Université Moulay ISMAÏL
Faculté des Sciences et Techniques d'Errachidia
Département de Mathématiques

Exercices corrigés d'Analyse Numérique 1

Filière MIP-S4 (M148)

Pr. Samir KHALLOUQ

Année universitaire 2020-2021

Table des matières

Série 1 : Notions sur les erreurs numériques

Exercice 1 :

1. Combien de nombres appartiennent à l'ensemble F(2,2, −2,2)? Quelle est la valeur de ε_M pour un tel ensemble?
2. Montrer que l'ensemble F (β, t, L, U) contient précisément $2(\beta - 1)\beta^{t-1}(U-L+1)$ éléments.
3. Convertir les nombres suivants en leurs écritures décimales
   - $(10111.011)_2$;
   - $(FB.3D)_{16}$;
   - $(0.100100100\ldots)_2$.

Exercice 2 :

1. Effectuer les opérations suivantes en arithmétique flottante à t = 3 chiffres pour la mantisse.

   a) Montrer que $\pi(1/\pi) \neq 1$ (on prend $\pi = 3.14159$). Conclure.
   b) Calculer $2136 \times (9993 + 0.004567)$ et préciser l'erreur numérique commise.

2. Montrer que la loi d'associativité n'est pas toujours respectée en arithmétique flottante. Pour cela, utiliser l'arithmétique flottante à sept chiffres (t = 7) et les nombres suivants :
   - $x = 28.44751 \times 10^{-5}$,
   - $y = 0.4365578 \times 10^{3}$,
   - $z = -436.5524$.

Exercice 3 :

1. Calculer les racines de l'équation $x^2 - 24x + 1 = 0$ en arithmétique flottante à 5 chiffres. On prendra $fl(\sqrt{143}) = 0.11958 \times 10^2$.
2. Calculer l'erreur relative pour chacune des deux racines. On conviendra que les racines obtenues par une calculatrice sont exactes.
3. Recalculer la racine (notée r_1) qui possède la plus grande erreur relative par la formule : $r_1 = \frac{1}{12+\sqrt{143}}$, puis l'erreur relative commise par ce dernier calcul. Lequel des deux calculs est meilleur ? Pourquoi ?

Exercice 4 :

Soit l'intégrale définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10}\, dx.$$

1. Montrer la relation de récurrence

$$I_n = \frac{1}{n} - 10 I_{n-1}, \qquad n \geq 1. \qquad (1)$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{10(n+1)}.$$

Déduire $\lim\limits_{+\infty} I_n$.

3. Calculer les valeurs de I_n pour n=0,1,…,18. Expliquer le résultat.
4. Réécrire la formule (1) en exprimant I_{n-1} en fonction de I_n. En initialisant I_{31} à une valeur quelconque, recalculer les I_n pour n=30,29,…,18. Comparer et conclure.

Correction de la Série 1 : Notions sur les erreurs numériques

Exercice 1 :

1. On a β=2, donc seuls les nombres de la forme $\pm 0{,}1a2 \cdot 2^e$ avec a2 = 0 ou 1 et e = ± 2, ± 1 ou 0 (car L≤e≤U avec L=-2 et U=2) appartiennent à l'ensemble F (2,2, -2,2). Pour un exposant **e** donné, nous ne pouvons représenter dans cet ensemble que les deux nombres 0,10 et 0,11, et leurs opposés. Par conséquent, le nombre d'éléments appartenant à F (2, 2, -2, 2) est de 20. Enfin, εM = 1/2.
2. Pour tout exposant **e** fixe, chacun des chiffres a2,. . . , at peut prendre β valeurs différentes donc on peut construire β^{t-1} chiffres par a2,a3,…at, tandis que a1 ne peut prendre que des valeurs β − 1. Par conséquent, $2(\beta-1)\beta^{t-1}$ nombres différents peuvent être représentés (le 2 représentent le signe positif et négatif). D'autre part, l'exposant peut prendre des valeurs U - L + 1 (car **e**=L,L+1,…,U). Ainsi, l'ensemble F (β, t, L, U) contient $2(\beta-1)\beta^{t-1}(U-L+1)$ éléments différents.
3. Convertir les nombres suivants en leurs écritures décimales

$$\begin{aligned}(10111.011)_2 = & +1\times 2^4 + 0\times 2^{+3} + 1\times 2^{+2} + 1\times 2^{+1}\\ & +1\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}\\ = & \ 16+0+4+2+1+0+0.25+0.125\\ = & \ 23.375\end{aligned}$$

On rappelle que en base hexadécimal :

$$A \to 10, B\to 11, C\to 12, D\to 13, E\to 14, F\to 15.$$

$$\begin{aligned}(FB.3D)_{16} = & \ 15\times 16^1 + 11\times 16^0\\ & +3\times 16^{-1} + 13\times 16^{-2}\\ = & \ 240+11+3\times 0.0625 + 13\times 0.00390625\\ = & \ 251.23828125\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}(0.100100100\ldots)_2 &= 2^{-1}+2^{-4}+2^{-7}+\ldots\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(3k+1)} = 2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{-3}\right)^k\\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{1-2^{-3}} = \frac{4}{7}\\ &= 0.5714285714285714\ldots\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. Effectuer les opérations suivantes en arithmétique flottante à t = 3 chiffres pour la mantisse.

a) On a pour une mantisse $t = 3$:

$$\begin{aligned} \pi &= fl(3.14159) = 0.314 \times 10^1 \\ 1/\pi &= fl\left(\frac{0.100 \times 10^1}{0.314 \times 10^1}\right) \\ &= fl(0.318471337579618 \times 10^0) \\ &= 0.318 \times 10^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \pi \times 1/\pi &= fl(0.314 \times 10^1 \times 0.318 \times 10^0) \\ &= fl(0.099852 \times 10^1) \\ &= \boxed{0.999 \times 10^0} \end{aligned}$$

b) On a : $fl(2136) = 0.214 \times 10^4$, $fl(9993) = 0.999 \times 10^4$ et $fl(0.004567) = 0.457 \times 10^{-2}$.

et par suit :

$$\begin{aligned} (9993 + 0.004567) &= fl(0.999 \times 10^4 + 0.457 \times 10^{-2}) \\ &= fl((0.999 + 0.000000457) \times 10^4) \\ &= fl((0.999000457) \times 10^4) \\ &= 0.999 \times 10^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2136 \times (9993 + 0.004567) &= fl(0.214 \times 10^4 \times 0.999 \times 10^4) \\ &= fl(0.213786 \times 10^8) \\ &= \underline{0.214 \times 10^8} \end{aligned}$$

l'erreur est donc :

$$\begin{aligned} 2136 \times (0.004567) &= fl(0.214 \times 10^4 \times 0.457 \times 10^{-2}) \\ &= fl(0.097798 \times 10^2) \\ &= \underline{0.978 \times 10^1} = 9.78 \end{aligned}$$

2. Montrer que la loi d'associativité n'est pas toujours respectée en arithmétique flottante. Pour cela, utiliser l'arithmétique flottante à sept chiffres (t = 7) et les nombres suivants :

- $x = 28.44751 \times 10^{-5}$,
- $y = 0.4365578 \times 10^3$,
- $z = -436.5524$.

- On a : $fl(x) = 0.2844751 \times 10^{-3}$, $fl(y) = 0.4365578 \times 10^{3}$ et $fl(z) = -0.4365524 \times 10^{3}$.
- Pour $(x+y)+z$ on a :

$$\begin{array}{rcl} (x+y) & = & fl(0.2844751 \times 10^{-3} + 0.4365578 \times 10^{3}) \\ & = & fl((0.0000002844751 + 0.4365578) \times 10^{3}) \\ & = & fl((0.4365580844751) \times 10^{3}) \\ & = & 0.4365581 \times 10^{3} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} (x+y)+z & = & fl(0.4365581 \times 10^{3} - 0.4365524 \times 10^{3}) \\ & = & fl((0.0000057) \times 10^{3}) \\ & = & \underline{0.5700000 \times 10^{-2}} \end{array}$$

- Et pour $x+(y+z)$ on a :

$$\begin{array}{rcl} (y+z) & = & fl(0.4365578 \times 10^{3} - 0.4365524 \times 10^{3}) \\ & = & fl(0.0000054 \times 10^{3}) \\ & = & 0.5400000 \times 10^{-2} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} x+(y+z) = & & fl(0.2844751 \times 10^{-3} + 0.5400000 \times 10^{-2}) \\ & = & fl((0.02844751 + 0.5400000) \times 10^{-2}) \\ & = & fl(0.56844751 \times 10^{-2}) \\ & = & \underline{0.5684475 \times 10^{-2}} \end{array}$$

Exercice 3 :

1. On calculant le discriminant $\triangle' = 143$, l'équation a les deux solutions :

$$\begin{aligned} r_1 &= 12 - \sqrt{143} = 0.041739256898602 \text{ (Calculatrice)} \\ r_2 &= 12 + \sqrt{143} = 23.95826074310140 \text{ (Calculatrice)} \end{aligned}$$

Par l'arithmétique flottante à 5 chiffres on a :

$$\begin{aligned} r_1^* &= fl(0.12000 \times 10^2 - 0.11958 \times 10^2) \\ &= fl(0.00042 \times 10^2) = \underline{0.42000 \times 10^{-1}} \\ r_2^* &= fl(0.12000 \times 10^2 + 0.11958 \times 10^2) \\ &= fl(0.23958 \times 10^2) = \underline{0.23958 \times 10^2} \end{aligned}$$

2. L'erreur relative pour chacune des deux racines est :

$$\begin{aligned} Er_1 &= \left| \frac{r_1 - r_1^*}{r_1} \right| = 0.00624695121 \approx \boxed{0.62\,\%} \\ Er_2 &= \left| \frac{r_2 - r_2^*}{r_2} \right| = 0.00001088322 \approx \boxed{0.001\,\%} \end{aligned}$$

3. On recalcule $r_1^* = \dfrac{1}{12 + \sqrt{143}}$, on a :

$$\begin{aligned} r_1^* &= fl\left(\frac{0.10000 \times 10^1}{0.12000 \times 10^2 + 0.11958 \times 10^2} \right) \\ &= fl\left(\frac{0.10000 \times 10^1}{0.23958 \times 10^2} \right) \\ &= fl(0.417397111612 \times 10^{-1}) \\ &= \underline{0.41740 \times 10^{-1}} \\ \text{et} \quad Er_1 &= \left| \frac{r_1 - r_1^*}{r_1} \right| = 0.000017803417 \approx \boxed{0.002\,\%} \end{aligned}$$

On remarque la deuxième formule est meilleure que la première, car elle ne présente plus de différence entre deux valeurs voisines.

Exercice 4 :

Soit l'intégrale définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10}\, dx.$$

❶ On a remarque que :

$$I_n + 10 I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 10x^{n-1}}{x+10} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$$

donc : $I_n = \dfrac{1}{n} - 10 I_{n-1}$ ou $I_{n-1} = \left(\dfrac{1}{n} - I_n\right)/10.$

❷ On a $\forall\, x \in [0,1]$:

$$\frac{x^n}{11} \leq \frac{x^n}{x+10} \leq \frac{x^n}{10}$$

d'où :

$$\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10} dx \leq \frac{1}{10(n+1)}$$

et par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0.$

n	Integrale
0 :	+0.095310
1 :	+0.046898
2 :	+0.031018
3 :	+0.023154
4 :	+0.018465
5 :	+0.015353
6 :	+0.013138
7 :	+0.011481
8 :	+0.010194
9 :	+0.009167
10 :	+0.008329
11 :	+0.007622
12 :	+0.007114
13 :	+0.005785
14 :	+0.013577
15 :	-0.069105
16 :	+0.753549
17 :	-7.476665
18 :	+74.822208

On remarque que dans la pratique cette suite diverge.
En effet les erreurs d'arrondi se multiplient par 10 à chaque itération. ($\varepsilon_{n+1} \approx 10\varepsilon_n$).

```
I(31) = 1.000000

  n      Integrale
====================
 31 :    +1.000000e+000
 30 :    -9.677419e-002
 29 :    +1.301075e-002
 28 :    +2.147201e-003
 27 :    +3.356709e-003
 26 :    +3.368033e-003
 25 :    +3.509351e-003
 24 :    +3.649065e-003
 23 :    +3.801760e-003
 22 :    +3.967650e-003
 21 :    +4.148690e-003
 20 :    +4.347036e-003
 19 :    +4.565296e-003
 18 :    +4.806628e-003
```

```
I(31) = 99.000000

  n      Integrale
====================
 31 :    +9.900000e+001
 30 :    -9.896774e+000
 29 :    +9.930108e-001
 28 :    -9.585280e-002
 27 :    +1.315671e-002
 26 :    +2.388033e-003
 25 :    +3.607351e-003
 24 :    +3.639265e-003
 23 :    +3.802740e-003
 22 :    +3.967552e-003
 21 :    +4.148699e-003
 20 :    +4.347035e-003
 19 :    +4.565297e-003
 18 :    +4.806628e-003
```

On remarque que la nouvelle suite converge vers la même valeur quelque soit la valeur initiale de $\mathbf{I}(31)$.
En effet cette fois, les erreurs d'arrondi sont divisées par 10 à chaque itération. ($\varepsilon_n \approx \varepsilon_{n+1}/10$).

Série 2 : Interpolation polynômiale

Exercice 1 :

Soit la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

1. **a)** Calculer une valeur approchée de $\sin\left(\frac{7\pi}{16}\right)$ en interpolant f aux points $x_0 = -2$ et $x_1 = 2$. Utiliser d'abord la forme de Lagrange, puis celle de Newton.

   b) Donner l'erreur relative de l'approximation.

2. **a)** Reprendre la question précédente en considérant cette-fois-ci l'interpolation aux nœuds $x_0 = -2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

   b) Comparer l'erreur avec la question 1.

Exercice 2 :

Considérons le tableau des données suivant :

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	6	14	12	6	2	6

Déterminer le degré exact du polynôme dont la courbe passe par les points de coordonnées (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Exercice 3 :

Soit $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ et $P_2(x)$ le polynôme d'interpolation aux nœuds $x_0=0$, $0<x_1<1$ et $x_2=1$. Trouver la plus grande valeur de x_1 pour laquelle l'erreur $f(0.5)-P_2(0.5)=-0.25$.

Exercice 4:

Soit la fonction polynômiale définie par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ et soit P_2 le polynôme d'interpolation de f aux nœuds : $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

1. Exprimer P_2 par la formule de Lagrange.

2. Même question par la formule de Newton.
3. Calculer $M_1 = max_{x\in[-1,1]}|f(x) - P_2(x)|$.

Soit maintenant $\mathrm{R}_2(\mathrm{x})$ le polynôme qui interpole f aux nœuds t0 = $-\sqrt{3}/2$, t1=0 et t2= $\sqrt{3}/2$.

4. Sans calculer $\mathrm{R}_2(\mathrm{x})$, donner l'expression de l'erreur d'interpolation $|f(x) - R_2(x)|$.
5. Calculer $M_2 = max_{x\in[-1,1]}|f(x) - R_2(x)|$, puis comparer M_1 et M_2. Lequel des deux polynômes approxime mieux f ?

Exercice 5

Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2, et soit f une fonction réelle de classe C3 sur [a,b]. On cherche à approximer f par un polynôme de $\mathcal{P}_2$.

1. Montrer qu'il existe P_1, P_2 et $P_3 \in \mathcal{P}_2$ tels que

$$P_1(b) = P_1'(b) = 0 \; et \; P_1(a) = 1$$
$$P_2(a) = P_2(b) = 0 \; et \; P_2'(a) = 1$$
$$P_3(a) = P_3'(b) = 0 \; et \; P_3(a) = 1$$

2. Montrer que (P_1, P_2, P_3) forme une base de $\mathcal{P}_2$..
3. Montrer qu'il existe P unique dans $\mathcal{P}_2$ tel que :

$$P(a) = f(a), \qquad P(b) = f(b), \qquad P'(b) = f'(b)$$

   Exprimer P dans la base (P_1, P_2, P_3).

4. Donner une majoration de $|f(x) - P(x)|$ pour tout $x \in]a,b[$.

   Indication: introduire la fonction

$$g(t) = f(t) - P(t) - A(x)(t-a)(t-b)^2 \; avec \; g(x) = 0$$

Correction de la Série 2 : Interpolation polynômiale

Exercice 1 :

Soit la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

1. **a)**

❶ Le tableau des valeurs de f aux nœuds $(x_i)_{i=0,1}$ est

i	0	1
x_i	-2	2
$f(x_i)$	-1	1

Soit $P_1(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds $(x_i)_{i=0,1}$, on a :

$$P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

avec

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} \quad \text{et} \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

Pour $x = 7/4$ on a :

$$P_1(7/4) = (-1)\frac{7/4-2}{-2-2} + (1)\frac{7/4+2}{2+2} = \frac{7}{8} = 0.875$$

Le polynôme d'interpolation de Newton de f aux nœuds $(x_i)_{i=0,1}$ s'écrit :

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0)$$

avec

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Soit pour $x = 7/4$

$$P_1(7/4) = -1 + \frac{1+1}{2+2}\left(\frac{7}{4}+2\right) = \frac{7}{8} = 0.875$$

b)

Sachant que $f(7/4) \simeq 0.98078528$
alors l'erreur relative est :

$$\frac{P_1(x)-f(x)}{f(x)} \simeq \frac{0.875-0.98078528}{0.875} \simeq -12.09\ \%$$

2. **a)**

Le tableau des valeurs de f aux nœuds $(x_i)_{i=0,1,2}$ est :

x_i	-2	2	3
$f(x_i)$	-1	1	$\sqrt{2}/2$

Soit $P_2(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds $(x_i)_{i=0,1,2}$, on a :

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x) \quad \text{avec} \quad L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Soit : $L_0(7/4) = \dfrac{(7/4-2)}{(-2-2)}\dfrac{(7/4-3)}{(-2-3)} = \dfrac{1}{16} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{64}$,

$$L_1(7/4) = \frac{(7/4+2)}{(2+2)}\frac{(7/4-3)}{(2-3)} = \frac{15}{16} \times \frac{5}{4} = \frac{75}{64}$$

et $L_2(7/4) = \dfrac{(7/4+2)}{(3+2)}\dfrac{(7/4-2)}{(3-2)} = \dfrac{15}{20} \times \dfrac{-1}{4} = \dfrac{-12}{64}$.

d'où

$$P_2(7/4) = \frac{-1 + 75 - 6\sqrt{2}}{64} \simeq 1.02366747852752$$

Le polynôme d'interpolation de Newton de f aux points $(x_i)_{i=0,1,2}$ s'écrit :

$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

avec

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Le tableau des différences divisées de f aux points (x_i) :

i	x_i	$f(x_i)$	$1er$ ordre	$2ème$ ordre
0	$-2.$	$-1.$		
1	$2.$	$1.$	$1/2$	
2	$3.$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2 - 1$	$(\sqrt{2}-3)/10$

sachant que $P_2(x) = P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$ on a pour $x = 7/4$

$$P_2(7/4) = \frac{7}{8} + \frac{(\sqrt{2}-3)}{10} \times \left(\frac{7}{4} + 2\right) \times \left(\frac{7}{4} - 2\right)$$
$$\simeq 1.02366747852752$$

b)

Sachant que $f(7/4) \simeq 0.98078528$,

alors l'erreur relative pour $x = 7/4$ est :

$$\frac{P_2(x) - f(x)}{f(x)} \simeq \frac{1.02366748 - 0.98078528}{0.98078528} \simeq 4.37\ \%$$

En remarque la forme de Lagrange est inefficace si on rajoute un point aux nœuds x_i, car il faut recalculer tout les L_i.

Contrairement à la formule de Newton qui utilise le polynôme d'interpolation précédent.

Exercice 2 :

Le tableau des différences divisées de f aux points $(x_i)_{i=0}^{5}$ est :

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3	DD_4	DD_5
-2	6					
-1	14	8				
0	12	-2	-5			
1	6	-6	-2	1		
2	2	-4	1	1	0	
3	6	4	4	1	0	0

Donc le polynôme d'interpolation (formule de Newton) est :

$$P_5(x) = 6 + 8(x+2) - 5(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x$$

et par suite P_5 est de degré 3.

Exercice 3 :

Examinant le polynôme d'interpolation sous la forme de Newton de f aux nœuds $(x'_i)_{i=0,1,2}$ où :

$x'_0 = x_0 = 0$, $x'_1 = x_2 = 1$ et $x'_2 = x_1$.

Le tableau des différences divisées de f aux nœuds (x'_i) est :

x'_i	$f(x'_i)$	$1er$ ordre	$2ème$ ordre
0.	0.		
1.	0.	0.	
x_1	$f(x_1)$	$\frac{f(x_1)}{x_1-1}$	$\frac{f(x_1)}{x_1(x_1-1)} = -\frac{1}{f(x_1)}$

d'où

$$P_2(x) = f[x'_0, x'_1, x'_2](x - x'_0)(x - x'_1) = -\frac{x(x-1)}{f(x_1)} = \frac{f(x)^2}{f(x_1)}$$

et par suite pour $x = \frac{1}{2}$ on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - P_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1/4}{\sqrt{x_1 - x_1^2}} = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1 - x_1^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_1 - x_1^2 = \frac{1}{9} \quad \text{avec} \quad x_1 \in [0, 1]$$

soit :

$$x_1 = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3}}{2} \simeq \begin{cases} 0.1273220 \\ 0.8726780 \end{cases}$$

Donc on choisit la plus grande valeur : $x_1 \simeq 0.8726780$.

Exercice 4:

1. On a : $f(-1) = -2$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$,
   donc le polynôme d'interpolation de f aux nœuds
   $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ est
   $P_2(x) = -2L_0(x) + L_1(x)$ avec :
   $$L_0(x) = \frac{x(x-1)}{2} =, \ L_1(x) = -(x+1)(x-1)$$
   d'où $\quad P_2(x) = -2x^2 + x + 1$.
2. La Table des différences divisées est :
   $$\begin{array}{r|r|r|r} -1 & -2 & & \\ 0 & 1 & 3 & \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}$$
   Donc
   $P_2(x) = f(-1) + f[-1, 0](x+1) + f[-1, 0, 1](x+1)x$
   $P_2(x) = -2 + 3(x+1) - 2x(x+1) = -2x^2 + x + 1$.
3. $\forall x \in [-1, 1]$ on a :
   $E_1(x) = f(x) - P_2(x) = x^3 - 2x^2 + 1 - (-2x^2 + x + 1)$
   $= x(x+1)(x-1)$,

qui atteint sont maximum aux extrémums tel que
$E_1'(x) = 0$, soit $3x^2 - 1 = 0$

donc aux points $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, or $E_1\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

D'où $M_1 = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P_2(x)| = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9} \simeq 0.384900.}$

❹ Pour les nœuds $t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_1 = 0$ et $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, l'erreur d'interpolation est donnée par

$$\begin{aligned} E_2(x) &= f(x) - R_2(x) \\ &= \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{6}(x - t_0)(x - t_1)(x - t_2) \\ &= x\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

❺ On a les extrémums de E_2 sont tel que
$E_2'(x) = 3x^2 - 3/4 = 0$, soit $x = \pm\frac{1}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} M_2 &= \max_{x\in[-1,1]} |E_2(x)| \\ &= \max\{|E_2(-1)|, |E_2(-1/2)|, |E_2(1/2)|, |E_2(1)|\} \end{aligned}$$

$\boxed{M_2 = \frac{1}{4}}$ et on a $M_2 < M_1$.

Par conséquent, R_2 approxime mieux f.

Exercice 5

❶ On a : b racine double de P_1

$$\begin{cases} P_1(b) = 0 \\ P_1'(b) = 0 \\ P_1(a) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(x) = \alpha\frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} \\ P_1(a) = 1 = \alpha \end{cases}$$

de même a et b racines de P_2

$$\begin{cases} P_2(a) = 0 \\ P_2(b) = 0 \\ P_2'(b) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_2(x) = \beta\frac{(x-a)}{(b-a)}(b-x) \\ P_2'(b) = 1 = -\beta \end{cases}$$

de plus a est racine de P_3 donc

$$\begin{cases} P_3(x) = (\alpha x + \beta)\frac{(x-a)}{(b-a)} \\ P_3(b) = 1 = \alpha b + \beta \\ P_3'(b) = 0 = \alpha + 1/(b-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{(b-a)} \\ \beta = -\frac{b}{(b-a)} + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow P_3(x) = \frac{(x-a)}{(b-a)}\left(\frac{(x-b)}{(a-b)} + 1\right)$$

❷ On a : $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$,

donc il suffit de montrer que B est libre;

Soient α, β, γ tels que :

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha P_1(a) + \beta P_2(a) + \gamma P_3(a) = 0 \\ \alpha P_1'(b) + \beta P_2'(b) + \gamma P_3'(b) = 0 \\ \alpha P_1(b) + \beta P_2(b) + \gamma P_3(b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \times 1 + \beta \times 0 + \gamma \times 0 = 0 \\ \alpha \times 0 + \beta \times 1 + \gamma \times 0 = 0 \\ \alpha \times 0 + \beta \times 0 + \gamma \times 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

donc B est une base de $\mathcal{P}_2$.

❸ Soit $P \in \mathcal{P}_2$ tel que :

$$P(x) = f(a)P_1(x) + f'(b)P_2(x) + f(b)P_3(x)$$

on a :

$$\begin{cases} P(a) = f(a)P_1(a) + f'(b)P_2(a) + f(b)P_3(a) = f(a) \\ P(b) = f(a)P_1(b) + f'(b)P_2(b) + f(b)P_3(b) = f(b) \\ P'(b) = f(a)P_1'(b) + f'(b)P_2'(b) + f(b)P_3'(b) = f'(b) \end{cases}$$

Soit $H \in \mathcal{P}_2$ tel que :

$$H(a) = f(a); H(b) = f(b) \text{ et } H'(b) = f'(b)$$

On pose $E(x) = P(x) - H(x)$, on a a et b sont des racines de E donc

$$E(x) = \alpha(x-a)(x-b) \in \mathcal{P}_2$$

or

$$E'(b) = \alpha(b - a + 0) = 0$$

donc $\alpha = 0$, et par suit $E = 0$ d'où l'unicité.

❹ Soit la fonction $g(t) = f(t) - P(t) - A_x(t-a)(t-b)^2$ où A_x est une constante dépendant de x tel que $g(x) = 0$.

On donc

$$A_x = \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)(x-b)^2}$$

de plus on a

$$g(a) = f(a) - P(a) - 0 = 0 \text{ et } g(b) = f(b) - P(b) - 0 = 0$$

et par suit a, b et x sont trois racines distinctes de g d'après le théorème de Rolle g' admet deux racines distinctes, de plus b et aussi une racine de g',

$$g'(b) = f'(b) - P'(b) - 0 = 0$$

ainsi $g^{(3)}$ admet une racine $\xi_x \in]a;b[$, soit

$$0 = g^{(3)}(\xi_x) = f^{(3)}(\xi_x) - P^{(3)}(\xi_x) - 3!A_x$$

Or $P \in \mathcal{P}_2$ donc $P^{(3)} = 0$, d'où $A_x = \dfrac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}$,

et par suit $f(x) - P(x) = \dfrac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x-a)(x-b)^2$.

Série 3 : Dérivation et intégration numérique

Exercice 1 :

À l'aide de la formule de différence centrée d'ordre 2:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2).$$

Montrer que

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}.$$

Exercice 2 :

En vous servant des développements de Taylor appropriés, donner l'ordre de précision de l'approximation

$$f^{(3)}(x) \simeq \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}.$$

Exercice 3 :

On considère le θ-schéma

$$f'(x) \simeq (1-\theta)\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) + \theta\left(\frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right) = App_\theta(h).$$

Montrer que les deux premiers termes de l'erreur associée au θ-schéma ($App_\theta(h)$) sont donnés par :

$$\frac{(2\theta - 1)}{2} h f''(x) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x),$$

et en déduire l'ordre de précision du θ-schéma en fonction de θ.

Exercice 4 :

Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha \leq 1$. On s'intéresse à la quadrature

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx J(f) = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\alpha)$$

1. Trouver les poids ω_i en fonction α de sorte que $J(f)$ soit de degré de précision au moins 2.

2. Existe-t-il α tel que $J(f)$ soit de degré de précision ≥ 3 ? Si oui, trouver dans ce cas le degré de précision de $J(f)$.

Exercice 5 :

A l'aide d'une certaine méthode d'intégration numérique, on a évalué $I = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$, en utilisant trois valeurs différente de h. On a obtenu les résultats suivants :

h	$\tilde{I}$
0.1	1.001325
0.2	1.009872
0.4	1.078979

Compte tenu de la valeur exacte de I, déduire l'ordre de convergence de la méthode de quadrature employée.

Exercice 6 :

On se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

1. Peut-on appliquer les quadratures de trapèze et de Simpson ?
2. Montrer par un changement de variable convenable que $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ et calculer la valeur exacte de I.
3. Calculer une approximation de I par la formule des trapèzes composée avec un pas $h = 1/4$.
4. Quel pas h doit-on prendre pour trapèzes composée pour approcher I avec une erreur $\leq 10^{-4}$.
5. Calculer pour $h = 0.02$ une approximation de I par la formule de trapèzes composée et Simpson composée. Comparer avec 4.

Exercice 7 :

1. Soit une fonction g définie et continue sur $[0, 1]$, exprimer le polynôme d'interpolation P_g qui interpole g aux nœuds 0 et $\frac{1}{2}$.
2. En déduire la formule d'intégration numérique suivante
$$I(g) = \int_0^1 g(x)dx \approx I(P_g) = \frac{1}{4}\left[\lambda g(0) + \mu g\left(\frac{1}{2}\right)\right] \qquad (3)$$
où $\lambda,\ \mu \in I\!R$ à déterminer. Interpréter géométriquement la formule obtenue.
3. Quel est le degré de précision de (3) et comparer avec la quadrature de trapèze.
4. Soit f une fonction continue sur un intervalle borné $[a, b]$, construire une formule composée basée sur (3) qui approche $I(f) = \int_a^b f(t)dt$, en subdivisant $[a, b]$ en $n \geq 1$ parties égales.

Correction de la Série 3 : Dérivation et intégration numérique

Exercice 1 :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}\left(h^2\right)$$

Donc $f''(x) \simeq \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$, et $f'(x+h) \simeq \frac{f(x+2h)-f'(x)}{2h}$, de même $f'(x-h) \simeq \frac{f(x)-f'(x-2h)}{2h} \Rightarrow$ $f''(x) \simeq \frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2}$

Exercice 2 :

Le développement de Taylor de f au voisinage de x de $f(x+3h)$ à l'ordre 5 donne

$$f(x+3h) = f(x) + 3hf'(x) + \frac{9}{2}h^2 f''(x) + \frac{9}{2}h^3 f^{(3)}(x) + \frac{27}{8}h^4 f^{(4)}(x) + \frac{81}{40}h^5 f^{(5)}(x) + \mathcal{O}\left(h^6\right)$$

De même

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4}{3}h^3 f^{(3)}(x) + \frac{2}{3}h^4 f^{(4)}(x) + \frac{4}{15}h^5 f^{(5)}(x) + \mathcal{O}\left(h^6\right)$$

Puis

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f^{(3)}(x) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(x) + \frac{1}{120}h^5 f^{(5)}(x) + \mathcal{O}\left(h^6\right)$$

En calculant la combinaison linéaire $f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h)$, on obtient

$$f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) = f(x) + h^3 f^{(3)}(x) + \frac{-11}{24}h^4 f^{(4)}(x) + \mathcal{O}\left(h^5\right)$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3} + \mathcal{O}(h)$$

Exercice 3 :

On pose

$$App_\theta(h) = (1-\theta)\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) + \theta\left(\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right)$$

$f(x+h) = f\,(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \cdots ; f(x-h) = f\,(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \cdots$ D'où

$$App_\theta(h) = f'(x) + \frac{(1-2\theta)}{2}hf''(x) + \frac{1}{6}h^2 f^{(3)}(x) + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

Par suite

$$f'(x) = App_\theta(h) - \frac{(1-2\theta)}{2}hf''(x) - \frac{1}{6}h^2 f^{(3)}(x) + \mathcal{O}\left(h^3\right)$$

Si $\theta \neq 1/2$, le θ -schéma est d'ordre 1 Si $\theta = 1/2$, le θ -schéma est d'ordre 2

Exercice 4 :

1. On a

$$\begin{aligned} I(x^0) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 &= J(x^0) = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 \\ I(x^1) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 &= J(x^1) = -\omega_0 + \alpha\omega_2 \\ I(x^2) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} &= J(x^2) = \omega_0 + \alpha^2\omega_2 \end{aligned}$$

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 &= 2 \\ -\omega_0 + \alpha.\omega_2 &= 0 \\ \omega_0 + \alpha^2.\omega_2 &= \frac{2}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 &= 2 \\ \omega_0 &= \alpha.\omega_2 \\ \alpha.\omega_2(1+\alpha) &= \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 &= 2 \\ -\omega_0 + \alpha.\omega_2 &= 0 \\ \omega_0 + \alpha^2.\omega_2 &= \frac{2}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 &= 2 \\ \omega_0 &= \alpha.\omega_2 \\ \alpha.\omega_2(1+\alpha) &= \frac{2}{3} \end{cases}$$

On a donc

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{2}{3\alpha(1+\alpha)} \text{ (car } 0 < \alpha \leq 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 &= 2 - \omega_2 - \omega_0 \\ \omega_0 &= \alpha.\omega_2 = \dfrac{2}{3(1+\alpha)} \\ \omega_2 &= \dfrac{2}{3\alpha(1+\alpha)} \end{cases}$$

Soit

$$\omega_0 = \frac{2}{3(1+\alpha)},\ \omega_1 = 2 - \frac{2}{3\alpha},\ \omega_2 = \frac{2}{3\alpha(1+\alpha)}$$

2. Pour que le degré de précision de $J(f)$ soit ≥ 3, en plus des valeurs précédentes des ω_i, il faut que

$$I(x^3) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = J(x^3) = \omega_0(-1) + \omega_2\alpha^3$$
$$= -\frac{2}{3(1+\alpha)} + \frac{2\alpha^2}{3(1+\alpha)} = \frac{2}{3}(\alpha - 1)$$

c'est à dire : $\alpha = 1$ Dans ce cas :
$\omega_0 = 1/3,\ \omega_1 = 4/3,\ \omega_2 = 1/3$. Soit

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx J(f) = \frac{1}{3}\big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\big)$$

Pour $f = x^4$ on a

$$I(f) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad J(f) = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}$$

Conclusion : si $\alpha = 1$, le degré de précision est 3, sinon le degré de précision est 2.

Exercice 5 :

$I = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$, la valeur exacte de $I = 1$.
Pour $h_1 = 0.1$, la valeur approchée $\tilde{I}_1$ de I, par la méthode proposée est $\tilde{I}_1 = 1.001325$.
Pour $h_2 = 0.2$, la valeur approchée $\tilde{I}_2$ de I, par la méthode proposée est $\tilde{I}_2 = 1.009872$.
Pour $h_3 = 0.4$, la valeur approchée $\tilde{I}_3$ de I, par la méthode proposée est $\tilde{I}_3 = 1.078979$.
$err_i = |I - \tilde{I}_i| \sim Ch_i^p \quad i = 1, 2, 3$, où p est l'ordre de convergence de la méthode de quadrature employée.
On a donc $\frac{err_2}{err_1} = 7.45 \sim 2^3 = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^p$
De même $\frac{err_3}{err_2} = 8.0019 \sim 2^3 = \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^p$
On voit bien que l'ordre de convergence de la méthode est $p = 3$.

Exercice 6 :

1. Pour calculer une valeur approchée de I on ne peut pas appliquer directement les quadratures de trapèze ou de Simpson car intervalle d'intégration est non borné.

2. Par un changement de variable $x = t^{-2}$ on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ &= \int_1^{0} \frac{-2t^{-3}dt}{2t^{-1}(1+t^{-2})} \\ &= \int_0^{1} \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

et par suite la valeur exacte de I est :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4} \simeq 0.7853981634$$

La formule de trapèzes composée pour approcher $I(f)$ est :

$$T_h(f) = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)\right)$$

où $a_i = a + ih$ avec $h = \dfrac{b-a}{n}$

3. Pour $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$, avec $h = \frac{1}{4}$ on a : $a_i = \frac{i}{4}$ et

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{4}}(f) &= \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1+(\frac{i}{4})^2}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{1+(\frac{1}{16})} + \frac{2}{1+(\frac{4}{16})} + \frac{2}{1+(\frac{9}{16})}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{2} + \frac{32}{17} + \frac{32}{20} + \frac{32}{25}\right) \simeq 0.78279412 \end{aligned}$$

L'erreur $I(f) - T_{\frac{1}{4}}(f) \approx 2.60 \times 10^{-3}$.

4. On sait que l'erreur est en $O(h^2)$ avec :

$$|R_h(f)| = |T_h(f) - I| \leq \frac{M_2}{12}h^2, \; M_2 = \max_{t\in[0,1]} |f''(t)|$$

et on a $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$ et

$f^{(3)}(x) = \dfrac{24x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} \geq 0$ pour $x \in [0,1]$, et par suite f'' croissante de $f''(0) = -2$ à $f''(1) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M_2 = 2$.

Donc pour avoir $|R_h(f)| \leq 10^{-4}$, il suffit que

$$\frac{M_2h^2}{12} = \frac{h^2}{6} \leq 10^{-4} \Leftarrow h^2 \leq 6 \times 10^{-4} \Leftarrow h \leq 2.449 \times 10^{-2}$$

Comme le nombre des sous-intervalles $n = \dfrac{1}{h}$

$$\Leftarrow n \geq \sqrt{\frac{1}{6}} \times 10^2 \simeq 40.824829 \Leftarrow n \geq 41.$$

soit $n \geq 41$ sous-intervalles.

5. Pour $h = 0.02 = \dfrac{1}{n} \Rightarrow n = 50$, $a_j = \dfrac{j}{50}$, $j = 0, \cdots, 50$

$$T_h(f) = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\sum_{i=1}^{49} \frac{1}{1+a_i^2}\right)$$

On trouve $T_h(f) \approx 0.785381496731$
avec l'erreur est de l'ordre de $1.667 \times 10^{-5} \leq 10^{-4}$.

Pour $h = 0.02 = \dfrac{1}{2p} \Rightarrow p = 25$, $a_j = \dfrac{j}{50}$, $j = 0, \cdots, 50$

$$S_h(f) = \frac{h}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + 2\sum_{i=1}^{24} \frac{1}{1+a_{2i}^2} + 4\sum_{i=0}^{24} \frac{1}{1+a_{2i+1}^2}\right)$$

On trouve $S_h(f) \approx 0.785398163397$
avec l'erreur est de l'ordre de 6.35×10^{-13}.

Exercice 7 :

❶ Le tableau des valeurs de g aux points ($x_0 = 0$; $x_1 = \frac{1}{2}$) est

x_i	0	$1/2$
$g(x_i)$	$g(0)$	$g(1/2)$

Soit $P_g(x)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de g aux points $(x_i)_{i=0,1}$, on a :

$$P_g(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x)$$

avec

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{x - 1/2}{0 - 1/2} = (1 - 2x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{x - 0}{1/2 - 0} = 2x$$

Soit

$$P_g(x) = (1 - 2x)g(0) + 2xg\,(1/2)\,.$$

❷ On a :

$$P_g(x) = (1 - 2x)g(0) + 2xg\,(1/2)$$

et par suite :

$$\begin{aligned} I(P_g) &= g(0)\int_0^1 (1-2t)\,dt + g(1/2)\int_0^1 2tdt \\ &= g(0)\,[t - t^2]_0^1 + g(1/2)\,[t^2]_0^1 \\ &= 0 \times g(0) + 1 \times g\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$I(g) = \int_0^1 g(x)dx \approx I(P_g) = g\left(\frac{1}{2}\right)$$

c.à.d l'équation (3) avec $\lambda = 0$ et $\mu = 4$.

c'est la formule du point milieu $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

❸ Le degré de précision de la formule d'intégration numérique (3) est le plus grand entier tel que $I(x^n) = I(P_{x^n})$.

$$I(x^0) = \int_0^1 t^0 dt = 1 \text{ et } I(P_{x^0}) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$I(x^1) = \int_0^1 t^1 dt = \frac{1}{2} \text{ et } I(P_{x^1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$I(x^2) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \text{ et } I(P_{x^2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

donc le degré de précision de la formule est égale à 1. C'est une formule de degré de précision égale à celui de trapèze mais à un seule nœud.

4. On subdivise $[a, b]$ en m sous-intervalles égaux en posant $a_i = a + ih$, $i = 0, \cdots, m$ et $h = (b-a)/m$, on a :

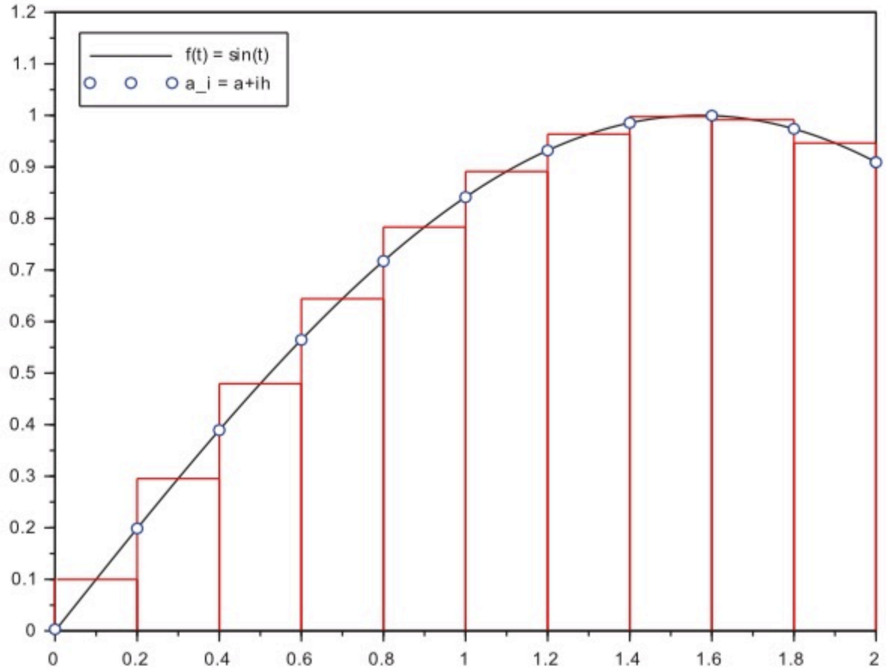
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$$

Faisons le changement de variable $x = a_i + th$ sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, il vient que

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^1 f(a_i + ht)dt$$

en se basant sur la quadrature (3), on obtient

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a_i + \frac{h}{2}\right)$$



Série 4 : Résolution numérique des équations non linéaires $f(x) = 0$

Exercice 1 :

En 1225, Léonardi di Pisa a donné une solution $\alpha = 1.368808107$, pour l'équation $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$, sans que personne à l'époque ne sache expliquer ce résultat.

a) Montrer que la fonction f admet une seule racine dans l'intervalle $]1, 2[$.

b) Montrer que cette équation ($f(x) = 0$) peut se mettre sous la forme $x = F(x) = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$ où $F : [1, 2] \longrightarrow [1, 2]$.

c) Montrer que $\forall r \in [1, 2]$; $|F'(r)| \leq 1/2$.

d) En déduire que la méthode itérative suivante est convergente.
$x_0 = 1, \ \ x_{n+1} = F(x_n)$.

e) Calculer $x_n, \ \ n = 1, \cdots, 8$ et conclure.

Exercice 2 :

On considère l'équation :

$$f(x) = e^x - 4x = 0 \qquad (1)$$

1) Déterminer le nombre et la position approximative des racines de (1) dans IR_+.
2) Déterminer le nombre minimal d'itérations de la méthode de la bissection pour atteindre la plus grande racine α avec une précision de 10^{-8}, si l'intervalle de départ est :

a) [1, 3], b) [2, 3], c) [2.15, 2.2]

Expliquer les résultats.

Exercice 3 :

On cherche à approcher la racine de la fonction $f(x) = \tan x - x$ pour $x \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que f admet une seule racine $\alpha \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que α est un point fixe de la fonction F définie par $F(x) = \pi + \arctan x, \quad x \in \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

c) Construire une suite itérative qui converge vers α, et calculer $x_i, \ i = 1, \cdots, 6$, $(x_0 = 4)$. Conclure.

Exercice 4 :

On suppose que α est une racine de $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$, de multiplicité $m \geq 2$, c.à.d.
$f(x) = (x-\alpha)^m \, h(x)$, avec $h(x) \neq 0$.
a) Montrer que l'ordre de la convergence de la méthode de Newton est seulement linéaire.
b) On propose la méthode itérative suivante *(Newton modifié)*

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Montrer alors que la convergence de cette méthode itérative est quadratique.
c) Application : Considérer l'équation non linéaire $f(x) = \exp(x) - \frac{x^2}{2} - x - 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
i) Montrer que f admet un zéro x^* dans $[-1, 1]$, et qu'il est unique.
ii)Écrire la méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$. Quel est l'ordre de convergence de cette méthode? Justifier votre réponse.
iii) Proposer une méthode d'ordre 2 pour résoudre l'équation donnée.

<u>Correction de la Série 4</u> : Résolution numérique des équations non linéaires $f(x) = 0$

Exercice 1 :

a) Soit $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, montrons que f admet une racine unique dans l'intervalle $[1, 2]$
on a $f(1) = -7$, et $f(2) = 16$, de plus f est continue, donc il existe au moins une racine dans $[1, 2]$.
$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$, dont le discriminant est négatif, ce qui implique que $f'(x) > 0$ et par suite f est strictement croissante, d'où l'unicité de la racine dans $[1, 2]$.
b) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x(x^2 + 2x + 10) = 20 \Longleftrightarrow x = \frac{20}{x^2+2x+10}$. Montrons que $F([1, 2]) \subset [1, 2]$.
$F'(x) = \frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2} < 0 \Longrightarrow F$ est décroissante, donc $\forall x \in [1, 2]$ $F(2) \leq F(x) \leq F(1)$,
$\frac{10}{9} = 1.1111 \leq F(x) \leq \frac{20}{13} = 1.5384$.
c)$F''(x) = \frac{120(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^3} > 0$, ce qui implique que F' est croissante, donc $F'(1) \leq F'(x) \leq F'(2) \leq 0$, donc $|F'(x)| \leq |F'(1)| = 0.473 \leq 1/2$
d) F continue de $[1, 2]$ dans lui-même, de plus F est contractante, car $|F'(x)| \leq k < 1$. Ce qui entraine que la méthode itérative $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers α le point fixe de F, racine de f.
e)$x_0 = 1$, $x_1 = 1.5384$, $x_2 = 1.295019$, $x_3 = 1.401825$, $\cdots$ $x_8 = 1.368241$.
Après 8 itérations on voit bien qu'on est très proche de la valeur donnée par Léonardi di Pisa.

Exercice 2 :

1. On a f est continue et dérivable sur $I\!R_+$ avec :
$f'(x) = e^x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha = \log(4) \simeq 1.386$
$f(0) = 1 > 0; f(\alpha) = 4(-.386) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
d'où $f(0)f(\alpha) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $r_1 \in]0, \log(4)[$ tel que $f(r_1) = 0$. de plus pour tout $x \in]0, \log(4)[$ on a :
$$f'(x) = e^x - 4 < 0$$
d'où f est strictement décroissante sur $]0, \log(4)[$ et par suite r_1 est unique dans $]0, \log(4)[$.
de même pour tout $x \in]\log(4), +\infty[$ on a :
$$f'(x) = e^x - 4 > 0$$
d'où f est strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$ avec $f(\alpha) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $r_2 \in]\log(4), +\infty[$ tel que $f(r_2) = 0$. ($f(3) > 0$ donc $r_2 \in]\log(4), 3[$).

❷ Soit $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ le $(n+1)$ème terme de la suite de la méthode de bissection avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$, on a c_0 est le premier terme de la suite,

$$\begin{array}{lrcl}
 & \text{et on aurait} \quad |c_n - \alpha| & \leq & \varepsilon \\
\text{si } (\Leftarrow) & |c_n - \alpha| & \leq & \dfrac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \\
\text{si } (\Leftarrow) & \log(b-a) - (n+1)\log(2) & \leq & \log(\varepsilon) \\
\text{si } (\Leftarrow) & \log(b-a) - \log(\varepsilon) & \leq & (n+1)\log(2) \\
\text{si } (\Leftarrow) & \dfrac{\log((b-a)/\varepsilon)}{\log(2)} & \leq & (n+1)
\end{array}$$

donc si le nombre d'itérations

$$n + 1 \geq n_0 = 1 + E\left(\log((b-a)/\varepsilon)/\log(2)\right)$$

- pour $a = 1$, $b = 3$ et $\varepsilon = 10^{-8}$ on a :

  $$n_0 \geq (\log(2) + 8\log(10))/\log(2) \simeq 27.57$$

  d'où le nombre d'itérations $\geq n_0 = 28$ itérations.
- pour $a = 2$, $b = 3$ et $\varepsilon = 10^{-8}$ on a : $f(2) = \exp(2) - 8 < 0$ et $f(3) = \exp(3) - 12 > 0$ donc $r_2 \in \,]2, 3[$ et $n_0 \geq (\log(1) + 8\log(10))/\log(2) \simeq 26.58$

  d'où le nombre d'itérations $\geq n_0 = 27$ itérations.
- pour $a = 2.15$, $b = 2.20$ et $\varepsilon = 10^{-8}$ on a : $f(2.15) \simeq -0.015 < 0$ et $f(2.20) \simeq 0.22 > 0$ donc $r_2 \in \,]2.15, 2.20[$ et $n_0 \geq 22.25$, d'où le nombre d'itérations $\geq n_0 = 23$ itérations.

Conclusion : plus l'intervalle de départ qui contient la solution est petit, plus on gagne quelques itérations pour obtenir la précision voulue. (mais la convergence reste lente).

Exercice 3 :

Soit $f(x) = \tan(x) - x$ pour $x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$
a) f est continue sur $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$, $f(\pi) = -\pi$, et $\lim_{x \mapsto (3\pi/2)^+} f(x) = +\infty$, de plus $f'(x) > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[\ / \ f(\alpha) = 0$.
b)$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \tan(x) = x$, pour pouvoir composer avec la fonction arctan il faut que x soit dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. On a que $\tan(x) = \tan(x - \pi)$, donc $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \tan(x - \pi) = x$, puisque $(x - \pi) \in]0, \pi/2[$, on peut composer par la fonction arctan, ce qui donne $x - \pi = \arctan(x)$, d'où $x = \arctan(x) + \pi$, c.à.d x point fixe de la fonction $F(x) = \arctan(x) + \pi$.
Montrons que F admet un point fixe dans $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$.
$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, donc F est croissante,
$\pi \leq F(\pi) = 4.4042 \leq F(x) \leq F(3\pi/2) = 4.50 \leq 3\pi/2$.
$F''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0$, $0 < F'(x) \leq F'(\pi) = 0.091 < 0.1 \Longrightarrow F$ est contractante. La suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers le point fixe de F.
c)$x_0 = 4$, $x_1 = 4.46741$, $x_2 = 4.492175$, $x_3 = 4.493351$, $x_4 = 4.493406$, $x_5 = 4.493409$ et

$x_6 = 4.493409$.
On remarque que la suite $(x_n)_n$ converge à partir de x_5.

Exercice 4 :

Soit α est une racine de $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, de multiplicité $m \geq 2$, c.à.d.
$f(x) = (x - \alpha)^m h(x)$, avec $h(x) \neq 0$.
a) Montrons que l'ordre de la convergence de la méthode de Newton est seulement linéaire.
L'algorithme de Newton-Raphson donne : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = F(x_n)$.
Il existe $\lambda \in V(\alpha) \ / \ F(x_{n-1}) = F(\alpha) + (x_{n-1} - \alpha)F'(\alpha) + \dfrac{(x_{n-1} - \alpha)^2}{2} F''(\lambda)$, or $F(\alpha) = \alpha$ et $F(x_{n-1}) = x_n$, ce qui entraine $(x_n - \alpha) = (x_{n-1} - \alpha)F'(\alpha) + \dfrac{(x_{n-1} - \alpha)^2}{2} F''(\lambda)$
On a $F'(\alpha) = 1 - \frac{1}{m} \neq 0 \Longrightarrow e_n = (1 - \frac{1}{m})e_{n-1} + \frac{(e_{n-1})^2}{2} F''(\lambda)$, donc $e_n \sim e_{n-1}$, c.à.d. la vitesse de convergence est seulement linéaire.

b)Méthode de Newton-Raphson modifiée :

$$x_n = x_{n-1} - m\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = G(x_{n-1})$$

En reprenant le même procédé pour G, on trouve, il existe $\mu \in V(\alpha)$ /
$(x_n - \alpha) = (x_{n-1} - \alpha)G'(\alpha) + \dfrac{(x_{n-1} - \alpha)^2}{2} G''(\mu)$
On a $G'(\alpha) = 0$, ce qui implique $e_n = \frac{(e_{n-1})^2}{2} G''(\mu)$, c.à.d. la convergence de cette méthode itérative est quadratique.

c) Application : $f(x) = \exp(x) - \frac{x^2}{2} - x - 1$
i) Il est évident que f admet un zéro $x^* = 0$ dans $[-1, 1]$, et qu'il est unique.
ii) On a $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et $f^{(3)}(0) = 1$. Donc 0 est une racine triple de f, une application de la méthode de Newton-Raphson à f est d'ordre 1. En effet, pour $x_0 = 0.5$, les termes de la suite (x_n) sont : $x_1 = 0.3404$, $x_2 = 0.2302$, $x_3 = 0.1550$, $x_4 = 0.104$,

$x_5 = 0.0696$, $x_6 = 0.0465$, $\cdots x_{10} = 0.00923$.
En utilisant la méthode de Newton-Raphson modifiée ($m = 3$), pour la même valeur de $x_0 = 0.5$, les termes de la suite (x_n) sont : $x_1 = 0.0214953953$, $x_2 = 0.00003560528$. On voit bien que la méthode converge quadratiquement.