

Olasılık ve dağılımlar - Sorular

1. Bir suç mahalinde DNA izine rastlanıyor. Şüphelilerden DNA örneği alınıp bulunan DNA ile karşılaştırılıyor.

Testin performansı:

	Pozitif	Negatif
Suçlu	1	0
Suçsuz	0.001	0.999

Suçlu olma öncül olasılığı 10^{-5} olan bir A kişisi teste tabi tutuluyor ve testin sonucu pozitif çıkıyor.

A kişisi suçlu mudur? A kişinin testin sonucuna koşullu suçlu olma olasılığını bulun.

2. $X = (X_1, \dots, X_D)^T \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ise, $Y = X_1 + \dots + X_D$ 'nin dağılımını bulun.
3. $p_1(x) = \mathcal{N}(x|\mu_1, \sigma_1^2)$, $p_2(x) = \mathcal{N}(x|\mu_2, \sigma_2^2)$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. O halde,

$$p(x) = \alpha p_1(x) + (1 - \alpha)p_2(x)$$

karişım dağılımı bir Gauss dağılımı mıdır?

4. Parametresi $\lambda \in [0, \infty)$ olan Poisson dağılım ailesini ele alalım.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

Bu aile bir üstel dağılım ailesi midir?

5. Parametreleri $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olan homojen dağılım ailesini ele alalım:

$$p(x|a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{değilse} \end{cases}$$

Bu aile bir üstel dağılım ailesi midir?

6. Derste, üstel dağılım ailesinden bir

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x}) \exp(\boldsymbol{\theta}^T \phi(\mathbf{x}) - A(\boldsymbol{\theta}))$$

olabilirlik fonksiyonu için, her zaman eşlenik bir öncül dağılımın

$$p(\boldsymbol{\theta}|\gamma) = h_c(\boldsymbol{\theta}) \exp([\gamma_1^T \boldsymbol{\theta} - \gamma_2 A(\boldsymbol{\theta})] - A_c(\gamma) \boldsymbol{\theta})$$

şeklinde öerilebileceğini söylemiştik. Bu öncül dağılım ve olabilirlikten yola çıkarak sonsal dağılımı türetilip sonsal dağılımın öncül dağılımla aynı yapıda olduğunu gösterin. (Sonsal dağılımın doğal parametrelerini (γ 'larını) belirleyin.)

7. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ise değişken dönüşümü tekniklerinden uygun birini kullanarak $Y = \exp(X)$ 'in dağılımını bulun.