Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Mathématiques

Les espaces vectoriels topologiques

Auteur : Zahidi Samir
Encadrant : Pr.Tebbaa Kamal

12 juin 2018

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS

Dans toute la suite, on désigne par E un espace vectoriels sur $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et on note $\mathcal{P}^*(E)$ l'ensemble des parties non vides de E.

1.1 Opérations dans $\mathcal{P}^*(E)$

• L'addition de deux éléments U et V de $\mathcal{P}^*(E)$ est le sous-ensemble non vide, noté U+V, défini par :

$$U + V = \{x \in E / \text{ il existe } u \in U \text{ et } v \in V \text{ tel que } x = u + v\}.$$

Cette adition est associative, commutative et le sous-espace $\{0\}$ est son élément neutre. Ainsi $(\mathcal{P}^*(E), +)$ est un monoïde commutatif. Les seules parties inversibles de $\mathcal{P}^*(E)$ sont les sous-ensembles de E réduits à un point.

• La multiplication d'un vecteur A de $\mathcal{P}^*(E)$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ définit un sous-ensemble non vide de E, noté λA et on a :

$$\lambda A = \{x \in E/ \text{ il existe } a \in A,\ x = \lambda a\}.$$

1.2 Sous-ensembles équilibrés

Définition 1.2.1
Une partie non vide A de E est dite équilibrée (ou cerclée) si $\lambda A \subset A$ pour tout $|\lambda| \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemples 1.2.1

Un sous-espace de E est équilibré.

Proposition 1.2.1

a) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties équilibrées de E, les parties $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ et $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ sont équilibrées.

b) Soit A un partie équilibrée, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λA est équilibrée.

Preuve

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties équilibrées de E.

- *Montrons que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est équilibrée c'est à dire $\lambda\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subset \bigcap\limits_{i\in I} A_i \quad \forall|\lambda| \leq 1 \quad \lambda \in \mathbb{K}$.*

  Soit $x \in E$, $x \in \lambda\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ il existe $a \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ tel que :

  $x = \lambda a$. *Où* $a \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow a \in A_i \ \forall i \in I$.

  $\Rightarrow x = \lambda a \in \lambda A_i \ \forall i \in I$.

  Puisque A_i est équilibré alors $\forall i \in I \quad \lambda A_i \subset A_i \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| \leq 1$ donc $x = \lambda a \in \lambda A_i \subset A_i \ \forall i \in I$. D'où $x \in A_i \ \forall i \in I$.

  Il en résulte $\lambda\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subset \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

- *Montrons que la réunion quelconque de parties équilibrées est équilibrée.*

  Soit $x \in E$, $x \in \lambda\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ alors il existe $a \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ telle que :

  $x = \lambda a$. *où* $a \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$ *tel que* $a \in A_{i_0}$.

  $\Rightarrow \exists\, i_0 \in I \ x = \lambda a \in \lambda A_i \ \forall|\lambda| \leq 1$.

  Puisque A_{i_0} et équilibré alors $\forall|\lambda| \leq 1$ on a $\lambda A_{i_0} \subset A_{i_0}$ donc $x = \lambda a \in \lambda A_{i_0}$ et $A_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i \ \forall|\lambda| \leq 1$ alors $x \ \lambda\bigcup\limits_{i\in I} A_i$. On conclut $\lambda\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

- *Soit A est équilibré .*

  Montrons que $\forall \lambda \in \mathbb{K} \ |\lambda| \leq 1 \quad \lambda A$ une partie équilibrée.

  Soient $x \in E \quad \mu \in \mathbb{K} \quad |\mu| \leq 1$ tels que : $x \in \mu(\lambda A)$ donc $\exists a \in \lambda A \ x = \mu a$.

  Or $a \in \lambda A$ alors $\exists b \in A$ tel que $a = \lambda b$ alors $x = \mu(\lambda b) = \lambda(\mu b)$.

  Puisque A équilibré et $|\mu| \leq 1$ et $b \in A$ donc $\mu b \in A \Rightarrow \lambda\mu b \in \lambda A$.

  $\Rightarrow x \in \lambda A$.

  D'où $\mu(\lambda A) \subset \lambda A$.

1.3 Envoloppe et noyau équilibré

Proposition 1.3.1
a) Soit A une partie non vide de E. Il existe un plus petit ensemble équilibré noté $\varepsilon(A)$ contenant A. $\varepsilon(A)$ est appelé l'envoloppe équilibrée de A. On a :

$$\varepsilon(A) = \bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda A = \bigcap_{\substack{B\supset A \\ B \text{ équilibré}}} B.$$

b) Si 0 $\in A$, il existe un plus grand ensemble équilibré noté $\eta(A)$, contenu dans A . $\eta(A)$ est appelé noyau équilibré de A. On a :

$$\eta(A) = \bigcap_{|\mu|\geq 1} \mu A = \bigcup_{\substack{B\subset A \\ B \text{ équilibré}}} B.$$

Preuve

a) Soit $A \neq \emptyset$. La famille des parties équilibrées de E contenant A n'est pas vide car elle contient E. Leur intersection $\varepsilon(A)$ est non vide et c'est la plus petite partie équilibrée contenant A. Pour montrer que $\bigcap\limits_{\substack{B\supset A \\ B\text{équilibré}}} B \subset \bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda A$ il suffit de montrer que $\bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda A$ est un ensemble équilibré qui contient A. On a $A \subset \bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda A$, en effet soit $a \in A$ alors $(a = 1.a \in 1)$ $A \subset \bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda A$. Et si $|\alpha| \leq 1$ alors :

$$\alpha \bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda A = \bigcup_{|\lambda|\leq 1} \alpha\lambda A \subset \bigcup_{|\mu|\leq 1} \mu A$$

$$(car\ |\alpha\lambda| \leq 1\ et\ \{\lambda \in \mathbb{K} \ / \ |\lambda| \leq 1\} \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \ / \ |\alpha\lambda| \leq 1\})$$

donc $\bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda A$ est équilibrée.
Si B équilibré contient A, alors pour tout $|\lambda| \leq 1$ on a $\lambda A \subset \lambda B \subset B$. ce qui implique $\bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda A \subset B$. D'où $\bigcup\limits_{|\lambda|\leq 1} \lambda A$ est le plus petit ensemble équilibré contenant A. D'où l'égalité.
b) La réunion $\eta(A)$ des parties équilibrées de E contenues dans A est la plus grande partie équilibrée contenue dans A. Elle n'est pas vide car $\{0\}$ est équilibré et $0 \in A$.
Si $|\lambda| \leq 1$, on a :

$$\lambda\eta(A) \subset \eta(A) \subset A.$$

D'où

$$\eta(A) \subset \mu A \ \ si \ \ |\mu| \geq 1.$$

$$\eta(A) \subset \bigcap_{|\mu|\geq} \mu A.$$

Pour établir l'inclusion inverse. Soit $x \in \bigcap_{|\mu|\geq 1} \mu A$ *qui équivant à* $x \in \mu A$ *pour tout* $|\mu| \geq 1$.
Donc $\lambda x \in A$ *pour tout* $|\lambda| \leq 1$.*(Rappelons que* $0 = 0x \in A$*).*
Mais l'ensemble $\{\lambda x / |\lambda| \leq 1\}$ *est équilibré, donc il est contenu dans* $\eta(A)$*. Par conséquent* $x \in \eta(A)$ *et*

$$\bigcap_{|\mu|\geq 1} \mu A \ \subset \ \eta(A).$$

Exemples 1.3.1
$E = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 1\}$
$\varepsilon(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < xy \leq 1\} \bigcup \{0\}$
$\eta(A) = \emptyset$ *(car* $0 \notin A$*)*

1.4 Sous-ensembles absorbants

Définition 1.4.1
Une partie non vide A *de* E *est dite absorbante (ou radicale) si pour tout* $x \in E$ *il existe un nombre* $\alpha_x > 0$ *tel que* $x \in \lambda A$ *pour tout* $|\lambda| \geq \alpha_x$*. (ce qui équivant à* $\mu x \in A$ *pour tout* $|\mu| \leq \beta_x = \frac{1}{\alpha_x}$*).*

Exemples 1.4.1
1. Si E *est normé, la boule ouvert* $B(0, R)$ $(R > 0)$ *de centre* 0 *et de rayon* R *est absorbante.*
2. la boule ouvert $B(x, R)$ *de centre* $x \neq 0$ *et de rayon* $R > 0$ *est absorbante si et seulement si,* $R > ||x||$.
3. $E = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*. La partie* $\mathbb{R}$ *n'est pas absorbante.*

Proposition 1.4.1
Une partie A *équilibrée est absorbante si et seulement si pour tout* $x \in E$ *il existe* $\lambda \neq 0$ $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $\lambda x \in A$.

Preuve
Soit A *une partie équilibrée.*
($\Rightarrow$*) Supposons* A *absorbante alors* $\forall x \in E$ $\exists \beta_x > 0$ *pour tout* $\mu \in \mathbb{K}$ $|\mu| \leq \beta_x$ $\mu x \in A$.
On pose $\mu = \beta_x$ *donc* $\beta_x x \in A$.
($\Leftarrow$*) Supposons que* $\forall x \in E$ $\exists \lambda \neq 0$ $\lambda x \in A$*. Et on montrons que* A *est absorbante.*

Soit $x \in E$. *On pose* $\beta_x = |\lambda| > 0$. *Soit* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tel que* $|\alpha| \leq \beta_x$ *et donc* $\dfrac{|\alpha|}{\beta_x} \leq 1$. *Comme* A *est équilibrée, donc :*

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta_x}x \in A \quad &\Rightarrow \quad \exists a \in A \text{ tel que } \frac{\alpha}{\beta_x}x = a \\ &\Rightarrow \quad \exists a \in A \text{ tel que } \alpha x = \beta_x a \\ &\Rightarrow \quad \alpha x \in \beta_x A = |\lambda| A = \lambda A \subset A\end{aligned}$$

D'où A *est absorbante.*

Propriétés 1.4.1
L'intersection finie d'absorbants est absorbante.

Preuve
En effet, par réccurence et on va tout d'abord monter que l'intersection de deux parties absorbantes est absorbantes.
Soit A, B *deux parties absorbantes. Donc*
Soit $x \in E$, $\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 \ \forall \ \mu \ \lambda \in K \ \ |\mu| \leq \alpha_1 \ |\mu| \leq \alpha_2$ *telle que* $\mu x \in A \ \ \lambda x \in B$.
On prend $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ *alors* $\mu x \in A \cap B \ |\mu| \leq \alpha$.
Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1})$ *une famille des absobantes.*
On suppose $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ *est absorbante et on montre que* $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} A_i$ *est absorbante. Effet, on a* $\bigcap\limits_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap A_{n+1}$ *est absorbantes car c'est l'intersection de deux absorbante.*

1.5 Convexité

Définition 1.5.1

a) Etant donnés deux points $x, y \in E$, *l'ensemble* $[x, y]$ *(resp.* $]x, y[$*) des points* $\lambda x + (1-\lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1 (resp. 0 < \lambda < 1)$ *est appelé segment fermé (resp. segment ouvert) d'extrémités* x, y.

b) L'ensemble $]x, y]$ *(resp.*$[x, y[$*) des points* $\lambda x + (1-\lambda)y$ $(0 < \lambda \leq 1)(resp. 0 \leq \lambda < 1)$, *est appelé segment ouvert en* x *et fermé en* y *(resp . fermé en* x *et ouvert en* y *).*

c) Un sous-ensemble A *non vide de* E *est dit convexe si :* $\forall x, y \in A$, *le segment fermé* $[x, y]$ *est contenu dans* A. *Autrement dit, si* $\alpha A + \beta A \subset A$ *pour tout* $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ $\alpha + \beta = 1$.

Exemples 1.5.1

(i) Soit $||.||$ une norme sur l'espace vectoriel E. Pour tout $x \in E$ et $r > 0$, la boule centrée en x et de rayon r (ouverte ou fermée) $B(x,r) = \{y \in E \,/\, ||x-y|| \leq r\}$ est convexe.
En effet, soit $x \in E$. Soit $a, b \in B(x,r)$ et $\lambda \in [0,1]$.
Montrons que $\lambda a + (1-\lambda)b \in B$.
On a :
$$\begin{aligned} ||x - (\lambda a + (1-\lambda)b)|| &= ||x + \lambda x - \lambda x - \lambda a - (1-\lambda)b)|| \\ &= ||\lambda(x-a) + (1-\lambda)(x-b)|| \\ &\leq \lambda||(x-a)|| + (1-\lambda)||(x-b)|| \\ &\leq \lambda r + (1-\lambda)r \\ &\leq r. \end{aligned}$$
On conclut que $B(x,r)$ est donc convexe.

(ii) Pour toute forme linéaire , $\varphi : E \to \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, le sous-niveau $A = \{x \in E / \varphi(x) \leq b\}$ est un ensemble convexe appelé demi-espace. En effet, Soient $x, y \in A$ et $\lambda \in [0,1]$. Montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$. On a :
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \\ &\leq \lambda b + (1-\lambda)b \\ &\leq b. \end{aligned}$$

Propriétés 1.5.1
- *L'intersection d'une famille quelconque $(K_j)_{j \in J}$ de convexes est convexe.*
- *Etant donné une partie non vide A de E, il existe une plus petite partie convexe $c(A)$ contenant A et qui est égale à l'intersection des parties convexes contenant A.*

$c(A)$ est identique à l'ensemble des barycentres $\sum\limits_k \lambda_k x_k$ des parties finies x_k de A, affectés de masses positives λ_k, avec $\sum\limits_k \lambda_k = 1$.

Preuve
Soit $(K_j)_{j \in J}$ une famille de convexes.
Soit $x, y \in \bigcap\limits_{j \in J} (K_j)$. Alors $x, y \in (k_j)$ $\forall j \in J$. Or les K_j sont des convexes donc $\forall \lambda \in [0,1]$ on a, $\lambda x + (1-\lambda)y \in K_j$ $\forall j \in J$. D'où $\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap\limits_{j \in J} K_j$.

Proposition 1.5.1
Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f une application linénaire de E dans F.

(i) Soit $A \subset E$. Si A est équilibré (resp. convexe) alors $f(A)$ est équilibré (resp. convexe). Si f est surjective et si A est absorbante alors $f(A)$ est absorbante.

(ii) Soit $B \subset F$. Si B est équilibré (resp. convexe, resp.absorbant) alors $f^{-1}(B)$ est équilibré (resp. convexe, resp. absorbant).

Preuve

(i) Soit $A \subset E$ équilibré. Alors $\lambda f(A) = f(\lambda A) \subset f(A)$ donc $f(A)$ est équilibré.
Soit A convexe. Alors $\lambda f(A) + \mu f(A) = f(\lambda A + \mu A) \subset f(A)$ pour tout $\lambda, \mu \geq 0$ $\lambda + \mu = 1$. Donc $f(A)$ convexe.
Soient un A absorbant et $y \in F$. Puisque f est surjective $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas vide. Soit $x \in f^{-1}(\{y\})$ il existe $\alpha > 0$ tel que $|\lambda| \leq \alpha$ implique $\lambda x \in A$. Alors $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda y \in f(A)$ donc $f(A)$ est absorbant.

(ii) $B \subset F$ équilibré alors $\lambda f^{-1}(B) = f^{-1}(\lambda B) \subset f^{-1}(B)$ donc $f^{-1}(B)$ équilibré.
Soit B convexe alors $\lambda f^{-1}(B) + \mu f^{-1}(B) = f^{-1}(\lambda B + \mu B) \subset f^{-1}(B)$ si $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ donc $f^{-1}(B)$ convexe.
Soient B absorbant et $x \in E$. Posons $y = f(x)$ il existe $\alpha > 0$ tel que $|\lambda| \leq \alpha$ implique $\lambda x \in B$ .Or $\lambda y = f(\lambda x)$ alors $\lambda x \in f^{-1}(B)$ donc $f^{-1}(B)$ est absorbant.

1.6 Semi-normes

Définition 1.6.1
On appelle semi-norme sur E, une application $q : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes :

a) Pour tous x, y dans E

$$q(x + y) \leq q(x) + q(y).$$

a) Pour tout $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$q(\lambda x) = |\lambda| q(x).$$

Proposition 1.6.1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si q est une semi-norme sur E alors :

$$(1) \quad q(0) = 0 \qquad (2) \quad |q(x) - q(y)| \leq q(x - y)$$

.

Preuve
On a $q(0) = q(0x) = 0q(x) = 0$, ce qui prouve (1).
Montrons (2). On a par définition pour tous x, y dans E.
$q(x) = q(x - y + y) \leq q(x - y) + q(y)$ donc $q(x) - q(y) \leq q(x - y)$. Cependant par

homogéniété de q on déduit que $q(x-y) = q(-(y-x)) \geq q(y) - q(x)$.
ce qui prouve que $|q(x) - q(y)| \leq q(x-y)$.

Proposition 1.6.2
Soientt q une semi-norme sur E, les ensembles :

$$\{x \in E \,/\, q(x) \leq \alpha\} \;\; et \;\; \{x \in E \,/\, q(x) < \alpha\}$$

sont convexes, équilibrés et absorbants. Pour tout $\alpha > 0$

Preuve
Soit $\alpha > 0$.

Soit $A = \{x \in E \,/\, q(x) \leq \alpha\}$.
• *A est Convexe :*
Soient $x, y \in A$ *et* $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned} donc \;\; q(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda q(x) + (1-\lambda) q(y). \\ &\leq \lambda\alpha + \alpha - \lambda\alpha \\ &\leq \alpha. \end{aligned}$$

donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.
• *A est équilibré :*
Montrons que $\forall \beta \in \mathbb{K}$ *tel que* $|\beta| \leq 1$, $\beta A \subset A$.

$$\begin{aligned} Soit\, x \in \beta A \;\; &\Rightarrow \;\; \exists a \in A, \text{ tel que } x = \beta a \\ &\Rightarrow \;\; \exists a \in A, \text{ tel que } q(x) = q(\beta a) \leq |\beta| q(a) \leq \alpha \\ &\Rightarrow \;\; q(x) \leq \alpha \\ &\Rightarrow \;\; x \in A. \end{aligned}$$

• *A est absorbant :*
Soit $x \in E$, *on cherche l'existence d'un* $r > 0$ *tel que* $\forall \beta \in \mathbb{K}$ $|\beta| \leq r$ *on a* $\beta x \in A$.
En effet, $x \in E$ *et on prend* $r = \frac{\alpha}{1+q(x)} > 0$. *Alors* $\forall |\beta| \leq r$,

$$\begin{aligned} On \; a \;\; q(\beta x) &= |\beta| q(x) \\ &\leq r.q(x) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

donc $\beta x \in A$.

Proposition 1.6.3
Soient p et q deux semi-normes sur E. Pour que légalité $q \leq p$ soit vérifiée, il faut et il suffit que :

$$\{x \in E \,/\, p(x) \leq 1\} \;\subset\; \{x \in E \,/\, q(x) \leq 1\}$$

.

Preuve

• *Si* $q \leq p$, *alors* $p(x) \leq 1$ *implique* $q(x) \leq 1$, *d'où l'inclusion.*

• *Supposons que* $\{x \in E \,/\, p(x) \leq 1\} \subset \{x \in E \,/\, q(x) \leq 1\}$. *Soit* $x \in E$ *tel que* $p(x) \neq 0$ *.On pose* $y = \frac{x}{p(x)}$. *Alors* $p(y) = 1$. *Donc* $q(y) = q(\frac{x}{p(x)}) \leq 1$ *et* $p(x) \leq q(x)$
Si $x_0 \in E$ *vérifie* $p(x_0) = 0$ *alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ $p(\lambda x_0) = 0$.
On suppose par l'absurde $q(x_0) \neq 0$. *Or on a ceci* $\forall \lambda \in K$ *tel que* $q(\lambda x_0) \leq 1$ *(car elle est équlibrée) en particulier pour* $\lambda = \frac{2}{q(x_0)}$ *ce qui implique* $q(\lambda x_0) = q(\frac{2}{q(x_0)} x_0) = \frac{2}{q(x_0)} q(x_0) = 2 \leq 1$. *Absurde.* $q(x_0) = p(x_0) = 0$

1.7 Jauge ou fonctionnelle de Minkowski

Soit A une partie absorbante de E.

Définition 1.7.1
Soit A *un sous-ensemble de* E. *On appelle jauge ou fonctionnelle de Minkowski de* A *l'application* $J_A : E \to [0\,, +\infty]$ *définie par :*

$$x \to J_A(x) \;=\begin{cases} \inf\{\alpha \,/\, x \in \alpha A\} & , \quad \text{s'il exsiste un } \alpha \geq 0 \text{ tet que } x \in \alpha A. \\ +\infty & , \quad \text{si pour tout } \alpha \geq 0,\ x \notin \alpha A. \end{cases}$$

Exemples 1.7.1
Si $A = E$, *on a* $x \in \alpha E$ *pour tout* $\alpha > 0$. *Dans,*

$$J_E(x) \;=\; \inf\{\,\alpha \,/\, \alpha > 0\} \;= 0$$

Si A *est un sous-espace propre de* E *(i.e.* $A \neq E$*) on a :*

$$J_A(x) \;=\begin{cases} 0 & , \quad \text{si } x \in A. \\ +\infty & , \quad \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Remarque 1.7.1
A étant une partie de E *:*
1. Si A *est absorbante, pour tout* $x \in E$ *on a :*

$$J_A(x) = \inf\{\alpha > 0 \,/\, x \in \alpha A\} \;=\; \inf\{\beta > 0 \,/\, \frac{x}{\beta} \in A\} \;<\; +\infty$$

2. $0 \in A,\ J_A(0) = 0.$
Si $0 \notin A,\ J_A(0) = +\infty.$
3. Si $A \neq \emptyset,\ J_A(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in A.$
4. Si $A \subset B$, *on a* $J_B \leq J_A.$

Démonstration pour 4. Soit $x \in E$. Si $J_B(x) = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$ $x \notin \alpha B$. Donc, $x \notin \alpha A \subset \alpha B$ et $J_A(x) = +\infty$. Si $J_B(x) < +\infty$ $J_B(x) = \inf\{\alpha > 0 \,/\, x \in \alpha B\}$. Comme $\alpha A \subset \alpha B$ alors

$$\{\alpha > 0 \,/\, x \in \alpha A\} \;=\; \{\alpha > 0 \,/\, x \in \alpha B\}$$

ce qui implique $J_B(x) \leq J_A(x)$.
5. Si A est convexe et $0 \in A$, on a :

$$J_A(x) \geq 1 \text{ si } x \in A$$

En effet, $J_A(x) < 1$ entraîne $x \in \alpha A \subset A$ pour certain $0 < \alpha < 1$ (La derniére inclusion résulte de la convexité de A et du fait que $0 \in A$).
Notons qu'on peut avoir $J_A(x) = 1$ pour $x \in A^c$.

Exemples 1.7.2
$E = \mathbb{R}^2$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$*)* $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ (1,1) \,/\, max(|x_1|, |x_2|) \leq 1\}$
$J_A(x_1, x_2) \;=\; max(|x_1|, |x_2|).$

Propriétés 1.7.1
Soit A une partie non vide de E .
1) Pour tout $\lambda \geq 0$ *alors :* $J_A(\lambda A) = \lambda J_A(A).$ (4)
2) Si A est convexe alors : $J_A(x + y) \;\leq\; J_A(x) + J_A(y).$ (5)
3) si A est équilibrée alors : $J_A(\lambda A) = |\lambda| J_A(A)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda \neq 0.$ (6)
4) On suppose A convexe, équilibrée et absorbante. Alors on a :

(i) $x \to J_A(x)$ *est une semi norme sur E.*

(ii) *Soient* $V \;=\; \{x \in E \,/\, J_A(x) < 1\}$ $W \;=\; \{x \in E \,/\, J_A(x) \leq 1\}$
alors On a : $J_V \;=\; J_W = J_A,\ V \subset A \subset W.$

(iii) *Si* $V \subset B \subset W$ $J_B = J_A.$

(iv) *Si q est une semi-norme sur E et*
$A \;=\; \{x \in E \,/\, q(x) < 1\}$ $B \;=\; \{x \in E \,/\, p(x) \leq 1\}$
alors on a $J_A(x) \;=\; J_B(x) \;=\; q(x).$

v) *Si* $A_1, \ldots, A_n$ *sont des parties convexes, équilibrées et absorbantes de E alors :*

$$J_{\underset{j=i}{\overset{n}{\cap}} A_j} \;=\; \underset{i \leq j \leq n}{Max}\, J_{A_j} \;=\; J.$$

Preuve

1. Si $J_A(x_0) = +\infty$ alors pour tout $\alpha > 0$ on a $x_0 \notin \alpha A$ donc $\lambda x_0 \notin \alpha A$ $(\lambda > 0, \alpha > 0)$ et $J_A(\lambda x_0) = +\infty$. D'où l'égalité (4). Si $J_A(x_0)$ est fini, en remarquant que $x_0 \in \alpha A$ équivant à $\lambda x_0 \in \lambda\alpha A$ ($\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ fixé) on obtient :

$$\begin{aligned} J_A(x_0) &= \inf\{\alpha \,/\, x_0 \in \alpha A\} \\ &= \inf\{\alpha > 0 \,/\, \lambda x_0 \in \lambda\alpha A\} \\ &= \inf\{\tfrac{\beta}{\lambda} > 0 \,/\, \lambda x_0 \in \beta A\} \\ &= \tfrac{1}{\lambda}\inf\{\beta > 0 \,/\, \lambda x_0 \in \beta A\} \\ &= \tfrac{1}{\lambda} J_A(\lambda x_0). \end{aligned}$$

2. Supposons A convexe. L'inégalité (5) est vérifiee si $J_A(x) = +\infty$. ou si $J_A(y) = +\infty$. Si $J_A(x) < +\infty$ et $J_A(y) < +\infty$, d'après la définition de la borne inférieure d'un ensemble de nombres et celle de jauge, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda, \mu > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} &J_A(x) \le \lambda \,<\, J_A(x) + \varepsilon \\ &J_A(x) \le \lambda \,<\, J_A(x) + \varepsilon \\ &x \in \lambda A, \quad y \in \mu A \end{aligned}$$

D'où $x = \lambda a$ et $y = \mu b$ $(a, b \in A)$ et on a $x + y = (\lambda + \mu)c$ avec

$$c = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}a + \frac{\mu}{\lambda+\mu}b \in A \ \ (\textit{car } A \textit{ est convexe})$$

D'après (5), $J_A(c) \le 1$. Et on a

$$J_A(x+y) \le \lambda + \mu < J_A(x) + J_A(y) + 2\varepsilon$$

3. L'égalité (6) est vérifiée si $\lambda > 0$. Pour l'établir dans le cas général, il suffit de supposer $|\lambda| = 1$. Si $|\lambda| = 1$ $\alpha > 0$, $\lambda x \in \alpha A$ équivaut à $x \in \alpha A$. En effet, αA est équilibrée et $\lambda x \in \alpha A$ implique $x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) \in \alpha A$. Inversement si $x \in \alpha A$ alors $\lambda x \in \lambda(\alpha A) \subset \alpha A$. Donc

$$J_A(\lambda x) \,=\, \inf\{\alpha \,/\, \lambda x \in \alpha A\} \,=\, \inf\{\alpha > 0 \,/\, x \in \alpha A\} \,=\, J_A(x)$$

4. i) Si l'ensemble A est convexe, équilibré et absorbant $J_A(x)$ est finie pour tout $x \in E$. l'égalité (6) est valable aussi pour $\lambda = 0$. (5) montre alors que J_A est une semi-norme sur E.

4. ii) Les inclusions $V \subset A \subset W$ sont évidentes . Donc $J_V \ge J_A \ge J_W$; on a pour x fixé,

$$J_V(x) \,=\, \inf\{\alpha > 0 \,/\, x \in \alpha V\} \,=\, \inf\{\alpha > 0 \,/\, J_A(x) < \alpha\} \,=\, J_A(x)$$

(car, $x \in \alpha V$ équivaut à $J_A(x) < \alpha$ si $\alpha > 0$).

De même,

$$J_W(x) \,=\, \inf\{\alpha > 0 \,/\, x \in \alpha W\} \,=\, \inf\{\alpha > 0 \,/\, J_A(x) \leq \alpha\} \,=\, J_A(x)$$

4. iii) La propriété est évidente D'après la remarque 1.7.1-4 et on a l'égalité :
$J_V \,=\, J_W$ *d'après (la propriété 1.7.1-4.ii)*
4. iv) A est convexe, équilibrée et absorbante. Pour $\alpha > 0,\ x \in \alpha A$ *équivaut à* $q(x) < \alpha$.
Donc,

$$J_A(x) \,=\, \inf\{\alpha > 0 \,/\, x \in \alpha A\} \,=\, \inf\{\alpha > 0 \,/\, q(x) \leq \alpha\} \,=\, q(x)$$

On abtient de la même manière l'égalité $q(x) \,=\, J_B(x)$.
4. v) $\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j$ *est convexe, équilibrée et absorbante d'aprés (1.5.1 ; 1.2.1-(a) ; 1.4.1) et* J_{A_j} *est une semi-norme sur* E. *On a :*

$$\begin{aligned} A \;&=\, \{x \in E \,/\, J(x) < 1\} \\ &=\, \{x \in E \,/\, J_{A_j}(x) < 1 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}\} \\ &=\, \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in E \,/\, J_{A_j} < 1\} \end{aligned}$$

Or,

$$\{x \in E \,/\, J_{A_j} < 1\} \;\subset\; A_j \;\; (1 \leq j \leq n) \;\; \textit{(la propriété 1.7.1-4.ii)}$$

Donc, $A \subset \bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j$ *et comme* J *est une semi-norme* $J_A \,=\, J \geq J_{\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j}$
D'autre part,
$\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j \,=\, A_k \; (1 \leq k \leq n)$ *et* $J_{\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j} \geq \underset{1 \leq k \leq n}{Max}\, J_{A_k} \,=\, J$ *d'après la remarque 1.7.1-4*

CHAPITRE 2

LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

2.1 Rappels topologique

Définition 2.1.1
On dit qu'une famille non vide $\mathcal{B}$ de parties d'un ensemble X est une base filtre sur X si $\varnothing \notin \mathcal{B}$ et si pour tout A,B dans $\mathcal{B}$, il existe C dans $\mathcal{B}$ tel que $C \subset A \cap B$.

Proposition 2.1.1
Rappelons qu'on peut définir une topologie sur un ensemble non vide X à partir des axiomes de voisinages :
Supposons qu'à chaque point $x \in X$ on puisse associe une famille $\mathcal{V}(x)$ de parties de X vérifiant les axiomes suivants :
(i) Toute partie de X contenant un élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.
(ii) L'intersection de deux élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.
(iii) Tout élément de $\mathcal{V}(x)$ contient x.
(iv) Si $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$, $W \subset V$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ pour tout $y \in W$.
Les axiomes (i),...,(iv) définissent une topologie unique pour laquelle $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x. Un ensemble $\varnothing \neq W \subset X$ est ouvert pour cette topologie si et seulement si, pour tout $x \in W$ on a $W \in \mathcal{V}(x)$. Autrement dit si W est un voisinage de ses point de chacun de ses points.

Rappelons qu'un espace topologique E est dit séparé si pour tout $x \in E$, $y \in E$, $x \neq y$, il existe un voisinage V_x de x et un voisinage V_y de y tels que $V_x \cap V_y \neq \emptyset$. Cette condition est équivalente à la suivante :
L'intersection des voisinages fermés d'un point quelconque $a \in E$ est $\{a\}$.

2.2 Voisinage d'un point-Propriétés

Définition 2.2.1
Un ensemble E est dit espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K}$ (réel si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si :
•*E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*
•*E est un espace topologique .*
• *La topologie de E est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E, ce qui signifie :*
$(E.V.T)_1$ • *L'application $(x, y) \to x + y$ de $E \times E \to E$ est continue.*
$(E.V.T)_2$ • *L'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E \to E$ est continue.*
($E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$ étant munis de la topologie produit).

• L'axiome $(E.V.T)_1$ exprime que pour tout voisinage V_{x+y} du point $x + y$, il existe un voisinage V_x de x et un voisinage de y tel que $V_x + V_y \subset V_{x+y}$.
• L'axiome $(E.V.T)_2$ exprime que pour tout voisinage $V_{\lambda x}$ du point λx, il existe un nombre $\beta_x > 0$ et un voisinage V_x de x tel que,

$$\text{si} \quad \forall \mu \in \mathbb{K}, \quad |\mu - \lambda| \leq \beta_x \ \text{ alors } \ \mu V_x \subset V_{\lambda x}$$

.

Remarque 2.2.1
L'abréviation E.V.T dèsignera un espace vectoriel topologique.

Exemples 2.2.1
Un espace normé $(E, ||.||)$ est un E.V.T .

2.3

Soit $a \in E$. La translation $\mathcal{T}_a : x \to x + a$ est une bijection de $E \to E$. D'après $(E.V.T)_1$ $\mathcal{T}_a$ et $\mathcal{T}_a^{-1}$ sont continues et donc $\mathcal{T}_a$ est un homéomorphisme de E dans E.
De même manière, on voit que $\mathcal{T}_\lambda : x \to \lambda x$ est un homéomorphisme de E dans E.

Il en résulte que l'image d'un voisinage de $x \in E$ par $\mathcal{T}_a$ (ou par $\mathcal{T}_\lambda$) est un voisinage de $x + a$ (ou de λx). En déduit que les voisinages du point a sont de la forme : $V + a = V + \{a\}$ où V est voisinage de 0. Notons $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages du point $a \in E$. Pour connaître $\mathcal{V}(a)$ il suffit de connaître $\mathcal{V}(0)$. Nous allons préciser les propriété de $\mathcal{V}(0)$ qui sont liées à la structure des espace vectoriel de E.

Propriétés 2.3.1

$\mathcal{V}_{(1)}$ $*$ si $V \in \mathcal{V}(0)$, il existe $U \in \mathcal{V}(0)$ tel que $U + U \subset V$.

$\mathcal{V}_{(2)}$ $*$ $\mathcal{V}(0)$ est invariant par dilatation (i.e. si $V \in \mathcal{V}(0)$ alors $\lambda V \in \mathcal{V}(0)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda \neq 0$).

$\mathcal{V}_{(3)}$ $*$ Tout élément de $\mathcal{V}(0)$ est absorbant .

$\mathcal{V}_{(4)}$ $*$ Le noyau équilibré d'un voisinage de 0 est un voisinage équilibré de 0 .

$\mathcal{V}_{(5)}$ $*$ Il existe un système fondamental de voisinages équilibrés de 0 (i.e. si $V \in \mathcal{V}(0)$ il existe $W \in \mathcal{V}(0)$ W équilibré $W \subset V$).

$\mathcal{V}_{(6)}$ $*$ Tout élément de $\mathcal{V}(0)$ contient un voisinage ouvert équilibré de 0.

Preuve

1. $\mathcal{V}_{(1)}$ résulte de $(E.V.T)_1$. En effet, $(0,0) \longrightarrow 0 + 0 = 0$. Donc pour tout $V \in \mathcal{V}(0)$ il existe $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(0)$ tels que $U_1 + U_2 \subset V$. D'où $\mathcal{V}_{(1)}$ avec $U = U_1 \cap U_2$.

2. L'application $\mathcal{T}_\lambda \longrightarrow \lambda x$ $(\lambda \neq 0)$ étant un homéomorphisme et $\mathcal{T}_\lambda(0) = 0$ un voisinage de 0 a pour image un voisinage de 0.

3. Soient $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}(0)$ donnés. L'application $\lambda \longrightarrow \lambda x$ de $\mathbb{K} \longrightarrow E$ est continue au point $\lambda = 0$ et V est un voisinage du point $0.x = 0$; il existe un nombre $\beta_x > 0$ tel que $\mu x \in V$ si $|\mu| \leq \beta_x$. Cela montre que V est absorbant. D'où $\mathcal{V}_{(3)}$.

4. Soit $V \in \mathcal{V}(0)$. D'aprés $(E,V,T)_2$, il existe $\alpha > 0$ et $W \in \mathcal{V}(0)$ tels que

$$\mu W \subset V \text{ si } |\mu| \leq \alpha$$

$\mu W (\mu \neq 0)$ est un voisinage de 0 (D'aprés $\mathcal{V}_{(2)}, \mathcal{V}_{(3)}$) ainsi que la réunion :

$$A = \bigcup_{|\mu| \leq \alpha} \mu W \subset V.$$

Mais A est équilibré. En effet, si $|\lambda| \leq 1, (\lambda \neq 0)$

$$\begin{aligned} \text{donc } \lambda A &= \bigcup_{|\mu| \leq \alpha} \lambda \mu W. \\ &= \bigcup_{|\frac{\mu}{\lambda}| \leq \alpha} \mu W \subset \bigcup_{|\mu| \leq \alpha} \mu W. \\ &= A. \end{aligned}$$

Donc le noyau équilibré $\eta(V)$ de V qui contient A (qui est un voisinage de 0) est un voisinage de 0. D'où $\mathcal{V}_4$.

5. Un système fondamental de voisinages équilibrés de 0 *est constitué par l'ensemble* $\mathcal{F}(0) = \{\eta(V) \,/\, V \in \mathcal{V}(0)\}$.

6. Soit $V \in \mathcal{V}(0)$, *contient un voisinage* U *de* 0 *équilibré.*
Soit $\overset{o}{U}$ *l'intérieur de* U. *On a* $\overset{o}{U} \subset U$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ $|\lambda| \leq 1$ $\lambda\overset{o}{U} \subset U \subset V$. *Donc l'enveloppe équilibrée* $\varepsilon(\overset{o}{U}) = \bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda\overset{o}{U}$ *est contenue dans* V *et c'est un ouvert contenant* 0.

Théorème 2.3.1
Dans un (E.V.T) sur ($\mathbb{K}$) *il existe un système fondamental* $\mathcal{F}(0)$ *de voisinages de* 0 *tel que :*

$\mathcal{F}_{(1)}$ *: Tout* $V \in \mathcal{F}(0)$ *est absorbant.*

$\mathcal{F}_{(2)}$ *: Tout* $V \in \mathcal{F}(0)$ *est équilibré.*

$\mathcal{F}_{(3)}$ *: Pour tout* $V \in \mathcal{F}(0)$, *il existe* $U \in \mathcal{F}(0)$ *tel que* $U + U \subset V$.

Preuve
on pose $\mathcal{F}(0) = \{\eta(V) \,/\, V \in \mathcal{V}(0)\}$ *est un système fondamental de voisinage de* 0.

$\mathcal{F}_{(1)}$. *Soit* $U \in \mathcal{F}(0)$. *Alors il existe* $V \in \mathcal{V}(0)$ *tel que* $U = \eta(V)$, *or* $\eta(V)$ *est un voisinage de* 0 *(d'après la propriété* $\mathcal{V}_{(4)}$*) donc* $U = \eta(V) \in \mathcal{V}(0)$. *D'où* U *est absorbant (d'après la propriété* $\mathcal{V}_{(3)}$*).*

$\mathcal{F}_{(2)}$. *Soit* $U \in \mathcal{F}(0)$. *Il existe* $V \in \mathcal{V}(0)$ *tel que* $U = \eta(V)$ *est le noyeau équilibré de* V *donc* U *est équilibré (d'après la propriété* $\mathcal{V}_{(4)}$*).*

$\mathcal{F}_{(3)}$. *Soit* $U \in \mathcal{F}(0)$. *Il existe* $V \in \mathcal{V}(0)$ *tel que* $U = \eta(V)$. *Or* $\eta(V) \in \mathcal{V}(0)$ *donc il existe* $W_1 \in \mathcal{V}(0)$ *tel que* $W_1 + W_1 \subset \eta(V)$ *et on pose que* $W = \eta(W_1)$. *D'où* $W \in \mathcal{F}(0)$ *(d'après la propriété* $\mathcal{V}_{(1)}$*).*

• On peut se demander si une famille de parties d'un espace vectoriel (sur $\mathbb{K}$) possédant les propriétés $\mathcal{F}_{(1)}, \mathcal{F}_{(2)}, \mathcal{F}_{(3)}$ de théorème(2.3.1),on peut définir une topologie sur E compatible avec la structure vectorielle de E. La réponse est fournie par l'énoncé suivant :

Théorème 2.3.2
soit E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$. *Si* $\mathcal{F}$ *est une base de filtre vérifiant* $\mathcal{F}_{(1)}, \mathcal{F}_{(2)}, \mathcal{F}_{(3)}$ *, il existe alors une topologie unique sur* E *compatible avec la structure d'espace vectoriel de* E *et pour la quelle* $\mathcal{F}$ *est un système fondamental de voisinages de 0.*

Preuve

A chaque $x \in E$ *, on associe la famille* $\mathcal{V}(x) = \{V + x \,/\, V \in \mathcal{F}\}$.
Montrons que $\mathcal{V}(x)$ *est un ensemble de voisinages de* x. *Montrer ceci, revient à montrer les axions d'aprés la propositions (2.1.1).*
Soit $x \in E$ *. Nous dirons que la partie* $\varnothing \neq W \subset X = E$ *est un voisinage de* x *si et seulement si,* W *contient une partie de la forme* $V + x$ *où* $V \in \mathcal{V}$.
Maintenant vérifions les axiomes (i),...,(iv) .

(i) Soient $A \subset E$ *et* $x \in A$.
Il existe V *un voisinage de* x *tel que* $V \subset A$ *alors il existe* $W \in \mathcal{F}$ *tel que* $x + W \subset V$ *.*
Donc $x + W \subset A$ *, ainsi* A *est un voisinage de* x.

(ii) Soient W_1 *,* W_2 *deux voisinages de* x. *Alors il existe (*V_1*,*$V_2 \in \mathcal{F}$*) tels que :*
$x + V_1 \subset W_1$ *et* $x + V_2 \subset W_2$. *Comme* $\mathcal{F}$ *est une base de filtre, alors il existe* $V \in \mathcal{F}$ *tel que* $V \subset V_1 \cap V_2$ *donc* $x + V \subset W_1 \cap W_2$. *D'où* $W_1 \cap W_2$ *est un voisinage de* x.

(iii) Soit W *un voisinage de* x. *Alors il existe* $V \in \mathcal{F}$ *tel que* $V + x \subset W$ *.*
Alors $x = 0 + x \in V + x \subset W$.

(iv) Soit W *un voisinage de* x. *Alors il existe* $V \in \mathcal{F}$ *tel que* $x + V \subset W$ *. Or d'après* $\mathcal{F}_3$*, il existe* $U \in \mathcal{F}$ *,* $U + U \subset V$ *et* $x + U$ *et un voisinage de* x.
Soit $y \in x + U$ *. Or on a :* $y + U \subset x + U + U \subset x + V \subset W$.
Il existe donc une topologie unique sur E *pour laquelle* $\mathcal{F}$ *est un système fondamental de voisinages de 0.*
Reste à établir que la topologie ainsi définie est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E*.*

1. *L'application* $\begin{array}{ll} E \times E & \to E \\ (a, b) & \mapsto a + b \end{array}$ *est continue.*

En effet, soit W_{a+b} *un voisinage de* $a+b$. *Alors il existe* $V \in \mathcal{F}$ *tel que* $(a+b)+V \subset W_{a+b}$.
D'aprés $\mathcal{F}_3$ *il existe* $U \in \mathcal{F}$*, telle que* $U + U \subset V$ *et* $a + U$ *est un voisinage de* b.
Donc

$$(U + a) + (U + b) \subset (a + b) + V \subset W_{a+b}$$

. D'où la continuié de l'applicaton considérée.

2. *L'application* $\begin{array}{ll} \mathbb{K} \times E & \to E \\ (\lambda, a) & \mapsto \lambda a \end{array}$ *est continue.*

En effet, on doit établir que pour tout voisinage W *de* λa*, il existe un nombre* $\beta > 0$ *et un voisinage* A *de* a *tels que :*
(*) $\quad \mu x \in W$ *si* $|\mu - \lambda| \leq \beta$ *et* $x \in A$*. Démontrons tout d'abord qu'à tout couple* $(\lambda, V) \in \mathbb{K} \times \mathcal{F}$*, on peut associer* $U \in \mathcal{F}$ *tel que* $\lambda U \subset V$ *. Il existe* $U_1 \in \mathcal{F}$ *avec,*

$$2U_1 \subset U_1 + U_1 \subset V.$$

De même, soit $U_2 \in \mathcal{F}$ *tel que* $U_2 + U_2 \subset U_1$. *D'où*

$$2^2 U_2 \subset 2U_2 + 2U_2 \subset (U_2 + U_2) + (U_2 + U_2) \subset U_1 + U_1 \subset V$$

Par induction, on peut alors trouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *un élément* U *de* $\mathcal{F}$ *tel que* $2^n U \subset V$. λ *étant donné, soit* n *entier vérifiant* $|\lambda| \leq 2^n$. *Comme* U *est équilibré* $2^{-n}\lambda U \subset U \subset V$. *D'où* $\lambda U \subset 2^n U \subset V$. *D'autre part, si* $\lambda a + V \subset W$ *est un voisinage de* λa *il existe* $U \in \mathcal{F}$,

$$U + U + U + U \subset V$$

(appliquer deux fois $\mathcal{F}_3$*). En particulier*

$$U + U + U \subset V$$

Revenons à (*) et écrivons $\mu x - \lambda a$ *sous forme :*

$$\mu x - \lambda a \;=\; (\mu - \lambda)a \;+\; \lambda(x - a) \;+\; (\mu - \lambda\,)(x - a) \quad \textit{Où } \lambda \textit{ et } a \textit{ sont donnés}$$

U *est absorbant alors il existe* $\alpha > 0$ *tel que :*

$$(\mu - \lambda)a \in U \;\; si \;\; |\mu - \lambda| \leq \alpha.$$

Soient $T \in \mathcal{F}$, $\lambda T \subset U$. *Alors il existe* $S \in \mathcal{F}$, $S \subset T \cap U$ *(car* $\mathcal{F}$ *base de filtre)*
On pose $\beta = \min(1, \alpha)$
L'ensemble $A = S + a$ *est un voisinage de* a.
Soit $x \in A$, *on a* $x - a \in S$. *Donc*

$$\lambda(x - a) \in \lambda S \subset \lambda T \subset U$$

De même,

$$(\mu - \lambda)(x - a) \in (\mu - \lambda)S \;\subset\; U, \;\; si \;\; |\mu - \lambda| \leq \beta. \;\; \textit{(puisque S est équilibré)}$$

Conclusion

$$\mu x - \lambda a \in U + U + U \subset V \textit{ si } x \in A \quad |\mu - \lambda| \leq \beta.$$

D'où,

$$\mu x \in V + \lambda a \subset W \quad si \quad x \in A \quad |\mu - \lambda| \leq \beta.$$

Exemples 2.3.1
Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ *muni de la topologie grossière est un* $E.V.T$.
Par contre, E *muni de la topologie discrète n'est pas un* $E.V.T.$

2.4 Espace vectoriel topologique séparé

Un espace vectoriel topologique E est dit séparé si sa topologie est séparée . Le fait que la topologie de E soit compatible avec la structure d'espace vectoriel de E permet de remplacer les conditions du rappels topologique pour espace vectoriel topologique séparé par des conditions plus simples.

Proposition 2.4.1

a) Dans un espace vectoriel topologique E, tout voisinage de 0 *contient un voisinage fermé (donc les voisinages fermés de* 0 *forment un système fondamental de voisinage de* 0*).*

b) E est séparé si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

(S_1) *Pour tout* $a \neq 0$ $a \in E$, *il existe un voisinage de* 0 *ne contenant pas le point* a.
(S_2) *L'intersection des voisinages fermés de* 0 *se réduit à* $\{0\}$.
(S_3) $\{0\}$ *est fermé.*

Preuve

a) Soit V *un voisinage de* 0. *Il existe un voisinage équilibré* U *de* 0, $U + U \subset V$ *(car,* V *contient un élément de* $\mathcal{F}(0)$ *et* $\mathcal{F}_3$ *est vérifiée). L'adhérence* $\overline{U}$ *de* U *est un voisinage de* 0 *et on a* $\overline{U} \subset V$. *En effet, si* $x \in \overline{U}$ *alors* $x + U$ *est un voisinage de* x *et* $(x + U) \cap U \neq \varnothing$ *; cela entraîne l'existence d'un* $y \in U$ *tel que* $x + y \in U$, U *étant équilibré,* $-y \in U$ *et* $x \in -y + U \subset U + U \subset V$. *D'oú* $\overline{U} \subset V$.

b) 1. Si E est séparé, (S_1) *et* (S_2) *sont vérifiées. Réciproquement supposons* S_1 *est vérifiée. Montrons tout d'abord qu'il existe un voisinage* W *de* $a \neq 0$ *et un voisinage* U *de* 0 *disjoints. Soit* V *un voisinage de* 0 *ne contenant pas* a. *Il existe un voisinage équilibré* U *de* 0, $U + U \subset V$, $U + a$ *est un voisinage de* a *et on a :*

$$(1) \quad U \cap (U + a) = \varnothing$$

Si a *et* b *sont deux points quelconques* $a \neq b$ *il existe d'aprés le résultat ci-dessus, un voisinage* $V_{a-b} + b$ *de* $a - b$ *et un voisinage* U *de* 0, *tels que* $U \cap V_{a-b} = \varnothing$. *Or* V_{a-b} *est un voisinage de* a, $U + b$ *est un voisinage de* b, *et*

$$(V_{a-b} + b) \cap (U + b) = \varnothing$$

Donc E est séparé.

2. Soit $(\bigcap_{i\in I} F_i)$ l'intersection de voisinages fermés de 0. Si $\bigcap_{i\in I} F_i = \{0\}$, E est séparé. En effet, soit $a \neq 0 \;\; a \in E$. Il existe au moins un voisinage fermé F_i qui ne contient pas a. D'où la conclusion d'aparès $S(1)$.

3. Soit E un E.V.T. (sur $\mathbb{K}$) tel que $\{0\}$ soit fermé. $E \setminus \{0\}$ est ouvert et si $a \neq 0 \;\; a \in E$, il existe un voisinage V_a de a ne contenant pas le point 0. On a $V_a = a + U$, où U est un voisinage de 0. Le noyau équilibré $\eta(U)$ de U est un voisinage 0 qui ne contient pas le point a (sinon $-a \in \eta(U) \subset U et - a + a = 0 \in V_a$). Donc E est séparé d'aprés $S(1)$.

Exemples 2.4.1
E = L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Nous munissons E de la topologie suivante :
Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble :

$$V_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; |x| < \varepsilon\}$$

est appelé voisinage de 0.
D'aprés le théorème (2.3.2), on constate aussitôt que la base de filtre $\mathcal{F} = \{V_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ permet de munir E d'une structure d' E.V.T. E est alors non séparé, car ((S_1)) est en défaut pour tout point $a = (0, y)$. Ou encore ((S_3)) en défaut car l'intersection des voisinages fermés de 0 est

$$\{(0, y) \; / \; y \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}.$$

2.4.1 Quelques proriétés topologiques élémentaires

Soit E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K}$.

Propriétés 2.4.1
L'adhérence d'une partie équilibrée M de E est équilibrée.

Preuve
En effet, l'application $\begin{array}{ll} \mathbb{K} \times E & \to E \\ (\lambda, x) & \to \lambda x \end{array}$ *est continue et elle applique* $\{\lambda \in \mathbb{K} \; / \; |\lambda| \leq 1\} \times M$ *dans M. Donc, elle applique* $\{\lambda \in \mathbb{K} \; / \; |\lambda| \leq 1\} \times \overline{M}$ *dans $\overline{M}$.*

Remarque 2.4.1
Soit U un voisinage de 0. U contient un voisinage fermé V, et V contient un voisinage équilibré W. L'adhérence $\overline{W}$ de W étant équilibrée et $\overline{W} \subset V \subset U$, on en déduit que dans E.V.T. il existe un système fondamental de voisinages de 0 constitué par des voisinages fermés et équilibrés de 0.

Remarque 2.4.2
1.L'intérieur $\overset{o}{A}$ d'une partie équilibrée A est équilibré si seulement si $0 \in \overset{o}{A}$.

En effet, 1. La condition est évidement nécessaire. D'autre part si $|\lambda| \leq 1$, on a : $\lambda\overset{o}{A} \subset \lambda A \subset A$. Si $\lambda \neq 0$ $|\lambda| \leq 1$, $\lambda\overset{o}{A}$ est une partie ouverte de A et $\lambda\overset{o}{A} \subset \overset{o}{A}$. Cette dernière inclusion est aussi valable pour $\lambda = 0$. D'où la résultat.

Propriétés 2.4.2

Si A est un ouvert non vide de E, et si B est une partie quelconque (non vide) de E, alors $A + B$ est ouvert.

En effet, le translaté d'un ouvert est ouvert . Donc $b + A$ est ouvert et par conséquent

$$B + A = \bigcup_{b \in B} (b + A)$$

est ouvert.

Preuve

Soit $(K_j)_{j \in J}$ une famille de convexes.
Soit $x, y \in \bigcap_{j \in J} (K_j)$. Alors $x, y \in (k_j)$ $\forall j \in J$. Or les K_j sont des convexes donc $\forall \lambda \in [0, 1]$ on a, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K_j$ $\forall j \in J$. D'où $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_{j \in J} K_j$.

Remarque 2.4.3

La somme de deux fermés (non vide) n'est pas fermée en général.

Exemples 2.4.2

$E = \mathbb{R}^2$
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 1 \ \ x > 0, y > 0\}$
$B =] - \infty, 0]$
$A + B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0 \ \ xy \leq 1\}$
Par contre, on a :

Propriétés 2.4.3

Si E est séparé, $A \subset E$ fermé, $K \subset E$ compact (A, K non vides), alors $A + K$ est fermé. Cette propriété va résulter des lemmes suivants :

Lemme 2.4.1

Si V est un voisinage de K, il existe un voisinage U de 0 tel que, $K + U \subset V$ (L'énoncé est faux en général, si on remplace K compact par K fermé).

Preuve

Pour tout $x \in K$, il existe un voisinage ouvert équilinré U_x de 0 tel que $x + U_x + U_x \subset V$. En effet, V étant un voisinage de K, il existe $W \in \mathcal{V}(0)$ tel que $x + W \subset V$. Soit U_x un voisinage ouvert équilibré de 0 tel que $U_x + U_x \subset W$ d'où $x + U_x + U_x \subset V$. La *famille d'ouverts $(x + U_x)_{x\in K}$ est un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire un recouvrement fini :*

$$x_1 + U_{x_1}, \dots, x_n + U_{x_n}$$

Posons, $U = \bigcap_{j=1}^{n} U_{x_j}$ *est un voisinage de* 0 *(ouvert, équilibré). On a* $K + U \subset V$*. En effet, soient* $a \in K$ *et* $u \in U$*, il existe* $j \in \mathbb{N}$*,* $1 \le j \le n$ *tel que* $a \in x_j + U_{x_j}$*. Or,* $u \in U \subset U_{x_j}$*. D'où*

$$a + u \in x_j + U_{x_j} + U_{x_j} \subset V$$

Remarque 2.4.4

L'exemple $E = \mathbb{R}^2$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *),* $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 0\}$ *et* $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy < 1\}$*, montre que l'énoncé est faux si* K *est fermé.*

Lemme 2.4.2

Soient $A \neq \varnothing$ *une partie fermée de* E *et* $K \subset E$ *compact (non vide) tels que* $A \cap K = \varnothing$*. Il existe un voisinage* U *de* 0 *tel que*

$$(A + U) \bigcap (K + U)$$

Preuve

A^c *est un voisinage de* K*. Le lemme 1 montre qu'il existe un voisinage* V *de* 0 *tel que* $((K + V) \cap A = \varnothing$*. Soit* U *un voisinage équilibré de* 0 *avec* $U + U \subset V$*. On a* $(K + V) \bigcap (A + U) = \varnothing$ *. Sinon, il existerait* $b \in K, a \in A, u_1, u_2 \in U$ *avec* $b + u_1 = a + u_2$*. Mais* $b + u_1 - u_2 = a \in A$*, et* $b + u_1 - u_2 \in K + U + U \subset K + V$ *(car* $-u_2 \in U$ *puisque* U *est équilibré). D'où une contradiction.*

Achevons la démonstration de la proriété (...).

Soit $x \notin A + K$*, on a*

$$(x - A) \bigcap K = \varnothing.$$

$x - A$ *étant fermé, il existe un voisinage* V *de* 0 *tel que (Lemme 2)*

$$(x - A + V) \bigcap (K + V) = \varnothing$$

Or $0 \in V$*, la derniére égalité entraine :*

$$(x - A + V) \cap K = \varnothing$$

$$(x + V) \cap (A + K) = \varnothing$$

Comme $x + V$ *est un voisinage de* x*, on en déduit que* $(A + K)^c$ *est ouvert. Donc* $A + K$ *est fermé.*

Propriétés 2.4.4

Dans un E.V.T E, l'enveloppe équilibrée d'un fermé F n'est pas néssairement fermée.
Par contre si E est séparé et $K \subset E$ compact (non vide), l'enveloppe équilibrée $\varepsilon(K)$ de K est compacte.

L'exemple suivant justifie la première partie.

Exemples 2.4.3

$E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = a > 0\}$
$\varepsilon(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |y| \leq a \ \ y \neq 0\} \bigcup \{0\}$

Pour la deuxième partie, remarquons que $\varepsilon(K) = \bigcup\limits_{|\lambda| \leq 1} \lambda K$ est l'image de $\{\lambda \in K \ / \ |\lambda| \leq 1\} \times K$ par l'application continue $(\lambda, x) \to \lambda x$. Le produit de deux compacts étant compact, $\varepsilon(K)$ est compacte.

Propriétés 2.4.5

Un E.V.T E (sur $\mathbb{K}$) est connexe par arcs (donc connexe).

Preuve

En effet, x et y étant donnés dans E, l'application

$$f : [0, 1] \to E$$

définie par $\alpha \to \alpha x + (1 - \alpha)y$ est continue, $f(1) = x, f(0) = y$.

Propriétés 2.4.6

2.Si A est une partie convexe de E, alors $\overline{A}$ est convexe.

Preuve

2. L'application $(a, b) \to \alpha a + \beta b$ de $E \times E \to E$, étant continue pour tout voisinage W de $\alpha x + \beta y$ $(\alpha > 0, \beta > 0 \ \ \alpha + \beta = 1 \ \ x \in \overline{A}, \ y \in \overline{A})$ il existe un voisinage V_x et un voisinage V_y de y tels que

$$\alpha V_x + \beta V_y \ \subset W$$

Soient $a \in V_x \cap A \neq \emptyset$, $b \in V_y \cap A \ \neq \emptyset$. Alors, $\alpha a + \beta y \in A$ et $\alpha a + \beta b \in W \cap A$. Donc, $W \cap A$ n'est pas vide. Comme W est un voisinage arbitraire de $\alpha x + \beta y$, il en résulte que $\alpha a + \beta y \in \overline{A}$.

Propriétés 2.4.7

Soient A une partie convexe, équilibrée, absorbante de E et J_A la jauge de A (qui est une semi norme sur E). On a :
a) J_A est continue $\Leftrightarrow$ A est un voisinage de 0.
b) Si J_A est continue alors

$$\overset{o}{A} = \{x \in E \, / \, J_A(x) < 1\}$$

$$\overline{A} = \{x \in E \, / \, J_A(x) \leq 1\}$$

Preuve

a) On a les inclusions

$$(1)\ \{x \in E \,/\, J_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E \,/\, J_A(x) \leq 1\}$$

Si J_A est continue. Alors le premier ensemble figurant dans (1) *et ouvet et A est un voisinage de* 0*. Réciproquement si A est un voisinage de* 0*, alors pour tout $\varepsilon > 0$ εA est un voisinage de* 0 *et par conséquent $\{x \in E \,/\, J_A(x) \leq \varepsilon\} \supset \varepsilon A$ est un voisinage de* 0*. Celà entraine la continuité de J_A à l'origine.*

La continuité à l'origine entraîne la continuité partout. En effet, J_A est une semi-norme.Soit $x_0 \in E$, il suffit de vérifier que pour $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que

$$|J_A(y) - J_A(x_0)| \leq \varepsilon, \quad si\, y \in V_{x_0}.$$

Or, $|J_A(y) - J_A(x_0)| \leq J_A(y - x_0)$ et J_A est continue au point 0*. Il existe un voisinage U de* 0 *tel que $J_A(x) \leq \varepsilon$ si $x \in U$. L'inégalité $|J_A(y) - J_A(x_0)| \leq \varepsilon$ est alors réalisée si $y \in x_0 + U = V_{x_0}$.*

Propriétés 2.4.8

Soit E un $E.V.T$ (sur $\mathbb{K}$). Si q est une semi-norme sur E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- q est continue au point 0*.*

2- q est continue sur E.

3- $\{x \in E \,/\, q(x) < 1\}$ est un ouvert.

4- $\{x \in E \,/\, q(x) < 1\}$ est un voisinage de 0*.*

5- $\{x \in E \,/\, q(x) \leq 1\}$ est un voisinage de 0*.*

Propriétés 2.4.9

Soient E un $E.V.T.$ (sur $\mathbb{K}$) et p, q deux semi-normes sur E telles que $q \leq p$. Si p est continue alors q est continue.

En effet,

$$\{x \in E \,/\, q(x) \leq 1\} \supset \{x \in E \,/\, p(x) \leq 1\}$$

Le dernier ensemble est un voisinage de 0*, car p est continue. Le premier ensemble est donc un voisinage de* 0*. Donc q est continue.*

CHAPITRE 3

LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONVEXES

Un grand nombre d'E.V.T qu'on rencontre en analyse possèdent un système fondamental de voisinages convexes de 0. Leur topologie peut d'ailleurs être définie à partie d'une famille de semi- normes, ce qui facilite leur étude. Dans ce chapitre, nous étudions la structure de ces espaces.

3.1 Voisinages de 0 - Tonneaux

Définition 3.1.1
Un E.V.T (sur $\mathbb{K}$) est dit localement convexe si 0 possède un système fondamental de voisinages convexes (Il en sera alors ainsi pour tout point).

Définition 3.1.2
Un sous-ensemble T d'un E.V.T est dit tonneau si T est convexe, absorbant, fermé et équilibré.

Exemples 3.1.1
Un espace normé est localement convexe. Les boules fermées centrées en 0 sont des tonneaux.

Proposition 3.1.1
Dans un E.V.T (sur $\mathbb{K}$) localement convexe, il existe un système fondamental de voisinages de 0 constitué par des tonneaux.

Preuve
Soit W un voisinage de 0. Nous allons montrer que W contient un voisinage équilibré, convexe, fermé de 0.D'aprè (2.4.1), W contient un voisinage fermé V de 0. L'espace étant localement convexe, V contient un voisinage convexe U de 0 et $\overline{U} \subset V$ (car V est fermé). Le noyau équilibré $\eta(\overline{U})$ de $\overline{U}$ est donné par :

$$\eta(\overline{U}) = \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda\overline{U} \subset \overline{U} \subset V \subset W$$

$\eta(\overline{U})$ est fermé (L'intersection des fermés), convexe et absorbant ($\lambda\overline{U}$ est convexe). D'où la proposition.

Proposition 3.1.2
Soient E un espace vectoriel (sur $\mathbb{K}$), $\mathcal{B}$ une famille de parties absorbantes, équilibrées, et convexes de E. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des intersections finies des parties de la forme λV, $\lambda > 0, V \in \mathcal{B}$ (i.e. $W \in \mathcal{F}$ si et seulement si, $W = \lambda_1 V_1 \cap \lambda_1 V_1 \cap \ldots \cap \lambda_n V_n$, $(\lambda_j > 0)$, $V_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, \ldots, n$, $n \geq 1$ arbitraire). Il existe alors une topologie (unique) sur E (compatible avec la structure d'espace vectoriel de E) pour laquelle E est un E.V.T localement convexe, et $\mathcal{F}$ un système fondamental de voisinages de 0.

Preuve
En effet, les propriétés : absorbant, équilibré, convexe, sont vérifiées pour les éléments de $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ est aussi une base de filtre. La proriété $\mathcal{F}_3$ du théorème (2.3.1) est aussi vérifiée. Car si $V \in \mathcal{F}$ on a : $\frac{1}{2}V \in \mathcal{F}$, et $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subset V$ (puisque V est convexe).

Remarque 3.1.1
Si $\mathcal{B}$ est une base de filtre, on pourra choisir pour $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties de la forme λV avec $\lambda > 0$ et $V \in \mathcal{B}$.

3.2 Construction d'un tonneau à partir d'un voisinage

Soit E un E.V.T. Soit U un voisinage de 0. Considérons l'enveloppe équilibrée $\varepsilon(U)$ de U(d'après la proposition 1.3.1). Si $\overline{c} = \overline{c}\,[\varepsilon(U)]$ est l'adhérence de l'enveloppe convexe

de $\varepsilon(U)$ (d'après la proposition 1.5.1), alors $\overline{c}$ est un tonneau.
En effet, il suffit seulement de vérifier que $\overline{c}$ est absorbante et équlibrée :
$\overline{c}$ est absorbante, car c'est un voisinage de 0.
$\overline{c}$ est équilibrée. En effet, d'après (2.4.1 ; 2.4.6) il suffit de montrer que $c\,[\varepsilon(U)]$ est équilibrée.
Or $c\,[\varepsilon(U)]$ identique à l'ensemble des barycentres $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ affectés des masses positives $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ avec, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n = 1$, $x_k \in \varepsilon(U)$. Donc, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$, on a :

$$\lambda x \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\lambda x_k) \; et \; \lambda x_k \in \varepsilon(U)$$

D'où $\lambda x \in c\,[\varepsilon(U)]$ pour $|\lambda| \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
En résumé,

$$\begin{array}{lcl} U & \longrightarrow \varepsilon(U) \longrightarrow & c\,[\varepsilon(U)] \\ \cap & & \swarrow \\ c\,[\varepsilon(U)] & & \end{array}$$

3.3 Topologie définie par une famille de semi-normes

3.3.1

Soient E un espace vectoriel (sur $\mathbb{K}$) et $(q_i)_{i \in I}$ une famille de semi-normes sur E. Posons pour tout $i \in I$:

$$V_i = \{x \in E \,/\, q_i(x) \leq 1\,\}$$

V_i est convexe, équilibré, absorbant. On est dans la situation de la proposition 3.2.1. On peut donc munir E d'une structure d'E.V.T localement convexe. Un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par des convexes de la forme :

$$(1) \qquad \lambda_1 V_{i_1} \cap \ldots \cap \lambda_n V_{i_n}$$

($\lambda_k > 0$, $k = 0, \ldots, n$, $\{i_1, \ldots, i_n\}$ partie finie de I).
Un voisinage W de 0 est alors un ensemble qui contient une partie de forme (1). Ainsi,

$$W_{i_1,\ldots,i_n;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \;\supset \bigcap_{j=1}^{n} \lambda_j V_{i_j} \;=\; \{x \in E \;/\; q_{i_j}(x) \leq \lambda_j \;, 1 \leq j \leq n\}$$

Remarque 3.3.1
Un ensemble de la forme

$$\lambda \bigcap_{j=1}^{n} V_{i_j} \;(\lambda > 0)$$

est convexe, équilibré, absorbant, et c'est un voisinage de 0. Or, on a :

$$\lambda_1 V_{i_1} \cap \ldots \cap \lambda_n V_{i_n} \supset (\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i) \bigcap_{j=1}^{n} V_{i_j}$$

Donc, la famille des ensembles de la forme :

$$\lambda \bigcap_{j=1}^{n} V_{i_j} = \{x \in E \ / \ q_{i_j}(x) \leq \lambda_j \ , 1 \leq j \leq n\}$$

forment un système fondamental de voisinages convexes de 0. Ainsi, $W_{i_1,\ldots,i_n,\lambda}$ *est voisinage de* 0 *si :*

$$W_{i_1,\ldots,i_n,\lambda} \supset \lambda \bigcap_{j=1}^{n} V_{i_j} = \{x \in E \ / \ q_{i_j}(x) \leq \lambda_j \ , 1 \leq j \leq n\}$$

Remarque 3.3.2

• *Pour la topologie ainsi définie, toutes les semi-normes de la famille de semi-normes considérée sont continues d'après la propriété(2.4.7)*

• *Réciproquement, considérons un E.V.T. E (sur* $\mathbb{K}$*) localement convexe, et vérifions si la topologie de E provient d'une famille de semi-normes. Soit* $(V_i)_{i \in I}$ *une famille de tonneaux formant un système fondamental de voisinages de* 0 *(prop....). Soit* J_{V_i} *la jauge de* V_i*.* J_{V_i} *est une semi-norme sur* E*, elle est continue, car* V_i *est un voisinage de* 0 *( ). La famille de semi-normes* $(J_{V_i})_{i \in I}$ *définit alors la topologie initiale de* E*. Car*

$$V_i = \{x \in E \, / \, J_{V_i}(x) \leq 1\}.$$

Théorème 3.3.1

Une famille $(q_i)_{i \in I}$ *de semi-normes sur un espace vectoriel (sur* $\mathbb{K}$ *) permet de munir E d'une structure d'E.V.T localement convexe. Un sysème fondamental de voisinages convexes, équilibrés, fermés de* 0 *est constitué par la famille des voisinages des tonneaux :*

$$\lambda \bigcap_{j=1}^{n} V_{i_j} = \{x \in E \ / \ q_{i_j}(x) \leq \lambda \ , i_j \in I, \, 1 \leq j \leq n \, n quelconque\}$$

Réciproquement, la topologie d'un E.V.T localement convexe peut être définie à partir d'une famille de semi-normes.

Remarque 3.3.3

Soit E un E.V.T localement convexe dont la topologie est définie par la famille de semi-normes $(q_i)_{i \in I}$*. Dire que la suite* $(x_n)_{n \geq 1}$ *d'éléments de E converge vers zéro, signifie que pour tout voisinage W de* 0*, il existe un nombre* n_0 *tel que pour toute* $n \leq n_0$ *tel que*

$x_n \in W$. Traduisons ce fait en utilisant les semi-normes (q_i). Soit $\varepsilon > 0$ donné. L'ensemble $\{x \in E \,/\, q_i(x) \leq \varepsilon\} = W$ est un voisinage de 0 pour tout $i \in I$. Il existe donc un nombre $n_0(i, \varepsilon)$ pour tout $n \geq n_0$ $x_n \in W$, c'est-à-dire,$\forall n \geq n_0$ $q_i(x_n) \leq \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} q_i(x_n) = 0$ pour tout $i \in I$. Réciproquement, cette derniére propriété entraine que x_n converge vers 0.

Proposition 3.3.1
Soit E un E.V.T dont la topologie est définie par une famille de semi-normes $(q_i)_{i \in I}$. E est séparé si et seulement si, pour tout $x_0 \neq 0$ $x_0 \in E$, il existe $i_0 \in I$ tel que $q_{i_0}(x_0) \neq 0$.

Preuve
En effet, si $q_{i_0}(x_0) = \alpha > 0$, l'ensemble $\{x \in E \,/\, q_{i_0}(x_0) \leq \frac{\alpha}{2}\}$ est un voisinage de 0 qui ne contient pas x_0. Donc E est séparé. Réciproquement si E est séparé, il existe un voisinage W de 0 qui ne contient pas $x_0 \neq 0$, W contient un ensemble de la forme $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \{x \in E \,/\, q_{i_k}(x) \leq \alpha\}$. Donc il existe un indice $i_k \in I$ avec $q_{i_k}(x_0) \neq 0$ (Dans le cas contraire $x_0 \in W$).

3.4 E.V.T localement convexes métrisables

Soit $(E, ||\ ||)$ un espace normé. E est localement convexe et sa topologie est définie par une seule semi-norme (ici une norme). Il existe en outre un système dénombrable de voisinages convexes de 0 à savoir les boules centrées en 0 et de rayon $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. On peut se demander si la topologie d'un E.V.T E localement convexe est métrisable, à condition que la famille de semi-normes qui définit la topologie de E soit dénombrable. En général, dans ce cas, la topologie de E ne peut définie á partir d'une seule semi-norme. Mais si E est séparé, on peut être définir une métrique sur E de sorte que la topologie définie par cette métrique soit la même que la topologie initiale de E. C'est l'objet de ce paragraphe.

Définition 3.4.1
Deux familles de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$, $(q_i)_{i \in I}$ sur un espace vectoriel E sont dites équivalementes si elles définissent la même topologie localement convexe sur E.

Cela la signifie que si W est un voisinage de 0 pour la topologie définie par l'une des familles, alors W est un voisinage de 0 pour la topologie définie par l'autre famille.

Exemples 3.4.1

Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une de suite de semi-normes sur l'espace vectoriel E. Considérons la suite croissante de semi-norme $(q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} q_0 = \quad q_1 &= p_0 \\ q_2 &= \max(p_0, p_1) \\ &\vdots \\ q_n &= \max(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) \end{aligned}$$

Les deux familles $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont alors équivalentes. En effet, soit $\mathcal{F}$ la topologie localement convexe de E définie par les (p_i) et $\mathcal{F}'$ celle définie par les q_i. Soit W un voisinage de 0 pour $\mathcal{F}$. Il existe des indices $i_1, \dots, i_n$, N, et $\lambda > 0$ tels que

$$W \supset \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in E \,/\, p_{i_j}(x) \leq \lambda\} \supset \{x \in E \,/\, q_N(x) \leq \lambda\}$$

Le dernier ensemble est un voisinage de 0 pour $\mathcal{F}'$. Donc $\mathcal{F}'$ est plus fine que $\mathcal{F}$. D'une maniére analogue, on vérifie que $\mathcal{F}$ est plus fine que $\mathcal{F}$. Finalement $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Proposition 3.4.1

• *Si la topologie d'un E.V.T séparé E est définie par une seule semi-norme q, alors q est une norme et E est espace normé.*

• *Si la topologie de E est défine par une famille finie de semi-normes $q_1, \dots, q_n$, la topologie de E peut être définie par une seule semi-norme (par exemple $q = \max(q_1, \dots, q_n)$ ou $p = \sum_{i=1}^{n} q_i$).*

Preuve

E est séparé, donc d'après (3.3.1) *pour tout $x \neq 0$ on a $q(x) \neq 0$ et q est une norme. La dernière partie résulte des inégalités :*

$$q_i \leq q \leq p \leq nq \quad (1 \leq i \leq n)$$

Théorème 3.4.1

Un E.V.T (sur $\mathbb{K}$) localement convexe séparé dont la topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est métrisable.

Preuve

On peut supposer $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante (quitte à remplacer la suite q_n par une suite équivalente (3.4.1) . Considérons l'application :

$$\begin{array}{llll} \delta : & E & \to \mathbb{R}+ & \\ & x & \to \delta(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{q_n(x)}{1+q_n(x)} & (q_n \leq q_{n+1},\, n = 0, 1, \ldots) \end{array}$$

La série étant majorée par $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ est convergente pour tout $x \in E$.
L'application δ possède les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1.1 & (\delta(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \\ 1.2 & \delta(x) = \delta(-x) \\ 2.1 & \delta(x+y) \leq \delta(x) + \delta(y) \\ 2.2 & \delta(\lambda x) \leq \delta(x) \text{ si } |\lambda| \leq 1 \ (\lambda \in \mathbb{K}) \end{array}$$

Démonstration :
1.1 Si $x = 0$, on a $q_n(0) = 0$ pour tout n. Donc $\delta(0) = 0$. Si $x \neq 0$, l'espace E étant séparé, il existe un indice n_0 tel que $q_{n_0}(x) \neq 0$ (d'aprés la proposition 3.3.1). Donc $\delta(x) \neq 0$, alors on a l'équivalence $(\delta(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.
1.2 On a $q_n(x) = q_n(-x)$ pour tout n. Donc $\delta(x) = \delta(-x)$.
2.1

$$\text{On a les inégalités : } \begin{cases} q_n(x+y) & \leq q_n(x) + q_n(y) \\ \frac{a+b}{1+a+b} & \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \ (a, b \geq 0) \end{cases}$$

et du fait que l'application $t \longmapsto \frac{t}{1+t}$ définie sur $]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante, on obtient :

$$\frac{q_n(x+y)}{1+q_n(x+y)} \leq \frac{q_n(x)+q_n(y)}{1+q_n(x)+q_n(y)} \leq \frac{q_n(x)}{1+q_n(x)} + \frac{q_n(y)}{1+q_n(y)}$$

D'où $\delta(x+y) \leq \delta(x) + \delta(y)$.
2.2 Si $|\lambda| \leq 1$,

$$\frac{q_n(\lambda x)}{1+q_n(\lambda x)} \leq \frac{q_n(x)}{1+q_n(x)}$$

(car $q_n(\lambda x) = |\lambda| q_n(x)$). D'où $\delta(\lambda x) \leq \delta(x) \quad (|\lambda| \leq 1)$.
3. Les propriétés de δ montrent que l'application

$$\begin{array}{lll} p : & E \times E & \to \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) & \to p(x, y) = \delta(x-y) \end{array}$$

est une métrique sur E invariante par translation :

$$p(x+a, y+a) = p(x, y)$$

4. La topologie $\mathcal{F}'$ définie par p sur E est la topologie initiale $\mathcal{F}$ de E. Il suffit d'établir que tout voisinage de 0 pour $\mathcal{F}'$ est un voisinage de 0 pour $\mathcal{F}$ et réciproquement. Comme p est invariante par translation en il résultera $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ considérons la boule

$$U_k = \{x \in E \,/\, p(x,0) \leq \frac{1}{2^k}\}$$

et le voisinage $V_k = \{x \in E \,/\, q_{k+1}(x) \leq \frac{1}{2^{k+2}}\}$. Alors on a $V_k \subset U_k$.En effet, si $x \in V_k$, alors

$$q_0(x) \leq q_1(x) \leq \ldots \leq q_{k+1}(x) \leq \frac{1}{2^{k+2}}$$

$$\frac{q_n}{1+q_n(x)} \leq q_n(x) \leq \frac{1}{2^{k+2}} \; (n \leq k+1).$$

Donc,

$$\begin{aligned} p(x,0) &= \left(\sum_{n=0}^{k+1} \tfrac{1}{2^n} \tfrac{q_n(x)}{1+q_n(x)}\right) + \left(\sum_{n=k+2}^{+\infty} \tfrac{1}{2^n} \tfrac{q_n(x)}{1+q_n(x)}\right) \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{k+1} \tfrac{1}{2^n} \tfrac{1}{2^{k+2}}\right) + \left(\sum_{n=k+2}^{+\infty} \tfrac{1}{2^n}\right) \\ &\leq \tfrac{1}{2^{k+2}} \left(\sum_{n=0}^{k+1} \tfrac{1}{2^n}\right) + \tfrac{1}{2^{k+1}} \leq \tfrac{1}{2^{k+1}} + \tfrac{1}{2^{k+1}} = \tfrac{1}{2^k} \end{aligned}$$

et $x \in U_k$. Ainsi, pour tout voisinage de 0 (pour $\mathcal{F}'$) contient un voisinage de 0 (pour $\mathcal{F}$). Réciproquement, un voisinage W_1 de 0 pour $\mathcal{F}$ contient un voisinage W de 0 pour $\mathcal{F}$ de la forme :

$$W_1 \subset W = \{x \in E \,/\, q_m(x) \leq \frac{1}{2^k}\} \; (m, k\ )\text{entiers}$$

et W contient la boule

$$V = \{x \in E \,/\, p(x,0) \leq \frac{1}{2^{m+n+1}}\}$$

En effet, si $x \in V$, alors

$$\frac{1}{2^m} \frac{q_m(x)}{1+q_m(x)} \leq \frac{1}{2^{m+k+1}}$$

D'où $\frac{q_m(x)}{1+q_m(x)} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ qui entraîne $q_(x) \leq \frac{1}{2^k}$ et $x \in W \subset W_1$.

Remarque 3.4.1
Si λ_n converge vers 0 dans $\mathbb{K}$, alors $p(\lambda x, 0)$ converge vers zéro pour tout $x \in E$. En effet, $\lambda_n x \to 0$ (pour $\mathcal{F}$).

Le théorème 3.4.1 peut être énoncé comme suit :
Un E.V.T (sur $\mathbb{K}$) séparé, localement convexe, qui admet un système démombrable de voisinages convexes de 0 est métrisable (en vertu de la réciproque du théorème 3.3.1).

Remarque 3.4.2
Une démonstration plus fine permet de montrer le théorème suivant :
Soit un E un E.V.T séparé. S'il existe un système fondamental dénombrale de voisinages de

0, alors la topologie de E peut être définie à partir d'une métrique invariante par translation.

3.5 Sous-ensembles bornés

3.5.1

On sait que dans un espace normé, un sous-ensemble A est dit borné s'il est contenu dans une boule de centre 0 et de rayon $R < +\infty$. Il en résulte que pour tout voisinage ω de 0, on peut trouver un nombre $\alpha > 0$ tel que $A \subset \alpha\omega$. Cette dernière propriétié sert comme définition des bornés dans un E.V.T.

Définition 3.5.1
Soit E un E.V.T (sur $\mathbb{K}$). Un sous-ensemble A de E est dit borné, si pour tout voisinage V de 0, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $A \subset \lambda V$ pour tout $|\lambda| \geq \alpha$ ($\lambda \in \mathbb{K}$).
On dit alors que V absorbe A.

Remarque 3.5.1
A est borné si les éléments d'un système fondamental de voisinages de 0 absorbent A.

Propriétés 3.5.1
P_1- Si V est un voisinage équilibré de 0 et A un sous -ensemble borné de E, alors l'inclusion $A \subset \lambda V$ pour tout $|\lambda| \geq \lambda_0 > 0$ est réalisée à condition que $A \subset \lambda_0 V$. En effet $|\lambda| \geq \lambda_0$ entraîne $|\lambda^{-1}\lambda_0| \geq 1$ et $\lambda^{-1}\lambda V \subset V$ (car V est équilibré). Donc $A \subset \lambda_0 V$ entraîne $A \subset \lambda(\lambda^{-1}\lambda_0)V \subset \lambda V$.
P_2- Un sous-ensemble contenu dans un ensemble borné est lui-même borné.
P_3- Un ensemble réduit à un point est borné (car tout voisinage de 0 est absorbant).
P_4- Une réuion finie de sous-ensembles bornés est bornée.
P_5- L'adhérence $\overline{A}$ d'un sous-ensemble borné A est borné.
En effet, soit ω un voisinage de 0 ; ω contient un voisinage fermé V. Or A étant borné, il existe $\alpha > 0$ tel que $A \subset \lambda V$ $(|\lambda| \geq \alpha)$ et par conséquent $\overline{A} \subset \overline{\lambda V} = \lambda V \subset \lambda\omega$. C'est-à-dire tout voisinage de 0 absorbe $\overline{A}$.
P_6- Soit E localement convexe dont la topologie est définie par une famille de semi-normes $(q_i)_{i\in I}$. La partie $A \subset E$ est bornée si et seulement si chaque semi-norme q_i est bornée sur A (i.e. $\sup\limits_{x\in A} q_i(x) = M_i < +\infty$).
En effet, si A est borné, pour tout $i \in I$ il existe $\lambda_i > 0$ tel que

$$A \subset \lambda_i\{x \in E \,/\, q_i(x) \leq 1\} = \{x \in E \,/\, q_i(x) \leq \lambda_i\}$$

Donc, $\sup_{x \in A} q_i(x) = M_i \leq \lambda_i$.
Réciproquement, supposons $\sup_{x \in A} q_i(x) = M_i < +\infty$ *pour tout* $i \in I$. *Tout voisinage* V *de* 0 *contient un voisinage de* 0 *de la forme* $\lambda_0 \overset{n}{\underset{j=1}{\cap}} V_{i_j}$ *où* $V_{i_j}(x) = \{x \in E \,/\, q_{i_j}(x) \leq 1\}(\lambda_0 > 0)$.
Soit $M = \max(M_{i_j}, \ldots, M_{i_j})$ *on a :*

$$A \subset \{x \in E \,/\, q_{i_j}(x) \leq M_{i_j}\} \; (1 \leq j \leq n)$$

Donc

$$A \subset \bigcap_{j=1}^{n} M_{i_j} V_{i_j} \subset M \bigcap_{j=1}^{n} V_{i_j} = \frac{M}{\lambda_0} \lambda_0 \bigcap_{j=1}^{n} V_{i_j} \subset \frac{M}{\lambda_0} V \subset \lambda V \; (|\lambda| \geq \frac{M}{\lambda_0}).$$

Ainsi, V *absorbe* A.

Proposition 3.5.1
Soit E *un E.V.T. séparé et localement convexe. S'il existe un voisinage borné* V *de* 0, *alors* E *est un espace normé.*

Preuve
D'après la proposition 3.1.1, il existe un voisinage-tonneau W *de* 0 *contenu dans* V.
Soit J_W *la jauge de* W, J_W *est une semi-norme. Soit* $\mathcal{F}'$ *la topologie définie par* J_W *sur l'espace vectoriel* E. *Montrons que* $\mathcal{F}'$ *est identique à la topologie initiale* $\mathcal{F}$ *de* E. *Un système fondamental de voisinages de* 0 *pour* $\mathcal{F}'$ *est constitué par la famille* $(W_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ *où*

$$W_\varepsilon = \{x \in E \,/\, J_W(x) \leq \varepsilon\} = \varepsilon\{x \in E \,/\, J_W \leq 1\} = \varepsilon W \subset \varepsilon V.$$

(d'aprés la propriété 2.4.7) Soit U *un voisinage de* 0 *pour* $\mathcal{F}$. V *étant borné, il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $\frac{1}{\lambda} V \subset U$. *D'où* $W_{\frac{1}{\lambda}} \subset \frac{1}{\lambda} V \subset U$.
Finalement, la famille $(W_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ *est aussi un système fondamental de voisinage de* 0 *pour* $\mathcal{F}$.
Donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, *E étant séparé,* J_W *est une norme 3.4.1 et* E *un espace normé.*

Proposition 3.5.2
Dans un E.V.T E, séparé une partie compacte est bornée.

En effet, soient K un compact de E et V un voisinage de 0 (on pourra supposer V ouvert, équilibré grâce à la proriété $\mathcal{V}_{(6)}$ de 2.3.1). On a $K \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} nV = E$ (noter que V est aussi absorbant). La famille $(nV)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement ouvert de K, on peut en extraire un recouvrement fini :

$$K \subset n_1V \cup n_2V \cap \ldots \cap n_pV$$

V étant équilibré, $n_jV \subset (\max\limits_{1\leq j\leq p} \ n_j)V$ et $K \subset (\max\limits_{1\leq j \leq p} n_jV)$.

3.6 Applications linéaires sur les E.V.T.L.C séparés

Proposition 3.6.1
Soient E et F deux E.V.T.L.C. et $u : E \to F$ linéaire.
Alors on a u continue sur $E \Leftrightarrow u$ continue en 0 .

En effet, supposons u est continue en 0. Soient $x \in E$ tel que $u(x) = y \in F$ et $V = y + U$ ($U \in \mathcal{V}_{(0,\mathrm{F})}$) est un voisinage de y dans F. u étant continue en 0, il existe $U' \in \mathcal{V}_{(0,\mathrm{E})}$ tel que $u(x + U') = u(x) + u(U') = y + u(U') \subset y + U$ ce qui montre la continuité de u au point x. La réciproque est immédiate. En termes de semi-nomes on a le critère (trés utile) suivant pour vérifier si l'application linéaire u est continue :

Critére 3.6.1
L'application linéaire $u : E \to F$ est continue si et seulement si, pour toute semi-norme continue q sur F, il existe une constante $M > 0$ et une semi-norme continue p sur E tel que $q \circ u \leq Mp$ (i.e) :

$$(1) \quad (q \circ u)(x) \leq Mp(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in E.$$

Preuve
Si q est une semi-norme continue sur F, $q\circ u$ l'est aussi. On prend alors $p = q\circ u$, $M = 1$. Réciproquement, supposons (1) vérifiée. Pour tout voisinage V de 0 dans F, $u^{-1}(V)$ est un voisinage de 0 dans E. F étant localement convexe, on peut choisir V convexe équilibré. Alors J_V (la jauge de V) est une semi-norme continue sur F. Il existe p semi-norme continue sur E et $M > 0$ tel que $(J_V \circ u)(x) \leq Mp(x)$ $(x \in E)$ ce implique la continuité de la semi-norme $J_V \circ u$ sur E. L'ensemble $U = \{x \in E \,/\, (J_V \circ u)(x) < 1\}$ est donc un voisinage de 0 dans E et on a :

$$(x \in U) \Leftrightarrow (u(x) \in \{x \in E \,/\, J_V(x) < 1\} \subset V) \Rightarrow (u(x) \in V) \Rightarrow (x \in u^{-1}(V)) \Rightarrow U \subset u^{-1}(V).$$