Лабораторная работа №2 по мат. анализу

Хайруллин Артур M3134

Часть 1. Аналитический метод

1 Формула производной n-го порядка

> Дана функция $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

Найдём первую производную $f(x)$ по x: $f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ $(\cos'(x) = -\sin(x))$.
Теперь вторую производную: $f''(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ $(\sin'(x) = \cos(x))$.
И третью: $f^{(3)}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$. Далее можно заметить, что если выделить подпоследовательность n_k нечётных n $(k \geq 1)$, то производной $f(x)$ n_k-го порядка будет функция $f^{(n_k)}(x) = (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, а если выделить подпоследовательность n_k чётных n $(k \geq 1)$ - $f^{(n_k)}(x) = (-1)^{k+1} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$. Объяснить это можно тем, что при взятии очередной производной функция синуса сменяется функцией косинуса и наоборот, а коэффициент перед тригонометрической функцией меняет знак после взятии производной от функции косинуса. Объединяя случаи, можно получить формулу для производной n-го порядка $f(x)$: $f^{(n)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

2 Многочлен Тейлора n-го порядка по степеням x

> Производная функции $f(x)$ порядка n: $f^{(n)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x + \frac{\pi n}{2}\right)$

Как известно, если функция имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно, можно определить для неё многочлен Тейлора:

$P_n(x, x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$. Также $P_n(x, 0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ при $x_0 = 0$.
Т.к. $f^{(k)}(x_0) = \left(\cos(\frac{\pi}{4} + x_0)\right)^{(k)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x_0 + \frac{\pi k}{2}\right)$, можно заменить выражение $f^{(k)}(0)$ выражением $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)$. Итого, $P_n(x, 0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)}{k!}x^k$.

3 Многочлен Тейлора порядка n для данной функции

> Многочлен Тейлора порядка n по степеням x: $P_n(x, 0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)}{k!}x^k$

Теперь составим многочлен Тейлора для нашей функции, используя многочлены Тейлора элементарных функций. Например, для $y = \cos x$, $x_0 = 0$, $y^{(n)}(0) = \cos\left(0 + \frac{\pi n}{2}\right)$: $T_n(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k$ и $\cos x = T_n(x,0) + o(x^n)$. Так же для $y = \sin x$, $x_0 = 0$, $y^{(n)}(0) = \sin\left(0 + \frac{\pi n}{2}\right)$: $Q_n(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k$ и $\sin x = Q_n(x,0) + o(x^n)$.

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k - \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k \right) \right) + o(x^n) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k \right) \right) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k \right) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\cos\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k \right) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k + o(x^n)$.

Тогда $P_n(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k$. Как видим, многочлен Тейлора для нашей функции совпал с многочленом из начала пункта 3.

4 Остаточный член в форме Лагранжа

> Многочлен Тейлора порядка n функции $f(x)$ по степеням x: $P_n(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k$

Остаточный член в форме Лагранжа для нашей функции можно записать как: $R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$, $\xi \in (0,x)$. $R_n(x,0) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \xi + \frac{\pi(n+1)}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \xi + \frac{\pi n}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$. $|R_n(x,0)| = \left| \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \xi + \frac{\pi n}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \left| \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \xi + \frac{\pi n}{2}\right)}{(n+1)!} \right| \left| x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left| x^{n+1} \right|$. При $x = a = 0.1$: $|R_n(a,0)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot 0.1^{n+1}$.

$|R_n(a,0)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot 0.1^{n+1} \leq \Delta_1 = 10^{-3}$, откуда $n \geq 2$, т.е. $n_1 = 2$.

$|R_n(a,0)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot 0.1^{n+1} \leq \Delta_2 = 10^{-6}$, откуда $n \geq 4$, т.е. $n_2 = 4$.

Часть 2. Численный метод

1 Графики функции и многочленов Тейлора

> Многочлен Тейлора порядка n функции $f(x)$ по степеням x: $P_n(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k$, $n_2 = 4$.

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, $P_0(x,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $P_1(x,0) = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{0!} x^0 + \frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{1!} x^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} x$, $P_2(x,0) =$

$P_1(x,0)+\dfrac{\cos\frac{5\pi}{4}}{2!}x^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2$, $P_3(x,0)=P_2(x,0)+\dfrac{\cos\frac{7\pi}{4}}{3!}x^3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{12}x^3$,

$P_4(x,0)=P_3(x,0)+\dfrac{\cos\frac{9\pi}{4}}{4!}x^4=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{12}x^3+\dfrac{\sqrt{2}}{48}x^4$.

Ссылка на графики функций в Desmos: `https://www.desmos.com/calculator/jlujv2saxy`
Также графики построены в программе, реализованной с помощью Jupyter Notebook (Python 3.9.13).

2 Приближённое значение $f(a)$

> Многочлен Тейлора порядков $n_1=2$ и $n_2=4$ соответственно: $P_2(x,0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2$,
> $P_4(x,0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{12}x^3+\dfrac{\sqrt{2}}{48}x^4$, $a=0.1$.

Заменим функцию f многочленами $P_2(x,0)$ и $P_4(x,0)$ в точке $a=0.1$:

$P_2(a,0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0.1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot 0.1^2\approx 0.6328606$, $P_4(a,0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0.1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot 0.1^2+$
$\dfrac{\sqrt{2}}{12}\cdot 0.1^3+\dfrac{\sqrt{2}}{48}\cdot 0.1^4\approx 0.6329814$.

3 Сравнение значений $f(a)$

Компьютер посчитал, что $f(a)=\cos\left(0.1+\dfrac{\pi}{4}\right)=0.6329813066769583$. Как можно заметить, $P_2(a,0)\approx 0.6328606$ и $P_4(a,0)\approx 0.6329814$ правда имеют погрешности не более $\Delta_1=10^{-3}$ и $\Delta_2=10^{-6}$ соответственно.