Groupe fondamental

Lisa Melon,
Samir Gueblaoui,
Sacha Fela

15 mai 2022

Table des matières

Notations

$\mathbb{I} = [0, 1]$
$\mathbb{S}^1$: la sphère unité de $\mathbb{R}$

1. Chemins et homotopie

1.1 Chemins et lacets

Définition : Chemin et lacet

Soit E un espace topologique. On appelle **chemin** sur E toute application continue :

$$\alpha : [0,1] \to E$$

Lorsque $\alpha(0) = \alpha(1)$, on parle de **lacet** basé en $x_0 = \alpha(0) = \alpha(1)$.

On définit un opérateur naturel pour les chemins.

Définition : Concaténation

Soient α et β des chemins sur E tels que $\alpha(1) = \beta(0)$.La **concaténation** de α et β est le chemin noté $\alpha.\beta$ tel que :

$$\alpha.\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{si t} \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \beta(2t-1), & \text{si t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Exemple : Chemin rectiligne

Dans un espace vectoriel, un chemin de la forme $\alpha(t) = x + t\vec{u}$ est dit rectiligne. Son image est un segment.

Exemple : Chemin polygonal

La concaténation d'un nombre fini de chemins rectilignes donne un chemin polygonal. S'il s'agit d'un lacet, on dit qu'il est fermé.

En considérant le « sens de parcours »d'un chemin, on peut définir un chemin inverse.

Définition : Inverse

Soit α un chemin sur E. On appelle **inverse** de α, et on note $\overline{\alpha}$, le chemin défini par :

$$\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t).$$

Remarque : La concaténation d'un chemin avec son inverse décrit un « aller-retour » ; c'est donc un lacet. En effet :

$$\alpha.\overline{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{si t} \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \alpha(2-2t), & \text{si t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Donc : $\alpha.\overline{\alpha}(0) = \alpha.\overline{\alpha}(1) = \alpha(0)$.

1.2 Homotopie

Une homotopie est une déformation continue entre deux applications, notamment des chemins. Cette notion permet, entre autres, de classifier des applications continues et de définir l'équivalence d'homotopie entre espaces topologiques.

Définition : Homotopie

Deux chemins α_0 et α_1 de E sont dits **homotopes** et on note $\alpha_0 \sim \alpha_1$, s'il existe une application continue $F : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to E$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{I},\ F(0,t) = \alpha_0(t) \ et\ F(1,t) = \alpha_1(t),$$

F est appelée **homotopie**.

Si de plus, α_0 et α_1 ont même extrémités , c'est-à-dire :

$$\forall s \in \mathbb{I},\ F(s,0) = \alpha_0(0) = \alpha_1(0) \ et\ F(s,1) = \alpha_0(1) = \alpha_1(1),$$

α_0 et α_1 sont dits **homotopes strictement**.

Proposition

Soient α un chemin de E et $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ une application continue telle que $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$. Alors $\alpha \circ f$ et α sont homotopes.

Démonstration :
i)

$$\left.\begin{array}{l} f([0,1]) \subset [0,1] \\ f \textit{ et } \alpha \textit{ sont continues sur } [0,1] \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{Par compositions, } \alpha \circ f \textit{est continue sur } [0,1].$$

De plus, $\alpha \circ f([0,1]) \subset \alpha([0,1]) \subset E$. *Donc* $\alpha \circ f$ *est bien un chemin de* E.
ii) Comme $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$, *on a :*

$$\alpha(f(0)) = \alpha(0) \ et\ \alpha(f(1)) = \alpha(1).$$

Donc α *et* $\alpha \circ f$ *ont les mêmes extrémités.*
iii) Soient F *et* G *des applications définies par :*

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{I}^2 & \to & E \\ & & (s,t) & \mapsto & \alpha(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} G & : & \mathbb{I}^2 & \to & E \\ & & (s,t) & \mapsto & F(s, sf(t) + (1-s)t). \end{array}$$

Par composition d'applications continues, G *est continue.*
On a bien :

$$\left\{\begin{array}{l} G(0,t) = \alpha(t)\ \forall t \in \mathbb{I} \\ G(1,t) = \alpha(f(t))\ \forall t \in \mathbb{I} \\ G(s,0) = \alpha(0)\ et\ G(s,1) = \alpha(1)\ \forall s \in \mathbb{I}. \end{array}\right.$$

D'où $\alpha \sim \alpha \circ f$.

$\square$

Proposition : Propriétés fondamentales de l'homotopie

Soient α, β, α', β' et γ des chemins de E. On confondra un point et le lacet constant égal à ce point.

1) Réflexivité : α est homotope à α.

2) Symétrie : Si α est homotope à β, alors β est homotope à α.

3) Transitivité : Si α est homotope à β et β à γ, alors α est homotope à γ.

4) Si α est homotope à α' et β à β', alors $\alpha.\beta$ est homotope à $\alpha'.\beta'$.

5) α est homotope à $\alpha.\alpha(1)$ et à $\alpha(0).\alpha$.

6) Le lacet $\alpha.\overline{\alpha}$ est homotope à $\alpha(0)$.

7) Associativité : Le chemin $\alpha.(\beta.\gamma)$ est homotope à $(\alpha.\beta).\gamma$.

Démonstration :
1)On remarque tout de suite que $\alpha \sim \alpha$ avec la fonction :

$$\begin{array}{ccccc} F & : & \mathbb{I}^2 & \to & E \\ & & (s,t) & \mapsto & \alpha(t). \end{array}$$

2)Soit F l'homotopie correspondant à la déformation de α vers β. On montre que $\beta \sim \alpha$ avec la fonction $(s,t) \mapsto F(1-s,t)$.

3) Soient F et G les homotopies correspondant respectivement aux déformations de α vers β et de β vers γ. On pose :

$$\begin{array}{ccccc} H & : & \mathbb{I}^2 & \to & E \\ & & (s,t) & \mapsto & \begin{cases} F(2s,t), & \text{si s} \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ G(2s-1,t), & \text{si s} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \end{array}$$

H est continue pour tout $t \in \mathbb{I}$ et $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, puis : $\forall t \in \mathbb{I}$, $\lim\limits_{s \to \frac{1}{2}} F(2s,t) = \beta(t) = G(0,t)$. Donc H est continue sur $\mathbb{I}^2$. De plus,

$$\begin{cases} H(0,t) = F(0,t) = \alpha(t) \quad \forall t \in \mathbb{I} \\ H(1,t) = G(1,t) = \gamma(t) \quad \forall t \in \mathbb{I} \\ H(s,0) = F(2s,0) = \alpha(0) \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ H(s,0) = G(2s-1,0) = \gamma(0) = \alpha(0) \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ H(s,1) = F(2s,1) = \alpha(1) \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ H(s,1) = G(2s-1,1) = \gamma(1) = \alpha(1) \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ G(s,1) = \alpha(1) \quad \forall s \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

D'où $\alpha \sim \beta$.

4)On appelle F et G les homotopies correspondant respectivement aux déformations de α vers α' et de β vers β'. La fonction :

$$\begin{array}{ccccc} H & : & \mathbb{I}^2 & \to & E \\ & & (s,t) & \mapsto & \begin{cases} F(s,2t) & \text{si t} \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ G(s,2t-1) & \text{si t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \end{array}$$

est bien une homotopie.

En effet, par composition $(s,t) \mapsto F(s,2t)$ et $(s,t) \mapsto G(s,2t-1)$ sont continues.

De plus, $G(0,t) = \begin{cases} \alpha(2t) & si\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \beta(2t-1) & si\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \alpha.\beta(t),$

$G(1,t) = \begin{cases} \alpha'(2t) & si\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta'(2t-1) & si\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \alpha'.\beta'(t).$

5) On pose :

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{I} & \to & \mathbb{I} \\ & & t & \mapsto & \begin{cases} 2t & \text{si t} \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \end{array}$$

On montre facilement que f est continue sur $\mathbb{I}$, puis que $\alpha.\alpha(1) = \alpha \circ f$. D'après la proposition précédente, $\alpha \sim \alpha.\alpha(1)$. De même, $\alpha \sim \alpha(0).\alpha$.
6) On a :

$$\alpha.\overline{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{si t} \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \alpha(2-2t), & \text{si t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

On peut vérifier que l'homotopie donnée par $H(s,t) = \begin{cases} \alpha(0),\ si\ 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(2t-s),\ si\ \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(-2t+2-s),\ si\ \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2-s}{2} \\ \alpha(0),\ si\ \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ *convient.*

7) On a :

$$(\alpha.\beta.)\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(4t),\ si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1),\ si\ \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1),\ si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

et

$$\alpha.(\beta.\gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), \ si \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2), \ si \ \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3), \ si \ \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

On peut vérifier que l'homotopie donnée par

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}), \ si \ 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \beta(4t-1-s), \ si \ \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \gamma(\frac{4t-2-s}{2-s}), \ si \ \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

convient.

□

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire : Relation d'équivalence

Être homotope est une relation d'équivalence.

2. Groupe fondamental

2.1 Groupe fondamental

Définition : Classe d'homotopie

Soit E un espace topologique. Soit α un chemin sur E. On note $[\alpha]$ l'ensemble des chemins homotopes à α.

On appelle cette classe d'équivalence, la **classe d'homotopie** de α.

Définition : Groupe fondamental

Soit E un espace topologique. Soit $x_0 \in E$. On note $\pi_1(E, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopies des lacets basés en x_0.

Proposition : Concaténation

On appelle **concaténation** l'application $(\pi_1(E, x_0), \cdot) : \pi_1(E, x_0) \times \pi_1(E, x_0) \to \pi_1(E, x_0)$ telle que :

$$\forall \alpha, \beta \in \pi_1(E, x_0), \ [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha.\beta].$$

La **concaténation** est une loi de composition interne sur $\pi_1(E, x_0)$.

Démonstration :
Soient $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(E, x_0)$. α *et* β *sont des lacets de* E *basés en* x_0. *On a :*

$$\alpha.\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & si \ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta(2t-1), & si \ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

$\alpha \cdot \beta$ *est encore un lacet de* E *basé en* x_0. *En effet,* $\alpha \cdot \beta(0) = \alpha(0) = x_0$ *et* $\alpha \cdot \beta(1) = \beta(1) = x_0$. *Donc,* $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta] \in \pi_1(E, x_0)$. *La concaténation est bien une loi de composition interne.*

□

Théorème : Groupe fondamental

Soit E un espace topologique. Soit $x_0 \in E$. L'ensemble $\pi_1(E, x_0)$ munit de la concaténation est un groupe.

Ce groupe est appelé **Groupe fondamental** de E

Démonstration :
- *D'après 7), la concaténation est associative.*

- *x_0 est l'élément neutre (On confond x_0 et le lacet constant égal à x_0). En effet, $\forall[\alpha] \in \pi(x_0, E)$ on a $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ et d'après 5), $[\alpha.\alpha(1)] = [\alpha(0).\alpha] = [\alpha]$.*

- *D'après 1) et 6), on a : $[\alpha.\overline{\alpha}] = [\overline{\alpha}.\alpha] = [x_0]$. De plus, $[\alpha.\overline{\alpha}] = [\alpha] \cdot [\overline{\alpha}]$. Ainsi on peut définir pour tout $[\alpha] \in \pi_1(x_0, E)$ un inverse $[\alpha]^{-1} = [\overline{\alpha}]$.*

Ainsi, $\pi_1(x_0, E)$ est un groupe.

□

Définition : Connexité par arcs

Soit E un espace topologique. E est dit connexe par arcs si : $\forall(x, y) \in \mathbb{E}^2$ il existe un chemin α sur E tel que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$.

Autrement dit, tout couple de point de E est relié par un chemin sur E.

Proposition

Soit E un espace topologique connexe par arc, x_0, $x_1 \in E$. Alors, $\pi_1(E, x_0)$ est isomorphe à $\pi_1(E, x_1)$.

Démonstration :
Soient x_0, $x_1 \in E$. Comme E est connexe par arc, il existe un chemin β sur tel que $\beta(0) = x_1$ et $\beta(1) = x_0$. On pose :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \pi_1(E, x_0) & \to & \pi_1(E, x_1) \\ & & [\alpha] & \mapsto & [\beta.\alpha.\overline{\beta}] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} g & : & \pi_1(E, x_1) & \to & \pi_1(E, x_0) \\ & & [\alpha] & \mapsto & [\overline{\beta}.\alpha.\beta] \end{array}$$

Par définition de la concaténation, f sont des morphismes, en effet :

$$\begin{aligned} \forall[\alpha],\ [\alpha'] \in \pi_1(E, x_0), f([\alpha] \cdot [\alpha']) &= f([\alpha.\alpha']) \\ &= [\beta\alpha.\alpha'\overline{\beta}] \\ &= [\beta\alpha.\overline{\beta}.\beta.\alpha'\overline{\beta}] \\ &= f([\alpha]) \cdot f([\alpha']). \end{aligned}$$

De même, g est un morphisme.
De plus pour $[\alpha] \in \pi_1(E, x_0)$,

$$\begin{aligned} f \circ g([\alpha]) &= f([\beta.\alpha.\overline{\beta}]) \\ &= [\overline{\beta}.\beta.\alpha.\overline{\beta}.\beta] \\ &= [\alpha] \end{aligned}$$

Donc $f \circ g = Id_{\pi_1(E,x_0)}$. De la même manière, $g \circ f = Id_{\pi_1(E,x_1)}$. Ainsi, f est un isomorphisme, ainsi $\pi_1(E, x_0)$ est isomorphe à $\pi_1(E, x_1)$.

□

Remarque : Cette proposition justifie la notation $\pi_1(E)$.

2.2 Groupe fondamental du cercle

Dans cette section, on cherchera à prouver que le groupe fondamental du cercle $\mathbb{S}^1$ est $\mathbb{Z}$. On admettra le théorème suivant.

Théorème de relèvement

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in J$. Soit $u : J \to \mathbb{U}$ une application continue. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta_0} = u(t_0)$. Il existe une unique fonction continue $\theta : J \to \mathbb{R}$ telle que $e^{i\theta(t)} = u(t)\ \forall t \in \mathbb{J}$ et $\theta(t_0) = \theta_0$.

θ est l'unique **relèvement** de u tel que $\theta(t_0) = \theta_0$.

Définition : Degré

Soit α un lacet de $\mathbb{S}^1$, et θ le relèvement de α tel que $\theta(0) = \theta_0 \in \mathbb{R}$. On appelle **degré** de α l'entier $deg(\alpha) = \frac{\theta(1)-\theta(0)}{2\pi}$.

Remarque :
$\forall t \in \mathbb{I},\ \alpha(t) = e^{i\theta(t)}$. Comme α est un lacet, $e^{i\theta(1)} = e^{i\theta(0)}$ donc, $\theta(1) = \theta(0) + 2k\pi$. D'où $deg(\alpha) \in \mathbb{Z}$.
Le degré correspond au nombre de « boucles »sur $\mathbb{S}^1$.

Proposition

Deux lacets de $\mathbb{S}^1$ sont homotopes si et seulement si ils ont même degré.

Démonstration :
$\Leftarrow$ On montre que si α et β sont des lacets de $\mathbb{S}^1$ basés en x_0 et de même degré alors ils sont homotopes. On choisit $\theta,\ \eta$ leurs relèvements.

On a donc, $\frac{\theta(1)-\theta(0)}{2\pi} = \frac{\eta(1)-\theta(0)}{2\pi}$. Ainsi, $\theta(1) = \eta(1)$.

On a alors : $\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{I}^2 & \to & \mathbb{S}^1 \\ & & (s,t) & \mapsto & e^{i((1-s)\theta(t)+s\eta(t))} \end{array}$ *une homotopie de α vers β. Ceci justifie l'écriture abusive $deg([\alpha])$.*

$\Rightarrow$ On montre que si α et β sont des lacets homotopes de $\mathbb{S}^1$ basé en x_0 alors, ils ont le même degré. On a $\alpha \sim \beta$ et on note H une homotopie entre α et β. Soit $s \in \mathbb{I}$, on pose :

$$\begin{array}{cccc} H_s & : & \mathbb{I} & \to & \mathbb{S}^1 \\ & & t & \mapsto & H(s,t). \end{array}$$

H est continue sur $\mathbb{I}^2$ (compact) donc d'après le théorème de Heine, H est uniformément continue sur $\mathbb{I}^2$. Donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma > 0 \text{ tel que} \forall (s,t),\ (s',t') \in \mathbb{I}^2 :\ \| (s,t) - (s',t') \| \leqslant \sigma \Rightarrow | H(s,t) - H(s',t') | \leqslant \varepsilon.$$

Or, $| s - s' | = \sqrt{(s-s')^2} \leqslant \sqrt{(s-s')^2 + (t-t')^2} = \| (s,t) - (s',t') \|$.
Donc : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma > 0$ tel que$\forall s,\ s' \in \mathbb{I}$:
$| s - s' | \leqslant \sigma \Rightarrow \| H_s - H_{s'} \| \leqslant \varepsilon$.
Donc pour $\varepsilon = 2$, on peut choisir $\sigma > 0$ tel que :

$$| s - s' | \leqslant \sigma \Rightarrow \| H_s - H_{s'} \| < 2. \quad (*)$$

Soient $s,\ s' \in \mathbb{I}$ tels que $| s - s' | < \sigma$ et θ_s et $\theta_{s'}$ des relèvements de H_s et $H_{s'}$ avec $\theta_s(0) = \theta_{s'}(0)$. On a :
$\forall t \in \mathbb{I},\ | \theta_s(t) - \theta_{s'}(t) | < \pi$
En effet, si $\exists t_0 \in \mathbb{I}$ tel que $| \theta_s(t_0) - \theta_{s'}(t_0) | \geqslant \pi$ on a :
- *si $| \theta_s(t_0) - \theta_{s'}(t_0) | = \pi$,*

$$\begin{aligned} | H_s(t_0) - H_{s'}(t_0) | &= | e^{i\theta_s(t_0)} - e^{i\theta_{s'}(t_0)} | \\ &= | e^{i\theta_s(t_0)} || 1 - e^{i(\theta_{s'}(t_0) - \theta_s(t_0))} | \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ce qui est impossible.
- *si $| \theta_s(t_0) - \theta_{s'}(t_0) | > \pi$, comme $| \theta_s(0) - \theta_{s'}(0) | = 0$ et $t \mapsto | \theta_s(t) - \theta_{s'}(t) |$ est une application continue, le TVI donne que $\exists c \in]0, t_0[$ tel que $| \theta_s(c) - \theta_{s'}(c) | = \pi$. On obtient $| H_s(c) - H_{s'}(c) | = 2$. Ce qui contredit*

$(*)$
On a montré que $\exists \sigma > 0$ *tel que si* $\mid s - s' \mid < \sigma$ *alors* $\forall t \in \mathbb{I}$, $\mid \theta_s(t) - \theta_{s'}(t) \mid < \pi$. *Pour* $t = 1$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} 2\pi &> \mid \theta_s(1) - \theta_{s'}(1) \mid \\ &= \mid \theta_s(1) - \theta_s(0) + \theta_{s'}(0) - \theta_{s'}(1) \mid \quad \textit{car } \theta_s(0) = \theta_{s'}(0) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

On a $deg(H_s)$ *et* $deg(H_{s'})$ *dans* $\mathbb{Z}$ *donc* $deg(H_s) = deg(H_{s'})$.*Finalement, on a :* $\exists \sigma, \forall (s, s') \in \mathbb{I}^2$ *tel que :*

$$s' \in [s - \sigma, s + \sigma] \Rightarrow deg(H_s) = deg(H_{s'}).$$

Or, si on pose $n = \lfloor \frac{1}{\sigma} \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$, *on a* $\frac{1}{n} \leqslant \sigma$, *on peut écrire :* $\exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $s' \in [s - \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n}] \Rightarrow deg(H_s) = deg(H_{s'})$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, *soit* $s = \frac{k}{n}$ *avec* $k \in \{1, ..., n-1\}$. *Soit* $s' \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n}]$ *donc* $deg(H_s) = deg(H_{s'})$.
Puis, $deg(H_{\frac{k-1}{n}}) = deg(H_{\frac{k}{n}}) = deg(H_{\frac{k+1}{n}})$. *Ce qui donne par récurrence* $deg(H_0) = deg(H_1)$ *donc* $deg(\alpha) = deg(\beta)$.

□

Comme $\mathbb{S}^1$ est connexe par arc, son groupe fondamental ne dépend pas du point de base.

Proposition : Groupe fondamental du cercle

Le **groupe fondamental du cercle** $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et la fonction degré est un isomorphisme.

Démonstration :
Soient $\alpha(t) = e^{i\theta(t)}$ *et* $\beta(t) = e^{i\eta(t)}$ *des lacets de* $\mathbb{S}^1$ *basés en* x_0 *avec* $\theta(0) = \eta(0)$.
• *deg est un morphisme :*
On a : $\alpha.\beta(t) = e^{i\xi(t)} = \begin{cases} \alpha(2t), & \textit{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \beta(2t-1), & \textit{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$.
On remarque que $\beta(t)$ *est aussi égal à* $e^{i(\eta(t) + 2\pi deg(\alpha))}$ *car* $deg(\alpha) \in \mathbb{Z}$. *On a donc :*

$$\xi(t) = \begin{cases} \theta(2t), & \text{si t} \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \eta(2t-1) + 2\pi deg(\alpha), & \text{si t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

On montre que ξ *est continue. En effet,* θ *et* η *sont continues et on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} \xi(t) &= \theta(1) \\ &= \eta(0) + \theta(1) - \theta(0) \\ &= \eta(0) + 2\pi deg(\alpha) \\ &= \xi\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc ξ *est bien le relèvement de* $\alpha.\beta$ *tel que* $\xi(0) = \theta_0$. *Donc :*

$$\begin{aligned} deg(\alpha.\beta) &= \frac{\xi(1) - \xi(0)}{2\pi} \\ &= \frac{\eta(1) + 2\pi deg(\alpha) - \theta(0)}{2\pi} \\ &= \frac{\eta(1) + \theta(1) - \theta(0) - \theta(0)}{2\pi} \\ &= \frac{\eta(1) - \eta(0)}{2\pi} + \frac{\theta(1) - \theta(0)}{2\pi} \\ &= deg(\alpha) + deg(\beta) \end{aligned}$$

De plus, les lacets de $\mathbb{S}^1$ *sont homotopes si et seulement si ils ont le même degré donc :*

$$deg([\alpha] \cdot \beta]) = deg([\alpha]) + deg([\beta]).$$

Donc deg est un morphisme.
• *deg est surjective :*
Soit $n \in \mathbb{Z}$*, on pose* $\alpha(t) = e^{i2\pi nt}$ $\forall t \in \mathbb{I}$.
On a $deg(\alpha) = \frac{2\pi n - 0}{2\pi} = n$ *donc* $deg([\alpha]) = n$*. Ainsi, deg est surjective.*
• *deg est injective :*
Soient $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$ *alors d'après la proposition précédente, on a :*

$$\begin{aligned} deg([\alpha]) = deg([\beta]) &\Leftrightarrow deg(\alpha) = deg(\beta) \\ &\Leftrightarrow \alpha \sim \beta \\ &\Leftrightarrow [\alpha] = [\beta]. \end{aligned}$$

Donc deg est injective. Finalement, $deg : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{Z}$ *est un isomorphisme.*

□

On Cherche maintenant à déterminer le groupe fondamental du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. On utilisera la proposition suivante.

Proposition

Soient E et F des espaces topologiques connexes par arcs. Alors, $\pi_1(E \times F) = \pi_1(E) \times \pi_1(F)$.

Démonstration : On note p_E, p_F *les projections de* $E \times F$ *sur* E *et* y*. On pose :*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \pi_1(E \times F, (x_0, y_0)) & \to & \pi_1(E, x_0) \times \pi_1(F, y_0) \\ & & [x] & \mapsto & ([p_E(x)], [p_F(x)]) \end{array}$$

f définit un morphisme de groupe. En effet, pour tout $[x]$, $[y] \in \pi_1(E \times F)$ on a :

$$\begin{aligned} f([x]) \cdot f([y]) &= ([p_E(x)], [p_F(x)]) * ([p_E(y)], [p_F(y)]) \\ &= ([p_E(x)] \cdot [p_E(y)], [p_F(x)] \cdot [p_F(y)]) \quad (\textit{choix de la loi interne}) \\ &= ([p_E(x).p_E(y)], [p_F(x).p_F(y)]) \\ &= ([p_E(x.y)], [p_F(x.y)]) \\ &= f([x.y]) \\ &= f([x] \cdot [y]) \end{aligned}$$

La fonction f est injective car si $f([x, y]) = 0$ alors il existe des homotopies f_x de x vers x_0 et f_y de y vers y_0. Donc (f_x, f_y) est une homotopie de (x, y) dans (x_0, y_0). De plus, $\forall([x], [y]) \in \pi_1(E) \times \pi_1(F)$, $f([(x, y)]) = [x], [y])$, donc f est surjective. Conclusion f est un isomorphisme et $\pi_1(E \times F)$ est isomorphe à $\pi_1(E) \times \pi_1(F)$. □

Du cas du cercle, on déduit donc le groupe fondamental du tore

Exemple : Tore

On a $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$.

3. Théorème de Van Kampen

3.1 Produit libre de groupe

Le but de cette section est de déterminer un groupe G non-commutatif contenant les sous-groupes G_1 et G_2.

Définition : Mots et mots réduits

Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de G. Un **mot** sur G_1 et G_2 est un n- uplet d'éléments de G noté $(g_1 g_2 ... g_n)$ où les $g_i \in G_{\alpha_i}$ et $\alpha_i \in \{1, 2\}$.

Un mot est dit réduit si :
• Aucun g_i n'est pas l'élément neutre de G_1 ou de G_2,
• $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.

Remarque :
Pour réduire un mot, si g, $h \in G_i$, on remplace gh par leur produit dans G_i et on supprime les occurrences des éléments neutres. On procède par récurrence.

Définition : Concaténation

Soient $v = (g_1 g_2 ... g_m)$ et $w = (h_1 h_2 ... h_n)$ des mots sur G_1 et G_2. La **concaténation** est l'opérateur défini par $v \cdot w = (g_1 g_2 ... g_m h_1 h_2 ... h_n)$.

Définition : Produit libre de deux groupes

L'ensemble des mots réduits sur G_1 et G_2 munit de la concaténation avec réduction est appelé le **produit libre de groupe**. On le note $G_1 * G_2$.

Théorème : Produit libre de deux groupes

Le produit libre de groupe est un groupe.

Démonstration :
• *Il est facile de vérifier que la concaténation avec réduction est une loi interne.*
• *Le mot vide () est évidemment l'élément neutre.*
• *Soit $v = (g_1 g_2 ... g_n)$ de $G_1 * G_2$, on pose $w = (g_n^{-1} g_{n-1}^{-1} ... g_1^{-1})$. On a bien $v \cdot w = w \cdot v = ()$. Donc tout mot v a bien un inverse $v^{-1} = w$.*
• *Il est facile de se convaincre de l'associativité, mais la démonstration directe étant laborieuse, on se contentera d'observer un cas simple. Soit u, v et w des mots réduits de $G_1 * G_2$ tels que $u = (u_1 u_2 ... u_n)$, $v = (v_1 v_2 ... v_p)$ et $w = (w_1 w_2 ... w_q)$ où u_n, $w_1 \in G_1$ et v_1, $v_p \in G_2$. Alors :*

$$\begin{aligned}
u \cdot (v \cdot w) &= (u_1 u_2 ... u_n) \cdot ((v_1 v_2 ... v_p) \cdot (w_1 w_2 ... w_q)) \\
&= (u_1 u_2 ... u_n) \cdot (v_1 v_2 ... v_p w_1 w_2 ... w_q) \\
&= (u_1 u_2 ... u_n v_1 v_2 ... v_p w_1 w_2 ... w_q) \\
&= ((u_1 u_2 ... u_n) \cdot (v_1 v_2 ... v_p)) \cdot (w_1 w_2 ... w_q) \\
&= (u \cdot v) \cdot w.
\end{aligned}$$

Dans les autres cas, on procède par récurrence au calcul en appliquant la méthode donnée en remarque.

□

3.2 Théorème de Van Kampen

On voudrait obtenir le groupe fondamental d'un espace X en le décomposant en espaces plus simples.

Définition : Simple connexité

Un espace topologique E connexe par arcs est dit **simplement connexe** si tout lacet sur E est homotope à un point.

Exemple : $\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe.

Remarque : Un espace simplement connexe est « en un seul morceau et sans trou ».

Théorème de Van Kampen

Soit E un espace topologique, E_1 et E_2 des ouverts de E connexes par arcs tels que $E = E_1 \cup E_2$ et $E_0 = E_1 \cap E_2$ est simplement connexe. Alors, $\pi_1(E_1) * \pi_1(E_2) = \pi_1(E)$.

Démonstration :
L'injectivité est difficile à démontrer, on se contentera de prouver la surjectivité.

Soit $x_0 \in E_0$. On pose : $\begin{array}{cccc} F & : & \pi_1(E_1, x_0) * \pi_1(E_2, x_0) & \to & \pi_1(E, x_0) \\ & & ([x], [y]) & \mapsto & [x] \cdot [y] \end{array}$.
On montre que F est un morphisme surjectif. On considère deux mots réduits v,$w \in \pi_1(E_1, x_0) * \pi_1(E_2, x_0)$.

On a $v = (a_1 a_2 ... a_n)$ et $w = (b_1 b_2 ... b_m)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
F(v \cdot w) &= F(a_1 a_2 ... a_n b_1 ... b_m) \\
&= [a_1 ... a_n] \cdot [b_1 ... b_m] \\
&= v \cdot w \\
&= F(v) * F(w)
\end{aligned}$$

On considère maintenant $[f] \in \pi_1(E, x_0)$ et $f_0 \in [f]$ un lacet pouvant boucler successivement en E_1 puis E_2 puis E_1. On suppose que f_0 passe n fois par E_0.
On pose $(k_\alpha)_\alpha$ les sous-intervalles de $\mathbb{I}$ tels que $\forall t \in \bigcup_\alpha k_\alpha$, on a $f_0(t) \in E_1$. De même, on pose $(l_\beta)_\beta$ les sous-intervalles de $\mathbb{I}$ tels que $\forall t \in \bigcup_\beta l_\beta$, on a $f_0(t) \in E_2$. Les k_α, l_β forment un recouvrement du compact $\mathbb{I}$, on peut donc en extraire un sous recouvrement fini. On note $(I_p)_{1 \leq p \leq n}$ des sous-intervalles de $\mathbb{I}$ qui envoient par f_0 dans E_0. On choisit des $z_i \in E_0$ dans chacun de ces intervalles pour $i \in \{1, ..., n\}$ (des points de f_0 où f_0 passe pour la i-ème fois par E_0).

Comme E_0 est simplement connexe, pour tout entier $i \leq n$ il existe un chemin de z_i à x_0. On peut donc déformer continûment f_0 pour avoir f formé d'une succession de boucle sur E_1 puis E_2. Donc $f_i \sim f = g_1 h_2 ... g_{n-1} h_n$ où les $g_i \in \pi_1(E_1, x_0)$ et $h_i \in \pi_1(E_2, x_0)$ ou inversement. En identifiant f à la suite de mots $w = g_1 h_2 ... g_{n-1} h_n$ on a bien la surjectivité.

Exemple : Bouquet de sphère

Soient $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\right\}$ et $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} : (x-2)^2 + y^2 = 1\right\}$. On munit l'ensemble $E = A \cup B$ de la topologie induite. On a $A \cap B = \{(1, 0)\}$ un espace simplement connexe. Alors, d'après le théorème Van Kampen :

$$\begin{aligned}
\pi_1(E) &= \pi_1(A) * \pi_1(B) \\
&= \pi_1(\mathbb{S}^1) * \pi_1(\mathbb{S}^1) \\
&= \mathbb{Z} * \mathbb{Z}
\end{aligned}$$