Approximation du nombre d'Apéry

Samir Gueblaoui

12 octobre 2023

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce projet est (à default de donner une valeur exacte), d'approximer le nombre d'Apéry. Pour cela nous allons étudier une intégrale ayant un lien avec notre nombre d'Apéry et l'aproximer grâce à une méthode de Monte-Carlo (la méthode de rejet).

2 La fonction ζ de Riemann

On introduit la fonction ζ de Riemann

Définition 2.1 (Fonction ζ)**.**

$$\forall s \in \mathbb{C}, \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

Définition 2.2 (Le nombre d'Apéry)**.** *Le nombre d'Apéry est donné par* $\zeta(3)$

3 Une intégrale

La propriété suivante nous donne une caractérisation du nombre d'Apéry par une intégrale.

Théorème 3.1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos(x))\ln(\sin(x))}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\zeta(3)}{8}$$

Démonstration.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos(x))\ln(\sin(x))}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t=\sin(x)}{=} \int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(\sqrt{1-t^2})}{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t^2)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(t)(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n})}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$I = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

$$I = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 t^{2n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par partie ($u(t) = \ln t$ et $v'(t) = t^{2n-1}$) on a :

$$I = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{2n-1}}{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{4n^2}$$

$$I = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = \frac{\zeta(3)}{8}$$

$\square$

4 Methode de Rejet

Nous allons maintenant utiliser la méthode de rejet pour approximer notre intégrale. Soit

$$f(dx) = \frac{\ln(\cos(x))\ln(\sin(x))}{\tan(x)}\frac{8}{\zeta(3)}\mathbb{1}_{[0;\frac{\pi}{2}]}dx$$

et

$$g(dx) = \frac{2}{\pi}\mathbb{1}_{[0;\frac{\pi}{2}]}dx$$

deux densité de probabilité.

On a :

$$f \leq \frac{8}{\zeta(3)}\frac{\pi}{2}max(f).g$$

On peut approximer le max de f par 0.1838 en utilisant un algorithme qui prend une subtivisionne (x_n) de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ des abscisses et prenant le plus grand $f(x_i)$. On souhaite simuler une V.A.R de densité f. La méthode de rejet nous donne cette simulation :

$$X \sim \mathscr{U}(0,\frac{\pi}{2})$$

$$U \sim \mathscr{U}(0,1)$$

$$\text{Jusqu'à ce que : } U \leq \frac{\ln(\cos(x))\ln(\sin(x))}{\tan(x)}\frac{1}{max(f)} :$$

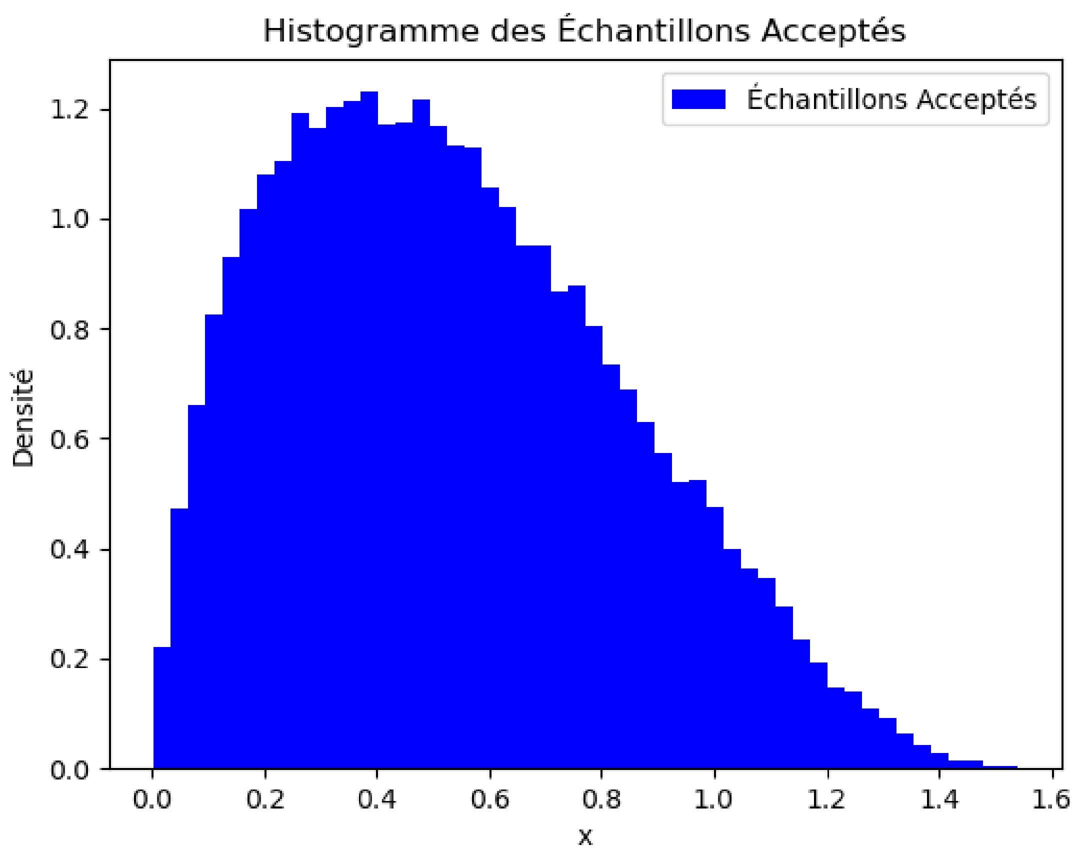
$$\text{Simuler : } X \sim \mathscr{U}(0, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Simuler : } U \sim \mathscr{U}(0, 1)$$

Sortir X

X suit alors une loi de densité f

Prenons maintenant un échantillon $(X_n)_{0 \leq n \leq 1000}$ de densité f. On trouve l'histogramme suivant :



Soit

$$h(x) = \frac{\ln(\cos(x))\ln(\sin(x))}{\tan(x)}$$

Etant donné que $h(x) = a \times f(x)$ avec a constante positive, les points pour lesquels h est grand sont les meme pour lesquels f est grande et les points pour lesquels h est minimmal sont les meme pour lesquels f est minimal en d'autre terme f et h varie de la même façon.

On peut alors utiliser notre échantillon (X_n) de densité f pour approximer l'intégrale de h de la façon suivante :

$$\text{Simuler } 10000\ X_i \text{ de densité } f$$

$$\text{Sortir } Ih_{approcher} := \frac{1}{10000}\sum_{i=1}^{10000} h(X_i)$$

On a obtenu :

```
Ih_approcher=
0.15027468256363494
```

Pour conclure, on a :

$$\frac{\zeta(3)}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\cos(x))\ln(\sin(x))}{\tan(x)}\, \mathrm{d}x \approx 0.15027$$

D'où

$$\zeta(3) \approx 1,20216$$