Université Moulay ISMAÏL
Faculté des Sciences et Techniques d'Errachidia
Département de Mathématiques

Cours d'Analyse Mathématiques

Filière BCG (M222)

Pr. Samir KHALLOUQ

Année universitaire 2019-2020

Table des matières

Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Structure et propriétés de $\mathbb{R}$

Propriété 1.1.

- $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \leq b$ *ou* $b \leq a$.
- $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a \leq b$ *et* $b \leq a) \Longrightarrow a = b$.
- $\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a \leq b$ *et* $b \leq c) \Longrightarrow a \leq c$.
- $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2_+$ *ou* $\mathbb{R}^2_-$ *alors* $ab \geq 0$.
- $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c \ \forall c \in \mathbb{R}.$$
$$a \leq b \Longrightarrow ad \leq bd \ \forall d \in \mathbb{R}^*_+.$$
$$a \leq b \Longrightarrow ae \geq be \ \forall e \in \mathbb{R}^*_-.$$

Définition 1.1 (Intervalle de $\mathbb{R}$)**.**
I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $(a,b) \in I \times I$, si $a \leq x \leq b$ alors $x \in I$.

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}/\mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}\}$, *intervalle ou segmant fermé.*
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}/\mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$, *intervalle ouvert.*
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R}/\mathrm{a} \leq \mathrm{x} < \mathrm{b}\}$, *intervalle semi-fermé en a, semi-ouvert en b.*
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}/\mathrm{a} < \mathrm{x} \leq \mathrm{b}\}$, *intervalle semi-ouvert en a, semi-fermé en b.*
- $]-\infty, 0] = \mathbb{R}^-$, $[0, +\infty[= \mathbb{R}^+$.
- *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.*
On appelle intervalle ouvert centré autour de x_0 et de rayon r, l'ensemble : $]x_0 - r, x_0 + r[$. Cet intervalle est appelé voisinage de x_0 et on le note $\mathcal{V}(x_0)$.
- *On appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{x} > \mathrm{b}\}$, avec $b > 0$.*
- *On appelle voisinage de $-\infty$ tout intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{x} < \mathrm{a}\}$, avec $a < 0$.*

Définition 1.2 (Ensembles bornés)**.**
Soient F une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M, m \in \mathbb{R}$.

- *On dit que M est* ***un majorant*** *de F si pour tout $x \in F$, $x \leq M$;*
- *On dit que m est* ***un minorant*** *de F si pour tout $x \in F$, $x \geq m$;*
- *L'ensemble F est dit* ***majoré*** *s'il admet au moins un majorant ;*
- *L'ensemble F est dit* ***minoré*** *s'il admet au moins un minorant ;*
- *On dit que F est* ***borné*** *s'il est majoré et minoré ;*
- *On appelle* ***plus grand élément*** *de F, s'il existe, l'unique élément $q \in F$ tel que : pour tout $x \in F$, $x \leq q$;*
- *On appelle* ***plus petit élément*** *de F, s'il existe, l'unique élément $p \in F$ tel que pour tout $x \in F$, $p \leq x$;*
- *On appelle* ***borne supérieure*** *de F, le plus petit élément M, s'il existe, de l'ensemble des majorants de F qu'on note* ***M=sup(F)*** *;*
- *On appelle* ***borne inférieure*** *de F, le plus grand élément m, s'il existe, de l'ensemble des minorants de F qu'on note* ***m=inf(F)****.*

Caractérisation de la borne supérieure ou inférieure
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On a :

$$M = sup(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} i) & \forall x \in A,\ x \leq M, \\ ii) & \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A, M - \varepsilon < x. \end{cases}.$$

de même :

$$m = inf(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} i) & \forall x \in A,\ m \leq x, \\ ii) & \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A, x < m + \varepsilon. \end{cases}.$$

***Remarque* 1.1.** La borne supérieure (resp. borne inférieure) n'appartient pas nécessairement à F. Si $\sup(F) \in F$, il sera appelé **le maximum** de F et on note **max(F)** (resp. Si $\inf(F) \in F$, il sera appelé **le minimum** de F et on note **min(F)**).

Théorème 1.1 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$)**.** *Toute partie non vide majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. borne inférieure).*

Définition 1.3 (Valeur Absolue)**.** *Pour tout réel x, on définit un nombre positif noté $|x|$ appelé valeur absolue de x qui vérifie :*

$$\begin{aligned} |x| &= \begin{cases} x & si \quad x \geq 0, \\ -x & si \quad x \leq 0, \end{cases} \\ &= sup\{x, -x\}. \end{aligned}$$

Théorème 1.2. *Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a*

- $|-x| = |x|$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

- $|xy| = |x||y|$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ *avec égalité si et seulement si* $xy \geq 0$;
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

***Remarque* 1.2.** Si $b \geq 0$ l'inégalité $|x| \leq b$ signifie que : $-b \leq x \leq b$.

Définition 1.4 (Formule du binôme)**.** *Si* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{C}_n^p a^p b^{n-p},$$

où $\mathcal{C}_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ *et* $0! = 1$.

Théorème 1.3 (Archimède)**.**
Pour tout nombre réel x*, il existe un entier naturel* n *tel que :* $x \leq n$*.*

Théorème 1.4 (Partie entière)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists ! \mathrm{n} \in \mathbb{Z} / \mathsf{n} \leq \mathsf{x} < \mathsf{n} + 1.$$

L'unique entier n *est appelé la partie entière de* x*, noté* $E(x)$*.*

Propriété 1.2.

- $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $E(x + n) = E(x) + n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$;
- $E(x + y) = E(x) + E(y) + \epsilon \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $\epsilon = 0$ *ou* 1.

1.2 Suites numériques

Définition 1.5. *Une suite numérique est une application* u *définie d'une partie* $\mathbb{I}$ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u(n) = u_n. \end{array}$$

Le nombre réel $u(n) = u_n$ *s'appelle le terme général de la suite. La suite définie par l'application* u *est notée* $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ *ou tout simplement* (u_n) *si* $\mathbb{I} = \mathbb{N}$*. L'ensemble* $\{u(n) : n \in \mathbb{I}\}$ *est appelé ensemble des valeurs de la suite.*

***Exemple* 1.** $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, $u_n = (-1)^n,\ n \geq 1$.

Définition 1.6. *Soit* (u_n) *une suite réelle. On dit que* (u_n) *est*

- *une suite à termes positifs si* $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*
- *une suite à termes négatifs si* $u_n \leq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*
- *une suite croissante si* $u_n \leq u_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

- *une suite décroissante si $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- *une suite monotone si elle est croissante ou décroissante,*
- *majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- *minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- *(u_n) est bornée si elle est majorée et minorée.*

***Remarque* 1.3.** Une suite (u_n) est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

***Exemple* 2.** La suite $(1 - \dfrac{1}{n+1})$ est croissante et majorée.

***Exemple* 3.** La suite $(-1)^n$, $n \geq 1$, est bornée.

Définition 1.7 (Suite extraite ou sous-suite)**.**
Soit (u_n) une suite, on appelle suite extraite ou sous-suite de (u_n) toute suite (v_n) de la forme $v_n = u_{f(n)}$ où f une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

***Exemple* 4.** La suite constante (v_n), notée $(1)_n$, définie par : $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une sous-suite de $u_n = (-1)^n$; il suffit de prendre $f(n) = 2n$; $v_n = u_{f(n)}$.

Définition 1.8. *On dit que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{n} > \mathrm{N} \implies |\mathrm{u_n} - \ell| < \varepsilon,$$

on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$.

***Remarque* 1.4.** Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

***Exemple* 5.** La suite $(\frac{1}{n+1})$ converge vers 0.
En effet, soit $\varepsilon > 0$, appliquons le théorème d'Archimède pour $\dfrac{1}{\varepsilon}$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{\varepsilon} < N$, il suffit donc de prendre $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$.
Si on prend $n > N > \dfrac{1}{\varepsilon}$, alors $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} < \varepsilon$, d'où le résultat.

Proposition 1.1. .

1. *Toute suite convergente est bornée.*
2. *Toute suite croissante majorée est convergente.*
3. *Toute suite décroissante minorée est convergente.*
4. *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et à la même limite.*

***Exemple* 6.** La suite $(\frac{1}{n+1})$ est décroissante minorée par 0 donc convergente.

***Remarque* 1.5.** La suite $(-1)^n$ est bornée mais elle n'est pas convergente.

Proposition 1.2. *Si une suite converge, alors sa limite est unique.*

Preuve : Supposons que la suite (u_n) possède deux limites l et l' distinctes. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver N et N' tels que pour $n \geq N$ et $n \geq N'$ on a

$$|u_n - l| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - l'| < \varepsilon.$$

En particulier si $n \geq max(N, N')$ et $\varepsilon = \dfrac{|l - l'|}{4}$ on obtient :

$$|l - l'| = |(l - u_n) + (u_n - l')| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| < 2\varepsilon = \frac{|l - l'|}{2},$$

ce qui est impossible. Donc $l = l'$.

1.2.1 Opérations sur les suites convergentes

Proposition 1.3. *Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles, λ et μ deux réels. Si (u_n) converge vers u et (v_n) converge vers v. Alors*

1. *La suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda u + \mu v$.*
2. *La suite produit $(u_n v_n)$ converge vers uv.*
3. *La suite $(|u_n|)$ converge vers $|u|$.*
4. *Si $u \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geq N}$ converge vers $\dfrac{1}{u}$.*

***Remarque* 1.6.** Quand une suite diverge, il y'a deux possibilités :

1. Soit elle n'a pas de limite comme par exemple la suite $u_n = (-1)^n$.
2. Soit elle tend vers $\pm\infty$.

Pour ce dernier cas on a :

Définition 1.9. *On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout $A > 0$ il existe un entier naturel N tel que $n \geq N$ implique $u_n > A$ (resp. $u_n < -A$).*

***Remarque* 1.7.**

1. Si $u_n \to u \in \mathbb{R}$ et $v_n \to +\infty$. Alors
   (a) $u_n + v_n \to +\infty$ et
   (b) $\dfrac{1}{v_n} \to 0^+$.
   (c) Si $u > 0$, $u_n v_n \to +\infty$.
   (d) Si $u < 0$, $u_n v_n \to -\infty$.
   (e) Si $u = 0$ on ne peut rien dire de la suite $(u_n v_n)$ (forme indéterminée **FI**).
2. Si $u_n \to u \in \mathbb{R}$ et $v_n \to -\infty$. Alors
   (a) $u_n + v_n \to -\infty$,

(b) $\dfrac{1}{v_n} \to 0^-$.

(c) Si $u > 0 \quad u_n v_n \to -\infty$.

(d) Si $u < 0 \quad u_n v_n \to +\infty$.

(e) Si $u = 0$ on ne peut rien dire de la suite $(u_n v_n)$ (forme indéterminée).

***Exemple* 7.** $u_n = n, v_n = \frac{1}{n}$.(la limite du produit est 1)

***Exemple* 8.** $u_n = n, v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.(limite du produit est $+\infty$).

***Exemple* 9.** $u_n = n, v_n = \frac{1}{n^2}$.(limite du produit est 0)

Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$, on ne peut rien dire de la suite (u_n+v_n). (forme indéterminée).

***Exemple* 10.** $u_n = n+1, v_n = -n,\ u_n + v_n \to 1$.

***Exemple* 11.** $u_n = n+1, v_n = -n^2,\ u_n + v_n \to -\infty$.

***Exemple* 12.** $u_n = n + (-1)^n, v_n = -n, u_n + v_n$ n'a pas de limite.

***Remarque* 1.8.** Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$, on peut rien dire de $\dfrac{u_n}{v_n}$. (forme indéterminée)

***Exemple* 13.** $u_n = n+1 \quad$ et $\quad v_n = n,\ \dfrac{u_n}{v_n} \to 1$.

***Exemple* 14.** $u_n = n+1 \quad$ et $\quad v_n = \sqrt{n},\ \dfrac{u_n}{v_n} \to +\infty$.

***Exemple* 15.** $u_n = n+1 \quad$ et $\quad v_n = n^2,\ \dfrac{u_n}{v_n} \to 0$.

***Remarque* 1.9.** Si $u_n \to 0$ et $v_n \to 0$, on peut rien dire de $\dfrac{u_n}{v_n}$ (forme indéterminée).

***Exemple* 16.** $u_n = \frac{1}{n}, v_n = \frac{1}{n^2}$, le rapport tend vers $+\infty$.

***Exemple* 17.** $u_n = \frac{1}{n^2}, u_n = \frac{1}{n}$, le rapport tend vers 0.

***Exemple* 18.** $u_n = \frac{1}{n}, u_n = \frac{1}{n+1}$, le rapport tend vers 1.

***Remarque* 1.10.** Si $u_n \to \infty$ et $v_n \to 0$, on peut rien dire de $u_n^{v_n}$.(forme indéterminée)

***Remarque* 1.11.** Si $u_n \to 1$ et $v_n \to \infty$, on peut rien dire de $u_n^{v_n}$.(forme indéterminée)

***Exemple* 19.** $u_n = \sqrt{n}, v_n = \frac{1}{n}, \quad u_n^{v_n}$ tend vers 1.

***Exemple* 20.** $u_n = 1 + \frac{1}{n}, v_n = n, \quad u_n^{v_n}$ tend vers $\exp(1)$.

1.2.2 Suites arithmétiques

Définition 1.10. *Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n*

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n).

Proposition 1.4. *Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors*

$$u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_0.$$

Preuve : Raisonnons par récurrence : Pour $n = n_0$, on a $u_{n_0} = u_{n_0}$. Supposons que la propriété est vraie pour n, et montrons qu'elle reste également vraie pour $n + 1$. On a par définition :

$$u_{n+1} = u_n + r = (u_{n_0} + (n - n_0)r) + r = u_{n_0} + ((n + 1) - n_0)r,$$

donc la propriété est vraie pour $n + 1$. Ce qui prouve que la propriété est vraie pour tout n.

***Remarque* 1.12.** Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Si $r = 0$ la suite (u_n) est constante.
Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Proposition 1.5. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n + 1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Preuve : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$, alors

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + (n - p)r = u_0 + u_n,$$

il en résulte, si on écrit : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_p + \cdots + u_n$
$S_n = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_{n-p} + \cdots + u_0$ et en faisant la somme, que $2S_n = (n + 1)(u_0 + u_n)$.

***Remarque* 1.13.** Si le premier terme de la suite est u_1, alors

$$S_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}.$$

***Exemple* 21.**
1. La suite (u_n) définie par $u_n = n$ est arithmétique de raison 1 donc :

$$S_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

2. La suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$ est arithmétique de raison 2 donc :

$$S_n = 1 + 3 + ... + (2n + 1) = \frac{(n + 1)(1 + 2n + 1)}{2} = (n + 1)^2.$$

1.2.3 Suites géométriques

Définition 1.11. *Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n,*

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre réel q est appelé la raison de la suite géométrique (u_n).

***Remarque* 1.14.** Si $q = 0$ tous les termes de la suite sont nuls sauf, peut être, u_0. Nous supposerons dans la suite que $q \neq 0$.

***Exemple* 22.** $u_n = 3 \times 5^n$ avec $n \geq 1$ est le terme général d'une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_1 = 15$.

Proposition 1.6. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors :*

$$u_n = q^{n-n_0} u_{n_0} \quad \textit{pour tout} \quad n \geq n_0.$$

Preuve : Pour $n = n_0$, on a $u_{n_0} = q^0 u_{n_0} = u_{n_0}$. Supposons la propriété est vraie pour n et montrons qu'elle reste vraie pour $n+1$. On a par définition : $u_{n+1} = qu_n = q(q^{n-n_0}u_{n_0}) = q^{(n+1)-n_0}u_{n_0}$. Ce qui prouve que la propriété est vraie pour tout n.

***Remarque* 1.15.**
Quand $n_0 = 0$, $\forall n \geq 0$, $u_n = q^n u_0$;
Quand $n_0 = 1$, $\forall n \geq 1$, $u_n = q^{n-1} u_1$;

Proposition 1.7. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, alors :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad si \quad q \neq 1$$

$$et\ S_n = (n+1)u_0 \quad si \quad q = 1.$$

Preuve : On a : $S_n = u_0 + qu_0 + \cdots + q^n u_0 = u_0(1 + q + \cdots + q^n)$ donc

$$S_n - qS_n = (1-q)S_n = u_0(1 - q^{n+1})$$

par suite si $q \neq 1$ on a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si $q = 1$ on a : $u_n = u_0$ pour tout n et S_n contient $n + 1$ termes.

***Exemple* 23. Limite de la suite géométrique (q^n), $q \in \mathbb{R}$**

- Si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$;
- Si $0 < |q| < 1$ alors $\lim q^n = 0$;
- Si $q < -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

1.2.4 Suites adjacentes

Définition 1.12. *On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :*
1. La suite (u_n) est croissante.
2. La suite (v_n) est décroissante.
3. La suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Proposition 1.8. *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes alors elles convergent vers la même limite.*

***Exemple* 24.** Les suites données par (u_n) et $(v_n)_{n\geq 1}$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad et \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}, \quad n \geq 1,$$

sont adjacentes. En effet
La suite (u_n) est croissante car : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geq 0$.
La suite (v_n) est décroissante car :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\left[n + n(n+1) - (n+1)^2\right] \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

De plus $v_n - u_n = \dfrac{1}{n.n!} \to 0$. Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On en déduit que (u_n) et (v_n) convergent.

***Exemple* 25.** . Les suites données par (u_n) et $(v_n)_{n\geq 1}$

$$u_n = 1 - \frac{1}{n}, v_n = 1 + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes.
Voici enfin deux théorèmes très utilisés pour calculer des limités de suites.

Théorème 1.5. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est continue au point x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers x_0, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.*

Comme conséquence de ce théorème on déduit

Proposition 1.9. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers x_0 on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell.$$

1.2.5 Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Proposition 1.10 (Passage à la limite dans des inégalités)**.** *Soient* $(u_n)_n$ *une suite réelle convergente,* ℓ *sa limite,* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. *S'il existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathrm{n} \geq \mathrm{N_1} \Longrightarrow \mathrm{u_n} \geq \mathrm{a}),$ *alors* $\ell \geq \mathrm{a}$.
2. *S'il existe* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathrm{n} \geq \mathrm{N_2} \Longrightarrow \mathrm{u_n} \leq \mathrm{b}),$ *alors* $\ell \leq \mathrm{b}$.
3. *S'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathrm{n} \geq \mathrm{N} \Longrightarrow \mathrm{a} \leq \mathrm{u_n} \leq \mathrm{b}),$ *alors* $a \leq \ell \leq b$.

Théorème 1.6 (Théorème d'encadrement ou de gendarme)**.** *Soient* $(u_n)_n$*,* $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *trois suites réelles telles que :*

$$u_n \leq v_n \leq w_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a :

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
3. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$; puisque les suites $(u_n)_n$, et (w_n) convergent vers ℓ, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathrm{n} \geq \mathrm{N_1} \Longrightarrow |\mathrm{u_n} - \ell| \leq \epsilon)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathrm{n} \geq \mathrm{N_2} \Longrightarrow |\mathrm{w_n} - \ell| \leq \epsilon).$$

En notant $N_0 = Max(N_1, N_2)$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N_0 \Longrightarrow \begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ |u_n - \ell| \leq \epsilon \\ |w_n - \ell| \leq \epsilon \end{cases} \Longrightarrow \; -\epsilon \leq u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell \leq \epsilon \Longrightarrow |v_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Donc la suite $(v_n)_n$ converge vers ℓ.

***Exemple* 26.** Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}; \quad n \geq 1.$$

u_n est la somme de $2n+2$ termes majorés par $\dfrac{n}{n^2}$ et minorés par $\dfrac{n}{(n+1)^2}$, donc quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$(2n+2)\frac{n}{(n+1)^2} \leq u_n \leq (2n+2)\frac{n}{n^2}.$$

La suite de terme général $v_n = \dfrac{n(2n+2)}{(n+1)^2}$ est convergente et a pour limite 2. La suite de terme général $w_n = \dfrac{n(2n+2)}{n^2}$ est convergente et a pour limite 2. En conséquence la suite $(u_n)_n$ converge et a pour limite 2.

***Remarque* 1.16.** Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l'$, et $l \neq l'$, on ne peut rien dire de v_n.

***Exemple* 27.**

$$u_n = -2 + \frac{1}{n}, \quad w_n = 2 + \frac{1}{n}.$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -2, \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = 2$$

- Si on prend $v_n = \frac{1}{n}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$.
- Si on prend $v_n = (-1)^n$ n'a pas de limite bien que : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

1.2.6 Suite récurrente

Définition 1.13. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le couple (a, f), où a est un réel et f une fonction réelle de variable réelle, telle que*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad si\ n \geq 1 \end{cases}$$

est appelée suite récurrente (simple).

Le résultat principal concernant les suites récurrentes est résumé dans la proposition suivante.

Proposition 1.11. *Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$ telle que $f(I) \subset I$ et soit (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ donné. On a :*
1. Si (u_n) converge vers l alors $l = f(l)$.
2. Si f est croissante alors (u_n) est monotone et convergente.

Preuve :
1. La condition $f(I) \subset I$ implique que $u_n \in I$ pour tout n.
Si $u_n \to u$ alors $f(u_n) \longrightarrow f(u)$, grâce à la continuité de f en u. D'autre part les suites (u_n) et (u_{n+1}) ayant la même limite, on conclut, que $u = f(u)$.
2. 1^{er} cas : Si $u_0 \leq u_1$, la suite (u_n) est croissante, en effet (par récurrence) :
Si $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. La suite (u_n) étant croissante majorée par b donc convergente.
2^e cas : Si $u_0 \geq u_1$ on montre de la même façon que (u_n) est décroissante minorée par a donc convergente.

Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle

2.1 Fonction numérique

Définition 2.1. *On appelle fonction numérique, toute application f définie d'une partie D de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} f \ : \ D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble D, noté D_f, est appelé domaine de définition de f.
L'ensemble $C_f = \{(x, f(x)),\ x \in D_f\}$ est appelé courbe représentative, ou graphe , de f.
On note $\mathfrak{F}(D_f, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur D_f.

***Remarque* 2.1.** Dans la suite, on appellera fonction toute fonction numérique d'une variable réelle.

***Exemple* 28.** Soient a et b deux nombres réels. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ s'appelle une fonction affine. Elle est définie sur toute la droite réelle.

***Exemple* 29.** La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.

***Exemple* 30.** La fonction $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ est définie sur $]-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty[$.

***Exemple* 31.** La fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$.

***Exemple* 32.** La fonction $f(x) = \sin(x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

2.2 Opération sur les fonctions

2.2.1 Somme et produit de deux fonctions

Définition 2.2. *Si f et g sont deux fonctions réelle d'une variable réelle, on appelle* **somme** *et* **produit** *de f et g les fonctions $s = f+g$ et $p = f \times g$ définies par : $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $s(x) = f(x) + g(x)$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $p(x) = f(x) \times g(x)$.*

2.2.2 Produit d'une fonction par un nombre réel

Définition 2.3. *Si f est une fonction réelle d'une variable réelle, on appelle produit de la fonction f par un nombre réel α la fonction $g = \alpha.f$ définie par : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $g(x) = \alpha \times f(x)$.*

2.2.3 Composition de deux fonctions

Définition 2.4. *Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle définies respectivement sur une partie E de $\mathbb{R}$ et sur une partie F de $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in E$ on a $f(x) \in F$. On définit sur E la fonction composée de f et g, que l'on note $g \circ f$, par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

***Remarque* 2.2.** Il faut faire attention à l'ordre dans lequel on compose car $g \circ f \neq f \circ g$. Pour s'en apercevoir, on considère les fonctions f et g, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$. On a pour tout nombre réel x : $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$ et $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$ et on a évidemment $g \circ f \neq f \circ g$.

***Remarque* 2.3.** Il faut faire aussi attention aux domaines de définitions de fonctions composées. Pour s'en convaincre, on considére les fonctions $f = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ et donner le domaine de définition de leurs composées.

2.3 Limites

Définition 2.5. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 sauf, peut-être, en x_0.*

1. *On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ au point x_0 si :*
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0\ /\ \forall x \in \mathcal{V}\ (|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon),$$
on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
2. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ au point x_0 si :*
$$\forall\ A > 0,\ \exists\ \eta > 0\ /\ \forall x \in V\ \ (|x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) > A),$$
on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
3. *On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ au point x_0 si :*
$$\forall\ A > 0,\ \exists\ \eta > 0\ /\ \forall x \in \mathcal{V}\ (|x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) < -A),$$
on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Proposition 2.1. *Si f admet pour limite ℓ, (ℓ fini ou non), en x_0, (x_0 fini ou non), alors cette limite est unique.*

2.3.1 Limite à droite et à gauche

Définition 2.6. *Soit f une fonction définie sur $I = [a, b]$, $(a < b)$ sauf, peut-être, aux points a et b.*

1. *On dit que f admet pour limite, $l \in \mathbb{R}$, à droite en a si :*
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0\ /\ \forall x \in I\ (0 < x - a < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon),$$
on écrit $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

2. *On dit que f admet pour limite, $l \in \mathbb{R}$, à gauche en b si :*

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0\ /\ \forall x \in I\ (0 < b - x < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon),$$

   on écrit $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = l$.

***Exemple* 33.** Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \leq 1. \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

Proposition 2.2. *Si f admet une limite au point x_0, alors f admet une limite à droite et une limite à gauche au point x_0 et l'on a :*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

***Remarque* 2.4.** Si f n'est pas définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$, alors f admet une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Définition 2.7. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.*

1. *On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ B > 0\ : x > B \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

   on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

2. *On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $-\infty$ si :*

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ B > 0\ : x < -B \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

   on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

3. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall\ A > 0, \exists\ B > 0\ : x > B \Longrightarrow f(x) > A,$$

   on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si :*

$$\forall\ A > 0, \exists\ B > 0\ : x < -B \Longrightarrow f(x) > A,$$

   on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

5. *On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall\ A > 0, \exists\ B > 0\ : x > B \Longrightarrow f(x) < -A,$$

   on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

6. *On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si :*

$$\forall\ A > 0, \exists\ B > 0\ : x < -B \Longrightarrow f(x) < -A,$$

   on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2.3.2 Propriétés des limites et opérations

Dans la proposition suivante, on établit les règles générales de calcul sur les limites. On énonce les propriétés pour un point x_0 de $\mathbb{R}$. Les résultats restent vrais si l'on remplace x_0 par l'infini.

Proposition 2.3. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ sauf peut-être en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 et g admet pour limite $\ell' \in \mathbb{R}$ en x_0 alors les fonctions $f+g$, λf et fg ont une limite en x_0 et on a :*
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell + \ell'$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda \ell$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \ell \ell'$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell} \quad si \quad \ell \neq 0.$
- *Si dans un voisinage de x_0 on a $f(x) \geq 0$, alors $\ell \geq 0$.*

***Remarque* 2.5.** Les résultats relatifs aux opérations sur les limites en x_0 s'appliquent en particulier lorsqu'il s'agit de limites à droite en x_0, à gauche en x_0, quand x tend vers $+\infty$ ou quand x tend vers $-\infty$.
Les autres résultats sont donnés dans les tableaux suivants :
Au point x_0 ou à droite en x_0 ou à gauche en x_0 ou lorsque x tend vers $+\infty$ ou lorsque x tend vers $-\infty$. On a :

I

limite de f :	limite de g :	limite de $f+g$:
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

II

limite de $\lvert f \rvert$:	limite de $\lvert g \rvert$:	limite de $\lvert fg \rvert$:
$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	forme indéterminée
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

III

limite de $\lvert f \rvert$:	limite de $\lvert g \rvert$:	$\left\lvert \frac{f}{g} \right\rvert$ a pour limite :
$\ell \neq 0$	0	$+\infty$
0	0	forme indéterminée
ℓ	$+\infty$	0
$+\infty$	ℓ	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée

***Remarque* 2.6.** Les autres formes indéterminés qu'on peut rencontrer sont :

$$+\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Pour voir si de telles formes ont des limites et éventuellement calculer ces limites, il suffit parfois de transformer convenablement l'expression pour que les théorèmes précédents puissent s'appliquer.

***Exercice* 1.** Calculer lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{x\tan(x)+2|x|\sin x}{x},$$

$$b) \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|\cos x}{x}.$$

---

corrigé

a) Puisque $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan(x)+2|x|\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \tan x + 2\lim_{x\to 0} |x| \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

b) Puisque $x + 2\frac{|x|}{x}\cos x \leq x - 2$ qui a limite $-\infty$ lorsque $x \to -\infty$,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|\cos x}{x} = -\infty.$$

Théorème 2.1 (Limite d'une fonction composée)**.**
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, non vides et non réduits à un point. soit f une fontion de I dans J, et g une fonction de J dans $\mathbb{R}$. Si $\lim f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to\ell} g(x) = \ell_1$ alors $\lim g\circ f = \ell_1$.

***Remarque* 2.7.** Ce résultat se généralise au cas où ℓ est infinie, ainsi que celui où ℓ_1 est infinie.

2.4 Fonctions continues

2.4.1 Continuité d'une fonction en un point

Définition 2.8. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite finie en x_0 et cette limite est égale à $f(x_0)$:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

***Exemple* 34.** La fonction $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.9. *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, ($a < b$).*
- *On dit que f est continue à droite en a si : $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.*
- *On dit que f est continue à gauche en b si : $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.*

***Exemple* 35.** La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 2x & \text{si} \quad x < 1, \end{cases}$$

est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1.

***Remarque* 2.8.** Pour qu'une fonction f soit continue en un point il faut et il suffit qu'elle soit continue à droite et à gauche en ce point.

***Remarque* 2.9.** Une fonction non continue en un point est dite discontinue en ce point.

Proposition 2.4. *Soient f, g deux fonctions continues en un point x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f+g$, λf, $|f|$ et fg sont continues en x_0.*
Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Proposition 2.5. *Si f est définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et continue en x_0 et si g est définie sur un voisinage $\mathcal{W}$ de $y_0 = f(x_0)$ et continue en y_0, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0.*

Définition 2.10 (Prolongement par continuité)**.**
Soit f une fonction définie sur D_f. Si $x_0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, on définit la fonction g par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x \in D_f \\ g(x_0) = l. \end{cases}$$

La fonction g est continue en x_0 et coïncide avec f sur D_f. On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0.

***Exemple* 36.** Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}.$$

En remarquant que $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$, on peut écrire pour $x \neq 1$, $f(x) = 2x+1$.
Donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.
La fonction $g : x \longmapsto 2x+1$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue en $x_0 = 1$ et coïncide avec f sur D_f.
Donc g est le prolongement par continuité de f en $x_0 = 1$.

***Exemple* 37.** La fonction $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Comme $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0, posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

g est le prolongement par continuité de f en 0.

2.4.2 Fonctions continues sur un intervalle

Rappelons qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est appelée intervalle si pour tous x et y dans I, l'intervalle $[x, y]$, $(x < y)$, est inclus dans I.

Définition 2.11. *Une fonction définie sur un intervalle I est dite continue sur I, si elle est continue en tout point de I.*

Nous allons donner quelques propriétés des fonctions continues.

Théorème 2.2. *Si f une fonction continue sur un intervalle I alors*
• *$f(I)$ est un intervalle.*
• *Si de plus $I=[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes c'est-à-dire qu'ils existent x_0 et x_1 dans I tels que*

$$m=f(x_0)=\min_{x\in I} f(x),\ \ M=f(x_1)=\max_{x\in I} f(x) \quad et\ f(I)=[m,M].$$

Contres exemples
• $f(x)=x$ sur $[0,+\infty[$, f est continue, mais non bornée, car $[0,+\infty[$ n'est pas borné.
• Posons

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x\in]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x=0, \end{cases}$$

g est définie sur $[0,1]$ (fermé et borné), mais g n'est pas bornée, car g n'est pas continue en 0.
• Soit $h(x)=2x$ si $x\in[0,1[$. La fonction h est continue et bornée, sa borne supérieure, qui est 2, n'est pas atteinte. Cela tient à ce que l'intervalle de définition $[0,1[$ de h n'est pas fermé.

Théorème 2.3 (Théorème des valeurs intermédiaires "TVI")**.**
Soit f une fonction continue sur $I=[a,b]$. Si $f(a).f(b)<0$ alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$.

***Remarque* 2.10.** On peut exprimer le théorème des valeurs intermédiaires sous la forme plus condensée suivante : l'image d'un intervalle par une application continue (à valeurs réelles) est un intervalle.

Théorème 2.4 (Théorème du point fixe)**.** *Si f est une fonction continue de $[a,b]$ vers $[a,b]$, alors il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)=x_0$. Le point x_0 est appelé point fixe de f.*

2.5 Fonctions réciproques

2.5.1 Fonctions monotones sur un intervalle

Définition 2.12. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

1. *f est dite croissante sur I si $\forall x,y\in I : x<y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$.*

2. *f est dite décroissante sur I si $\forall x,y\in I : x<y \Rightarrow f(x)\geq f(y)$.*

***Remarque* 2.11.** Si $x_0,\ x_1\ \in I$ avec $x_0\neq x_1$, on pose

$$T_f(x_1,x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

appelé le taux d'accroissement de f entre x_0 et x_1. Il est aisé de vérifier que f est croissante sur I si $T_f(x_1,x_0)\geq 0$, pour tout $x_0,\ x_1\in I$, et qu'elle est décroissante sur I si $T_f(x_1,x_0)\leq 0$, pour tout $x_0,\ x_1\in I$.

***Remarque* 2.12.** Une fonction est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

***Remarque* 2.13.** Si on remplace, dans cette définition, les inégalités larges par les inégalitée strictes, on dira que f est strictement croissante ou strictement décroissante. De même on dit que f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

***Remarque* 2.14.** Si on désigne par D la droite passant par les points $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M_1(x_1, f(x_1))$ alors le rapport $T_f(x_1, x_0)$ est égale au coefficient directeur (ou encore pente) de la droite D.

Proposition 2.6. *La composée de deux fonctions monotones est une fonction monotone. Plus précisément la composée de deux fonctions ayant le même sens de variation est une fonction croissante ; la composée de deux fonctions ayant un sens de variation différent est une fonction décroissante.*

2.5.2 Propriétés des fonctions monotones sur un intervalle

Théorème 2.5. *Soit* $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction monotone,* $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$*. Alors les limites* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$*,* $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)$ *existent (finies ou non) et l'on a*

$$-\infty \leq inf_{x\in]\alpha,\beta[} f(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \leq \lim_{x\to\beta} f(x) = sup_{x\in]\alpha,\beta[} f(x) \leq +\infty,$$

si f *est croissante, et*

$$-\infty \leq inf_{x\in]\alpha,\beta[} f(x) = \lim_{x\to\beta} f(x) \leq \lim_{x\to\alpha} f(x) = sup_{x\in]\alpha,\beta[} f(x) \leq +\infty,$$

si f *est décroissante.*

Corollaire 2.1. *Soit* $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction monotone. Alors*

1. $f(\alpha) \leq \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \leq \lim\limits_{x\to\beta} f(x) \leq f(\beta)$ *si* f *est croissante ;*

2. $f(\alpha) \geq \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \geq \lim\limits_{x\to\beta} f(x) \geq f(\beta)$ *si* f *est décroissante.*

2.5.3 Théorème de la fonction réciproque

Théorème 2.6. *Si* f *est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle* I *alors* f *est bijective de* I *vers* $f(I)$ *et sa fonction réciproque* f^{-1} *est continue et strictement monotone sur* $f(I)$.

Proposition 2.7. *Si* f *est une fonction continue et bijective sur un intervalle* I *alors :*
1. Les fonctions f *et* f^{-1} *varient dans le même sens.*
2. Les courbes représentatives de f *et de* f^{-1} *sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation* $y = x$.

***Exemple* 38.** Soit la fonction $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Cette fonction est définie sur toute la droite réelle. Elle est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle admet une fonction réciproque f^{-1}, qui est continue et strictement croissante sur $[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [1, +\infty[$. On détermine cette fonction réciproque de la manière suivante :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x = \frac{e^y+e^{-y}}{2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

La résolution de cette équation du second degré en y nous donne

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

qui est l'expression de la réciproque de f demandée. A titre d'exercices : Donner les réciproques des fonctions suivantes :

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2.6 Dérivée d'une fonction

Définition 2.13. *Soit f une fonction définie sur un voisinage I de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en x_0 si :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le nombre réel (unique) α est appelé dérivée de f en x_0 et noté $f'(x_0)$.
Si f est dérivable en tout point de I on dit qu'elle est dérivable sur I.

***Exemple* 39.** La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $I =]0, +\infty[$. En effet ; soit $x_0 \in I$, si $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}, \quad et \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

***Exemple* 40.** Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, en effet ; soit $x_0 \in \mathbb{R}$, pour $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = (x^{n-1} + \cdots + x^{n-m-1}x_0^m + \cdots + x_0^{n-1}),$$

donc :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + \cdots + x^{n-m-1}x_0^m + \cdots + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}.$$

***Remarque* 2.15.**

1. Si on pose $h = x - x_0$ alors la dérivabilité de f en x_0 équivaut à

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2. Pour $x \neq x_0$, posons

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

   Alors la dérivabilité de f en x_0 équivaut à

$$(\star) \qquad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Si on pose $x - x_0 = h$ et $\varepsilon_1(h) = \varepsilon(x_0 + h)$, la relation $(\star)$ s'écrit

$$(\star\star) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\varepsilon_1(h), \text{ et } \lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0,$$

Donc si $f'(x_0) \neq 0$, le nombre $f'(x_0)h$ est une valeur approchée de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ et on peut écrire $f(x_0 + h) - f(x_0) \simeq f'(x_0)h$ pour h « assez petit ».

2.6.1 Interprétation géométrique

Soient $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0+h, f(x_0+h))$, $h \neq 0$, deux points de C_f et D la droite passant par M_0 et M, voir $Fig.1$.

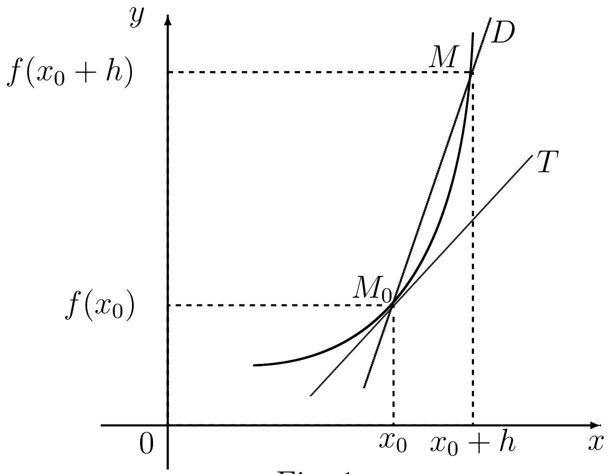


Fig. 1

Désignons par $y = ax + b$ l'équation de la droite D. Comme $M \in D$ et $M_0 \in D$ on a : $f(x_0) = ax_0 + b$ et $f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b$. En faisant la différence on obtient :

$$a = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Fixons x_0 et faisant varier h, on notera alors a par $a(h)$. Ainsi $y = a(h)x + b$ et $b = f(x_0) - a(h)x_0$ donc : $y = a(h)(x - x_0) + f(x_0)$. En outre, si h tend vers 0, alors M tend vers M_0 et la droite D tend vers une position limite T ; qui est par définition la tangente en M_0 à C_f, voir $Fig.1$. Pour trouver l'équation de la tangente T il suffit de calculer $\lim\limits_{h\to 0} a(h)$.Or

$$\lim_{h\to 0} a(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

On obtient alors, l'équation de la tangente T :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Proposition 2.8. *Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Preuve : D'après la relation $(\star)$, on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ce qui prouve que f est continue en x_0.

***Remarque* 2.16.** La réciproque est fausse.

***Exemple* 41.** $f(x) = |x|$ sur $]-1,1[$ f est continue en 0, mais n'est pas dérivable au point 0.

Définition 2.14. *Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un point x_0.*
- *On dit que f est dérivable à droite en x_0 si :*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}.$$

- *On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si :*

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l' \in \mathbb{R}.$$

Les nombres l et l' notés respectivement $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ sont appelés dérivée à droite et à gauche de f en x_0.

***Exemple* 42.** La fonction $f(x) = |x|$ est dérivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0. En effet, si $x \neq 0$, le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ est égal à 1 si $x > 0$ et à -1 si $x < 0$ donc $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

Proposition 2.9. *Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Définition 2.15 (Fonction dérivée)**.**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. f est dérivable sur I si, et seulement si, f est dérivable en tout point de I.
On appelle alors fonction dérivée de f, notée f', la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f' \ : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x), \end{array}$$

On notera bien la distinction entre la dérivée de f en x_0 qui est un nombre, et la fonction dérivée.

2.6.2 Opérations sur les fonctions dérivables

La proposition sur la limite d'une somme, d'un produit puis d'un quotient de fonctions permet d'énoncer :

Proposition 2.10. *Soient f, g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en x_0. Alors :*
1. $f + g$ est dérivable en x_0 et

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. λf est dérivable en x_0 et

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

3. fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$$

4. Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Proposition 2.11 (Dérivée d'une fonction composée)**.**
Soient f une fonction définie sur un voisinage I d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et g une fonction définie sur un voisinage J de $f(x_0)$. Si f est dérivable au point x_0 et g dérivable au point $f(x_0)$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Théorème 2.7 (Dérivée d'une fonction réciproque)**.**
Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Soit g la fonction réciproque, définie dans un intervalle J. Si f est dérivable en x_0, et si $f'(x_0) \neq 0$, alors g est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et l'on a :

$$g'(y_0) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Preuve : Soit $y \neq y_0$ un point de J. Soit $x = g(y)$ qui est distinct de x_0 et appartient à I. On a :

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)^{-1}.$$

Quand y tend vers y_0 par valeurs différentes de y_0, $x = g(y)$ tend vers $x_0 = g(y_0)$ parce que g est continue en y_0. Alors $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $f'(x_0)$. D'où la proposition.

***Exemple* 43.** Soit $f(x) = \ln(x)$: on a $f^{-1}(x) = e^x$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = e^{y_0}$$

2.6.3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 2.8 (Théorème de Rolle "TR")**.** *Si f est une fonction continue sur $I = [a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.*

Interprétation géométrique
Géométriquement, le théorème dit que sur la partie AB correspondant à l'intervalle $[a, b]$ du graphe de f, il existe au moins un point C, distinct de A et B, pour lequel la tangente à la courbe est parallèle à la droite AB.

***Remarques* 2.1.**

1. *Le théorème de Rolle est faux si f n'est pas dérivable sur tout l'intervalle $]a, b[$. En effet : la fonction $f(x) = |x|$ est dérivable sur $I =]-1, 1[$ sauf en 0, mais il n'existe pas de point $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$.*

2. *Si la fonction n'est pas continue dans l'intervalle fermé, le théorème peut être en défaut. Par exemple, soit f la fonction définie comme suit*

$$x \in]a,b[\Longrightarrow f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}, \quad \text{et} \quad f(a) = f(b) = 0.$$

Cette fonction est définie dans $[a,b]$, mais n'y est pas continue. Elle est continue seulement dans l'intervalle ouvert $]a,b[$ et elle y aussi dérivable

$$f'(x) = \frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(b-x)^2}.$$

Cette dérivée est strictement positive et ne s'annule pas dans $]a,b[$.

Théorème 2.9 (Théorème des accroissements finis "TAF"). *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Interprétation géométrique
On aura $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$: autrement dit, la pente de la corde AB joignant $A = (a, f(a))$ à $B = (b, f(b))$ est égale à la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $M_c = (c, f(c))$. Le théorème affirme donc l'existence d'un point M sur la courbe représentative C_f de f, tel que la tangente en M à C_f est parallèle à la corde AB.

Corollaire 2.2. *Soit f est une fonction continue sur $I = [a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.*

1. *Si $f'(x) = 0$ sur $]a,b[$ alors f est constante sur $[a,b]$.*

2. *f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$ sur $]a,b[$.*

3. *f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'(x) \leq 0$ sur $]a,b[$.*

4. *Si $f'(x) > 0$ sur $]a,b[$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.*

5. *Si $f'(x) < 0$ sur $]a,b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.*

***Remarque* 2.17.**

1. *La réciproque de 1 est vraie.(Trivial).*

2. *La réciproque de 4) est fausse ; par exemple la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante mais sa dérivée s'annule.*

Théorème 2.10 (Théorème des accroissements finis généralisé). *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Supposons que $g'(x) \neq 0$ sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

A partir de ce théorème, on montre les règles de l'Hôpital.

2.6.4 Règles de l'Hôpital

Les règles de de l' Hôpital sont très utiles pour calculer les limites qui se présentent sous les formes indéterminées de type : $\dfrac{0}{0}$ *et* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Règles de de l' Hôpital

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b[$, $a<b$, dérivables sur $]a,b[$. Alors nous avons les règles suivantes :

1. *Si $f(a)=g(a)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finie ou non), on a*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. *Si $\displaystyle\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finie ou non), on a*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. *Si $b=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finie ou non), on a*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4. *Si $b=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finie ou non), on a*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

***Remarque* 2.18.** *Si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'est pas une forme indéterminée en a, et si $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ et $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existent, ces limites sont en général distinctes. En effet, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{2x+1}=\frac{1}{3}$ mais $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x^2)'}{(2x+1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{2}=1$.*

***Exemple* 44.** *Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$. On a $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}}{1}=n$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=n$.*

***Exemple* 45.** *Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{x+1}-1)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}=0$.*

***Remarque* 2.19.** *On peut réappliquer la règle de l'Hôpital successivement autant de fois que les hypothèses sont vérifiées.*

***Exemple* 46.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-x^2}{x^3-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x}{3x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{12x^2-2}{6x-2}=\frac{-2}{-2}=1.$$

***Exemple* 47.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \quad ([\frac{\infty}{\infty}]) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \quad ([\frac{\infty}{\infty}]) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

***Exemple* 48.**

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) \quad ([\infty - \infty]) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \quad ([\frac{0}{0}]) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \quad ([\frac{0}{0}])$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

2.7 Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si la fonction dérivée $f' : x \longmapsto f'(x)$ est elle-même dérivable sur I, elle admet une fonction dérivée définie sur I qui s'appelle la **fonction dérivée seconde** *de f (ou la* **fonction dérivée d'ordre 2** *de f et qu'on note f'' ou $f^{(2)}$). On dit que f est dérivable deux fois sur I. D'une manière générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si f est dérivable n fois sur I, on définit la dérivée d'ordre n de f, notée $f^{(n)}$ par : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ et $f^{(0)} = f$.*

Fonction de classe $\mathcal{C}^p$

Définition 2.16. *Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable et si la fonction f' est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

Définition 2.17. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle ouvert et soit p un entier supérieur ou égal à 1. Si les dérivées $f', f", \cdots, f^{(p)}$ existent et si $f^{(p)}$ est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si toutes les dérivées $f^{(n)}$ existent et sont continues sur I.*

***Remarque* 2.20.** *Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors f est évidemment de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout p et toutes les dérivées $f^{(n)}$ sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

***Exemple* 49.** *Pour tout nombre réel a, la fonction $x \mapsto x^a$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, \infty[$.*

***Exemple* 50.** *La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

***Remarque* 2.21.** *Il n'est pas possible en général de trouver une formule explicite pour la dérivée $p-$ième. Voici des moyens d'affirmer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^p$:*

Proposition 2.12. : *Si f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, il en va de même de la somme $f+g$, du produit fg et (s'il existe) de la composée $f \circ g$.*

Théorème 2.11 (Formule de Leibnitz)**.** *Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables en x_0, alors :*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{C}_n^p f^{(n-p)}(x_0) g^{(p)}(x_0) \text{ avec } \mathcal{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

***Exemple* 51.** *Calculons la dérivée d'ordre n de la fonction : $h(x) = xe^x$.*
Posons : $f(x) = e^x$ et $g(x) = x$. On a : $f^{(p)}(x) = e^x$ pour tout p , $g'(x) = 1$ et $g^{(p)}(x) = 0$ pour $p > 1$. Donc :

$$h^{(n)}(x) = (fg)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)g(x) + \mathcal{C}_n^1 f^{(n-1)}(x) g^{(1)}(x) = (x+n)e^x.$$

2.8 Plan d'étude d'une fonction

Les étapes à suivre pour étudier une fonction f sont, en général

1. *Domaine de définition de f, noté D_f.*
2. *Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f.*
3. *Symétrie du graphe C_f de f.*
4. *Limites aux bornes du D_f.*
5. *Etude des branches infinies, détermination des asymptotes.*
6. *Tableau de variation.*
7. *Tracer le graphe.*

Soient f une fonction, D_f son domaine de définition et C_f son graphe dans un repère (O, x, y).

1. ***Parité.*** *Supposons que pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$.*

   (a) *On dit que f est paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. Dans ce cas C_f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, par suite il suffit d'étudier f sur $D_f \bigcap \mathbb{R}^+$.*

   (b) *On dit que f est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D$. Dans ce cas C_f admet l'origine comme centre de symétrie donc il suffit d'étudier f sur $D_f \bigcap \mathbb{R}^+$.*

   ***Exemple* 52.** *$f(x) = x^2$. Plus généralement si $f(2a - x) = f(x)$, $a \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie pour C_f.*

   ***Exemple* 53.** *$f(x) = x^3$. Plus généralement si $f(2a - x) = 2b - f(x)$, alors le point $M(a, b)$ est un centre de symértie pour C_f.*

2. **Périodicité** *On dit que f est périodique s'il existe un nombre réel non nul T tel que pour tout $x \in D_f$ on a : $x + T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$. Le plus petit réel qui vérifie la relation est dit la période de f. Si f est périodique de période T_0, il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur T_0.*

   ***Exemple* 54.** *Soit $f(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ est la partie entière de x. On a*

   $$f(x + 1) = x + 1 - E(x + 1) = x + 1 - (E(x) + 1) = f(x),$$

   donc f est périodique de période 1.

3. ***Asymptotes***

   (a) ***Asymptote parallèle à*** (Oy) *(verticale). On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote à C_f si*

   $$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \quad ou \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

   ***Exemple* 55.** *Soit $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$. Les droites d'équations $x = 1$ et $x = -2$ sont des asymptotes à C_f.*

   (b) ***Asymptote parallèle à*** (Ox) *(horizontale.) On dit que la droite d'équation $y = a$ est une asymptote à C_f si*

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a, \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a.$$

***Exemple* 56.** *Soit* $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$*. La droite d'équation* $y = 1$ *est une asymptote à* C_f*.*

(c) ***Asymptote oblique.*** *On dit que la droite d'équation* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ *est une asymptote à* C_f *si* f *admet en l'infini une limite infinie et si*

$$\lim_{|x|\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

***Remarque* 2.22.** *En pratique, si* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty$*, on calcule* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$*. Si cette limite existe et est non nulle on la pose égale à* a*. Pour déterminer* b *on calcule* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (f(x) - ax)$*.*

***Remarque* 2.23.** *Si* $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ *avec* $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ *alors la droite d'équation* $y = ax + b$ *est une asymptote à* C_f*.*

***Exemple* 57.** *Soit* $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{2}{x}$*, donc la droite d'équation* $y = 2x - 1$ *est une asymptote à* C_f*.*

4. ***Points d'inflexions*** *Soit* f *une fonction deux fois dérivable en* x_0*. Si* $f''(x_0) = 0$ *en changeant de signe on dit que le point* $M_0(x_0, f(x_0))$ *est un point d'inflexion. Dans ce cas la courbe* C_f *traverse la tangente en* M_0*.*

   ***Exemple* 58.** *Le point* $M(0, 0)$ *est un point d'inflexion de la fonction* $f(x) = x^3$*.*

5. ***Calcul et étude du signe de*** f'***.*** *On calcule* f'*, puis on détermine les points* x *tels que* $f'(x) = 0$ *qui constituent les extrêmums de* f*. Le signe de* f' *donne son sens de variation. Si* f *n'est pas dérivable en un point* a*, on regarde les demi tangentes à droite et à gauche du point* a*. Si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty.$$

Alors f *admet une demi tangente verticale au point* a*. Les quatres directions possibles des demi-tangentes sont résumées dans le tableau suivant :*

$\lim \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$	$-\infty$	$+\infty$
$x \to a^-$	*dirigée vers le haut*	*dirigée vers le bas*
$x \to a^+$	*dirigée vers le bas*	*dirigée vers le haut*

Chapitre 3

Étude des fonctions usuelles

3.1 Fonctions hyperboliques

Définition 3.1. *Les fonctions hyperboliques sont :*
• *Cosinus hyperbolique, notée ch, définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

• *Sinus hyperbolique, notée sh, définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

• *Tangente hyperbolique, notée th, définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

• *Cotangente hyperbolique, notée coth, définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :*

$$cothx = \frac{1}{thx} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

Proposition 3.1. *Les fonctions hyperboliques vérifient les propriétés suivantes :*
1. La fonction ch est définie, paire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ *et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$.
2. La fonction sh est définie, impaire, continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction th est définie, impaire, continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction coth est définie, impaire, continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ *et strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$.

On a les formules suivantes dont la vérification est laissée aux étudiants :

$$ch(a+b) = chachb + shashb, \qquad sh(a+b) = shachb + chashb.$$

$$ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a), \qquad sh(2a) = 2shacha, \qquad ch^2x - sh^2x = 1.$$

En outre, nous avons les propriétés suivantes :

$$(chx)' = shx, \qquad \lim_{x \to +\infty} shx = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} thx = -1,$$

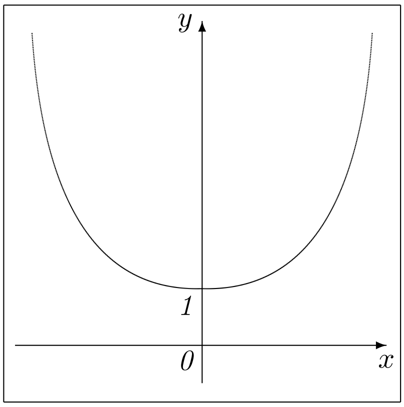
$$(shx)' = chx, \qquad \lim_{x \to -\infty} shx = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} cothx = 1,$$

$$(thx)' = 1 - th^2x, \qquad \lim_{x\to+\infty} chx = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} cothx = -1,$$

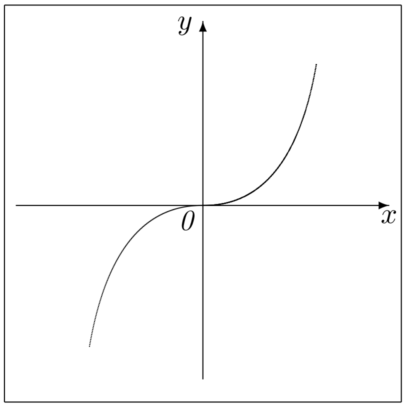
$$(cothx)' = 1 - coth^2x, \qquad \lim_{x\to-\infty} chx = +\infty, \qquad \lim_{x\to0^+} cothx = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} thx = 1, \qquad \lim_{x\to0^-} cothx = -\infty.$$

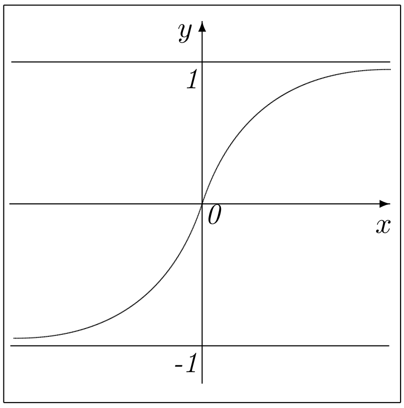
Les graphes des fonctions hyperboliques sont donnés par :



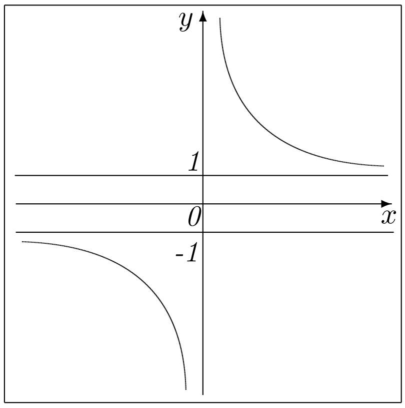
$y = chx$



$y = shx$



$y = thx$



$y = cothx$

3.2 Fonctions hyperboliques réciproques

3.2.1 *Argument cosinus hyperbolique*

La fonction ch est continue strictement croissante de $[0, +\infty[$ *vers* $[1, +\infty[$. *Sa fonction réciproque, notée argch, appelée « argument cosinus hyperbolique », est dérivable et strictement croissante sur* $[1, +\infty[$. *Pour* $x \geq 1$ *posons* $y = argchx$, *donc* $x = chy$ *et* $shy = \sqrt{x^2 - 1}$ *car* $shy \geq 0$ *si* $y \geq 0$. *De plus on a :* $e^y = chy + shy = x + \sqrt{x^2 - 1}$ *donc*

$$\boxed{argchx = Ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad si \quad x \geq 1.}$$

3.2.2 *Argument sinus hyperbolique*

La fonction shx est continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$. *Sa fonction réciproque nommée « argument sinus hyperbolique », notée argsh, est dérivable et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *Pour* $x \in \mathbb{R}$, *posons* $y = argshx$ *on a donc* $x = shy$ *et* $chy = \sqrt{x^2 + 1}$ *car* $chy > 0$. *De plus on a :* $e^y = shy + chy = x + \sqrt{x^2 + 1}$ *donc*

$$\boxed{argshx = Ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad si \quad x \in \mathbb{R}.}$$

3.2.3 *Argument tangente hyperbolique*

La fonction thx est continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$. Sa fonction réciproque nommée « argument tangente hyperbolique », notée argth, est dérivable et strictement croissante sur $]-1,1[$. Soit $x \in]-1,1[$, on a :

$$y = argthx \Longleftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Longleftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}$$

On en déduit que

$$\boxed{argthx = \tfrac{1}{2}Ln\frac{1+x}{1-x} \quad si \quad |x| < 1.}$$

3.2.4 *Argument cotangente hyperbolique*

La fonction $cothx$ est continue strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ (resp. sur $]-\infty,0[$) à valeurs dans $]1,+\infty[$ (resp. $]-\infty,-1[$). Sa fonction réciproque nommée « argument cotangente hyperbolique », notée argcoth, est dérivable et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ (resp. sur $]-\infty,-1[$). Soit $x \in]1,+\infty[$, on a :

$$y = argcothx \Longleftrightarrow x = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1} \Longleftrightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{x-1} \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}Ln\frac{x+1}{x-1}$$

On en déduit que

$$\boxed{argcothx = \frac{1}{2}Ln\frac{x+1}{x-1} \quad si \quad |x| > 1.}$$

Proposition 3.2. *Les fonctions réciproques hyperboliques vérifient les propriétés suivantes*

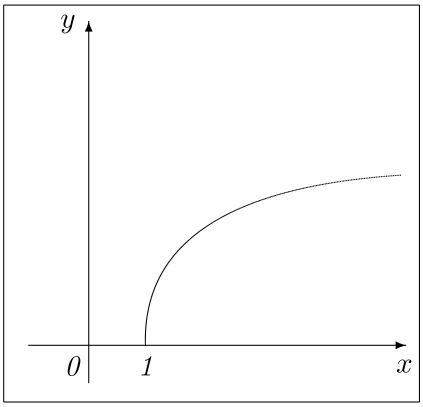
$$(argchx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} argchx = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} argcothx = 0,$$

$$(argshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} argshx = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} argcothx = 0,$$

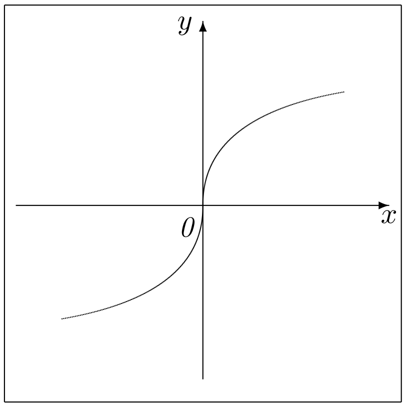
$$(argthx)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} argshx = -\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} argcothx = +\infty,$$

$$(argcothx)' = \frac{1}{1-x^2}, \qquad \lim_{x\to1^-} argthx = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} argcothx = -\infty.$$

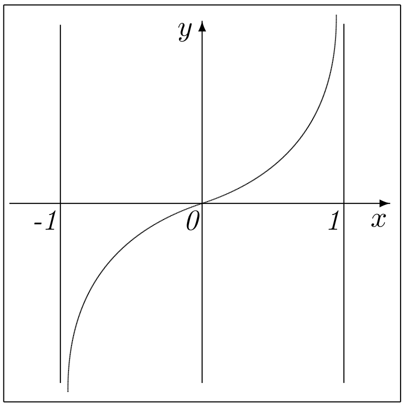
Nous avons alors les graphes des fonctions hyperboliques réciproques :



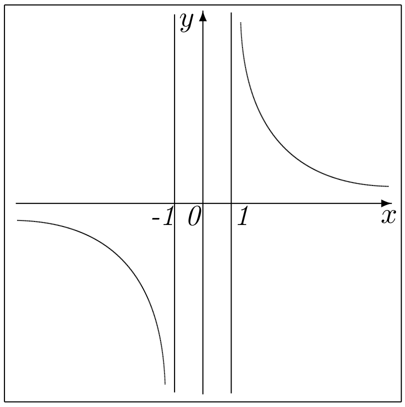
$y = argchx$



$y = argshx$



$y = argthx$



$y = argcothx$

3.3 Fonctions circulaires

A tout nombre réel $\theta \in [0, 2\pi[$ *on peut associer un unique point* M *du cercle* $\mathcal{U}$ *centré à l'origine et de rayon 1 tel que l'angle* $(\widehat{Ox, OM})$ *soit de mesure* θ. *Soient* H *et* K *les projections orthogonales de* M *respectivement sur les axes* (Ox) *et* (Oy), *voir* $Fig.4$.

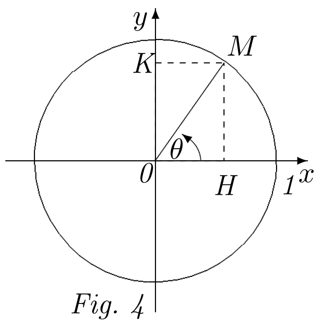


Fig. 4

On appelle $\cos\theta$ *l'abscisse* $x = \overline{OH}$ *de* M ; $\cos\theta = x = \overline{OH}$.
On appelle $\sin\theta$ *l'ordonnée* $y = \overline{OK}$ *de* M ; $\sin\theta = y = \overline{OK}$.
On appelle tangente de θ *le nombre noté,* $tg\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ *lorsqu'il existe.*
On appelle cotangente de θ *le nombre noté,* $cotg\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ *lorsqu'il existe.*

***Remarque* 3.1.** *Si* θ *est un nombre réel quelconque, alors on peut écrire* $\theta = \theta' + 2k\pi$ *avec* $0 \leq \theta' < 2\pi$ *et* $k \in Z$ *et on a :* $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ *et* $\sin(\theta) = \sin(\theta')$.

Définition 3.2. *Les fonctions* sin, cos, *tg et cotg sont appelées fonctions circulaires ou fonctions trigonométriques.*

***Remarque* 3.2.**
1. Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction tangente est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in\ Z$.
3. La fonction cotangente est définie pour $x \neq k\pi,\ k \in\ Z$.

Proposition 3.3. *Les fonctions circulaires vérifient les propriétés suivantes : Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :* $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \quad \sin(-x) = -\sin(x) \quad \sin(\pi - x) = \sin x$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \quad tg(-x) = -tgx \quad cotg(-x) = -cotgx$

Valeurs remarquables

Nous présentons dans le tableau suivant, les valeurs des fonctions circulaires sinus et cosinus pour $x = 0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$.

x	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	*0*
$\sin x$	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*

Avant de passer à l'étude des fonctions circulaires, rappelons la propriété suivante concernant la monotonie de ses fonctions.

Proposition 3.4.

1. $x \mapsto \sin x$ *est strictement croissante dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
2. $x \mapsto \cos x;$ *est strictement décroissante dans* $[0, \pi]$ *;*
3. $x \mapsto \tan x$ *est strictement croissante dans* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
4. $x \mapsto \cot x;$ *est strictement décroissante dans* $]0, \pi[$.

Preuve : *Pour 1. on a*

$$-\frac{\pi}{2} \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{x + x'}{2} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < \frac{x' - x}{2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Appliquons la formule de transformation

$$\sin x - \sin x' = 2 \sin \frac{x' - x}{2} \cos \frac{x' + x}{2};$$

et remarquons que

$$\frac{x + x'}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Longrightarrow \cos \frac{x + x'}{2} > 0,$$
$$\frac{x' - x}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}] \Longrightarrow \sin \frac{x' - x}{2} > 0.$$

On en déduit alors $\sin x' - \sin x > 0$*, d'où*

$$-\frac{\pi}{2} \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin x < \sin x'.$$

La fonction $x \mapsto \sin x$ *est strictement croissante dans* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*. On laisse aux étudiants le soin de démontrer les trois autres propriétés énoncées.*

3.4 Etude des fonctions circulaires

3.4.1 *Fonction cosinus*

La fonction $x \longmapsto \cos x$ *est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$*. De plus* $\cos$ *est paire, périodique de période* 2π *et vérifie* $\cos(\pi - x) = -\cos x$*, donc le point* $M(\frac{\pi}{2}, 0)$ *est un centre de symétrie. Il suffit alors d'étudier* $\cos$ *sur l'intervalle* $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.
On a $(\cos x)' = -\sin x$ *et* $\sin x \geq 0$ *sur* I*. On obtient alors :*

x	0 → $\frac{\pi}{2}$
$-\sin x$	$-$
$\cos x$	1 ↘ 0

Représentation graphique de la fonction $\cos$: $(Fig.5)$

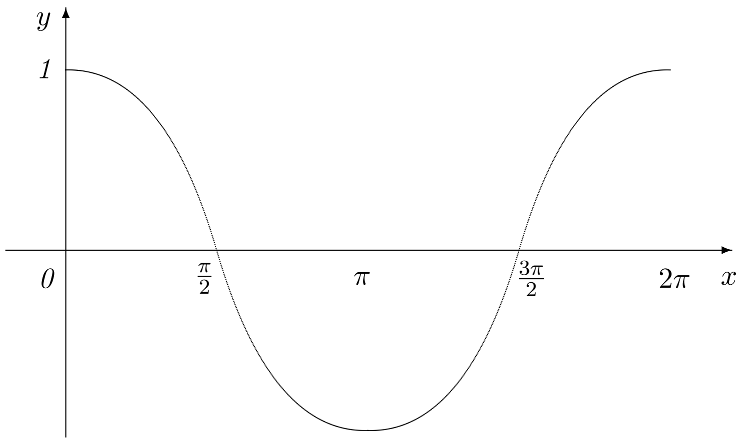


Fig. 5. $y = cosx$

3.4.2 *Fonction sinus*

La fonction $x \longmapsto \sin x$ *est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$*. De plus* $\sin$ *est impaire, périodique de période* 2π *et vérifie* $\sin(\pi - x) = \sin x$*, donc la droite d'équation* $x = \frac{\pi}{2}$ *est un axe de symétrie. Il suffit alors d'étudier* $\sin$ *sur l'intervalle* $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *on a* $(\sin x)' = \cos x$*. Nous avons alors le tableau de variation.*

x	0 → $\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	$+$
$\sin x$	0 ↗ 1

Représentation graphique de la fonction sin, $(Fig.6)$ ***:***

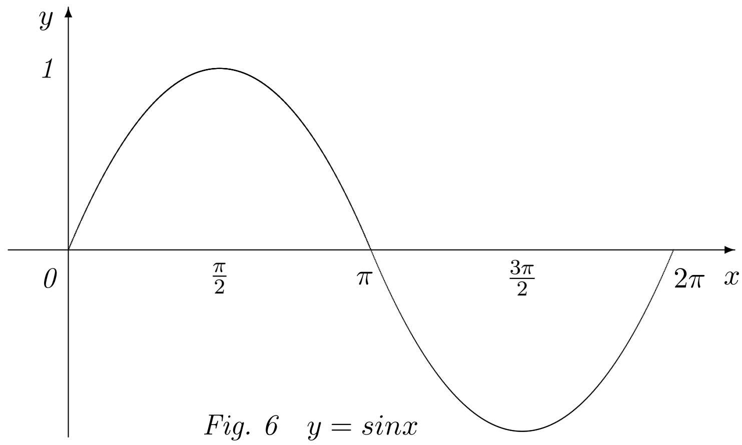


Fig. 6 $\quad y = sinx$

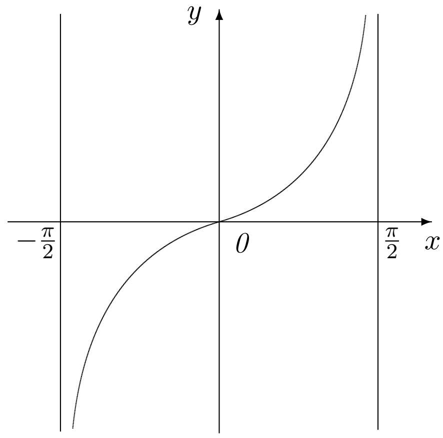
3.4.3 *Fonction tangente*

La fonction $x \longmapsto \tan x$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$. *De plus tg est impaire, périodique de période* π. *Il suffit alors d'étudier* tan *sur l'intervalle* $[0, \frac{\pi}{2}[$. *Pour* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ *on a* $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, *d'où*

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$+$	||
$\tan x$	$0 \nearrow +\infty$	||

Représentation graphique de la fonction tan, ***(Fig. 7) :***



$Fig.7. \quad y = \tan x$

***Remarque* 3.3.**

1. Les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}$ *et* $x = -\frac{\pi}{2}$ *sont des asymptotes à la courbe représentative de tg.*

2. On a : $\tan''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$, *la dérivée seconde s'annule en 0 en changeant de signe donc l'origine est un point d'inflexion.*

3.4.4 *Fonction cotangente*

La fonction $x \longmapsto cotgx$ *est dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$*. De plus cotg est impaire, périodique de période* π*. Il suffit alors d'étudier cotg sur l'intervalle* $]0, \frac{\pi}{2}]$*. On a*

$$cotg' x = -(1 + cotg^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\Vert$ $-$	
$cotgx$	$\Vert$ $+\infty$ $\searrow$	0

Représentation graphique de la fonction cotg, (Fig. 8) :

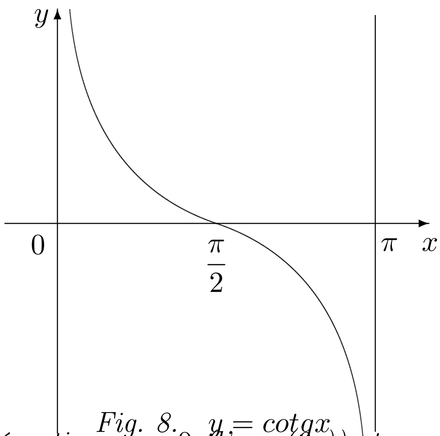


Fig. 8. $y = cotgx$

Remarque 3.4. *Les droites d'équations* $x = 0$ *(l'axe* $(0y)$*) et* $x = \pi$ *sont des asymptotes.*

3.5 Fonctions circulaires réciproques

3.5.1 *Fonction Arc cosinus*

La fonction cosinus est continue strictement décroissante sur $[0, \pi]$ *donc bijective. Sa fonction réciproque appelée Arc cosinus, notée* arccos*, définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \arccos : [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x, \end{array}$$

$$\boxed{y = \arccos x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}}$$

On a donc par définition de la bijection réciproque :

$$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1, 1];$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi].$$

La fonction arccos *est continue, strictement décroissante, dérivable sur* $]-1, 1[$ *de dérivée*

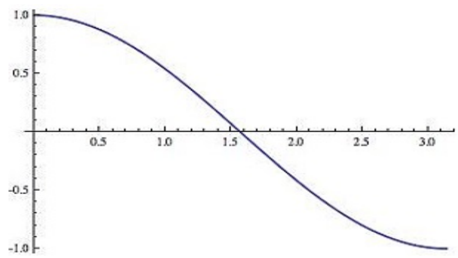


Figure 5.1: $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, \pi]$

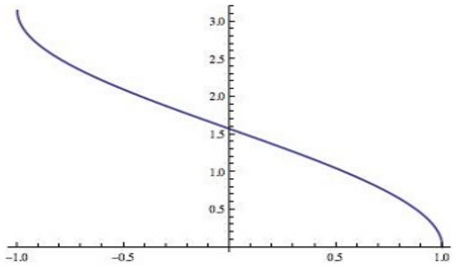


Figure 5.2: $f(x) = \arccos(x)$

$$\boxed{(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

La fonction arccos *n'est ni paire ni impaire et vérifie*

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x}$$

3.5.2 *Fonction Arc sinus*

La fonction sin *est continue strictement croissante sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *donc bijective. Sa fonction réciproque appelée Arc sinus, notée* arcsin, *définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \arcsin\ : [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \arcsin x, \end{array}$$

$$\boxed{y = \arcsin x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

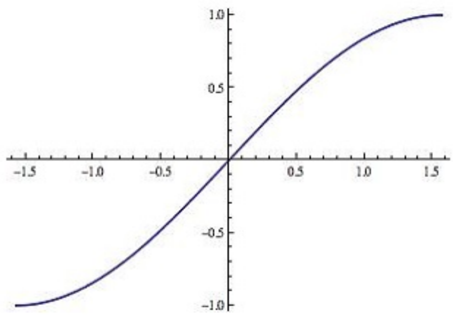


Figure 5.3: $f(x) = \sin(x)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$

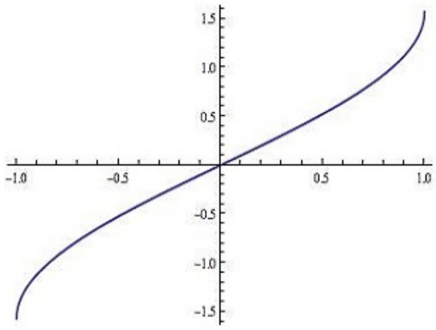


Figure 5.4: $f(x) = \arcsin(x)$

Par définition de la réciproque, on a :

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1, 1];$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

La fonction arcsin *est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur* $]-1, 1[$ *de dérivée*

$$\boxed{(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

3.5.3 *Fonction Arc tangente.*

La fonction tg est continue strictement croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ *donc bijective. Sa fonction réciproque appelée Arc tangente, notée arctg, définie par :*

$$\begin{array}{lll} arctg & :]-\infty,+\infty[& \longrightarrow]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto arctgx, \end{array}$$

$$\boxed{y = arctgx \Longleftrightarrow \begin{cases} x = tgy \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

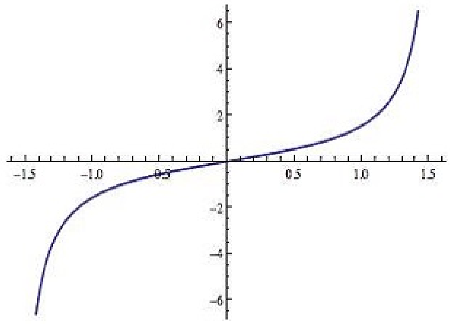


Figure 5.5: $f(x) = \tan(x)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$

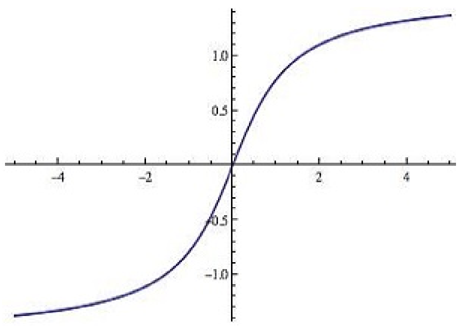


Figure 5.6: $f(x) = \arctan(x)$

Par définition de la réciproque, on a :

$$\tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

La fonction arctg est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur $\mathbb{R}$ *de dérivée*

$$\boxed{(arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

3.5.4 *Fonction Arc cotangente*

La fonction cotangente est continue strictement croissante sur $]0,\pi[$ *donc bijective.*
Sa fonction réciproque appelée Arc cotangente, notée arccotg, définie par :

$$\begin{array}{lll} arccotg & :]-\infty,+\infty[& \longrightarrow &]0,\pi[\\ & x & \longmapsto & arccotgx, \end{array}$$

$$\boxed{y = arccotgx \Longleftrightarrow \begin{cases} x = cotgy \\ 0 < y < \pi \end{cases}, \qquad (arccotg)'(x) = -\frac{1}{1+x^2}}$$

Remarque 3.5. *Les représentation graphiques des fonctions réciproques se déduisent de celles des fonctions circulaires par symétrie par rapport à la première bissectrice.*

Chapitre 4

Formule de Taylor et développements limités

4.1 Fonctions équivalentes

Définition 4.1. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0,(x_0 fini ou non). On dit que la fonctions f est un infiniment petit au voisinage de x_0 si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

***Exemple* 59.** *On dispose d'une gamme d'infiniment petit particulièrement simple quand x tend vers* 0*, à savoir* $x, x^2, ...x^n, ...$. *La fonction x^n tend vers* 0 *d'autant plus vite que n est plus grand.*

Définition 4.2. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0, (x_0 fini ou non). On dit que la fonctions f est un infiniment grand au voisinage de x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) =^{+}_{-} \infty.$$

***Exemple* 60.** *La fonction* $\frac{1}{x}$ *est un infiniment grand au voisinage de* 0.

Définition 4.3. *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0, (x_0 fini ou non). On dit que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, s'il existe une fonction h définie sur un voisinage de x_0 telle que :*

$$f(x) = g(x)h(x) \quad et \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = 1, \quad on\ écrit \quad f \underset{x_0}{\sim} g.$$

***Remarque* 4.1.** *Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, la relation $f \underset{x_0}{\sim} g$ est équivalente à la propriété :* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *tend vers 1 quand x tend vers x_0.*

***Exemple* 61.** *Soit P le polynôme de degré n donné par :*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

avec $a_n \neq 0$. *On a :* $P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$. *En effet :*

$$P(x) = a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n}) = a_n x^n h(x) \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 1.$$

Définition 4.4. *Si* $f(x) \underset{0}{\sim} ax^n$*, on dit que ax^n est la partie principale de $f(x)$, et que $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre n.*

***Exemple* 62.** *Nous avons les équivalences suivantes :*

$$\sin x \underset{0}{\sim} x, \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \qquad 1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

***Exemple* 63.** *Quand x tend vers 0, $\sin x$ est un infiniment petit de partie principale x, d'ordre 1.*

***Exemple* 64.** *Quand x tend vers 0, la fonction $1-\cos x$ est un infiniment petit de partie principale $\frac{x^2}{2}$, d'ordre 2.*

Proposition 4.1. *Si f tend vers une limite l en x_0, (l finie ou non) et si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors g tend vers l en x_0.*

Proposition 4.2. *Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors $f_1 g_1 \underset{x_0}{\sim} f_2 g_2$ et $\dfrac{f_1}{g_1} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{f_2}{g_2}$.*

***Exemple* 65.** *Calculer la limite, quand x tend vers 0, de :*

$$f(x) = \frac{(1-\cos x)\sin x}{x^2 \ln(1+x)}.$$

On sait que : $1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$. D'après la proposition précédente, $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

***Exemple* 66.** *Trouver la limite, quand x tend vers $+\infty$, de :*

$$f(x) = \frac{e^{2x}+x^2}{e^x+x^3}.$$

On a : $e^{2x}+x^2 \underset{+\infty}{\sim} e^{2x}$ car $\dfrac{e^{2x}+x^2}{e^{2x}} = 1+\dfrac{x^2}{e^{2x}}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, nous avons aussi $e^x+x^3 \underset{+\infty}{\sim} e^x$, d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^x$ par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

***Remarque* 4.2. Erreur à éviter :** *Si $f \underset{x_0}{\sim} f_1$ et $g \underset{x_0}{\sim} g_1$ on n'a pas en général : $f+g \underset{x_0}{\sim} f_1+g_1$, ni $f-g \underset{x_0}{\sim} f_1-g_1$.*

***Exemple* 67.**

$$\begin{cases} x+x^2 & \underset{0}{\sim} & x+x^3, \\ x & \underset{0}{\sim} & x, \end{cases}$$

mais $(x+x^2)-(x)$ n'est pas équivalente à $(x+x^3)-(x)$ au voisinage de 0.

***Exemple* 68.**

$$\begin{cases} \cos x & \underset{0}{\sim} & 1, \\ 1 & \underset{0}{\sim} & 1, \end{cases}$$

mais $(1-\cos(x))$ n'est pas équivalente à $1-1=0$ au voisinage de 0.

***Exemple* 69.** *Si $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = -x^2+x+1$ on a : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} f_1(x) = x^2$ et $g(x) \underset{+\infty}{\sim} g_1(x) = -x^2$. Mais $f(x)+g(x) = x+2$ et $f_1(x)+g_1(x) = 0$.*
On ne peut pas non plus composer des équivalents, ainsi on a par exemple

$$(x+x^2) \underset{+\infty}{\sim} x^2,$$

mais

$$\frac{e^{x+x^2}}{e^{x^2}} = e^x \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.$$

4.2 Formules de Taylor

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, (dérivable autant de fois que nécessaire) sur l'intervalle I, a un point de I et m un entier. La formule de Taylor à l'ordre m permet d'approcher $f(x)$, pour x voisin de a, par une expression ne dépendant que de $f(a), f'(a), ..., f^m(a)$ et de x (et donc pas de f(x).) Par exemple pour une fonction f dérivable la formule des Accroissements Finis permet d'approcher f par un polynôme de degré 1.

Théorème 4.1 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur $[a,b]$. On suppose que $f^{(n)}$ existe sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

Cette formule est appelée formule de Taylor d'ordre $n-1$. Le dernier terme est appelé reste ou reste de Lagrange.

***Remarque* 4.3.** *Le théorème reste vrai même si $b < a$.*

***Remarque* 4.4.** *Le nombre c est souvent désigné par $a + \theta(b-a)$ avec $0 < \theta < 1$.*
Comme conséquence du théorème 4.1 ci-dessus on a la formule de Taylor Mac-Laurin :

Théorème 4.2 (Formule de Taylor-Mac-Laurin)**.** *Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur $[0,x]$. On suppose que $f^{(n)}$ existe sur $]0,x[$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1.$$

Preuve : *On applique le théorème 4.1 avec $a = 0$ et $b = x$.*

***Remarque* 4.5.** *Si on prend $b = a + h$ ($h < 0$ ou $h > 0$), on aura :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a + \theta h).$$

***Exemple* 70.** *Soit $f(x) = e^x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

La formule de Taylor est applicable aux polynômes de degré n. Ils sont infiniment dérivables et la dérivée d'ordre $n+1$ est identiquement nulle. On peut remarquer que si :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \Rightarrow p(0) = a_0,$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 ... + na_nx^{n-1} \Rightarrow p'(0) = a_1,$$

$$p''(x) = 2a_2 + 3 \times 2a_3x ... + n(n-1)a_nx^{n-2} \Rightarrow p''(0) = 2!a_2,$$

$$p'''(x) = 3 \times 2 \times 1a_3 + ... + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \Rightarrow p'''(0) = 3!a_3.$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

On a donc bien :

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Théorème 4.3 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit f une fonction de classe C^n sur un voisinage I de x_0. Alors pour tout $x \in I$ on a :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\varepsilon(x),$$

où ε une fonction définie sur I telle que $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$.

***Remarque* 4.6.** *Puisque $\varepsilon(x)$ tend vers 0 en x_0, $f(x)$ est équivalente au voisinage de x_0 au polynôme en x suivant*

$$f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

***Remarque* 4.7.** *Si on pose $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Young on obtient la formule de Mac-Laurin-Young.*

***Exemple* 71.** $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$.

***Remarque* 4.8.** *La différence essentielle entre les formules est que la formule de Taylor-Young est d'utilisation locale (c'est à dire pour h petit) alors que la formule de Taylor-Lagrange est utilisable sur le segment $[a, a+h]$ même si h n'est pas petit.*

***Exercice* 2.** *Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :*

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} \leq (x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}$$

Corrigé

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application $x \to x^{\frac{3}{2}}$. Il s'agit d'encadrer la différence $f(x+1) - f(x)$ et pour cela nous écrivons une formule de Taylor au point x. Pour tout nombre $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ et $f''(x) = \dfrac{3}{4\sqrt{x}}$. La dérivée seconde f'' est continue sur $]0, +\infty[$ donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Si a et b appartiennent à l'intervalle $]0, +\infty[$, la formule de Taylor à l'ordre 2 au point a s'écrit :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$$

où c est un nombre entre a et b. Soit x un nombre strictement positif. Appliquons cette formule en prenant $a = x$ et $b = x+1$, nombres qui sont bien tous deux strictement positifs :
il existe un nombre c compris entre x et $x+1$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(x) + \frac{(x+1-x)^2}{2}f''(c) = f'(x) + \frac{f''(c)}{2}.$$

Comme la fonction f'' est décroissante, on a $f''(x+1) \leq f''(c) \leq f''(x)$ donc

$$f'(x) + \frac{f''(x+1)}{2} \leq f(x+1) - f(x) \leq f'(x) + \frac{f''(x)}{2}.$$

Ce sont les inégalités qu'il faut démontrer.

4.3 Développements limités

4.3.1 Développements limités au voisinage de 0

Définition 4.5. *Soient f une fonction définie sur un voisinage de zéro, sauf peut être en 0, et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre n au voisinage de zéro, s'il existe polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ de degré $\leq n$, à coefficients réels, tel que :*

$$f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x),$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0. Le polynôme $P(x)$ est appelé partie principale du développement limité de f et $x^n\varepsilon(x)$ le reste du développement limité .

***Remarque* 4.9.** $f(x) \underset{0}{\sim} P(x).$

***Exemple* 72.** *Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Pour $x \neq 1$ on a :*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - x^n\frac{x}{1-x}.$$

Par suite f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\epsilon(x)}$$

Théorème 4.4. *Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement limité est unique.*

Théorème 4.5. *Si f est de classe C^n sur un voisinage de 0, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 donné par :*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x).$$

Preuve : *Il suffit d'appliquer la formule de Mac-Laurin-Young.*

***Remarque* 4.10.** *La formule de Mac-Laurin-Young exige l'existence de $f^{(n)}(0)$, alors que le développement limité peut exister sans que f soit dérivable en 0. En effet; considérons la fonction :*

$$f(x) = 2 + x + x^2 + x^3\ln|x|.$$

On voit bien que f n'est pas définie au point 0, donc elle n'est pas dérivable en ce point. Par contre :

$$f(x) = 2 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x) = x\ln|x|$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Donc f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de zéro.

Proposition 4.3. *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Si f est paire, son développement limité ne contient que des monômes de degrés pairs. Si f est impaire, son développement limité ne contient que des monômes de degrés impairs.*

4.3.1.1 Développements limités usuels

En utilisant la formule de Mac-Laurin-Young , on obtient les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0, *avec* $o(x^n) = x^n\epsilon(x)$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

4.3.1.2 Opérations sur les développements limités

Soient f et g ayant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 ;

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) = P(x) + x^n\varepsilon_1(x), \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

- ***Développement limité d'une somme***

La somme $f+g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 donné par :

$$f(x)+g(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n + x^n(\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)) = P(x)+Q(x)+x^n\epsilon(x).$$

- ***Développement limité d'un produit***

On a :

$$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + x^n[P(x)\varepsilon_2(x) + Q(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)].$$

Donc le produit fg possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 obtenu en supprimant du polynôme $P(x)Q(x)$ les monômes de degré $> n$.

***Exemple* 73.** *Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de*

$$h(x) = \frac{\ln(x+1)}{1-x}.$$

Posons : $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \quad et \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\epsilon(x).$$

Donc :

$$\frac{\ln(x+1)}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + x^3\epsilon(x).$$

***Exemple* 74.** *Déterminons le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de*

$$f(x) = [\ln(x+1)]^2.$$

On a : $\ln(1+x) = x\left[1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + x^3\epsilon(x))\right]$. Donc

$$[\ln(x+1)]^2 = x^2\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3\epsilon(x))\right]^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + x^4\epsilon(x).$$

- ***Développement limité d'un quotient***

Proposition 4.4. *Soient f et g des fonctions ayant pour développement limité à l'ordre n au point 0*

$$f(x) = A(x) + x^n\varepsilon(x) \;\; et \;\; g(x) = B(x) + x^n\varepsilon(x).$$

Si le nombre $g(0) = B(0)$ est non nul, le développement limité de $\dfrac{f}{g}$ à l'ordre n au point 0 est

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + x^n\varepsilon(x)$$

où Q est le quotient à l'ordre n de la division de A par B selon les puissances croissantes.

***Exemple* 75.** *Déterminons le développement limité à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0 *de*

$$h(x) = \frac{ln(x+1)}{1-x}.$$

Utilisons cette fois-ci la division suivant les puissances croissantes.

$$\begin{array}{c|c}
x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} & 1-x \\
-x + x^2 & \overline{x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6}} \\
\hline
\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} & \\
-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} & \\
\hline
\frac{5x^3}{6} &
\end{array}$$

On retrouve alors le résultat précédent.

***Exemple* 76.** *Déterminons le développement limité à l'ordre* 5 *au voisinage de* 0 *de la fonction :*

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Au voisinage de 0*, les développements limités de* $\sin(x)$ *et de* $\cos(x)$ *à l'ordre* 5 *s'écrivent :*

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\epsilon(x) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)$$

La division suivant les puissances croissantes nous donne :

$$\begin{array}{c|c}
x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\
-x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 & \overline{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5} \\
\hline
\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 & \\
-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5 & \\
\hline
\frac{2}{15}x^5 &
\end{array}$$

D'où
$$\boxed{\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6\epsilon(x).}$$

- ***Développement limité d'une composée***

Si $g(0) = 0$ *alors, la fonction composée,* $f \circ g$ *admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de* 0 *obtenu en ne conservant que les monômes de degré* $\leq n$ *dans le polynôme* $P \circ Q$*. En effet :*

$$\begin{array}{rcl}
(f \circ g)(x) & = & a_0 + a_1[g(x)] + \cdots + a_n[g(x)]^n + [g(x)]^n\varepsilon_1([g(x)]) \\
g(x) & = & x(b_1 + b_2x + \cdots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon_2(x)).
\end{array}$$

***Exemple* 77.** *Calculer le développement limité , à l'ordre* 3 *au voisinage de* 0*, de*

$$h(x) = \sqrt{1 + ln(1 + x)}.$$

On a : $h(x) = (f \circ g)(x)$ *avec* $f(x) = \sqrt{1+x}$*,* $g(x) = ln(1 + x)$ *et* $g(0) = 0$*. On sait que*

$$\begin{aligned} ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\epsilon(x) \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{1 + ln(1+x)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}[g(x)] - \frac{1}{8}[g(x)]^2 + \frac{1}{16}[g(x)]^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] - \frac{1}{8}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]^2 + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

***Remarque* 4.11.** *Si* $g(0) = b_0 \neq 0$ *on pose* $g_1(x) = b_0 - g(x)$ *et* $f_1(x) = f(b_0 - x)$ *on obtient* $f_1 \circ g_1(x) = f \circ g(x)$ *et* $g_1(0) = 0$ *, il suffit alors de calculer le développement limité de* $f_1 \circ g_1$*.*

- ***Intégration d'un développement limité***

Théorème 4.6. *Si* f *est dérivable sur un voisinage de zéro, et si* f' *admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre* n *de partie régulière* $p(x)$*. Alors la fonction* f *admet un développement limité d'ordre* $n + 1$ *au voisinage de zéro de partie régulière :*

$$f(0) + \int_0^x p(t)dt.$$

***Exemple* 78.** *On a :*

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x).$$

Ainsi, le développement limité au voisinage de 0 *d'ordre* $2n + 1$ *de* $arctgx$ *est :*

$$\boxed{arctgx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x).}$$

Comme conséquence de ce théorème, on déduit le corollaire suivant :

- ***Dérivation d'un développement limité***

Corollaire 4.1. *Si* f *est dérivable en* 0 *et* f' *admet un développement limité d'ordre* $n - 1$ *au voisinage de* 0*, alors :*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_2x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x).$$

***Remarques* 4.1.**

1. *Toujours développer toutes les fonctions au même ordre.*
2. *Lorsque vous calculez un développement limité, disposez clairement les calculs de manière à ne pas oublier de termes lorsque vous ferez des sommes, des composées ou des divisions selon les puissances croissantes. Chacune de ces opérations est simple, mais il peut y en avoir plusieurs à effectuer.*
3. *N'écrivez pas les monômes de degré trop grand dont on sait d'après les théorèmes qu'ils n'interviendront pas dans le résultat final.*

4.3.2 Développements limités au voisinage de x_0

La notion du développement limité au voisinage de 0 *s'étend au voisinage d'un point* $x_0 \in \mathbb{R}$ *quelconque en posant* $u = x - x_0$.

Définition 4.6. *Soient* f *une fonction définie sur un voisinage d'un point* $x_0 \in \mathbb{R}$ *, sauf peut-être en* x_0 *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *On dit que* f *admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de* x_0 *si :*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x),$$

où $a_i,\ 0 \le i \le n$, *sont des nombres réels et* $\varepsilon(x)$ *une fonction tendant vers* 0 *quand* x *tend vers* x_0.

***Remarque* 4.12.** *Si on effectue le changement de variable* $u = x - x_0$, *dans la définition* 4.6, *on obtient*

$$f(x) = f(u + x_0) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_nu^n + o(u^n),$$

donc le développement limité de f *au voisinage de* x_0 *se ramène au développement limité de* $g(u) = f(u + x_0)$ *au voisinage de* 0.

***Exemple* 79.** *Calculer le développement limité au voisinage de* 1 *d'ordre* n *de* $f(x) = e^x$. *On pose* $u = x - 1$ *et* $g(u) = f(u + 1)$ *on obtient*

$$g(u) = e^{u+1} = ee^u = e\left[1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \cdots + \frac{1}{n!}u^n + u^n\epsilon(u)\right],$$

donc le développement limité de e^x *au voisinage de* 1 *est :*

$$e^x = e\left[1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x-1)^n + (x-1)^n\epsilon(x-1)\right].$$

***Exemple* 80.** *Calculer le développement limité au voisinage de* 2 *d'ordre* 3 *de* $f(x) = \sqrt{x}$. *On pose* $u = x - 2$ *et* $g(u) = f(u + 2)$ *on obtient :*

$$g(u) = \sqrt{u+2} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{u}{2} + 1} = \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{4}u - \frac{1}{32}u^2 + \frac{1}{128}u^3\varepsilon(u)\right],$$

donc le développement limité de $\sqrt{x}$ *au voisinage de* 2 *à l'ordre* 3 *est :*

$$\sqrt{x} = \sqrt{2}\left[1 + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{32}(x-2)^2 + \frac{1}{128}(x-2)^3 + (x-2)^3\epsilon(x-2)\right].$$

4.3.3 Développements limités au voisinage de l'infini

Si f est définie sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ (ou bien de la forme $]-\infty,a]$), on se ramène au voisinage de 0 en posant $u=\frac{1}{x}$. Ainsi, on dira que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de l'infini si la fonction $g(u)=f(\frac{1}{u})$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Dans ce cas le développement limité d'ordre n au voisinage de ∞ est donné par

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x}),$$

$\varepsilon(\frac{1}{x})$ tendant vers 0 quand x tend vers l'infinie.

***Exemple* 81.** *Calculer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de ∞ de*

$$f(x)=\frac{x}{x-1}.$$

On pose $u=\frac{1}{x}$ et $g(u)=f(\frac{1}{u})$, on se ramène alors au calcul du développement limité de $g(u)$ au voisinage de 0. On a

$$g(u)=\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+u^3\varepsilon(u).$$

Donc le développement limité de $f(x)$ au voisinage de ∞ est

$$f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^3}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

4.4 Applications des développements limités

4.4.1 Calcul des limites

Lorsqu'on veut calculer une limite et que les théorèmes généraux ne s'appliquent pas parce qu'on a affaire à une forme indéterminée, un développement limité permet généralement de trouver la réponse. Présentons cette technique essentielle sous forme d'exemples et d'exercices.

***Exemple* 82.** *Calculons la limite, quand x tend vers 0, de $f(x)=\frac{\sin x-x}{x^2(e^x-1)}$. On a $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+x^3\epsilon(x)$, $e^x=1+x+x\epsilon(x)$. Donc $f(x)\underset{0}{\sim}\frac{-x^3}{6x^3}$, par suite $\lim_{x\to 0}f(x)=-\frac{1}{6}$.*

***Exemple* 83.** *Calculons la limite, quand x tend vers 0, de $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$. On a*

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{x^2-\sin^2 x}{(x\sin x)^2} &\underset{0}{\sim} \frac{x^2-[x-\frac{x^3}{6}]^2}{(x\sin x)^2}, \\ &\underset{0}{\sim} \frac{x^2-[x^2-\frac{x^4}{3}]}{(x\sin x)^2}, \\ &\underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4}=\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

donc $\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{3}$.

***Exemple* 84.** *Calculons la limite, quand x tend vers 0, de* $\dfrac{arctg(x)-x}{\sin(x)-x\cos(x)}$. *On a* $arctg(x)-x = \dfrac{-x^3}{3}+x^3\epsilon_1(x)$, *et* $sin(x)-xcos(x) = (x-\dfrac{x^3}{6})-x(1-\dfrac{x^2}{2})+x^3\epsilon_2(x)$. *On en déduit*

$$\frac{arctg(x)-x}{\sin(x)-x\cos(x)} \to -1 \ \ lorsque \ \ x\to 0.$$

Rappelons que pour étudier une forme indéterminée $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *pour* $x\to a$, *on se ramènera au cas* $a=0$ *en posant* $x=a+u$, *et en étudiant pour* $u\to 0$ *la quantité* $\dfrac{f(a+u)}{g(a+u)}$. *Quand on cherche* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *on se ramènera encore à une étude au voisinage de 0, en posant* $x=\dfrac{1}{u}$, *et en étudiant* $\dfrac{f(\frac{1}{u})}{g(\frac{1}{u})}$ *pour* $u\to 0$, *et* $u>0$.

***Exemple* 85.** *Calculons, si elle existe, la limite quand x tend vers $+\infty$ de*

$$x\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}.$$

En utilisant la formule $(1+u)^\alpha = 1+\alpha u+u\epsilon(u)$ *avec* $\lim\limits_{u\to 0}\epsilon(u)=0$, *on a :*

$$(1+x^2)^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{6}}-1\right) = x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{x^2}\epsilon_1(x)-1\right) = x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{x^2}\epsilon_1(x)\right).$$

De même :

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right) = x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\epsilon_2(x)-1\right) = x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\epsilon_2(x)\right)$$

où $\lim\limits_{x\to+\infty}\epsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\epsilon_2(x) = 0$. *On en déduit :*

$$x\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{6}}-x^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}} = x\frac{x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{x^2}\epsilon_1(x)\right)}{x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}\epsilon_2(x)\right)} = \frac{\frac{1}{6}+\epsilon_1(x)}{\frac{1}{3}+\epsilon_2(x)}.$$

Ce qui montre que la limite existe et vaut $\frac{1}{2}$.

***Exemple* 86.** *Calculons, si elle existe, la limite quand x tend vers 0 de*

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

C'est une forme indéterminée de la forme 1^∞. *On écrit*

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))}.$$

On est ramené à l'étude de $\dfrac{1}{x^2}ln(cos(x))$ *pour* $x\to 0$. *C'est une forme indéterminée* $\frac{0}{0}$. *Effectuons un développement limité à l'ordre 2 de* $ln(cos(x))$ *(pour* $x\to 0$*).*

$$\begin{cases} \ln(1+u) = u+u\epsilon_1(u), \\ u=\cos(x)-1 = \dfrac{-x^2}{2}+x^2\epsilon_2(x), \end{cases}$$

où $\lim\limits_{x\to+\infty}\epsilon_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\epsilon_2(x)=0$. *En composant les développements limités , on obtient :*

$$\ln(\cos(x))=\left(\frac{-x^2}{2}+x^2\epsilon_2(x)\right)+x^2\left(\frac{-1}{2}+\epsilon_2(x)\right)\epsilon_1(x)=\frac{-x^2}{2}+x^2\epsilon_3(x)$$

où $\lim\limits_{x\to+\infty}\epsilon_3(x)=0$. *D'où :*

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}ln(cos(x))=-\frac{1}{2}\quad et\quad \lim_{x\to0}(cos(x))^{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

***Exemple* 87.** *Calculer* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln chx}{1+x\sqrt{1+x}-e^{\sin x}}$. *Le numérateur et le dénominateur tendent vers* 0*, il convient donc de chercher leur développement limité à un ordre suffisant pour que les fonctions polynômes obtenues ne soient pas nulles. Le développement limité de* $\sqrt{1+x}$ *à l'ordre* 2 *au point* 0 *est*

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon(x).$$

Le développement limité de $\sin x$ *au point* 0 *et à l'ordre* 3 *est* $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+x^3\epsilon(x)$ *et celui de la fonction exponentielle est* $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\epsilon(x)$. *En composant ces développements limités, nous obtenons :*

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+x^2\epsilon(x).$$

Notons $D(x)=1+x\sqrt{1+x}-e^{\sin x}$ *le dénominateur de l'expression ; donc le développement limité à l'ordre* 3 *est :*

$$\begin{aligned} D(x) &= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^3\right)-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)+x^3\epsilon(x).\\ &= -\frac{1}{8}x^3+x^3\epsilon(x).\end{aligned}$$

Le premier terme non nul de la partie polynôme étant de degré 3*, calculons également à l'ordre* 3 *le développement limité du numérateur. Pour cela il suffit de calculer le développement limité à l'ordre* 2 *de* $\ln chx$. *On alors :*

$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+x^2\epsilon(x)\qquad et\qquad \ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+x^2\epsilon(x).$$

En composant ces développements limités, ce qui est possible car $ch(0)-1=0$*, on trouve*

$$\ln chx=\ln(1+(chx-1))=\frac{1}{2}x^2+x^2\epsilon_1(x)$$

où $\lim\limits_{x\to0}\epsilon_1(x)=0$. *Nous avons alors*

$$\frac{x\ln chx}{D(x)}=\frac{x^3(\frac{1}{2}+\epsilon_1(x))}{x^3(\frac{-1}{8})+\epsilon(x)}=\frac{\frac{1}{2}+\epsilon_1(x)}{(\frac{-1}{8})+\epsilon(x)}.$$

Dans la dernière expression, le numérateur tend vers $\frac{1}{2}$ *quand* x *tend vers* 0 *et le dénominateur tend vers* $\frac{-1}{8}$*, donc la limite cherchée est égale à* -4.

<u>*Exercice*</u> 3. *Calculer la limite de* $f(x)=\left(\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ *quand* x *tend vers* $+\infty$.

Corrigé

Posons

$$g(x) = f(\frac{1}{x}) = \left(\frac{2^x + 3^x}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}}$$

et cherchons la limite de $g(x)$ *quand* x *tend vers* 0. *Quand* x *tend vers* $0, \dfrac{2^x + 3^x}{2}$ *tend vers* $\dfrac{2^0 + 3^0}{2} = 1$ *et l'exposant* $\dfrac{1}{x}$ *tend vers l'infini. Nous sommes en présence d'une forme indéterminée. Rappelons que si* a *est un nombre réel positif, on a par définition* $a^x = e^{x \ln a}$ *pour tout* x. *Nous avons donc pour tout* x

$$2^x = e^{(x \ln 2)} \quad \text{et} \quad 3^x = e^{(x \ln 3)}.$$

Pour calculer la limite de $g(x)$, *prenons le logarithme*

$$\ln g(x) = \frac{1}{x} \ln(\frac{2^x + 3^x}{2}) = \frac{1}{x} \ln(h(x)).$$

où $h(x) = \dfrac{2^x + 3^x}{2}$. *Ecrivons le développement limité de la fonction* h *à l'ordre* 1 *au point* 0, *on a*

$$e^{(x \ln 2)} = 1 + x \ln 2 + x\epsilon(x)$$

$$e^{(x \ln 3)} = 1 + x \ln 3 + x\epsilon(x)$$

donc

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(e^{(x \ln 2)} + e^{(x \ln 3)}\right) = 1 + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2}x + x\epsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{\ln 6}{2} + x\epsilon(x) = 1 + (\ln \sqrt{6})x + x\epsilon(x).$$

Puisque nous connaissons le développement limité de $\ln(x + 1)$ *au point* 0, *écrivons*

$$\ln h(x) = \ln(1 + (h(x) - 1)) = \ln(1 + u(x))$$

où $u(x) = h(x) - 1$ *a pour limite* 0 *quand* x *tend vers* 0. *Or* $\ln(x + 1) = x + x\epsilon(x)$ *et* $u(x) = (\ln \sqrt{6})x + x\epsilon(x)$. *En composant ces développements limités, on obtient*

$$\ln h(x) = \ln(1 + u(x)) = (\ln \sqrt{6})x + x\epsilon(x).$$

Il vient $\ln g(x) = \dfrac{1}{x} \ln h(x) = \ln \sqrt{6} + \epsilon(x)$ *c'est à dire* $\lim\limits_{x\to 0} \ln g(x) = \ln \sqrt{6}$. *En composant avec la fonction exponentielle qui est continue sur* $\mathbb{R}$, *nous obtenons enfin*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{(\ln g(x))} = e^{\ln \sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

***Exercice* 4.** *Calculer*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x.$$

Où les réels a *et* b *vérifient :* $0 < a < b$.

***Exercice* 5.** *Calculer la limite de la suite de terme général* $u_n = \left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Corrigé

La limite se présente sous la forme indéterminée 1^∞. En prenant le logarithme, on obtient la suite de terme général $\ln u_n = n^2 \ln \cos \dfrac{1}{n}$ dont nous allons calculer la limite. Le développement limité de $\cos x - 1$ à l'ordre 2 au point 0 est $\cos x - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ et celui de $\ln(1+x)$ est $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$. Nous pouvons composer ces développements limités, ce qui donne

$$\ln \cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Remplaçons x par $\dfrac{1}{n}$ dans cette égalité et posons $\varepsilon_n = \varepsilon(\frac{1}{n})$. Nous obtenons

$$\ln \cos \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon_n.$$

Puisque n tend vers $+\infty$, la suite $\frac{1}{n}$ a pour limite 0, donc (propriété de la fonction ε) la suite ε_n a pour limite 0. En passant à la limite, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \dfrac{1}{2}$. Puisque la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

4.4.2 Calcul des dérivées n^{iemes} en un point

Pour une fonction f qui est de classe $\mathcal{C}^n$, pour un certain entier $n \geq 1$, admet un développement limité à l'ordre n au point a qui s'écrit :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f"(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x).$$

Si l'on peut calculer ce développement limité , alors on déduit les valeurs des dérivées $f'(a), f''(a) \cdots f^{(n)}(a)$.

Exemple 88. *Calculer la valeur en 0 des quatres premières dérivées de $\dfrac{\cos x}{1+x+x^2}$. Posons $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x+x^2}$ et cherchons le développement limité de f à l'ordre 4 au point 0. Puisque le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 4 au point 0 est $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + x^4\epsilon(x)$, nous devons calculer le quotient à l'ordre 4 de la division euclidienne suivant les puissances croissantes de $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ par $1+x+x^2$. On trouve ainsi*

$$f(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{23}{24}x^4 + x^4\epsilon(x).$$

La fonction f est classe $\mathcal{C}^4$, par conséquent le développement limité de f à l'ordre 4 au point 0 est donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + (x-a)^4\epsilon(x).$$

D'après l'unicité du développement limité , on déduit des égalités ci dessus que :

$$f(0) = 1, \frac{f'(0)}{1!} = -1, \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2}, \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{3}{2}, \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{23}{24}.$$

On a donc $f'(0) = -1, f"(0) = -1, f^{(3)}(0) = 9, f^{(4)}(0) = -23$.

4.4.3 Equation et position de la tangente en un point

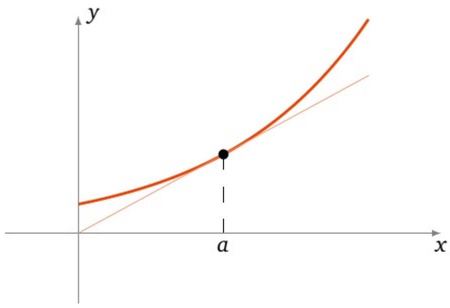
Soit f une fonction admettant un DL en a :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + (x-a)^k\epsilon(x),$$

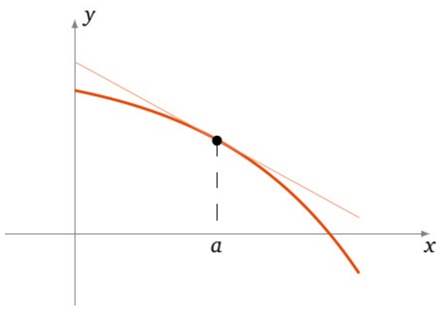
oú k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coefficient c_k soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $y = c_0 + c_1(x-a)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe de $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $c_k(x-a)^k$.

Il y a trois types de position que peut avoir le graphe par rapport à sa tangente :

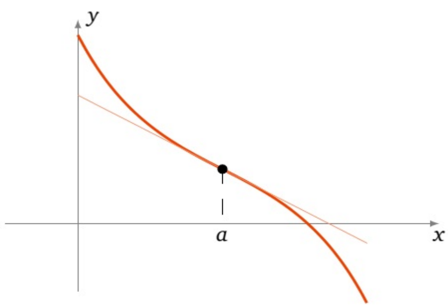
- *Si le signe de $f(x) - y$ est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.*



- *Si le signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.*



- *Si le signe change (lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$) alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. Ce point s'appelle un* ***point d'inflexion****.*



Notez que pour qu'il y ait un point d'inflexion il est nécessaire que le coefficient c_2 soit nul, c'est-à-dire $f''(a) = 0$.

***Remarque* 4.13.**

- *Si k est pair et c_k positif donc $c_k(x-a)^k$ reste positif avant et après a donc la courbe est au-dessus de la tangente.*
- *Si k est pair et c_k négatif alors $c_k(x-a)^k$ est négatif autour de a la courbe reste sous de la tangente.*

- *Enfin si k est impair alors $c_k(x-a)^k$ change de signe (positif puis négatif, ou négatif puis positif). La courbe qui était au-dessus de la tangente passe en-dessous (ou inversement). C'est un point d'inflexion.*

***Exemple* 89.** *Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.*

1. *Déterminons la tangente du graphe de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et précisons la position du graphe par rapport à cette tangente.*

   Pour calculer le DL on calcule d'abord les dérivées successives

   On a $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$, donc $f''(\frac{1}{2}) = -3 \neq 0$ et donc le rang du premier coefficient non nul de la proposition précédente est ici $k = 2$.

   La formule de Taylor-Young nous donne alors le le DL de f en $\frac{1}{2}$ à l'ordre 2

   $$f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(x-\frac{1}{2})^2 + (x-\frac{1}{2})^2\epsilon(x),$$

   ce qui donne ici

   $$f(x) = \frac{13}{16} - (x-\frac{1}{2}) - \frac{3}{2}(x-\frac{1}{2})^2 + (x-\frac{1}{2})^2\epsilon(x).$$

   Les deux premiers termes du DL nous donne l'équation de la tangente : $y = \frac{13}{16} - (x - \frac{1}{2})$. Et le premier terme non nul suivant nous donne la position du graphe par rapport à la tangente :

   Ici $f(x) - y$ (l'équation de la tangente) vaut $-\frac{3}{2}(x-\frac{1}{2})^2$ + un petit reste.

   Donc cette différence est négative autour de $x = \frac{1}{2}$. Ce qui signifie que le graphe de f est en dessous de la tangente au voisinage de $x = \frac{1}{2}$. Cela se vérifie sur le dessin, voir figure au dessous à gauche.

2. *Déterminons les points d'inflexion.*

   Les points d'inflexion à chercher sont parmi les solutions de $f''(a) = 0$. Ici $f''(x) = 12x^2 - 12x$, donc les solutions sont $a = 0$ ou $a = 1$, étudions chacun de ces cas.

   Tout d'abord en 0. Le DL en 0 est $f(x) = 1 - 2x^3 + x^4$

   Comme f est un polynôme il s'agit juste d'écrire les monômes par degrés croissants !

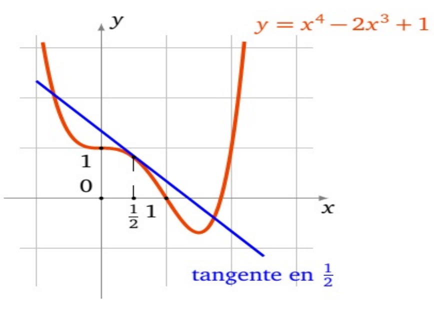
   L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc $y = 1$, c'est une tangente horizontale.

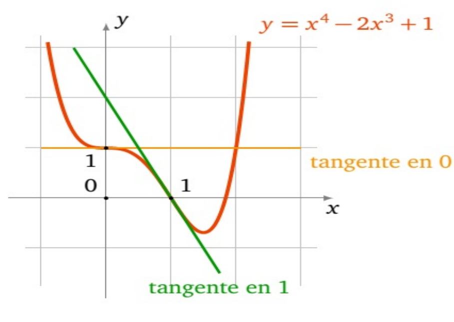
   Comme $f(x) - y = -2x^3$ + un reste, alors le signe change en 0, donc 0 est bien un point d'inflexion.

   On peut même être plus précis : juste avant 0, la différence est positive donc le graphe est au-dessus de la tangente et juste après la différence devient négative et le graphe passe en-dessous de la tangente (voir figure au dessous à droite).

   On fait maintenant le même travail en 1. On calcule $f(1)$, $f'(1)$,... pour trouver le DL en 1. La tangente en 1 a donc pour équation $y = -2(x-1)$.

   Maintenant $f(x) - y = 2(x-1)^3$ + un reste, change de signe en 1, donc 1 est aussi un point d'inflexion de f. Ici le graphe est d'abord dessous puis dessus (voir figure au dessous à droite).





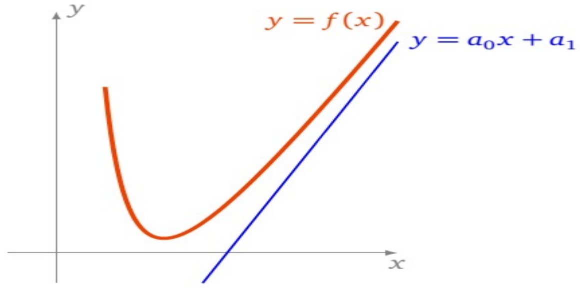
4.4.4 Equation et position de l'asymtote à l'infini

On suppose qu'une fonction $\frac{f(x)}{x}$ *admet un DL en* $+\infty$ *qui s'écrit sous la forme :*

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^k}\epsilon(\frac{1}{x}),$$

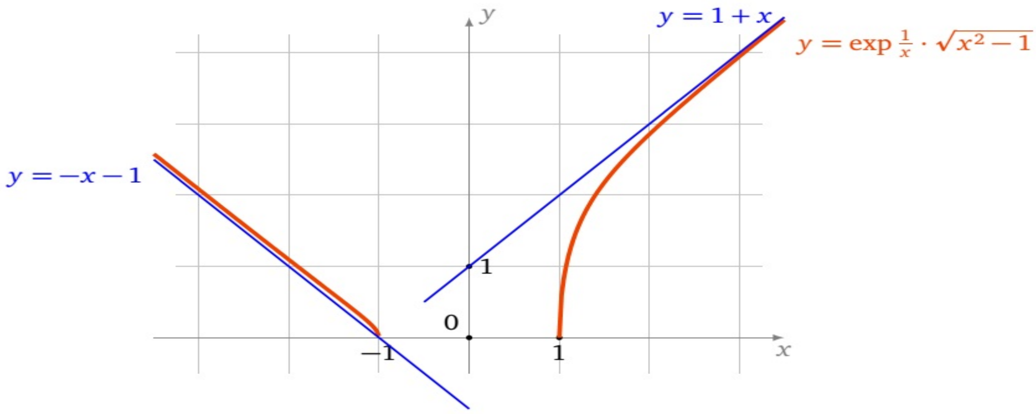
où k *est le plus petit entier* ≥ 2 *tel que le coefficient de* $\dfrac{1}{x^k}$ *soit non nul.*

Alors $f(x) - (a_0x + a_1) \to 0$ *lorsque* $x \to +\infty$, *cela signifie que la droite d'équation* $y = a_0x + a_1$ *est une asymptote à la courbe de* f *en* $+\infty$. *Voici une représentation graphique :*



La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - y$, *c'est-à-dire le signe de* $\dfrac{a_k}{x^{k-1}}$.

***Exemple* 90.** *Les asymptotec de* $f(x) = \exp\dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{x^2 - 1}$, *dont voici le graphe :*



Il s'agit donc de calculer le DL de $\dfrac{f(x)}{x}$ *qui est* $\exp\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ *et qui s'écrit ainsi après avoir passer le* x *à l'intérieur de la racine.*

1. *En* $+\infty$ *:*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \exp\frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \exp\frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \\
&= (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x}))((1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x})) \\
&= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x}).
\end{aligned}$$

Donc l'asymptote de f *en* $+\infty$ *est la droite d'équation* $y = x + 1$.

Comme $f(x) - y = -\dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{1}{x^3}\epsilon(\dfrac{1}{x})$ *alors cette différence est négative (pour* x *assez grand) et donc le graphe de* f *reste en dessous de l'asymptote tout en s'en rapprochant.*

2. *En $-\infty$:*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \exp\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -\exp\frac{1}{x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \\
&= -(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x}))((1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x})) \\
&= -1-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x}).
\end{aligned}$$

Donc l'asymptote de f en $-\infty$ est la droite d'équation $y=-x-1$. On a $f(x)-y=\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x})$; donc le graphe de f reste au dessus de l'asymptote.

Chapitre 5

Calcul des primitives et intégral

5.1 Fonctions intégrables

Dans ce chapitre toutes les fonctions considérées seront supposées à valeurs dans $\mathbb{R}$ *et* $[a, b]$ *désignera un intervalle de* $\mathbb{R}$ *;* $a < b$.

5.1.1 Subdivision d'un intervalle

Définition 5.1. *On appelle subdivision de* $[a, b]$ *toute suite finie strictement croissante* $(x_i)_{i=0,\dots,n} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ *de points de* $[a, b]$ *tels que :* $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b, \quad n \geq 1$.
Les intervalles $[x_{i-1}, x_i]$*, pour* $i = 1, 2, \dots, n$*, sont appelés intervalles de la subdivision.*
On appelle le pas de la subdivision $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ *le plus grand des nombres* $(x_i - x_{i-1})$ *où* $i = 1, ..., n$ *:* $d = \max\limits_{i=0,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$.

***Exemple* 91.** *Soit* $(x_i)_{i=0,\dots,n} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ *une subdivision de* $[a, b]$ *tels que :*

$$x_0 = a, x_1 = a + \frac{(b-a)}{n}, \dots, x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \dots, x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b.$$

Le pas de cette subdivision est $d = \max\limits_{i=0,\dots,n} (x_i - x_{i-1}) = \dfrac{b-a}{n}$*, cette subdivision est dite réguliére.*

5.1.2 Intégrales au sens de Riemann

Définition 5.2. *On considère une fonction numérique* f *définie et bornée sur* $[a, b]$ *et soit* $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ *une subdivision de* $[a, b]$.
• *Soit* $(R_n)_{n\geq 1}$ *une suite associée à* f *relative à cette subdivision définie par :*

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(y_i), \text{ où } y_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

• *Si* f *est constante sur* $[x_{i-1}, x_i]$*,* f *est dite* ***en escalier****.*
• *On dit que* f *est* ***intégrable (au sens de Riemann)*** *sur* $[a, b]$*, si la suite* $(R_n)_{n\geq 1}$ *tend vers une limite finie* I *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *(*$d \longrightarrow 0$*).*

$$I = \lim_{n \to +\infty} R_n,$$

I *est appelée l'integrale de* f *sur* $[a, b]$ *et on écrit :*

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

***Remarque* 5.1.** *La variable x est une variable muette et on peut écrire :*

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy.$$

Interprétation géométrique de l'intégrale
Soient f une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$, C_f son graphe et D l'ensemble hachuré, (voir Fig. 1), défini par : $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

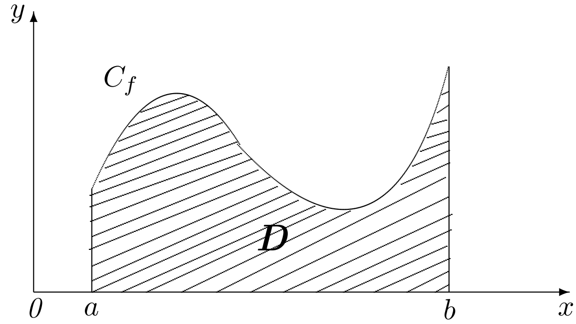


Fig. 1

On appelle, par définition, l'aire algebrique de l'ensemble D le nombre réel : $\int_a^b f(x)dx$.
Le nombre réel, $\int_a^b f(x)dx$, représente la mesure algebrique de la surface limitée par la courbe C_f et par les droites d'équation respectives $x = a$, $x = b$ et $y = 0$.
Cette mesure est positive si f est positive sur $[a,b]$, négative si f est négative sur $[a,b]$, et peut être nulle si f ne garde pas un signe constant sur $[a,b]$.

***Exemple* 92.** $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0.$

5.1.3 Propriétés des fonctions intégrables

Proposition 5.1. *Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f+g$, λf, $|f|$ et fg sont intégrables sur $[a,b]$ et on a :*

- $f \geq 0$ *sur* $[a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0;$
- $f \geq g$ *sur* $[a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx;$
- $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(x) + \beta g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ ***(Linéarité de l'intégrale)***;
- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, *avec* $c \in [a,b]$ ***(Relation de Chasles)***;
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx;$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0;$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

***Remarque* 5.2.** *Si f est intégrable sur $[a,b]$ on appelle, par définition, l'aire géométrique de l'ensemble D le nombre réel : $\int_a^b |f(x)|dx$.*

***Remarque* 5.3.** *Si deux fonctions f et g sont définies et intégrables sur $[a,b]$ telles que : $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ sauf en un nombre fini de points. Alors :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Proposition 5.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2dx\right).$$

Théorème 5.1. *Si f est une fonction bornée sur $[a,b]$ et continue, sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.*
En particulier, si f est continue sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$.

***Exemple* 93.** *Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par :*

$$\begin{cases} f(x) = \sin\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

cette fonction est intégrable car elle est bornée et l'origine est le seul point de discontinuité.

Proposition 5.3. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, $(a \neq b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Cette relation est appelée **Formule de la moyenne**.

5.2 Primitives

Définition 5.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction F définie sur I est une primitive de f sur I, si et seulement si F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. C'est-à-dire, f est la dérivée de F sur I.*

***Remarque* 5.4.** *Si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b[$, $F'_d(a) = f(a)$ et $F'_g(b) = f(b)$.*

***Remarque* 5.5.** *Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors toutes les fonctions $F+k$, où k est une constante, sont des primitives de f.*

Théorème 5.2. *Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et $x_0 \in [a,b]$. Alors la fonction*

$$F : x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$$

est la primitive de f qui s'annule en x_0.

Théorème 5.3. *Si f est une fonction continue sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, alors elle admet une primitive sur I.*

***Remarque* 5.6.** *Si F et G sont deux primitives de f sur un intervalle I alors la différence $G - F$ est constante sur I.*

***Remarque* 5.7.** *On désigne par $\int f(x)dx$ toute primitive de f. Autrement dit :*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

où F est une primitive de f et C une constante réelle.

5.3 Méthodes d'intégrations

Lorsqu' on connaît une primitive d'une fonction, on peut calculer son intégrale, en utilisant le théorème suivant :

Théorème 5.4 (Théorème fondamental de l'intégration).
Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

***Remarque* 5.8.** *Il existe des fonctions intégrables qui n'ont pas de primitives; par exemple la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ si $x \neq \frac{1}{2}$ et $f(\frac{1}{2}) = 1$, est intégrable mais n'a pas de primitive. En effet, si F est une primitive de f sur $[0,1]$ on aura $F'(x) = 0$ pour $x \neq \frac{1}{2}$, par suite F est constante sur $[0, \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}, 1]$, de plus F est continue sur $[0,1]$ donc constante sur $[0,1]$ par conséquent $F' = f$ est identiquement nulle sur $[0,1]$ ce qui est impossible.*

***Remarque* 5.9.** *Il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas intégrable; par exemple la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, est dérivable mais sa dérivée*

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \quad si\ x \neq 0 \quad et \quad f'(0) = 0$$

n'est pas intégrable car elle n'est pas bornée.

5.3.1 Première méthode : Intégration par parties

Théorème 5.5. *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Preuve : *On a : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ donc*

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

***Exemple* 94.** *Calculons $\int_1^e \ln x dx$. On pose $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = 1$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x$. Ainsi*

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = 1.$$

5.3.2 Deuxième méthode : Changement de variables

Théorème 5.6. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $\varphi : J \to I$ une application bijective d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle I, tels que φ et φ^{-1} soient continûment dérivables. On a alors*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Preuve : *Si F est une primitive de f alors*

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)dt = [(F \circ \varphi)(t)]_a^b = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

***Remarque* 5.10.** *Si F est une primitive de f alors*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Applications-Disposition pratique : *Ce théorème permet de calculer $\int f$ si l'on sait calculer $\int f \circ \varphi.\varphi'$, ou réciproquement. Il est à la base de tout ≪ l'art de l'intégration ≫, qui consiste à trouver les bons changements de variables $x = \varphi(t)$. Dans la pratique, on écrit alors*

$$x = \varphi(t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \varphi'(t).$$

On écrit symboliquement $dx = \varphi'(t)dt$, et on substitue ces deux équations dans l'intégrale en question :

$$\int f(x)dx = \int f(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\ \underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx}.$$

Puis, ayant trouvé la primitive $F(t)$ du membre de droite, on retourne à la variable x en substituant $t = \varphi^{-1}(x)$.

***Remarque* 5.11.** *Il ne faut pas oublier de changer les bornes d'intégration après chaque changement de variable.*

***Remarque* 5.12.** *Il faut s'assurer que la fonction φ est effectivement une bijection, généralement en considérant ses propriétés de monotonie. Dans le cas échéant, il faut découper l'intervalle d'intégration en des sous-intervalles sur lesquels φ est monotone.*

***Exemple* 95.** *Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt$.*
Posons $\varphi(t) = t^2 + 1$, donc $\varphi'(t) = 2t$, ainsi

$$I = \int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2}dt = \int_0^1 \frac{d(\varphi(t))}{(\varphi(t))^2} = \int_1^2 \frac{d\varphi}{\varphi^2} = \left[-\frac{1}{\varphi}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

***Exemple* 96.** *Calculons la primitive $\int \sin x \cos x dx$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Posons $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$. C'est justifié car $\sin$ est une bijection continue de $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$, et la fonction réciproque $x = \arcsin t$ est également derivable à l'intérieur de cette intervalle. D'où*

$$\int \sin x \cos x dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + c$$

5.3.3 Primitives usuelles

Pour les fonctions classiques nous avons les primitives suivantes :

DOMAINE	*FONCTION*	*PRIMITIVE*
$]0,+\infty[$	$x^a,\ a\in\mathbb{R}, a\neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}$	$e^{ax}\quad (a\neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$\mathbb{R}$	$\sin ax\quad (a\neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos ax$
$\mathbb{R}$	$\cos ax\quad (a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin ax$
$]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$	$1+tg^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	tgx
$]0,\pi[$	$1+cotg^2x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-cotgx$
$]-a,a[, a>0$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arcsin\dfrac{x}{a}$
$]-a,a[, a>0$	$\dfrac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arccos\dfrac{x}{a}$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}$
$\mathbb{R}$	$sh(ax),(a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\ ch(ax)$
$\mathbb{R}$	$ch(ax),(a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\ sh(ax)$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$argsh(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

5.3.4 Fractions rationnelles

Dans cette partie, on montre comment on trouve une primitive pour toute fraction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$*, où* P *et* Q *sont deux polynômes.*

Définition 5.4. *On appelle fraction rationnelle réelle toute fonction* f *de la forme :* $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *où* P *et* Q *sont deux polynômes à coefficients réels.*

Définition 5.5. *Soient* $A(x)$ *et* $B(x)$ *deux polynômes réels. On appelle division euclidienne (ou division selon les puissances décroissantes) de* $A(x)$ *par* $B(x)$ *l'unique couple* (Q, R) *tel que :* $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$ *avec* $R = 0$ *ou bien* $d^\circ R < d^\circ B$*, (*d°*=degré) . Les polynômes* Q *et* R *sont appelés respectivement quotient et reste.*

***Exemple* 97.** *Soient* $A(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1$ *et* $B(x) = x^2 + x + 1$*. Pour effectuer la division euclidienne de* $A(x)$ *par* $B(x)$ *on divise le terme de plus haut degré de* $A(x)$*, soit* $2x^4$*, par le terme de plus haut degré de* $B(x)$*, soit* x^2 *: on obtient* $2x^2$ *puis on multiplie* $2x^2$ *par* $B(x)$ *et on retranche le résultat de* $A(x)$ *on obtient alors le premier reste* $R_1(x) = -x^3 - 5x^2 + x - 1$*. On recommence l'opération en remplaçant* $A(x)$ *par* $R_1(x)$ *on obtient le deuxième terme du quotient égal à* $-x$ *et le deuxième reste* $R_2(x) = -4x^2 + 2x - 1$*. On recommence l'opération en remplaçant* $R_1(x)$ *par* $R_2(x)$ *on obtient* $Q(x) = 2x^2 - x - 4$ *et* $R_3(x) = R(x) = 6x + 4$*.*
En pratique on procède comme dans le cas de la division selon les puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 1 & x^2 + x + 1 \\
2x^4 + 2x^3 + 2x^2 \quad\quad\quad & \hline 2x^2 - x - 4 \\
\hline
-x^3 - 5x^2 + x - 1 & \\
-4x^2 - 4x - 4 & \\
\hline
6x + 4 &
\end{array}$$

Proposition 5.4. *Tout polynôme non nul* $P(x)$ *à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *s'écrit*

$$P(x) = c(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2}...(x - r_p)^{m_p}(x^2 + b_1x + c_1)^{n_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{n_2}...(x^2 + b_qx + c_q)^{n_q}$$

$$P(x) = c\left(\Pi_{k=1}^{p}(x - r_k)^{m_k}\right)\left(\Pi_{l=1}^{q}(x^2 + b_kx + c_k)^{n_k}\right),$$

avec $b_k^2 - 4c_k < 0,\ m_k,\ n_l\ \in \mathbb{N}$ *pour* $1 \le k \le p$, $1 \le l \le q$ *et* $c \ne 0$*.*

Proposition 5.5 (Décomposition en éléments simples)**.**
Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *une fraction rationnelle telle que* $P(x)$ *et* $Q(x)$ *n'ont aucune racine commune. Si*

$$Q(x) = c'\Pi_{k=1}^{p'}(x - r'_k)^{m'_k}\Pi_{k=1}^{q'}(x^2 + b'_kx + c'_k)^{n'_k},$$

avec $b_k'^2 - 4c'_k < 0$ *et* $c' \ne 0$ *alors la décomposition en éléments simples de* $f(x)$ *s'écrit d'une manière unique sous la forme :*

$$f(x) = E(x) + \sum_{1\le i\le p'}\sum_{1\le j\le m'_i}\frac{A_{i,j}}{(x - r'_i)^j} + \sum_{1\le i\le q'}\sum_{1\le j\le n'_i}\frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2 + b'_ix + c'_i)^j}$$

où $A_{i,j}$*,* $B_{i,j}$ *et* $C_{i,j}$ *sont des constantes réelles, et* $E(x)$ *est un polynôme appelé partie entière de la fraction rationnelle* $f(x)$*.*

***Remarque* 5.13.** *La partie entière $E(x)$ de la fraction rationnelle $f(x)$ n'est autre que le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.*
On a donc $P(x) = Q(x)E(x) + R(x)$ avec $d^\circ R(x) < d^\circ Q(x)$ ou bien $R(x) = 0$.
On en déduit que :

$$f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

***Remarque* 5.14.** *Pour calculer une primitive de $f(x)$ il suffit alors de calculer les primitives de*

$$E(x), \quad \frac{a}{(x-b)^n}, \quad n \geq 1 \quad et \quad \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}, \; n \geq 1, \; c^2 - 4d < 0.$$

- *Calcul de $\int \frac{a}{(x-b)^n}dx$. On a :*

$$\int \frac{a}{(x-b)^n}dx = \begin{cases} a\ln|x-b| + C & si \quad n = 1 \\ \frac{-1}{n-1}\frac{a}{(x-b)^{n-1}} + C & si \quad n \geq 2. \end{cases}$$

- *Calcul de $\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}dx$. On a :*

$$\begin{aligned} &\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}dx \\ &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n}dx + (-\frac{a}{2}c + b)\int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}. \end{aligned}$$

- *Calcul de $\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n}dx$. On a :*

$$\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^n}dx = \begin{cases} \ln|x^2+cx+d| + C & si \quad n = 1 \\ -\frac{1}{(n-1)(x^2+cx+d)^{n-1}} + C & si \quad n \geq 2 \end{cases}$$

- *Calcul de $I(x) = \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n}$. On a :*

$$I(x) = \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^n} = \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{c}{2})^2 + (d - \frac{c^2}{4})\right]^n},$$

on pose $u = x + \frac{c}{2}$ et $\alpha^2 = (d - \frac{c^2}{4}) > 0$; car $\Delta < 0$, on obtient

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int \frac{du}{\alpha\left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2 + 1\right]^n} \\ &= \frac{1}{\alpha^{2n-1}}\int \frac{dv}{[v^2+1]^n}; \quad v = \frac{u}{\alpha} \end{aligned}$$

Enfin pour calculer $I(x)$ il suffit de calculer $I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.
Si $n = 1$ on a : $I_1(x) = arctgx + C$.
Si $n \geq 2$ nous avons la relation de récurrence suivante :

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n(x).$$

En effet

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - 2n \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left[I_n(x) - I_{n+1}(x)\right].
\end{aligned}$$

***Exemple* 98.** *Calculons* $J(x) = \int \frac{dx}{(x^2+x+\frac{5}{4})^2}$. *On pose* $u = x + \frac{1}{2}$ *on obtient :* $J(x) = \int \frac{du}{(u^2+1)^2}$. *D'après le résultat précedent on a :*

$$\begin{aligned}
J(x) = I_2(u) &= \frac{1}{4}\frac{u}{(u^2+1)^2} + \frac{3}{4} arctg u + C \\
&= \frac{1}{4}\frac{x+\frac{1}{2}}{((x+\frac{1}{2})^2+1)^2} + \frac{3}{4} arctg(x+\frac{1}{2}) + C.
\end{aligned}$$

***Exemple* 99.**

• *Calculons* $I(x) = \int \frac{x^3+4x-1}{x^2-1}dx$.
On pose $P(x) = x^3+4x-1$ *et* $Q(x) = x^2-1$, *la division euclidienne de* $P(x)$ *par* $Q(x)$ *donne :*

$$P(x) = xQ(x) + 5x - 1,$$

donc, d'après la proposition 5.5, on a :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x + \frac{5x-1}{(x-1)(x+1)} = x + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}. \quad (1)$$

Il existe plusieurs methodes pour calculer les constantes a et b. La methode générale consiste à réduire au même dénominateur les deux membres de l'égalité (1), puis identifier les coefficients des numérateurs. Une autre methode simple est donnée sous la forme suivante :
Pour calculer a on multiplie les deux membres de l'égalité (1) par $x-1$ *puis on donne à x la valeur 1 on obtient* $a = 2$.
Pour calculer b on multiplie les deux membres de l'égalité (1) par $x+1$ *puis on donne à x la valeur -1 on obtient* $b = 3$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx &= \int xdx + \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{3dx}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

• *Calculons* $I(x) = \int \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)}dx$. *D'après, la proposition 5.6, la fraction rationnelle* $F(x)$ *s'écrit*

$$F(x) = \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{a_1}{x-2} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+1}.$$

Par identification on obtient

$$3x^2 - 3x - 1 = (a_1+b_1)x^2 + (c_1-2b_1)x + (a_1-2c_1),$$

on en déduit que

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 3, \\ c_1 - 2b_1 = -3, \\ a_1 - 2c_1 = -1, \end{cases}$$

d'où l'on tire, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ *et* $c_1 = 1$. *Donc*

$$F(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-3x-1}{(x-2)(x^2+1)}dx &= \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x-2| + \ln(x^2+1) + arctgx + C.\end{aligned}$$

5.3.5 Intégration des fonctions trigonométriques

On peut aussi calculer les primitives de la forme $\int P(\cos x, \sin x)\, dx$ *ou de la forme* $\int \dfrac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\, dx$ *quand* P *et* Q *sont des polynômes, en se ramenant à intégrer une fraction rationnelle.*

Il existe deux méthodes :

- *les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours ;*
- *le changement de variable* $t = \tan \frac{x}{2}$ *fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.*

Les règles de Bioche. *On note* $\omega(x) = f(x)\, dx$. *On a alors* $\omega(-x) = f(-x)\, d(-x) = -f(-x)\, dx$ *et* $\omega(\pi - x) = f(\pi - x)\, d(\pi - x) = -f(\pi - x)\, dx$.

- *Si* $\omega(-x) = \omega(x)$ *alors on effectue le changement de variable* $u = \cos x$.
- *Si* $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ *alors on effectue le changement de variable* $u = \sin x$.
- *Si* $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ *alors on effectue le changement de variable* $u = \tan x$.

***Exemple* 100.** *Calcul de la primitive* $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{2-\cos^2 x}$

On note $\omega(x) = \dfrac{\cos x\, dx}{2-\cos^2 x}$. *Comme* $\omega(\pi - x) = \dfrac{\cos(\pi - x)\, d(\pi - x)}{2-\cos^2(\pi - x)} = \dfrac{(-\cos x)\,(-dx)}{2-\cos^2 x} = \omega(x)$, *alors le changement de variable qui convient est* $u = \sin x$ *pour lequel* $du = \cos x\, dx$. *Ainsi :*

$$\int \frac{\cos x\, dx}{2-\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{2-(1-\sin^2 x)} = \int \frac{du}{1+u^2} = \big[\arctan u\big] = \arctan(\sin x) + c\ .$$

Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.

Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan \frac{x}{2}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{Avec} \quad t = \tan \dfrac{x}{2} \quad \textit{on a} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \textit{et} \qquad dx = \dfrac{2\, dt}{1+t^2}. \end{array}}$$

***Exemple* 101.** *Calcul de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}$.

Le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$ *définit une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ *vers* $[-1, 0]$ *(pour* $x = -\frac{\pi}{2}$, $t = -1$ *et pour* $x = 0$, $t = 0$*). De plus on a* $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ *et* $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x} &= \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2-2t} \\ &= 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1-t)^2} = 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 2(1-\frac{1}{2}) = 1\end{aligned}$$

***Exemple* 102.** *Calculons l'intégrale*

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos x} dx.$$

Le changement de variables $t = tg\dfrac{x}{2}$ *nous donne*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Par conséquent :

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1+\cos x} = \int_{0}^{1} \frac{2t\,dt}{1+t^2} = \left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \ln 2.$$

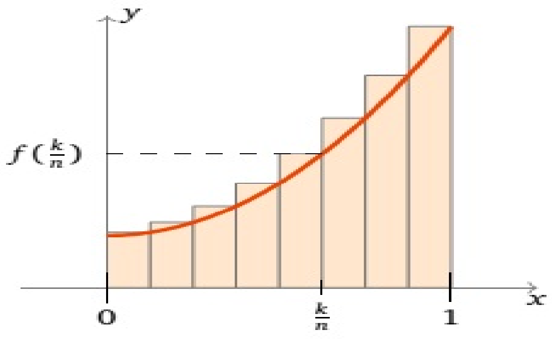
5.3.6 Sommes de Riemann

Proposition 5.6. *Si* f *est intégrable sur* $[a, b]$*, la suite* (S_n) *définie par*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

tend vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

La somme S_n *s'appelle* ***la somme de Riemann*** *associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle* $[a, b]$ *en* n *petits intervalles. La hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite. Le cas le plus utile est le cas où* $a = 0$, $b = 1$ *alors* $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}$ *et* $f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) = f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.



***Exemple* 103.** *Calculons la limite de la suite* $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$.
Soit f *la fonction définie sur* $[1,0]$ *par* $f(x) = \frac{1}{1+x}$. *On a :*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln 2.$$

Chapitre 6

Équations différentielles linéaires

6.1 Introduction et définitions générales

Un corps de température θ_0 *à l'instant* $t = 0$ *est placé dans un milieu de température* a $(\theta_0 > a)$. *On demande de trouver la loi de variation de la température de ce corps en fonction du temps. La température cherchée est une fonction du temps que l'on désigne par* $\theta(t)$. *Du cours de physique on sait que la vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence des températures de ce corps et du milieu ambiant. La fonction* $\theta(t)$ *étant décroissante, d'après la signification mécanique de la dérivée, on obtient*

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k\left[\theta(t) - a\right], \qquad (1)$$

où k *est le coefficient de proportionnalité. La relation* (1) *est le modèle mathématique du processus physique étudié. La relation obtenue est une équation différentielle, car elle relie la fonction inconnue* $\theta(t)$ *à sa dérivée. L'équation différentielle* (1) *peut décrire d'autres phénomènes physiques. Pour* $a = 0$ *par exemple, elle décrit la désintégration de l'atome radioactif. La solution de l'équation* (1) *est immédiate :* $\theta(t) = Ce^{-kt} + a$, *où* C *est une constante arbitraire. On détermine cette constante à partir de la condition initale* $\theta(0) = \theta_0$, *soit* $\theta_0 = C + a$. *La solution qu'on cherche est donc*

$$\theta(t) = (\theta_0 - a)e^{-kt} + a.$$

Il est souvent impossible, lors de l'étude de phénomènes physiques, de trouver directement la loi reliant les variables indépendantes et la fonction qu'on cherche. Par contre, on peut établir une relation entre cette fonction et ses dérivées, c'est à dire décrire le phénomène étudié par une équation différentielle. Plus précisemment une équation différentielle (ED) d'ordre n *est une équation faisant intervenir une fonction* y *ainsi que ses dérivées* $y^{(k)}$ *jusqu'à l'ordre* n. *Par exemple, une telle équation pourrait être*

$$y'(t) = 2.y(t), \qquad (*)$$

où

$$y = \frac{1}{2}x^2y" - 5x. \qquad (**)$$

Dans le $2^{ième}$ *exemple, il est sous-entendu que* y *est fonction de* x. *L'équation différentielle d'ordre* n *la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme*

$$F(x, y, y'...y^{(n)}) = 0.$$

où F *est une fonction de* $(n+2)$ *variables. Nous ne considérons que le cas où* x *et* y *sont à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Une* **solution** *d'une telle équation différentielle sur l'intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *est une fonction* $y \in C^n(I; \mathbb{R})$ *(une fonction* $y : I \to \mathbb{R}$ *qui est* n *fois continûment dérivable) telle que pour tout* $x \in I$, *on ait* $F(x, y(x), y'(x), ...y^{(n)}(x) = 0$.

Exercice **6.** *Vérifier que :*
• $y(t) = Ce^{2t}$ *est une solution de l'équation différentielle (*) sur tout* $\mathbb{R}$*, pour tout* $C \in \mathbb{R}$ *fixé ;*
•$y(x) = mx^2 - 5x$ *est une solution de l'équation différentielle (**), sur* $\mathbb{R}$*, pour tout* $m \in \mathbb{R}$.

Remarque **6.1.** *Pour des raisons qui seront développées dans la suite, on dit aussi "intégrer l'ED" au lieu de "trouver une solution de l'ED". Dans ce chapitre, on donnera des méthodes pour trouver l'ensemble de toutes les solutions à une certaine classe d'équations différentielles.*

Exemple **104.** $y" + y = 0$, $y = \sin x$ *est solution car* $y' = \cos x$ *et* $y'' = -\sin x$

6.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 6.1. *Une équations différentielles linéaire (EDL) du premier ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :*

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad (E)$$

où a, b et c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ *à valeurs dans l'un des ensembles* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, et on demandera* $\forall x \in I : a(x) \neq 0$.

Définition 6.2 (Équation homogène)**.** *On appelle* équation homogène *ou encore* équation sans second membre *associée à (E), l'équation :*

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (E_0).$$

On la note aussi (E_h) *ou* $(E.H)$.

Remarque **6.2.** *Si dans ces définitions, le coefficient de* y' *vaut 1, on dit alors que l'équation est* normalisée *ou encore* résolue en y'.

Résolution de l'équation homogène associée

En effet, (E.H) est une équation différentielle à variables séparées. En l'écrivant

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)},$$

et en l'intégrant, on obtient :

$$\ln|y| = \int -\frac{b(x)}{a(x)}dx + C$$

et avec $K \in \{\pm e^C, 0\}$*, on a :*

$$y = Ke^{F(x)}, K \in \mathbb{R}, \mathrm{F(x)} = \int -\frac{\mathrm{b(x)}}{\mathrm{a(x)}}\mathrm{dx}.$$

Concernant l'équation (E), on a :

Proposition 6.1. *L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E.H) une solution particulière de (E).*

Détermination de la constante d'intégration

La constante d'intégration K est fixée lorsqu'on demande que pour un $x = x_0$ *donné, on ait une valeur donnée de* $y(x) = y(x_0) = y_0$*. On parle d'un problème aux valeurs initiales.*
La section suivante est consacrée à la détermination de la solution particulière de l'équation (E) par la méthode de variation de la constante.

Solution particulière par variation de la constante

On cherche la solution particulière sous la forme $y = K(x)e^{F(x)}$, avec Kune fonction à déterminer ("variation de la constante"). On trouve que y est solution si et seulement si

$$K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)} \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx.$$

(On peut intégrer car c'est la composée de fonctions continues, et on peut oublier la constante car elle correspond à une solution de (E.H)). Une solution particulière est donc

$$y(x) = e^{F(x)} \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx.$$

et la solution générale est donc :

$$y(x) = e^{F(x)}\big(K + \int \frac{c(x)}{a(x)}e^{-F(x)}dx\big), K \in \mathbb{R}, \mathrm{F(x)} = \int -\frac{\mathrm{b(x)}}{\mathrm{a(x)}}\mathrm{dx}$$

***Exemple* 105.** *Résoudre sur $I =]0, \frac{\pi}{2}[$, l'équation différentielle*

$$sin(x)y' - cos(x)y = x$$

Résolvons d'abord sur I l'équation homogène :

$$sin(x)y' - \cos(x)y = 0$$

On obtient

$$\frac{y'}{y} = \frac{cos(x)}{\sin(x)} \Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + k, k \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (E.H) est donc

$$y = K \sin x, K \in \mathbb{R}.$$

(avec $K = \pm e^k$ pour tenir compte des valeurs absolues, et K=0 étant solution aussi). Cherchons ensuite une solution particulière de (E) sous la forme

$$y = K(x)\sin x, \textit{(K est continûment dérivable)}.$$

On a alors $y'(x) = K'(x)\sin x + K(x)\cos x$, ce qui donne dans (E) :

$$(\sin x)[K'(x)\sin x + K(x)\cos x] - (\cos x)K(x)\sin x = x$$

et comme dans la théorie générale (et c'est toujours ainsi par construction), il ne reste que le terme en $K'(x)$, soit :

$$K'(x)\sin^2 x = x \Leftrightarrow K'(x) = \frac{x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow K(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x}dx.$$

On intègre par parties, en posant

$$u(x) = x, v'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \textit{ et } u'(x) = 1, v(x) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

ce qui donne :

$$K(x) = -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}dx = -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{x}{\tan x} + \ln|\sin x|.$$

Sur I, $\sin x > 0$; une solution particulière est donc obtenue pour $C = 0$.

$$y = -x\cos x + \sin x \;\; \ln \sin x$$

et la solution générale de (E) est donnée par :

$$y = -x\cos x + \sin x\big(K + \ln \sin x\big), \;\; K \in \mathbb{R}.$$

***Remarque* 6.3.** *Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de (E), alors $y_1 - y_2$ est solution de (E.H), et la solution générale de (E) est*

$$y = y_1 + c(y_1 - y_2),\ c \in \mathbb{R} \ \ \textit{arbitraire.}$$

6.3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'interesse maintenant aux équations différentielles du deuxième ordre, mais seulement aux EDL où les coefficients a, b et c sont des constantes réelles.

Définition 6.3. *Une équation différentielle du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme*

$$ay'' + by' + cy = f, \qquad \qquad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et f une fonction continue sur I ouvert de $\mathbb{R}$. L'équation homogène (où sans second membre) associée est

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad \qquad (E.H)$$

D'après les résultats généraux on sait que la solution générale de (E) est de la forme $y = y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et y_h est une solution de (E.H). Nous admettons le résultat supplémentaire :

Proposition 6.2. *Pour tout $x_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, (E) admet une unique solution y telle que $y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta$.*

6.3.1 Résolution de l'équation homogène associée (E.H)

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. On a donc $y' = ry$ et $y'' = r^2 y$, donc (E) devient : $y.(ar^2 + br + c) = 0$.

Définition 6.4. *L'équation*

$$ar^2 + br + c = 0,$$

se nomme équation caractéristique de (E.H).

Proposition 6.3. *Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :*

•$\Delta > 0$ *: L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, et* $\boxed{y_1(x) = e^{r_1 x}, y_2(x) = e^{r_2 x}.}$

•$\Delta = 0$ *: L'équation caractéristique admet une racine réelle double r, et* $\boxed{y_1(x) = e^{rx}, y_2(x) = xe^{rx}.}$

•$\Delta < 0$ *: L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjugués $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$), et* $\boxed{y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x.}$

Dans chacun des cas, la solution générale de (E.H) est donc

$$y = Ay_1 + By_2,$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.

6.3.2 Solution particulière de (E)

On distingue deux cas particuliers et une méthode générale :

Premier cas particulier : le second membre de l'équation (E) est de la forme :$f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, **où** $\alpha \in \mathbb{R}$ **et** $\mathrm{P(x)} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

On cherche la solution particulière sous la forme $y(x) = e^{\alpha x}x^s Q(x)$, où Q est un polynôme du même degré que le polynôme P, et l'entier s est choisi de la façon suivante :

$s = 0$ *si α n'est pas racine de l'équation caractéristique.*

$s = 1$ *si α est l'une des racines de l'équation caractéristique.*

$s = 2$ *si α est racine double de l'équation caractéristique .*

Les coefficients du polynôme Q sont déterminés par identification.

***Remarque* 6.4.** *Cette méthode s'applique notamment pour $\alpha = 0$, c'est à dire lorsque $f(x) = P(x)$.*

Deuxième cas particulier : *le second membre de l'équation (E) est de la forme :* $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, *où β, $\alpha \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme réel de degré n.*

On cherche la solution particulière sous la forme :

$y(x) = e^{\alpha x}x^s\left\{Q(x)\cos\beta x + R(x)\sin\beta x\right\}$, *où Q et R sont deux polynômes ayant le même degré que le polynôme P, et l'entier s est choisi de la façon suivante :*

$s = 0$ *si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.*

$s = 1$ *si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique. (alors $\alpha - i\beta$ est aussi racine de l'équation cartéristique). Les polynômes Q et R sont déterminés par identification.*

Principe de superposition : *Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière est donnée par $y = y_1 + y_2$, où y_i est une solution de $ay'' + by' + cy = f_i(x)$ (pour $i = 1, 2$).*

***Exemple* 106.** *Résoudre*

$$y'' + y = x + \cos 3x \quad sur \quad I = \mathbb{R}$$

a.) L'équation Homogène : L'équation caractéristique est $r^2 + 1$. La solution générale de (E.H) est $y = A\cos x + B\sin x$.

b.) Solution particulière associée à $y" + y = x$.

c.) Solution particulière associée à $y" + y = \cos 3x$. En remplaçant $y = A\cos 3x + B\sin 3x$ dans l'équation, on trouve $(A - 9A)\cos 3x + (B - 9B)\sin 3x = \cos 3x$, donc $A = -\frac{1}{8}$ et $B = 0$.

d.) Conclusion : La solution générale est $y = x - \frac{1}{8}\cos 3x + A\cos x + B\sin x$.

***Remarque* 6.5.** *Toute solution de* $(E.H)$ *nulle en un point de* I *est identiquement nulle sur* I.

***Remarque* 6.6.** *Deux solutions de* $(E.H)$ *qui coïncident en un point de* I, *sont identiques sur* I.

Bibliographie

[1] M. Chajia, Etapes vers l'Analyse, Exercices et Problèmes Résolus avec Rappels de Cours, Première année du premier cycle universitaire PC, Société d'Edition et de Diffusion Al Madariss.

[2] M. Chajia, S. El Morchid, Travaux Dirigés de Mathématique avec Résumé de Cours, Première année du premier cycle universitaire B.G.1, Diffusion Sochepress.

[3] Exo7, Cours de Mathématiques, Première année. *Lien : exo7.emath.fr*

[4] J. Mallet, M Miternique, Cours et Exercices de Mathématiques, Analyse, Première année de DEUG sciences économiques et commerciales, Ellipses.

[5] M. Rhoudaf, Cours d'Analyse, Filières SMPC I, A.U. 2015-2016, Faculté des Sciences, Meknès.