Approximation EDS

Samir Gueblaoui

29 novembre 2023

Table des matières

1 Introduction

L'étude du modèle d'évolution des prix d'une action, formulé à travers une équation différentielle stochastique telle que

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \sigma X_t dW_t$$

revêt une importance significative dans le domaine financier. Cette modélisation complexe combine des éléments déterministes et stochastiques pour capturer les evolutions des marchés financiers. En examinant les composants de cette équation, nous pouvons mieux comprendre les forces sous-jacentes qui influent sur les variations des prix d'actions.

L'inclusion de la croissance déterministe α, du facteur de rétroaction β basé sur la valeur actuelle de l'action, et de la volatilité stochastique σ permet de reproduire avec réalisme les fluctuations observées sur les marchés financiers. Cette approche offre un cadre mathématique pour étudier et anticiper les mouvements des prix d'actifs, tout en intégrant des éléments aléatoires qui reflètent l'incertitude inhérente aux marchés.

Comprendre ce modèle contribue ainsi à une meilleure évaluation des risques, à des prévisions plus précises et à des décisions financières plus informées.

2 Schéma d'Euler-Maruyama

Le schéma d'Euler-Maruyama est une méthode numérique utilisée pour discrétiser une équation différentielle stochastique. Pour notre équation :

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \sigma X_t dW_t$$

le schéma d'Euler-Maruyama asocié s'exprime comme suit :

$$X_{t+\Delta t} = X_t + (\alpha - \beta X_t)\Delta t + \sigma X_t \sqrt{\Delta t}\epsilon$$

où :

- Δt est l'incrément de temps,
- ϵ est une variable aléatoire tirée d'une distribution normale centrée réduite.

Ce schéma d'Euler-Maruyama discrétise le terme stochastique $(\sigma X_t dW_t)$ en utilisant une approximation basée sur le mouvement brownien $(\sqrt{\Delta t}\epsilon)$

En implémentant itérativement ce schéma, on peut simuler des trajectoires du processus stochastique et obtenir des approximations numériques des solutions de notre équation différentielle stochastique.

3 Approximation des solutions

Pour approximer les solutions de notre equation via notre schéma d'euler, il suffit d'écrire une fonction *app* qui demande en entrée les valeurs de α, β, σ, T (la maturité), dt, X_0 et qui retourne un tableau X de $\lfloor T/dt \rfloor$ élements dont chaque élément

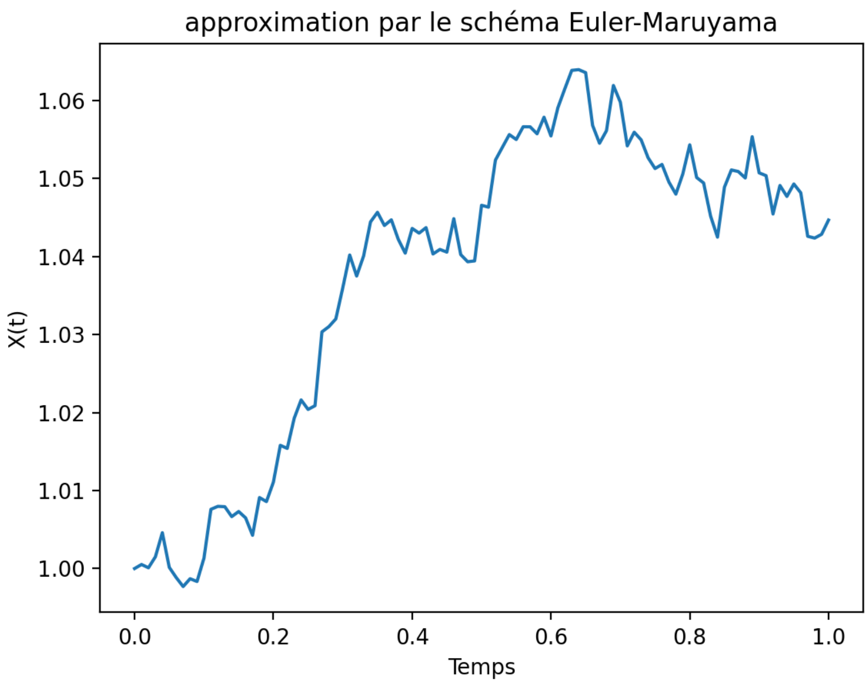
$$X[i] = X[i-1] + (\alpha - \beta X[i-1])dt + \sigma X[i-1]\sqrt{dt}\epsilon$$

où $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{dt})$

Voici le code en python :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def app(alpha, beta, sigma, T, dt, X0):
    n = int(T / dt)
    X = np.zeros(n + 1)
    t = np.linspace(0.0, T, n + 1)
    X[0] = X0

    for i in range(1, n + 1):
        epsilon = np.random.normal(loc=0.0, scale=np.sqrt(dt))
        X[i] = X[i-1] + (alpha - beta * X[i-1]) * dt + sigma * X[i-1] * np.sqrt(dt) * epsilon

    return t, X

```

Nous pouvons finalement tracé la solution de notre équation :
Exemple pour $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $T = 1.0$, $dt = 0.01$, $X_0 = 1.0$



4 Ordre fort

Le schéma d'Euler standard est d'ordre fort 1, ce qui signifie que l'erreur d'approximation diminue linéairement avec Δt. Cependant, lorsqu'on applique le schéma d'Euler à des équations différentielles stochastiques comme la notre, l'ordre fort est réduit à 0.5 en raison de la présence du terme stochastique.

Cela signifie que pour obtenir une bonne précision, nous devons réduire Δt, néanmoins l'ordre 0.5 indique que la réduction de l'erreur est moins efficace que dans un schéma d'ordre 1.

5 Conclusion

En conclusion, l'équation différentielle stochastique $dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \sigma X_t dW_t$, associée au schéma d'Euler-Maruyama d'ordre 0.5, offre un cadre puissant pour modéliser l'évolution des prix d'actifs financiers.

L'utilisation du schéma d'Euler-Maruyama dans la simulation numérique permet de générer des trajectoires du processus stochastique, fournissant ainsi des approximations numériques des solutions de l'équation différentielle stochastique.