L'intégrale d'une fonction

PROF SAID ABARAGH

2024

Le calcul direct

Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et F une fonction primitive de f.

L'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Conséquence

Si f est dérivable sur $[a, b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,dx = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$

Techniques à retenir

Soit $c \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$.

1. $\displaystyle\int_a^b c\, dx = \Big[cx\Big]_a^b$
2. $\displaystyle\int_a^b x^n\, dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b$
3. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln(|x|)\Big]_a^b$
4. $\displaystyle\int_a^b e^x\, dx = \Big[e^x\Big]_a^b$
5. $\displaystyle\int_a^b e^{cx+d}\, dx = \left[\frac{1}{c}e^{cx+d}\right]_a^b$

Techniques à retenir

6. $\displaystyle\int_a^b \cos(cx+d)\,dx = \left[\frac{1}{c}\sin(cx+d)\right]_a^b$
7. $\displaystyle\int_a^b \sin(cx+d)\,dx = \left[-\frac{1}{c}\cos(cx+d)\right]_a^b$
8. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \Big[\tan(x)\Big]_a^b$
9. $\displaystyle\int_a^b U'(x)(U(x))^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1}(U(x))^{n+1}\right]_a^b$
10. $\displaystyle\int_a^b \frac{U'(x)}{U(x)}\,dx = \Big[\ln(|U(x)|)\Big]_a^b$
11. $\displaystyle\int_a^b U'(x)e^{U(x)}\,dx = \left[e^{U(x)}\right]_a^b$

L'aire d'un domaine du plan

Soit $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ deux courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- L'unité d'aire est $ua = ||\vec{i}|| \cdot ||\vec{j}||$.
- L'aire du domaine limité par $(\mathcal{C}_f)$ les droites $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b |f(x)|\, dx ua$$

- L'aire du domaine limité par $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les droites $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx ua$$

Exemples résolus

Exemple 1

$$\int_0^1 x^{19}\,dx = \Big[\frac{1}{19+1}x^{19+1}\Big]_0^1 = \Big[\frac{1}{20}x^{20}\Big]_0^1 = \frac{1}{20}1^{20} - \frac{1}{20}0^{20} = \frac{1}{20}$$

Exemple 2

$$\int_1^e \frac{2}{x}\,dx = \big[2\ln(x)\big]_1^e = 2\ln(e) - 2\ln(1) = 2\times 1 - 2\times 0 = 2$$

Exemple 3

$$\int_0^1 1 + e^x\,dx = \big[x + e^x\big]_0^1 = (1+e^1) - (0+e^0) = 1 + e - 1 = e$$

Exemples résolus

Exemple 4

$$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot 2xe^{x^2} = \int_0^1 \frac{1}{2}(x^2)'e^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$

Exemple 5

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx = \int_1^2 -\left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}}\,dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e$$

Exemple 6

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx = \int_1^e \ln'(x)\cdot\ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^e = \frac{1}{2}$$

Exemples résolus

Exemple 7

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln'(x)}{\ln(x)}\,dx = \big[\ln(\ln(x))\big]_e^{e^2} = \ln(2)$$

Exemple 8

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemple 9

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \Big[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big]_0^1 = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi) + \frac{1}{\pi}\cos(0) = \frac{2}{\pi}$$

Exemples résolus

Exemple 10

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \big[\tan(x)\big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1$$

Exemple 11

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2019}\, dx &= \int_1^{\sqrt{2}} (x^2-1)'(x^2-1)^{2019}\, dx \\ &= \left[\frac{1}{2020}(x^2-1)^{2020}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2020} \end{aligned}$$

Calcul par intégration par parties

Technique

Soit U et V des fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que U' et V' sont continues .

$$\int_a^b U'(x)V(x)\,dx = \Big[U(x)V(x)\Big]_a^b - \int_a^b U(x)V'(x)\,dx$$

Exemples résolus

Exemple 1

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$.

On pose $\begin{cases} U'(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ V(x) = \ln(x) \end{cases}$ Donc $\begin{cases} U(x) = -\dfrac{1}{x} \\ V'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Donc

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{x}\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{e} - \Big[\frac{1}{x}\Big]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

Exemples résolus

Exemple 2

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}\,dx$.

On pose $\begin{cases} U'(x) = e^{x} \\ V(x) = 2-x \end{cases}$ Donc $\begin{cases} U(x) = e^{x} \\ V'(x) = -1 \end{cases}$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}\,dx &= \left[(2-x)e^{x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{x}\,dx \\ &= 2-3e^{-1} + \left[e^{x}\right]_{-1}^{0} = 2-3e^{-1}+1-e^{-1} = 3-4e^{-1}\end{aligned}$$

Exemples résolus

Exemple 3

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 (x^2-1)\ln(x)\,dx$.

On pose $\begin{cases} U'(x) = x^2 - 1 \\ V(x) = \ln(x) \end{cases}$ Donc $\begin{cases} U(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x \\ V'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Donc

$$\int_1^2 (x^2-1)\ln(x)\,dx = \Big[\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\ln(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^2 - 1\,dx = \frac{2}{3}\ln(2) - \Big[\frac{1}{9}x^3 - x\Big]_1^2$$

$$= \frac{2}{3}\ln(2) - \left(\frac{8}{9} - 2\right) + \frac{1}{9} - 1 = \frac{2}{3}\ln(2) + \frac{2}{9}$$

Session Rattrapage 2023

On considère f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2)$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ dont l'unité est $1\,cm$.

Soit $\lambda \in]2,3[$.

1. En utilisant une intégration par parties , montrer que :

$$\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\ln(x-2)\,dx=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$$

2. Déduire en fonction de λ l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations : $y=1$, $x=\lambda$ et $x=3$.
3. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 2^+}\mathcal{A}(\lambda)$.

Session normale 1998

1. Vérifier que $\forall x > -1$: $\dfrac{x^2+x}{x+1} = x^2 - x + 2 - \dfrac{2}{x+1}$.
2. Déterminer , à l'aide d'une intégration par parties , la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (3x^2+1)\ln(x+1)\,dx$.

Examens nationaux

Session normale 1993

Déterminer , à l'aide d'une intégration par parties , la fonction primitive de la fonction $f : t \mapsto t\cos(t)$ sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en π .

Session rattrapage 2005

Montrer , à l'aide d'une intégration par parties , que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \ln(1+\cos(x))\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

للإشتراك معنا في حصص الدعم عن بعد

ارسل كلمة "عرض " للرقم واتساب 0779981040