به نام پاک آفریدگار

دانشکده مهندسی و علوم کامپیوتر

تمرین سری دوم درس شبیه سازی کامپیوتری ، فروردین ماه ۱۴۰۱

مدرس: دکتر فرشاد صفایی

---

۱. اگر نمونه تصادفی به اندازه $n = 20$ از جامعه نرمالی با واریانس $\delta = 225$ دارای میانگین $\bar{X} = 64.3$ باشد، یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای μ یعنی میانگین جامعه پیدا کنید.

$$CI = \bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{n}} \rightarrow 64.3 \pm 1.96 \frac{15}{\sqrt{20}} = 64.3 \pm 6.57$$

۲. هنگام محاسبه مقادیر توزیع پوآسن غالبا می توان ابتدا با محاسبه $P(0;\ \lambda)$ و سپس با استفاده از فرمول بازگشتی $P(x+1; \lambda) = \frac{\lambda}{x+1} P(x;\ \lambda)$ انجام کار را تسهیل کرد. درستی فرمول فوق را بررسی کرده و آن را با توجه به اینکه $e^{-2} = 0.1353$ برای $\lambda = 2$ به کار ببرید.

$$P(0;\ \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = e^{-2} = 0.1353$$

$$P(1;\ \lambda) = \frac{\lambda}{x+1} P(0;\ \lambda) = \frac{2}{1} P(0;\ \lambda) = 2 * 0.1353$$

۳. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_{49}$ نمونه های تصادفی از یک جامعه با توزیع احتمال $f_x(x) = \frac{e^{-4}4^x}{x!}$ باشد. مطلوب است محاسبه $P = \{220 < \sum_{i=1}^{49} X_i < 233\}$.

$$f_x(x) = \frac{e^{-4}4^x}{x!} \rightarrow \lambda = 4$$

$$P = \left\{220 < \sum_{i=1}^{49} X_i < 233\right\} = \sum_{i=221}^{232} \frac{e^{-4}4^x}{x!}$$

۴. فرض کنید ۲ درصد جمعیت دارای گروه خونی AB هستند. یک نمونه ۶۰ تایی از جمعیت به طور تصادفی انتخاب شده است. اگر متغیر تصادفی X را تعداد افرادی که دارای گروه خونی AB هستند در نظر بگیریم، احتمال اینکه هیچ یک دارای گروه خونی AB نباشند چقدر است؟

در این سوال هم میتوانیم از توزیع دو جمله ای استفاده کنیم و هم پوآسن

$$X \sim B(60, 0.02)$$

$$B(60, 0.02) = \binom{60}{0} (0.02)^0 (0.98)^{60} = 0.2975$$

$$X \sim P(60 * 0.02) = X \sim P(1.2)$$

$$P(X = 0) = \frac{1.2^0 e^{-1.2}}{0!} = 0.3012$$

۵. برای توزیع t با درجه آزادی ۹۰ مقدار b را پیدا کنید طوریکه $P(|t| < b) = 0.9$

$$P(|t| < b) = (-b < t < b) = t_{0.05,90} = 1.662$$

۶. اگر نمونه ای تصادفی از جامعه ای نامتناهی که متشکل از اعداد صحیح ۱،۲،...،N است انتخاب شوند، نشان دهید که

الف) میانگین توزیع $\bar{X}$ ، $\frac{(N+1)}{2}$ است.

$$E[\bar{X}] = \mu \Rightarrow \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{N} i = \frac{1}{N} \times \frac{N(N+1)}{2} = \frac{(N+1)}{2}$$

ب) واریانس توزیع $\bar{X}$ ، $\frac{1}{n}\frac{(N+1)(N-n)}{12}$ است.

$$VAR[\bar{X}] = \frac{\delta^2}{n} = \frac{E[X^2] - E^2[X]}{n} = \frac{\left(\frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{N} i^2\right) - \frac{(N+1)^2}{4}}{n}$$

$$\rightarrow \frac{\left(\frac{1}{N} \times \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right) - \frac{(N+1)^2}{2}}{n} = \frac{\left(\frac{(N+1)(2N+1)}{6}\right) - \frac{(N+1)^2}{4}}{n}$$

$$\rightarrow \frac{1}{n}\frac{4(N+1)(2N+1) - 6(N+1)^2}{24} = \frac{1}{n}\frac{2(N-1)^2}{24} = \frac{1}{n}\frac{(N-1)(N+1)}{12}$$

ج) میانگین واریانس توزیع $Y = n\bar{X}$ عبارت است از $E(Y) = \frac{n(N+1)}{2}$ و $var(Y) = \frac{(N+1)(N-n)}{12}$

$$E[n\bar{X}] = \frac{n(N+1)}{2}$$

$$VAR[n\bar{X}] = \frac{n(N-1)(N+1)}{12}$$

۷. متوسط عمر پردازنده ای دارای توزیع نمایی با میانگین ۴ سال است . اگر بدانیم یک پردازنده ۴ سال کار کرده احتمال اینکه باز کار کند را بیابید .

$$\mu = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \rightarrow P\{X > 4 | X > 4\} = P\{X > 0\} = 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = e^{-\lambda x} = e^{-\frac{1}{4}0} = 1$$

۸. فرض کنید تابع فراوانی متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال به شکل $g(x) = Ae^{-x^2+8x-16}$ است.مطلوب است محاسبه میانگین، واریانس و مقدار A برای این توزیع.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = Ae^{-x^2+8x-16}$$

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}, -x^2 + 8x - 16 = -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$2x^2 - 16x + 32 = \frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{2\mu}{\sigma^2} = 16, \frac{\mu^2}{\sigma^2} = 32 \to \frac{\mu}{2} = 2 \to \mu = 4, \sigma^2 = \frac{1}{2}, A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

۹. اگر X یک متغیر تصادفی پواسن با نرخ λ باشد و $P(2) = 2P(0)$ در این صورت مطلوب است محاسبه $P\{X^2 + X - 2 > 0\}$

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(2) = 2P(0) \Rightarrow \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = 2\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \Rightarrow \lambda = 2$$

$$P\{X^2 + X - 2 > 0\} = P\{(X+2)(X-1) > 0\} = P\{X < -2 \cup X > 1\} = P\{X > 1\}$$

$$1 - P\{X \le 1\} = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 1 - 0.135 - 0.270$$

$$\to 0.593$$

۱۰. فرض کنید متوسط تعداد از کارافتادگی سرور دانشگاه شهید بهشتی در طول یک ماه، ۴ گزارش شده باشد که از توزیع پوآسن تبعیت می کند.

الف) احتمال اینکه در طول یک هفته هیچگونه ازکارافتادگی در این سرور گزارش نشود، چه قدر است؟

$$\lambda = 1 \to P(0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{1^0 e^{-1}}{0!} = 0.367$$

ب) اگر تعداد ازکارافتادگی ها در طول یک هفته در این سرور را با متغیر تصادفی X نمایش دهیم، تابع مولد گشتاور X را تعیین کنید و سپس به کمک آن میانگین و واریانس را بدست آورید.

$$E[e^{tx}] = e^{\lambda(e^t-1)}$$

میانگین: اگر از رابطه بالا مشتق بگیریم به ازای t=0

$$\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda$$

$$\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda + \lambda^2$$

$$VAR(X) = E[X^2] - E^2[X] = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2$$

ج) اگر فرض کنیم خطاهای رخ داده در روی یکی از کابلهای اتصال این سرور از فرآیند پوآسن با نرخ ۲.۱ خطا در دقیقه پیروی کند، احتمال اینکه در مدت ۴ ثانیه از زمان ارسال داده ها هیچ خطایی وجود نداشته باشد چه قدر است؟

$$\lambda = \frac{1}{15} \times 2.1 = 0.14$$

$$P(0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{0.14^0 e^{-0.14}}{0!} = 0.869$$

۱۱. رمز عبور یک شبکه کامپیوتری عددی ۵ رقمی است و اگر شخصی ۳ بار رمز را غلط وارد کند دیگر نمیتواند وارد شبکه گردد. فرض کنید شخص رمز خود را فراموش کرده و فقط عدد اول را به یاد می آورد و می داند سایر عددها شامل ۵, ۵, ۳, ۳ هستند. فرد تصادفا رمز را وارد میکند و هر بار فراموش میکند که بار قبلی چه عددی را وارد کرده است. احتمال اینکه این شخص بتواند وارد شبکه گردد چه قدر است؟

$$\frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

$$probality\ of\ correct\ password = \frac{1}{6}$$

$$P(X \le 3) = P(1) + P(2) + P(3) = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^0 + \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{91}{216}$$