Étude Mécanique de La Flèche

Solidarc

October 14, 2024

1 Introduction

Dans cette étude, nous travaillons dans un référentiel cartésien tridimensionnel (x, y, z), où :

- x est la direction de la profondeur (vers l'avant),
- y est la direction horizontale,
- z est la direction verticale.

2 Forces en Présence

Les forces qui agissent sur la flèche sont les suivantes :

- La force gravitationnelle : $\mathbf{F_g} = m\mathbf{g}$, où m est la masse de la flèche et $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, avec $g = 9.81\,\mathrm{m/s}^2$, est l'accélération due à la gravité.
- La force de propulsion $\mathbf{F_p}$, décomposée en fonction des angles α et θ, qui a pour expression :
$$\mathbf{F_p} = F_p \cos(\alpha)\,\mathbf{e_x} + F_p \cos(\theta)\,\mathbf{e_y} + F_p \sin(\theta)\,\mathbf{e_z}$$

3 Modélisation Mécanique

D'après la deuxième loi de Newton, la somme des forces agissant sur la flèche est égale à la masse m multipliée par son accélération $\mathbf{a}$:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Les forces appliquées sont la force gravitationnelle et la force de propulsion :

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F_p}$$

où $\mathbf{F_p}$ est la force de propulsion décomposée comme vu précédemment.

3.1 Composantes des Forces

Dans le référentiel (x, y, z), les composantes des forces sont données par :

$$\mathbf{F_g} = (0, 0, -mg)$$

$$\mathbf{F_p} = (F_p \cos(\alpha), F_p \cos(\theta), F_p \sin(\theta))$$

4 Équations du Mouvement

En intégrant l'équation de la dynamique, nous obtenons les équations du mouvement de la flèche dans les trois directions.

4.1 Équation en x (Profondeur)

L'accélération dans la direction x est causée par la composante de la force de propulsion dans cette direction :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F_p\cos(\alpha)$$

En intégrant deux fois, nous obtenons la position en x :

$$x(t) = \frac{F_p\cos(\alpha)}{m}t^2 + v_{0x}t + x_0$$

où v_{0x}=F_p est la vitesse initiale dans la direction x, et x_0=0.

4.2 Équation en y (Horizontal)

Dans la direction y, la flèche est soumise à la composante horizontale de la force de propulsion :

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = F_p\cos(\theta)$$

En intégrant deux fois, on obtient :

$$y(t) = \frac{F_p\cos(\theta)}{m}\frac{t^2}{2} + v_{0y}t + y_0$$

où v_{0y}=F_p est la vitesse initiale en y, et y_0=0.

4.3 Équation en z (Verticale)

Dans la direction z (verticale), la flèche est soumise à la force gravitationnelle ainsi qu'à la composante verticale $F_p\sin(\theta)$ de la force de propulsion :

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -mg + F_p\sin(\theta)$$

En intégrant, on obtient :

$$z(t) = \left(\frac{F_p\sin(\theta)}{m} - g\right)\frac{t^2}{2} + v_{0z}t + z_0$$

où v_{0z}=$F_p - mg$ est la vitesse initiale dans la direction z, et z_0=0.

5 Conclusion

Nous avons modélisé la trajectoire de la flèche dans un espace tridimensionnel en tenant compte de la décomposition de la force de propulsion en fonction des angles α (dans le plan xOy) et θ (dans le plan zOy). Les équations obtenues décrivent la position de la flèche à tout moment en fonction des forces appliquées et des conditions initiales.