Université Moulay ISMAÏL
Faculté des Sciences et Techniques d'Errachidia
Département de Mathématiques

Exercices corrigés d'Analyse Mathématiques

Filière BCG (M222)

Pr. Samir KHALLOUQ

Année universitaire 2019-2020

Faculté des Sciences et Techniques, B.P. 509, Boutalamine
Errachidia, MAROC
Tél : 05 35 574 497 - Fax :05 35 574 485
E-mail : doyen@fste-umi.ac.ma - Site web : www.fste.ac.ma

كلية العلوم و التقنيات ، صندوق البريد : 509 بوتلامين
الرشيدية، المغرب
الهاتف : 497 574 35 05 - الفاكس : 485 574 35 05
البريد الإلكتروني : doyen@fste-umi.ac.ma - الموقع الإلكتروني :

جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم والتقنيات
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Université Moulay ISMAÏL
Faculté des Sciences et Techniques d'Errachidia
Département de Mathématiques

Exercices corrigés d'Analyse Mathématiques

Filière BCG (M222)

Pr. Samir KHALLOUQ

Année universitaire 2019-2020

Faculté des Sciences et Techniques, B.P. 509, Boutalamine
Errachidia, MAROC
Tél : 05 35 574 497 - Fax :05 35 574 485
E-mail : doyen@fste-umi.ac.ma - Site web : www.fste.ac.ma

كلية العلوم و التقنيات ، صندوق البريد : 509 بوتلامين
الرشيدية، المغرب
الهاتف : 497 574 35 05 - الفاكس : 485 574 35 05
doyen@fste-umi.ac.ma

Table des matières

Série 1: Suites Numériques

Exercice 1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Indiquer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse:*

1. *Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.*
2. *Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.*
3. *Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.*

Correction 1

1. *Vraie. Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite (c'est un résultat du cours).*
2. *Fausse. Un contre-exemple est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_n$ est la suite constante (donc convergente) de valeur 1, et $(u_{2n+1})_n$ est constante de valeur -1. Cependant la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.*
3. *Vraie. La convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ, que nous souhaitons démontrer, s'écrit :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon).$$

Fixons $\epsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel

$$2p \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \epsilon.$$

Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que

$$2p + 1 \geq N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \epsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ.

Exercice 2

1. *Calculer la limite, si celle-ci existe, des suites suivantes:*

   a) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n-(-1)^n}$; ***b)*** $v_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$;

   c) $w_n = \sqrt{n^2+n}-n$; ***d)*** $s_n = \dfrac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$;

   e) $t_n = \sqrt[n]{n^2}$; ***f)*** $x_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$;

2. *Déterminer par comparaison, la limite des suites (S_n) suivantes :*

$$a)\quad S_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n};\quad b)\quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}};$$

$$c)\quad S_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2};\quad d)\quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}.$$

3. ***a)*** *Établir l'égalité* ***(par récurrence):***

$$1+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\quad \forall n\in\mathbb{N}^*;$$

   b) *En déduire la limite de la suite définie sur $\mathbb{N}^*-\{1\}$ par:*

$$u_n = \frac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{(1-n)^3}.$$

Correction 2

1. *On détermine la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes:*

a $u_n = \frac{n-(-1)^n}{2n-(-1)^n} = \frac{1-\frac{(-1)^n}{n}}{2+\frac{(-1)^n}{n}} \longrightarrow \frac{1}{2}$

b $v_n = \frac{nsin(n)}{n^2+1}$; *On a* $-1 \leq sin(n) \leq 1$ *d'où* $\frac{-n}{n^2+1} \leq \frac{nsin(n)}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$

ainsi $v_n \longrightarrow 0$

c $w_n = \sqrt{n^2+n}-n$

$\lim w_n = \lim \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim \frac{n}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}$

résulte

$$\lim w_n = \frac{1}{2}$$

d $s_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n} = \frac{1-\frac{(-2)^n}{3^n}}{1+\frac{(-2)^n}{3^n}} \longrightarrow 1$

e

$t_n = \sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{2}{n}ln(n)} \longrightarrow 1$ *car* $\frac{ln(n)}{n} \longrightarrow 0$

(*Remarque* $a^b = e^{b.ln(a)}$)

f $x_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+.....\frac{1}{2^n}$

$\lim x_n = \lim \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.....\frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{1}{2}\lim \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$

$\lim x_n = 1$

2. *Déterminer par comparaison, la limite des suites (s_n) suivantes :*

a $s_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$ *on a* $1 \leq s_n \leq \sqrt[n]{3} = e^{\frac{ln(3)}{n}} \longrightarrow 1$

d'où

$$s_n \longrightarrow 1$$

b $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

on a $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$

c $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$

$0 \leq S_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} \longrightarrow 0$

d $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq S_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

Finalement

$$S_n \longrightarrow 1$$

3. **a** *Établir l'égalité (par récurrence)*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

* *l'égalité est vrai pour n=1 en effet*

$$1^2 = \frac{1}{6}1.(1+1)(2.1+1)$$

** *On suppose que la relation est vraie pour n-1 c'est-à-dire on a*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 = \frac{1}{6}(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)$$

d'où

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 &= \frac{1}{6}n(n-1)(2(n-1)+1) + n^2 \\ &= \frac{n}{6}[(n-1)(2n-1) + 6n] \\ &= \frac{n}{6}[2n^2 - n - 2n + 1 + 6n] \\ &= \frac{n}{6}[2n^2 + 3n + 1] \\ &= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

d'où le résultat

b *En déduire la limite de la suite définie sur* $\mathbb{N}^* - \{1\}$

$$U_n = \frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{(1-n)^3} \sim \frac{2n^3}{-6n^3} \longrightarrow \frac{-1}{3}$$

Exercice 3

On note

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$$

a) *Décomposer* $\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$ *en éléments simples.*

a) *Donner l'expression de* S_n *en fonction de n.*

a) *Déduire la limite de la suite* S_n

Correction 3

a) *la décomposition en éléments simples de S_n.*

Il existent a et b tels que:

$$\frac{2}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{a}{2p+1} + \frac{b}{2p+3}$$

donc

$$\frac{2}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{a(2p+3)+b(2p+1)}{(2p+1)(2p+3)}$$

d'où

$$\frac{2}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{2p(a+b)+3a+b}{(2p+1)(2p+3)}$$

par identification on obtient:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=2 \end{cases}$$

Après résolution de ce système il résulte que:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

Ainsi

$$\frac{2}{(2p+1)(2p+3)} = \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+3}$$

b) *l'expression de S_n en fonction de n.*

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & \sum_{p=0}^{n} \frac{2}{(2p+1)(2p+3)} \\ & = & \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+3} \\ & = & (1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + ... + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) + (\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}) \\ & = & 1 - \frac{1}{2n+3} \\ & = & \frac{2n+2}{2n+3} \end{array}$$

c) *Déduire la limite de la suite S_n.*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+2}{2n+3} = 1$$

Exercice 4

On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!} \ ; \ n \in \mathbb{N}.$$

1. *Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.*
2. *Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.*

Correction 4

1. *La suite (u_n) est strictement croissante, en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. La suite (v_n) est strictement décroissante :*

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}.$$

Donc à partir de $n \geq 2$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

2. *Comme $u_n \leq v_n \leq v_2$, alors (u_n) est une suite croissante et majorée. Donc elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De même $v_n \geq u_n \geq u_0$, donc (v_n) est une suite décroissante et minorée. Donc elle converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$. Et donc $(v_n - u_n)$ tend vers 0 ce qui prouve que $\ell = \ell'$.*

Exercice 5 `Comportement asymptotique des suites géométriques`

1. *Démontrer l'inégalité de Bernoulli:*

$$\text{pour tout réel } x \text{ positif et tout entier naturel } n\text{, on a: } (1+x)^n \geq 1 + nx$$

2. *Soit (u_n) une suite définie par: $u_n = a^n$ avec $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que:*

i *Si $a \in]1; +\infty[$ alors (u_n) est divergente (vers $+\infty$)*

ii *Si $a = 1$ alors (u_n) est constante (donc convergente vers 1).*

iii *Si $a \in]-1; 1[$ alors (u_n) est convergente vers 0.*

iv *Si $a \in]-\infty; -1]$ alors (u_n) n'a pas de limite.*

Correction 5

1. *Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par récurrence pour $n = 0$ on a $(1+x)^0 \geq 1 + 0x$. Supposons que la proposition est vraie rang n càd $(*)$ $(1+x)^n \geq 1 + nx$ et montrons que $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$. Comme $x > 0$, on a aussi $1 + x > 0$. En multipliant l'inégalité $(*)$ par $(1+x)$, on obtient:*

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$

or

$$(1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$$

Comme $nx^2 \geq 0$, on a: $\quad (1+nx)(1+x) \geq 1 + (n+1)x$

D'où $\quad (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ *D'où le résultat.*

2. *Etude du comportement asymptotique des suites géométriques.*

i *Écrivons $a = 1 + b$ avec $b > 0$. Alors le binôme de Newton s'écrit $a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \binom{n}{2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}b^k + \cdots + b^n$. Tous les termes sont positifs, donc pour tout entier naturel n on a : $a^n \geq 1 + nb$. Or $\lim_{n\to+\infty}(1 + nb) = +\infty$ car $b > 0$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.*

ii *est évident.*

iii *Si $a = 0$, le résultat est clair. Sinon, on pose $b = |\frac{1}{a}|$. Alors $b > 1$ et d'après le point précédent $\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty$. Comme pour tout entier naturel n on a : $|a|^n = \frac{1}{b^n}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}|a|^n = 0$, et donc aussi $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$.*

iv *Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ. De $a^2 \geq 1$, on déduit que pour tout entier naturel n, on a $a^{2n} \geq 1$. En passant à la limite, il vient $\ell \geq 1$. Comme de plus pour tout entier naturel n on a $a^{2n+1} \leq a \leq -1$, il vient en passant de nouveau à la limite $\ell \leq -1$. Mais comme on a déjà $\ell \geq 1$, on obtient une contradiction, et donc (u_n) ne converge pas.*

Exercice 6
On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ *par* $u_0 = \frac{1}{2}$ *et par la relation*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n})$$

.

1. *Montrer que si* $n \geq 1$ *alors* $u_n \geq 1$ *puis que* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*
2. *Calculer la limite de la suite* (u_n) *quand* n *tend vers* $+\infty$.

Correction 6

1. *Montrons que si* $n \geq 1$ *alors* $u_n \geq 1$ *puis que* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*

   On a
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n}).$$
   donc $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + \frac{1}{u_0}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 2) = \frac{5}{4} \geq 1$
   Supposons que $u_n \geq 1$
   $$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - 1 & = & \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n}) - 1 \\ & = & \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2u_n} \\ & = & \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n} \\ & = & \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n} \\ & \geq & 0 \end{array}$$
   donc $u_{n+1} \geq 1$ *ce qui montre par récurrence que pour tout* $n \geq 1$ *on a* $u_n \geq 1$ *.*
   Maintenant montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*
   $$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n}) - u_n \\ & = & \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n^2}{2u_n} \\ & = & \frac{1 - u_n^2}{2u_n} \\ & = & \frac{(u_n + 1)(1 - u_n)}{2u_n} \\ & \leq & 0 \end{array}$$
   ce qui montre que $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*
2. *On a* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite* $l \in \mathbf{R}^*$
   de plus on a
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n}).$$
   Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n}).$$

c'est-à-dire

$$l = \frac{1}{2}(l + \frac{1}{l}).$$

$\Rightarrow$

$$l^2 = 1$$

$\Rightarrow$

$$l = +1 \ ou \ -1$$

et comme $u_n \geq 1$, Alors

$$l = +1$$

Exercice 7 **Étude d'une suite récurrente**
Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par: $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1. *Étudier la monotonie de f.*
2. *Soit (u_n) la suite définie par:*

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $0 < u_n < u_{n+1} < 1$*

b. *En déduit que la suite (u_n) converge.*

c. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:*

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

d. *En déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:*

$$|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - 1|$$

En déduit la limite de la suite (u_n).

Correction 7

1. *Soient x et y de $[-1, +\infty[$ tels que $x < y \Longrightarrow \frac{1+x}{2} < \frac{1+y}{2} \Longrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}} < \sqrt{\frac{1+y}{2}}$ d'où f est strictement croissante*
Deuxième méthode f est composée de deux fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ qui sont strictement croissantes d'où f est strictement croissante

2. **a.** *Démontrons $\mathbf{P}(n)$:pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $0 < u_n < u_{n+1} < 1$*

   - *D'abord pour $\mathbf{P}(0)$: on a: $0 < u_0 < u_{0+1} < 1$ en effet*

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{0+1} = u_1 = \sqrt{\frac{1+u_0}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$0 < \sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

   - *Maintenant supposons que $\mathbf{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathbf{P}(n+1)$ est vraie*

Alors on a: $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ *et puisque* f *est strictement croissante donc* $\sqrt{\frac{1}{2}} < f(u_n) < f(u_{n+1}) < 1$ *c'est-à-dire* $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ *ce qui montre que* $\mathbf{P}(n+1)$ *est vraie*

b. *En déduit que la suite* (u_n) *converge.*

On a $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ *d'où* (u_n) *est croissante et majorée donc elle est convergente.*

c. *Démontrons que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a:*

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - 1 \\ &= \frac{\frac{1+u_n}{2} - 1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1} \\ &= \frac{\frac{u_n-1}{2}}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{u_n - 1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1} \end{aligned}$$

Or $\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \geq 0$, *d'où* $\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + 1 \geq 1$ *on passe à l'inverse :* $\frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}+1} \leq 1$

On obtient :

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

d. • *En déduit que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a:*

$$|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^n|u_0 - 1|$$

Soit $\mathbf{Q}(n)$ *la propriété définie par:*

$$|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^n|u_0 - 1|$$

$\mathbf{Q}(0)$ *est vraie car* $u_0 = \frac{1}{2}$ *et* $|u_0 - 1| \leq (\frac{1}{2})^0|u_0 - 1|$

$\mathbf{Q}(n+1)$ *supposons* $\mathbf{Q}(n)$ *est vraie donc*

$$|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^n|u_0 - 1|$$

et d'après la question c on a

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

d'où

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n|u_0 - 1|$$

c'est-à-dire

$$|u_{n+1} - 1| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}|u_0 - 1|$$

ainsi $\mathbf{Q}(n+1)$ *est vraie. d'après le principe de récurrence on en déduit que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a:*

$$|u_n - 1| \leq (\frac{1}{2})^n|u_0 - 1|$$

- *En déduit la limite de la suite* (u_n). *On a*

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$$

et

$$u_0 = \frac{1}{2}$$

On en déduit d'après ce qui précède que

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n - 1| = 0$$

Finalement

$$\lim_{n\to+\infty}u_n = 1$$

Série 2: Fonctions d'une Variable Réelle

Exercice 8 *Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes:*

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2|x|}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$d)\ \lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \qquad f)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

$$g)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$$

Correction 8

a)

$$\frac{x^2+2|x|}{x}=x+2\frac{|x|}{x}.$$

Si $x>0$ cette expression vaut $x+2$ donc la limite à droite en $x=0$ est +2 .
Si $x<0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x=0$ est -2 .
Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x=0$.

b) $\frac{x^2+2|x|}{x}=x+2\frac{|x|}{x}=x-2$ *pour $x<0$. Donc la limite quand $x\to-\infty$ est $-\infty$.*

c) Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y-1<E(y)\le y$. Donc pour $y>0$, $\frac{y-1}{y}<\frac{E(y)}{y}\le 1$. On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\frac{E(y)}{y}$ tend 1 . On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$. En posant $y=1/x$, et en faisant tendre x vers 0 , alors $xE\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{E(y)}{y}$ tend vers 1.

d)

$$\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}=1-\cos x$$

. Lorsque $x\to\pi$ la limite est donc 2.

e)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{1+x-\left(1+x^2\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}\\ &= \frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}\\ &= \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Lorsque $x\to 0$ la limite vaut $\frac{1}{2}$.

f) Pour $x>0, (x^x)^x=e^{x\ln(x^x)}=e^{x^2\ln x}$ et $x^{(x^x)}=e^{x^x\ln x}$. Par suite,

$$\forall x>0, \frac{\left(x^x\right)^x}{x^{\left(x^x\right)}}=\exp \left(\ln x\left(x^2-x^x\right)\right)$$

Or, $x^2-x^x=-x^x\left(1-x^{2-x}\right)=-e^{x \ln x}\left(1-e^{(2-x) \ln x}\right)$.
Quand x *tend vers* $+\infty,(2-x) \ln x$ *tend vers* $-\infty$.
Donc, $1-e^{(2-x) \ln x}$ *tend vers 1 puis* x^2-x^x *tend vers* $-\infty$.
Alors, $\ln x\left(x^2-x^x\right)$ *tend vers* $-\infty$*, puis* $\frac{\left(x^x\right)^x}{x^{\left(x^x\right)}}=\exp \left(\ln x\left(x^2-x^x\right)\right)$ *tend vers* 0.

g) $\frac{x^n-1}{x-1}=1+x+x^2+\cdots+x^n$. *Donc si* $x \rightarrow 1$ *la limite de* $\frac{x^n-1}{x-1}$ *est* n. *Donc la limite de* $\frac{x-1}{x^n-1}$ *en* 1 *est* $\frac{1}{n}$.

Exercice 9 *Soit* f *la fonction déjinie par*

$$f(x)=\frac{\ln (|x|)}{x-1}.$$

1. *Dönner l'enscmble de définition* D_f *de* f.
2. *Sur quel erisemble peut on prolonger* f *par continuite?*

Correction 9

1. $D_f=]-\infty, 0[\cup] 0,1[\cup] 1,+\infty[$
2. *Les fonctions qui à* x *associent* $\ln |x|$ *et* $\frac{1}{x-1}$ *sant continues respectivement sur* $\mathbb{R}^*$ *et* $\mathbb{R} \backslash\{1\}$. f *est alors continues sur* $\mathbb{R} \backslash\{0,1\}$ *comme produit de fonctions continues.*

   D'autre part, $\lim _{x \rightarrow 0} \ln |x|=-\infty \Rightarrow \lim _{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{x-1}=+\infty$. *Donc* f *ne peut pas être prolongée par contimité au pait* 0.

   Calculons $\lim _{x \rightarrow 1} f(x)$.

   On pose $u=x-1$*, alors* $u \rightarrow 0$ *quand* $x \rightarrow 1$.

   On a $\lim _{u \rightarrow 0} \frac{\ln (1+u)}{u}=1$. *Pars suite,* $\lim _{x \rightarrow 1} f(x)=1$. f *est donc prolongeable par contimité' sur* R^**, son prolongement* F *est définie par:*

$$\begin{aligned} & F(x)=f(x) \quad \forall x \in]-\infty, 0[\cup] 0,1[\cup] 1,+\infty[, \\ & F(1)=1 .\end{aligned}$$

Exercice 10 *Donner les ensembles de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes:*

a) $f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3-x^2-x+1}$;

b) $f(x)=\left(x^2+1\right) \ln \left(x^3+x^2-2\right)$;

c) $f(x)=\sqrt{e^{-3 x+1}}$;

d) $f(x)=\frac{\sin \left(2 x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos (3 x-\pi)}$.

Correction 10

a) ***Df?***

1 est racine de $x^3 - x^2 - x + 1$ *donc*

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)\left(x^2 - 1\right), \\ &= (x-1)^2(x+1). \end{aligned}$$

Donc $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

Dérivé?

On pose

$$\begin{aligned} u(x) &= x^3 + x^2 + x + 1, \\ v(x) &= x^3 - x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2}, \\ &= \frac{\left(3x^2 + 2x + 1\right)\left(x^3 - x^2 - x + 1\right) - \left(x^3 + x^2 + x + 1\right)\left(3x^2 - 2x - 1\right)}{\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)^2}, \\ &= \frac{-2x^4 - 4x^3 + 4x + 2}{\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)^2}, \\ &= \frac{-2(x^4 - 1) - 4x(x^2 - 1)}{\left((x-1)^2(x+1)\right)^2}, \\ &= \frac{(x^2 - 1)(-2(x^2 + 1) - 4x)}{(x-1)^4(x+1)^2}, \\ &= \frac{-2(x^2 + 1) - 4x}{(x-1)^3(x+1)^2}. \end{aligned}$$

b) ***Df?***

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 > 0?$$

On a

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 2 &= (x-1)\left(x^2 + 2x + 2\right), \\ &= (x-1)\left[(x+1)^2 + 1\right]. \end{aligned}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $(x+1)^2 + 1 > 1$, *donc* $x^3 + x^2 - 2$ *est du signe de* $x - 1$, *donc* f *est définie sur* $]1, +\infty[$.

Dérivé?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 + 1\right)' \ln\left(x^3 + x^2 - 2\right) + \left(x^2 + 1\right)\left(\ln\left(x^3 + x^2 - 2\right)\right)' \\ &= 2x \ln\left(x^3 + x^2 - 2\right) + \left(x^2 + 1\right)\left(x^3 + x^2 - 2\right)' \frac{1}{x^3 + x^2 - 2}, \\ &= 2x \ln\left(x^3 + x^2 - 2\right) + \frac{\left(x^2 + 1\right)\left(3x^2 + 2x\right)}{x^3 + x^2 - 2}, \\ &= 2x \ln\left(x^3 + x^2 - 2\right) + \frac{3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - 2}. \end{aligned}$$

c) ***Df?***

On a $x \in D_f \Leftrightarrow e^{-3x+1} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
donc $D_f = \mathbb{R}$.

Dérivé?

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{e^{-3x+1}}\right)', \\
&= \left(\left(e^{-3x+1}\right)^{1/2}\right)', \\
&= \left(e^{-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}\right)' = \left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)' e^{-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}, \\
&= -\frac{3}{2}\left(e^{-3x+1}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}\sqrt{e^{-3x+1}}.
\end{aligned}
$$

d) ***Df?***

On a

$$
\begin{aligned}
x \in D_f &\Leftrightarrow \cos(3x-\pi) \neq 0, \\
&\Leftrightarrow 3x-\pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
&\Leftrightarrow \quad 3x \neq \frac{3\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
&\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Donc $D_f = \mathbb{R}\backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} \middle| \, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Dérivé?

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos(3x-\pi)}\right)', \\
&= \frac{\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right)'\cos(3x-\pi) - (\cos(3x-\pi))'\sin(2x+\frac{\pi}{4})}{\cos^2(3x-\pi)}, \\
&= \frac{2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos(3x-\pi) + 3\sin(3x-\pi)\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2(3x-\pi)}.
\end{aligned}
$$

On a $\forall x \in \mathbb{R} \cos(x-\pi) = -\cos x$ *et* $\sin(x-\pi) = -\sin x$ *donc*

$$
f'(x) = \frac{-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos(3x) - 3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\sin(3x)}{\cos^2(3x)}.
$$

Exercice 11 *Application du théorème des valeurs intermédiaires*

1. *Montrer çue l'équation* $x^6 - 10x - 10$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $[-1, 2]$.
2. *Montrer que l'équation* $\sqrt[3]{x^5 + x^2 - x} + ax - 1 = 0$ *où* $a \in \mathbb{R}^*$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $[0, +\infty[$.

Correction 11

1. *Soit* f *la fonction polynôme définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^6 - 10x - 10$.

   f *est continue sur* $[0, 2]$. *En outre,* $f(0) = -10$ *et* $f(2) = 34$ *donc* $f(0).f(2) < 0$. *D'après le théorème des valuurs intermédiaires, il existe* $c \in]0, 2[\subset [-1, 2]/f(c) = 0$.

2. *La fouction* f *difinie par* $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + x^2 - x} + ax - 1$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.

   on a $\lim_{\to\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} = +\infty$.

   Donc $\forall A > 0 \quad \exists B > 0/ \quad \forall x \in]0, +\infty[(x > B \Rightarrow f(x) > A > 0)$. *On a alors* $f(B+1) > 0$.

   f *étant continue sur* $[0, B+1]$ *et* $f(0) \cdot f(B+1) < 0$ *(car* $f(0) = -1$*); d'aprés le théoréme des valeurs intermédiaidires* $\exists x_0 \in]\, 0, B+1\, [\subset [0, +\infty\, [/ f\,(x_0) = 0$.

Exercice 12 *Application du théorème de Rolle*

1. *Calculer la dérivée de* $x \mapsto \left(x^2+1\right)\sin x$.
2. *Montrer que l'équation* $\left(x^2+1\right)\cos x + 2x\sin x = 0$ *admet au moins une solution dans* $[0,\pi]$.
3. *Soit* f *'une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $]0,1[$ *s'annulant en* 3 *points de* $]0,1[$. *Montrer qu'il existe un point* x_0 *de* $]0,1[$ *tel que* $f''(x_0)=0$.

Correction 12

1. *Soit* $f(x)=\left(x^2+1\right)\sin(x) \Rightarrow f'(x)=2x\sin(x)+\left(x^2+1\right)\cos(x)$
2. *On a* f *est coutinue sur* $[0,\pi]$, f *est dérivable sur* $]0,\pi[$ *et* $f(\pi)=f(0)=0$, *alors d'aprés le théorème de Rolle* $\exists e \in]0,\pi[$ *telque* $f'(e)=0 \Rightarrow f'(x)$ *admet une racine sur* $]0,\pi[$.
3. *Soit* $a_0<a_1<a_2$ *dans* $]0,1[$ *telque* $f(a_{i=0,1,2})=0$.
   D'aprés le théorème de Rolle sur $[a_0,a_1] \Rightarrow \exists e_1 \in]a_0,a_1[$ *telque* $f'(e_1)=0$.
   D'aprés le théorème de Rolle sur $[a_1,a_2] \Rightarrow \exists e_2 \in]a_1,a_2[$ *telque* $f'(e_2)=0$.
   On a f *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $]0,1[$ *et* $f'(e_1)=f'(e_2)=0$. *En appliquant le théorème de Rolle à* f' *sur* $[e_1,e_2]$, *on a* $\exists e_3 \in]e_1 e_2[$ *telque* $f''(e_3)=0$.

Exercice 13 *Application du théorème des accroissements finis pour le calcul des limites*

1. *A l'aide du théorème des accroissements finis déterminer*

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right).$$

2. *Montrer que*

$$\forall x>0, \frac{1}{1+x} < \ln(1+x)-\ln(x) < \frac{1}{x}.$$

En déduire, pour $k\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}.$$

Correction 13

1. *Par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction* $x \to x\mathrm{e}^{1/x}$ *entre* x *et* $x+1$ *:*
   il existe $c_x \in]x,x+1[$ *tel que*

$$(x+1)\mathrm{e}^{1/(x+1)} - x\mathrm{e}^{1/x} = \left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{1/c_x}(x+1-x) = \left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{1/x}.$$

Quand $x\to+\infty, c_x\to+\infty$ *car* $c_x \geqslant x$.

Par suite

$$\left(\frac{c_x-1}{c_x}\right)\mathrm{e}^{1/c_x} \to 1.$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)\mathrm{e}^{1/(x+1)}-x\mathrm{e}^{1/x}\right)=1.$$

2. *On applique le théorème des accroissements finis à la fonction* $x\mapsto \ln x$ *sur* $[x,x+1]$*, il existe alors* $c\in]x,x+1[$ *tel que*

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{c}.$$

Or $x<c<x+1$ *donne*

$$\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}.$$

d?où le résultat.

On en déduit que

$$\sum_{p=n+1}^{kn}\ln(p+1)-\ln p\leqslant\sum_{p=n+1}^{kn}\frac{1}{p}\leqslant\sum_{p=n+1}^{kn}\ln p-\ln(p-1).$$

Ce qui donne

$$\ln\frac{kn+1}{n+1}\leqslant\sum_{p=n+1}^{\mathrm{lin}}\frac{1}{p}\leqslant\ln k.$$

Par le théorème des Gendarmes

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=n+1}^{\mathrm{lin}}\frac{1}{p}=\ln k.$$

Série 3: Étude des fonctions usuelles et développements limités

Exercice 14 *Calculer :*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad et \quad b)\ \lim_{x\to+\infty}(x-\ln(\operatorname{ch} x)).$$

Correction 14

a)

Par la formule du binôme de Newton nous avons

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^3 x &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3, \\
&= \frac{1}{8}(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x}). \\
\operatorname{sh}^3 x &= \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^3, \\
&= \frac{1}{8}(e^{3x}-3e^x+3e^{-x}-e^{-3x}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) &= \frac{1}{8}e^{-x}(6e^x+2e^{-3x}) \\
&= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4x}
\end{aligned}$$

qui tend vers $\frac{3}{4}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b)

$$\begin{aligned}
x-\ln(\operatorname{ch} x) &= x-\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) \\
&= x-\ln(e^x+e^{-x})+\ln 2 \\
&= x-\ln(e^x(1+e^{-2x}))+\ln 2 \\
&= x-x+\ln(1+e^{-2x})+\ln 2 \\
&= \ln(1+e^{-2x})+\ln 2
\end{aligned}$$

Lorsque $x\to+\infty$,

$$\ln(1+e^{-2x})\to 0$$

donc

$$x-\ln(\operatorname{ch} x)\to \ln 2$$

Exercice 15 *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On pose* $t = \arctan(\operatorname{sh} x)$.

1. *Établir les relations*

$$a)\tan t = \operatorname{sh} x\ ; \qquad b)\frac{1}{\cos t} = \operatorname{ch} x\ ; \qquad c)\sin t = \operatorname{th} x.$$

2. *Montrer que* $x = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Correction 15

1. ***a)*** *Remarquons d'abord que, par construction,* $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, *t est donc dans le domaine de définition de la fonction* tan.
En prenant la tangente de l'égalité $t = \arctan(\operatorname{sh} x)$ *on obtient directement* $\tan t = \tan\big(\arctan(\operatorname{sh} x)\big) = \operatorname{sh} x$.

   b) $\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = 1 + \tan^2\big(\arctan(\operatorname{sh} x)\big) = 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$. *Or la fonction* ch *ne prend que des valeurs positives, et* $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *donc* $\cos t > 0$. *Ainsi* $\dfrac{1}{\cos t} = \operatorname{ch} x$.

   c) *On a* $\sin t = \tan t \cdot \cos t$
et puisque $\tan t = \operatorname{sh} x$ *et* $\dfrac{1}{\cos t} = \operatorname{ch} x$, *alors* $\sin t = \operatorname{sh} x \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$.

2. *Puisque* $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, *on a* $0 < \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, *donc* $\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ *est bien défini et strictement positif. Ainsi* $y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ *est bien défini.*
on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} y &= \frac{e^{y} - e^{-y}}{2},\\
&= \frac{e^{\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)} - e^{-\ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}}{2},\\
&= \tfrac{1}{2}\tan\left(\tfrac{t}{2} + \tfrac{\pi}{4}\right) - \tfrac{1}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)},\\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)},\\
&= \frac{-\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)},
\end{aligned}$$

car $\sin(2u) = 2\cos u \sin u$ *et* $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$.

$$\operatorname{sh} y = \frac{-\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Enfin, puisque $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$ *et* $\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$, *on a* $\operatorname{sh} y = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \tan t = \operatorname{sh} x$.
Puisque la fonction sh *est bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on en déduit* $y = x$.
Conclusion : $x = y = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Exercice 16 *Vérifier*

$$a)\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \textit{et} \qquad b)\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = sgn(x)\frac{\pi}{2}.$$

Correction 16

a)
Première méthode:
Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par

$$f(x)=\arcsin x+\arccos x.$$

On a f est continue sur l'intervalle $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
Pour tout $x\in]-1,1[$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0$. Ainsi f est constante sur $]-1,1[$, donc sur $[-1,1]$ (car continue aux extrémités).
Or $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x\in[-1,1]$, $f(x)=\frac{\pi}{2}$.
Deuxième méthode:
On pose

$$y=\arccos x-\frac{\pi}{2},$$

$\Longrightarrow$

$$y+\frac{\pi}{2}=\arccos x,$$

$\Longrightarrow$

$$\cos(y+\frac{\pi}{2})=x,$$

et

$$\cos(y+\frac{\pi}{2})=-\sin y=\sin(-y)=x,$$

d'où

$$\arcsin x=-y=-\arccos x+\frac{\pi}{2}.$$

b)
Première méthode:
Soit

$$g(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}.$$

Cette fonction est définie sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ (mais pas en 0). On a

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=0,$$

donc g est constante sur chacun de ses intervalles de définition: $g(x)=c_1$ sur $]-\infty,0[$ et $g(x)=c_2$ sur $]0,+\infty[$. Sachant que $\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$, on calcule $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1=-\dfrac{\pi}{2}$ et $c_2=+\dfrac{\pi}{2}$.
Deuxième méthode:
On remarque que pour tout $x>0$, si θ désigne l'arctangente de x : $\theta=\arctan x\Rightarrow\tan\theta=x$ alors

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\tan\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\quad \textit{et}\quad 0<\frac{\pi}{2}-\theta<\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}-\arctan x.$$

Finalement

$$\arctan\frac{1}{x}+\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 17 *Donner*

1. *Le Développement limité en* 1 *à l'ordre* 3 *de* $f(x)=\sqrt{x}$.
2. *Le Développement limité en* 1 *à l'ordre* 3 *de* $g(x)=e^{\sqrt{x}}$.

Correction 17

1. ***Première méthode:***

   On applique la formule de Taylor (autour du point $x=1$*)*

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

   Comme $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac12}$ *alors* $f'(x)=\frac12 x^{-\frac12}$ *et donc* $f'(1)=\frac12$. *Ensuite on calcule* $f''(x)$ *(puis* $f''(1)$*),* $f'''(x)$ *(et enfin* $f'''(1)$*).*

   On trouve le dl de $f(x)=\sqrt{x}$ *au voisinage de* $x=1$

$$\sqrt{x}=1+\frac12(x-1)-\frac18(x-1)^2+\frac1{16}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

   Deuxième méthode:

   Posons $h=x-1$ *(et donc* $x=h+1$*). On applique la formule du dl de* $\sqrt{1+h}$ *autour de* $h=0$.

$$\begin{aligned} f(x)=\sqrt{x}, &= \sqrt{1+h}, \\ &= 1+\frac12 h-\frac18 h^2+\frac1{16}h^3+o(h^3), \\ & \textit{c'est la formule du dl de } \sqrt{1+h}, \\ f(x)=\sqrt{x} &= 1+\frac12(x-1)-\frac18(x-1)^2+\frac1{16}(x-1)^3+o((x-1)^3). \end{aligned}$$

2. ***Première méthode:***

   La première méthode consiste à calculer $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\exp\sqrt{x}$*,* $g''(x)$*,* $g'''(x)$ *puis* $g(1)$*,* $g'(1)$*,* $g''(1)$*,* $g'''(1)$ *pour pouvoir appliquer la formule de Taylor conduisant à*

$$\exp(\sqrt{x})=e+\frac{e}{2}(x-1)+\frac{e}{48}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

   (avec $e=\exp(1)$*).*

   Deuxième méthode:

   Commencer par calculer le dl de $k(x)=\exp x$ *en* $x=1$ *ce qui est très facile car pour tout* n*,* $k^{(n)}(x)=\exp x$ *et donc* $k^{(n)}(1)=e$ *:*

$$\exp x=e+e(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\frac{e}{3!}(x-1)^3+o((x-1)^3).$$

   Pour obtenir le dl $g(x)=h(\sqrt{x})$ *en* $x=1$ *on écrit d'abord :*

$$\exp(\sqrt{x})=e+e(\sqrt{x}-1)+\frac{e}{2!}(\sqrt{x}-1)^2+\frac{e}{3!}(\sqrt{x}-1)^3+o((\sqrt{x}-1)^3).$$

   Il reste alors à substituer $\sqrt{x}$ *par son dl obtenu dans la première question.*

Exercice 18 *Application du développement limité pour le calcul des limites*
Donner

1. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$.
2. $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$.

Correction 18

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+o(x^4)$, *et donc*

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5).$$

Puis,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\arcsin x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+o(x^4)\right)^{-1},\\ &= \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{6}-\frac{3x^4}{40}+\frac{x^4}{36}+o(x^4)\right),\\ &= \frac{1}{x}-\frac{x}{6}-\frac{17x^3}{360}+o(x^3).\end{aligned}$$

car

$$\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+o(x^4)\right)^{-1}=\left(1-\frac{x^2}{6}-\frac{3x^4}{40}+\frac{x^4}{36}+o(x^4)\right).$$

En effet on pose

$$u=\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+o(x^4),$$

alors
$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)$ *d'où*

$$\begin{aligned}(1+u)^{-1} &= 1-u+u^2+o(x^4),\\ &= 1-(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40})+(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40})^2+o(x^4),\\ &= 1-\frac{x^2}{6}-\frac{3x^4}{40}+(\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40})^2+o(x^4),\\ &= 1-\frac{x^2}{6}-\frac{3x^4}{40}+\frac{x^4}{36}+o(x^4).\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)=\lim_{x\to 0}(\frac{x}{6}+\frac{17x^3}{360}+o(x^3))=0.$$

2. *Quand x tend vers $+\infty$,*

$$\ln(x+1)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln x+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

en effet, si on pose $u=\frac{1}{x}$ on a $\ln(1+u)=u+o(u)$
puis,

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

Ensuite,

$$x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right) = \frac{1}{\ln x}+o\left(\frac{1}{\ln x}\right) \to 0.$$

De même si on pose $u = \dfrac{1}{x\ln x}+o\left(\dfrac{1}{x\ln x}\right)$ *alors* $\ln(1+u) = u + o(u)$.

Donc, $\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = exp\left(x\ln\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) \to e^0 = 1.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = 1.$$

Exercice 19 *Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :* $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x+1}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *Donner le tableau de variation de f.*
3. *Donner le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f.*
4. *En déduire la position de la courbe $(\mathcal{C})$ de f par rapport à sa tangente au point* 0.
5. *Donner le DL à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *de la fonction :* $F(x) = \dfrac{2-3X^2}{X+1}$.
6. *En déduire le DL à l'ordre* 1 *au voisinage de l'infini de f.*
7. *Quelle est la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à ses asymptotes.*

Correction 19

1. *La fonction f est définie si et seulement si $x+1 \neq 0$ donc f est définie sur* $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
2. *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et*

$$f^{'}(x) = \frac{4x(x+1)-(2x^2-3)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2+1}{(x+1)^2}.$$

On remarque que $f^{'}(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ *D'autre part*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty.$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$\|\|$	$+$	
$f(x)$		$+\infty$	$\|\|$		$+\infty$
		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	
	$-\infty$		$\|\|$	$-\infty$	

3. $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x+1}$ *sur $\mathbb{R}-\{-1\}$. Et Le le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de* $\frac{1}{x+1}$ *est :*

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

$$f(x)=(2x^2-3)(1-x+x^2)+o(x^2)=2x^2-3+3x-3x^2+o(x^2).$$

d'où

$$f(x)=-3+3x-x^2+o(x^2).$$

4. *La tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ de f au voisinage de 0 a pour équation $y=3x-3$ donc*

$$f(x)-y=-x^2+o(x^2).$$

La courbe est ainsi au dessus de sa tangente.

5. *On a*

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{2-3X^2}{X+1}=(2-3X^2)(1-X+X^2)+o(X^2), \\ &= 2-2X-X^2+o(X^2). \end{aligned}$$

6. *On pose $X=\dfrac{1}{x}$ donc*

$$f(x)=f(\frac{1}{X})=\frac{2(\frac{1}{X})^2-3}{\frac{1}{X}+1}=\frac{\frac{1}{X^2}(2-3X^2)}{\frac{1}{X}(1+X)}=\frac{1}{X}\left(\frac{2-3X^2}{1+X}\right)=\frac{1}{X}F(X).$$

d'où

$$f(x)=\frac{1}{X}(2-2X-X^2+o(X^2))=\frac{2}{X}-2-X+o(X).$$

Finalement

$$f(x)=2x-2-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

7. *On a*

$$f(x)=2x-2-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

On pose $y=2x-2$ ainsi

$$f(x)-y=-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

Par suite, la courbe de f:
est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$, et
est au-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Série 4: Calcul d'intégrales et équations différentielles linéaires

Exercice 20 *Calculer les intégales suivantes:*

$$\textbf{a)}\ \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{1+x^2}dx \quad (0<a).$$

$$\textbf{b)}\ \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx.$$

Correction 20

a) *On pose* $t=\dfrac{1}{x}$ *et donc* $x=\dfrac{1}{t}$ *et* $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. *On obtient*

$I=\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\int_{a}^{\frac{1}{a}}\frac{\ln(\frac{1}{t})}{1+\frac{1}{t}^2}\frac{1}{t^2}dt=-\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln t}{1+t^2}dt=-I$, *et donc* $I=0$.

b) *On pose* $u=\dfrac{1}{x}$. *On obtient*

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx=\int_{2}^{\frac{1}{2}}(1+u^2)\arctan(\frac{1}{u})\frac{-du}{u^2}.$$

On sait que $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ *voir série* 3. *Donc*

$$I=-\int_{2}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)(\frac{\pi}{2}-\arctan u)du=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)(\frac{\pi}{2}-\arctan u)du=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du-I.$$

Donc

$$2I=\frac{\pi}{2}[u-\frac{1}{u}]_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{\pi}{2}((2-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}-2))$$

Par suite, $I=\dfrac{3\pi}{4}$.

Exercice 21 *Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.*

1. $\int x^2\ln x\,dx$.
2. $\int x\arctan x\,dx$.
3. $\int \ln x\,dx$ *puis* $\int(\ln x)^2\,dx$.
4. $\int \cos x\exp x\,dx$.

Correction 21

1. *Considérons l'intégration par parties avec* $u = \ln x$ *et* $v' = x^2$. *On a donc* $u' = \frac{1}{x}$ *et* $v = \frac{x^3}{3}$. *Donc*

$$\begin{aligned}
\int \ln x \times x^2\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v,\\
&= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3}\,dx,\\
&= \left[\ln x \times \frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{x^2}{3}\,dx,\\
&= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c.
\end{aligned}$$

2. *Considérons l'intégration par parties avec* $u = \arctan x$ *et* $v' = x$. *On a donc* $u' = \frac{1}{1+x^2}$ *et* $v = \frac{x^2}{2}$. *Donc*

$$\begin{aligned}
\int \arctan x \times x\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v,\\
&= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2}\right] - \int \frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^2}{2}\,dx,\\
&= \left[\arctan x \times \frac{x^2}{2}\right] - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx,\\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + c,\\
&= \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x - \frac{1}{2}x + c.
\end{aligned}$$

3. *Pour la primitive* $\int \ln x\,dx$, *regardons l'intégration par parties avec* $u = \ln x$ *et* $v' = 1$. *On a* $u' = \frac{1}{x}$ *et* $v = x$.

   Donc

$$\begin{aligned}
\int \ln x\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v,\\
&= [\ln x \times x] - \int \frac{1}{x} \times x\,dx,\\
&= [\ln x \times x] - \int 1\,dx,\\
&= x\ln x - x + c.
\end{aligned}$$

   Pour la primitive $\int (\ln x)^2\,dx$, *par l'intégration parties avec* $u = (\ln x)^2$ *et* $v' = 1$. *On a* $u' = 2\frac{1}{x}\ln x$ *et* $v = x$.

   Donc

$$\begin{aligned}
\int (\ln x)^2\,dx &= \int uv' = [uv] - \int u'v,\\
&= \left[x(\ln x)^2\right] - 2\int \ln x\,dx,\\
&= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c.
\end{aligned}$$

   Pour obtenir la dernière ligne on a utilisé la primitive calculée précédemment.

4. *Notons* $I = \int \cos x \exp x\,dx$.

   Regardons l'intégration par parties avec $u = \exp x$ *et* $v' = \cos x$. *Alors* $u' = \exp x$ *et* $v = \sin x$.

Donc
$$I=\int \cos x \exp x\, dx = \big[\sin x \exp x\big] - \int \sin x \exp x\, dx.$$
Si on note $J=\int \sin x \exp x\, dx$*, alors on a*
$$I=\big[\sin x \exp x\big]-J. \tag{1}$$
Pour calculer J *on refait une deuxième intégration par parties avec* $u=\exp x$ *et* $v'=\sin x$*.*
Ce qui donne

$$\begin{aligned} J &= \int \sin x \exp x\, dx = \big[-\cos x \exp x\big] - \int -\cos x \exp x\, dx, \\ &= \big[-\cos x \exp x\big] + I. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une deuxième équation :
$$J=\big[-\cos x \exp x\big]+I. \tag{2}$$
Repartons de l'équation (1) dans laquelle on remplace J *par la formule obtenue dans l'équation (2).*
$$I=\big[\sin x \exp x\big]-J=\big[\sin x \exp x\big]-\big[-\cos x \exp x\big]-I.$$
D'où $\quad 2I=\big[\sin x \exp x\big]+\big[\cos x \exp x\big].$
Ce qui nous permet de calculer notre intégrale :
$$I=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)\exp x + c.$$

Exercice 22 *Calculer les primitives des fractions irrationnelles suivantes:*

a) $f(x)=\dfrac{2\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt{x^3}-8x}.$

b) $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)}.$

Correction 22

a) *On commence à chercher le dénominateur commun* k *des exposants rationnels de* x *: on a* $\frac{1}{3}$ *et* $\frac{3}{2}$ *donc* $k=6$ *posons alors* $x=t^6 \Longrightarrow dx=6t^5dt$*.*
soit F *une primitive de* f*, on a*
$$F(x)=\int \frac{2t^2+t^6}{t^9-8t^6}.6t^5dt = 6\int \frac{2t+t^5}{t^3-8}dt.$$
On décompose maintenant en élément simple
$$\frac{t^5+2t}{t^3-8}=t^2+\frac{8t^2+2t}{t^3-8}=t^2+2\frac{4t^2+t}{(t-2)(t^2+2t+4)}.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{4t^2+t}{(t-2)(t^2+2t+4)} &= \frac{a}{t-2}+\frac{bt+c}{t^2+2t+4},\\ &= \frac{a}{t-2}+\frac{bt+c}{t^2+2t+4},\\ &= \frac{(a+b)t^2+(2a+c-2b)t+4a-2c}{(t-2)(t^2+2t+4)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b &=& 4,\\ 2a+c-2b &=& 1,\\ 4a-2c &=& 0.\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\frac{3}{2},\\ c=3,\\ b=\frac{5}{2}.\end{array}\right.$$

Par la suite

$$\frac{t^5+2t}{t^3-8} = t^2+\frac{3}{t-2}+\frac{5t+4}{t^2+2t+4}$$

$$\begin{aligned}F(x) &= 6\left(\int t^2dt+\int\frac{3}{t-2}dt+\int\frac{5t+4}{t^2+2t+4}dt\right),\\ &= 6\left(\int t^2dt+\int\frac{3}{t-2}dt+\frac{5}{2}\int\frac{2t+2}{t^2+2t+4}+\int\frac{dt}{t^2+2t+4}\right).\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow F(x) = 2t^3+18ln(|t-2|)+15ln(|t^2+2t+4|)+\frac{6}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{t+1}{\sqrt{3}})+Cste.$$

Pour le calcul de $\int\frac{dt}{t^2+2t+4}dt$*, on a*

$$\begin{aligned}\int\frac{dt}{t^2+2t+4} &= \int\frac{dt}{(t+1)^2+3},\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dt,\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{t+1}{\sqrt{3}}).\end{aligned}$$

b) *Soit G une primitive de g.*
On commence à chercher le dénominateur commun k des exposants rationnels de x : on a $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$ donc $k=4$, posons alors $x=t^4 \Longrightarrow dx=4t^3dt$.
D'où

$$G(x) = \int\frac{t^3+t^2}{t^4(t^2-1)}.4t^3 = 4\int\frac{t^2+t}{t^2-1}.$$

Par la suite

$$\begin{aligned}G(x) &= 4\left(\int\frac{t^2+t}{t^2-1}dt\right),\\ &= 4\left(\int\frac{t^2-1}{t^2-1}dt+\int\frac{t+t}{t^2-1}dt\right),\\ &= 4\left(\int 1dt+\int\frac{1}{t-1}dt\right),\\ &= 4\left(t+ln(|t-1|)\right)+Cste.\\ &= 4\left(\sqrt[4]{x}+ln(|\sqrt[4]{x}-1|)\right)+Cste.\end{aligned}$$

Exercice 23 *Soit* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. *En majorant la fonction intégrée, montrer que* $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. *Calculer* $I_n + I_{n+1}$.
3. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$.

Correction 23

1. *Pour* $x > 0$ *on a* $\dfrac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$*, donc*
$$I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$
Donc $I_n \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$.
2. $$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$
3. *Soit* $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. *Par la question précédente nous avons* $S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots \pm (I_{n-1} + I_n)$. *Mais d'autre part cette somme étant télescopique cela conduit à* $S_n = I_0 \pm I_n$. *Alors la limite de* S_n *et donc de* $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ *(quand* $n \to +\infty$*) est* I_0 *car* $I_n \to 0$. *Un petit calcul montre que* $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. *Donc la somme alternée des inverses des entiers converge vers* $\ln 2$.

Exercice 24 *Soit l'équation différentielle*
$$(E) \qquad y' + 2xy = x.$$

1. *Résoudre l'équation homogène associée.*
2. *Calculer la solution de* (E) *vérifiant* $y(0) = 1$.

Correction 24

1. *Les primitives de la fonction* $a(x) = 2x$ *sont les fonctions* $A(x) = x^2/2 + k$ *où* $k \in \mathbb{R}$ *est une constante réelle quelconque. Donc les solutions de l'équation homogène associée à* E *sont toutes les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *du type :* $y(x) = ce^{-x^2}$ *où* $c \in \mathbb{R}$ *est une constante arbitraire.*
2. *On cherche maintenant une solution particulière de* E *sous la forme* $y_p(x) = c(x)e^{-x^2}$ *(méthode de la variation de la constante).*

   On a : $y_p'(x) + 2xy_p(x) = c'(x)e^{-x^2}$. *Donc* y_p *est solution de* E *si et seulement si :* $c'(x) = xe^{x^2}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

   On choisit la fonction c *parmi les primitives de la fonction* xe^{x^2}*, par exemple :* $c(x) = 1/2e^{x^2}$. *Donc la fonction* y_p *telle que* $y_p(x) = 1/2e^{x^2}e^{-x^2} = 1/2$ *est solution de* E.

Par conséquent les solutions de E sont toutes les fonctions de la forme:

$$y(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}; c \in \mathbb{R}.$$

Pour y solution de E, la condition $y(0) = 1$ équivaut à : $c = 1/2$.

Exercice 25 *Intégrer les équations différentielles suivantes:*

1. $$(E_1) \qquad y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

2. $$(E_2) \qquad y'' + 2y' + 3y = 2e^{-x}\cos(\sqrt{2}x).$$

3. $$(E_3) \qquad y'' + y' - 2y = e^x + \cos(x).$$

Correction 25

1. *L'équation caractéristique est $(r-1)(r-2) = 0$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :*
$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
On est dans la situation où $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ avec $P(x) = 1$ et $\alpha = 1$ racine de (E_1), donc on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = Q(x)x^se^x$ avec $Q(x) = c \in \mathbb{R}, s = 1$ càd que $y_p(x) = cxe^{\ x}$, en remplaçant $y_p(x)$ dans (E_1) on obtient $c = -1$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :
$$y(x) = (c_1 - x)\,e^x + c_2e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. *L'équation caractéristique, $r^2+2r+3 = 0$ relative à léquation homagène admet deux racines complexes conjuguées:*
$$r_1 = -1 - i\sqrt{2} \text{ et } r_2 = -1 + i\sqrt{2}$$
La solution généale de lequatian sans second membre est:
$$y = (\alpha\cos\sqrt{2}x + \beta\sin\sqrt{2}x)e^{-x} \qquad \text{où } (\alpha, \beta) =\in \mathbb{R}^2.$$
Le second membre s'écrit :
$$\begin{aligned} 2e^{-x}\cos\sqrt{2x} &= e^{(-1-i\sqrt{2})x} + e^{(-1+i\sqrt{2})x}, \\ &= e^{r_1x} + e^{r_2x}. \end{aligned}$$
On cherchera une solution particulière de sous la forme: $y_p = x(a\cos\sqrt{2}x + b\sin\sqrt{2}x)e^{-x}$.
De là, $y_p' = (a\cos\sqrt{2}x+b\sin\sqrt{2}x)e^{-x} - xe^{-x}(a\cos\sqrt{2}x+b\sin\sqrt{2}x)+xe^{-x}(-a\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x+b\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x)$.
$y_p'' = e^{-x}[-2a\cos\sqrt{2}x+2b\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x-2b\sin\sqrt{2}x-2a\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x]+xe^{-x}[-a\cos\sqrt{2}x-2b\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x-b\sin\sqrt{2}x + 2a\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)$.
Alors,
$$y_p'' + 2y_p' + 3y_p = 2e^{-x}\cos\sqrt{2}x.$$
Par suite, $a = 0$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ce qui nous donne

$$y_p = \frac{\sqrt{2}}{2} x e^{-x} \sin \sqrt{2} x.$$

La solution générale est :

$$Y = y + y_p = e^{-x}\left[\alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} x \sin \sqrt{2}x.\right]$$

où α et β sont deux racines réelles.

3. *L'équatian caractéristique, $r^2+r-2=0$ relative à l'équation homogène admet deux racines : $r_1=-2$ et $r_2=1$. La salution générale de l'équation sans second membre est:*

$$y = Ae^{-2x} + Be^{x} \text{ où } (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Une solution particulière de l'équation: $y'' + y' - 2y = e^x$ se met sous la forme $y_0 = axe^x, a \in \mathbb{R}$.

$$y_0' = ae^x + axe^x \text{ et } y_0'' = 2ae^x + axe^x.$$

Alors, $\quad y_0'' + y_0' - 2y_a = 3ae^x = e^x$.
D'où $a = \frac{1}{3}$ *et* $y_0 = \frac{x}{3}e^x$.
Une solution particulière de l'équation: $y'' + y' - 2y = \cos x$ se met sous la forme $y_1 = \alpha \cos x + \beta \sin x, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$y_1' = -\alpha \sin x + \beta \cos x \text{ et } y_1'' = -\alpha \cos x - \beta \sin x.$$

Alors, $y_1'' + {y_1}' - 2y_1 = (-3\alpha + \beta)\cos x - (3\beta + \alpha)\sin x = \cos x$
D'où, $\quad -3\alpha + \beta = 1$ *et* $3\beta + \alpha = 0$.
Ce qui nous donne : $\alpha = -\frac{3}{10}$ *et* $\beta = \frac{1}{10}$.
Ainsi, $y_1 = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$.
Lo solution générale est:

$$Y = y + y_0 + y_1 = Ae^{-2x} + Be^x + \frac{x}{3}e^x - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x,$$

où A et B sont deux constantes rélles.