 - \dfrac{2H}{n}}\right)+1\right]\times\dfrac{H}{n} \geq 230$.

Utilisons la table de la calculatrice : $Y_1 = 260/(63 - 600/X)$ et $Y_2 = (\mathrm{int}(Y_1)+1)*300/X$.
Si n = 14, alors $e \approx$ 278,6 cm,
si n = 15, alors $e \approx$ 240 cm,

si n = 16, alors $e \approx 206{,}3$ cm.

L'escalier doit comporter 15 marches, d'une hauteur de 20 cm. Le reculement est alors de $(15-1)\times(60-2\times 20)=322\text{cm}$.

Autre méthode

On doit avoir $\dfrac{260}{63-\dfrac{600}{n}}\times\dfrac{300}{n}\leq 230\leq\left(\dfrac{260}{63-\dfrac{600}{n}}+1\right)\times\dfrac{300}{n}\Leftrightarrow$

$\dfrac{260\times300}{63n-600}\leq 230\leq\dfrac{260\times300}{63n-600}+\dfrac{300}{n}$

Le giron est positif donc :

$78000\leq 230(63n-600)\Leftrightarrow 230\times63n\geq 78000+230\times600\Leftrightarrow n\geq\dfrac{216000}{230\times63}\approx 14{,}9$.

La deuxième inégalité conduit à $14490n^2-234900n+180000\leq 0$.

n doit être compris entre 1 et 15.

L'escalier comporte 15 marches d'une hauteur de 20 cm. Le giron est alors de 23 cm. Le reculement est 322 cm.

<u>Exercice 2 (séries autres que S et STI)</u>

1- a. On a $\dfrac{1}{7}<\dfrac{3}{20}<\dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{3}{20}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{140}$ donc $\dfrac{3}{20}=\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{140}$

b. . On a $\dfrac{1}{9}<\dfrac{2}{17}<\dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{2}{17}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{153}$ donc $\dfrac{2}{17}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{153}$

2- La plus grande somme réalisable avec deux fractions égyptiennes distinctes est **:** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$

3- Il existe de nombreuses méthodes et différents résultats possibles pour cette question. On peut par exemple prendre :

- **a.** $\dfrac{19}{20}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$
- **b.** $\dfrac{5}{121}=\dfrac{1}{33}+\dfrac{1}{121}+\dfrac{1}{363}$
- **c.** $\dfrac{4}{17}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{510}$

<u>Exercice 3 (pour tous)</u>

1- On échange les 2 premières colonnes
on échange les 2 dernières colonnes
on échange les 2 premières lignes
on échange les 2 dernières lignes
Et on arrive au résultats désiré.

2- Non car chaque « opération autorisée » échange un nombre pair de « paires de cases ».
Ainsi tout échange d'une seule paire ne peut-être obtenue.
Ainsi la position

12	11	13	14

21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

ne peut-être obtenue.