

**ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২১**  
জাতীয় গণিত উৎসব  
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটেগরি: হাজার সেকেন্ডারি

সময়:

নাম (বাংলায়):

শ্রেণি (২০২০ সাল):

Name (In English):

Registration No:

Name of Institution:

Phone No:

এই উত্তরপত্রের নির্দিষ্ট স্থানে উত্তর লিখতে হবে। খসড়ার জন্য পৃথক কাগজ ব্যবহার করতে হবে এবং তা জমা দিতে হবে। সকল সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা হয়েছে। সবাইকে নিজ নিজ উত্তরপত্র জমা দিতে হবে।

নং	সমস্যা	উত্তর
1	<p>কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা <math>n</math>-এর জন্য <math>A(n)</math> হলো <math>n</math>-কে 11 দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগশেষ হয়, সেটা। আর <math>T(n) = A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(n)</math>। <math>A(T(2021))</math>-এর মান বের করো।</p> <p>For a positive integer <math>n</math>, let <math>A(n)</math> be the equal to the remainder when <math>n</math> is divided by 11 and let <math>T(n) = A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(n)</math>. Find the value of <math>A(T(2021))</math>.</p>	
2	<p><math>u</math> আর <math>v</math> হলো দুটো বাস্তব সংখ্যা। নিচের রাশিটার সর্বনিম্ন মানকে যদি <math>\sqrt{n}</math> আকারে লেখা যায়, তাহলে <math>10n</math>-এর মান বের করো।</p> $\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{(u-1)^2 + v^2}$ $+ \sqrt{u^2 + (v-1)^2} + \sqrt{(u-1)^2 + (v-1)^2}$ <p>Let <math>u</math> and <math>v</math> be real numbers. The minimum value of</p> $\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{(u-1)^2 + v^2}$ $+ \sqrt{u^2 + (v-1)^2} + \sqrt{(u-1)^2 + (v-1)^2}$ <p>can be written as <math>\sqrt{n}</math>. Find the value of <math>10n</math>.</p>	

3	<p>ত্রিভুজ <math>ABC</math>-এর অন্তঃকেন্দ্র <math>I</math>। <math>AC</math> আর <math>BC</math> রেখাংশের ওপর <math>E</math> আর <math>F</math> বিন্দু এমনভাবে নেওয়া হলো যেন <math>AE = AI</math> এবং <math>BF = BI</math> হয়। যদি <math>EF</math>, <math>CI</math>-এর লম্বদ্বিখণ্ডক হয়, তাহলে ডিগ্রিতে <math>\angle ACB</math>-এর মানকে <math>\frac{m}{n}</math> আকারে লেখা যায় যেখানে <math>m</math> আর <math>n</math> পরস্পর সহমৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। <math>m + n</math>-এর মান বের করো।</p> <p>Let <math>ABC</math> be a triangle with incenter <math>I</math>. Points <math>E</math> and <math>F</math> are on segments <math>AC</math> and <math>BC</math> respectively such that, <math>AE = AI</math> and <math>BF = BI</math>. If <math>EF</math> is the perpendicular bisector of <math>CI</math>, then <math>\angle ACB</math> in degrees can be written as <math>\frac{m}{n}</math> where <math>m</math> and <math>n</math> are coprime positive integers. Find the value of <math>m + n</math>.</p>	
4	<p><math>P(x)</math> হলো অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক সহগবিশিষ্ট <math>x</math>-এর একটা বহুপদী। যদি <math>P(1) = 5</math> আর <math>P(P(1)) = 177</math> হয়, তাহলে <math>P(10)</math>-এর সম্ভাব্য সব মানের যোগফল কত?</p> <p><math>P(x)</math> is a polynomial in <math>x</math> with non-negative integer coefficients. If <math>P(1) = 5</math> and <math>P(P(1)) = 177</math>, what is the sum of all possible values of <math>P(10)</math>?</p>	
5	<p>তুমি কতভাবে তিনটা 20-তলবিশিষ্ট ছক্কা মারতে পারবে যাতে ছক্কাগুলোতে ওঠা সংখ্যাগুলোর যোগফল ঠিক 42 হয়? এখানে কী কী সংখ্যা উঠছে, তার ক্রম গুরুত্বপূর্ণ। (মনে রেখো যে একটা 20-তলবিশিষ্ট ছক্কা একটা সাধারণ ছয়তলবিশিষ্ট ছক্কার মতোই। একমাত্র পার্থক্য হলো এটাতে 20-টা তল আছে।)</p> <p>How many ways can you roll three 20-sided dice such that the sum of the three rolls is exactly 42? Here the order of the rolls matters. (Note that a 20-sided die is very much like a regular six-sided die other than the fact that it has 20 faces instead of the regular six.)</p>	
6	<p><math>ABC</math> হলো একটা সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। <math>\angle BAC</math>-এর বহির্দ্বিখণ্ডক <math>BC</math> রেখাকে <math>N</math> বিন্দুতে ছেদ করে। <math>BC</math>-এর মধ্যবিন্দু হলো <math>M</math>। <math>P</math> আর <math>Q</math> হলো <math>AN</math> রেখার ওপর এমন দুটো বিন্দু যেন <math>\angle PMN = \angle MQN = 90^\circ</math>। যদি <math>PN = 5</math> আর <math>BC = 3</math> হয়, তাহলে <math>QA</math>-এর দৈর্ঘ্যকে <math>\frac{a}{b}</math> আকারে প্রকাশ করা যায় যেখানে <math>a</math> আর <math>b</math> হলো পরস্পর সহমৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। <math>(a + b)</math>-এর মান কত?</p> <p>Let <math>ABC</math> be an acute-angled triangle. The external bisector of <math>\angle BAC</math> meets the line <math>BC</math> at point <math>N</math>. Let <math>M</math> be the midpoint of <math>BC</math>. <math>P</math> and <math>Q</math> are two points on line <math>AN</math> such that, <math>\angle PMN = \angle MQN = 90^\circ</math>. If <math>PN = 5</math> and <math>BC = 3</math>, then the length of <math>QA</math> can be expressed as <math>\frac{a}{b}</math>, where <math>a</math> and <math>b</math> are coprime positive integers. What is the value of <math>(a + b)</math>?</p>	

7	<p>একটা বাইনারি স্ট্রিং হলো এমন একটা শব্দ যার মধ্যে খালি 0 আর 1 আছে। কোনো বাইনারি স্ট্রিংয়ে একটা 1-রান হলো এমন একটা সাবস্ট্রিং যেটাতে খালি 1 আছে এবং যেটাকে আর ডানে বা বামে বড় করা যায় না। কোনো একটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা <math>n</math>-এর জন্য <math>B(n)</math> হলো <math>n</math>-কে বাইনারিতে লিখলে এতে যতগুলো 1-রান থাকে, সেই সংখ্যাটা। উদাহরণস্বরূপ, <math>B(107) = 3</math> কারণ 107-কে বাইনারিতে লিখলে হয় 1101011 এবং এটাতে ঠিক তিনটা 1-রান আছে। নিচের রাশিটার মান কত?</p> $B(1) + B(2) + B(3) + \cdots + B(255)$ <p>A binary string is a word containing only 0s and 1s. In a binary string, a 1-run is a non-extendable substring containing only 1s. Given a positive integer <math>n</math>, let <math>B(n)</math> be the number of 1-runs in the binary representation of <math>n</math>. For example, <math>B(107) = 3</math> since 107 in binary is 1101011 which has exactly three 1-runs. What is the following expression equal to?</p> $B(1) + B(2) + B(3) + \cdots + B(255)$	
8	<p>শাকুর আর তিহাম একটা খেলা খেলছে। প্রথমে, শাকুর 1000-এর চেয়ে বড় না এমন একটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বাছাই করে। তারপরে তিহাম তার থেকে ছোট আরেকটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বাছাই করে। তারা এভাবে পালাক্রমে ছোট থেকে ছোটতর পূর্ণসংখ্যা বাছাই করতে থাকে যতক্ষণ পর্যন্ত কেউ 1 বাছাই না করে। কেউ 1 বাছাই করার পর ওই পর্যন্ত বাছাইকৃত সবগুলো সংখ্যা যোগ করা হয়। যে 1 বাছাই করে সে জেতে যদি আর কেবল যদি এই যোগফলটা একটা পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়। যদি যোগফলটা পূর্ণবর্গ না হয়, তাহলে অপরজন জেতে। এমন সম্ভাব্য সব <math>n</math>-এর যোগফল কত যেন যদি শাকুর <math>n</math> বলে খেলাটা শুরু করে, তাহলে তার একটা জেতার স্ট্র্যাটেজি আছে?</p> <p>Shakur and Tiham are playing a game. Initially, Shakur picks a positive integer not greater than 1000. Then Tiham picks a positive integer strictly smaller than that. Then they keep on doing this taking turns to pick progressively smaller and smaller positive integers until someone picks 1. After that, all the numbers that have been picked so far are added up. The person picking the number 1 wins if and only if this sum is a perfect square. Otherwise, the other player wins. What is the sum of all possible values of <math>n</math> such that if Shakur starts with the number <math>n</math>, he has a winning strategy?</p>	
9	<p>একটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা <math>n</math>-কে মনোরম বলা হবে যদি এটার কমপক্ষে 3-টা প্রকৃত উৎপাদক থাকে এবং এটা তার সবচেয়ে বড় তিনটা প্রকৃত উৎপাদকের যোগফলের সমান হয়। যেমন 6 একটা মনোরম সংখ্যা কারণ 6-এর সবচেয়ে বড় তিনটা প্রকৃত উৎপাদক হলো 3, 2, 1 এবং <math>6 = 3 + 2 + 1</math>। 3000-এর চেয়ে বড় না, এমন কতগুলো মনোরম সংখ্যা আছে?</p> <p>A positive integer <math>n</math> is called nice if it has at least 3 proper divisors and it is equal to the sum of its three largest proper divisors. For example, 6 is nice because its largest proper divisors are 3, 2, 1 and <math>6 = 3 + 2 + 1</math>. Find the number of nice integers not greater than 3000.</p>	

10	<p><math>A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8</math> একটা সুষম অষ্টভুজ। <math>P</math> এই অষ্টভুজের মধ্যে এমন একটা বিন্দু যেন <math>P</math> বিন্দু থেকে <math>A_1A_2</math>, <math>A_2A_3</math> আর <math>A_3A_4</math>-এর দূরত্ব যথাক্রমে 24, 26 আর 27। <math>A_1A_2</math>-এর দৈর্ঘ্যকে <math>a\sqrt{b} - c</math> আকারে লেখা যায় যেখানে <math>a</math>, <math>b</math> আর <math>c</math> ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং <math>b</math>, 1 বাদে অন্য কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যা দিয়ে বিভাজ্য না। <math>(a + b + c)</math>-এর মান কত?</p> <p><math>A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8</math> is a regular octagon. Let <math>P</math> be a point inside the octagon such that the distances from <math>P</math> to <math>A_1A_2</math>, <math>A_2A_3</math> and <math>A_3A_4</math> are 24, 26 and 27 respectively. The length of <math>A_1A_2</math> can be written as <math>a\sqrt{b} - c</math>, where <math>a</math>, <math>b</math> and <math>c</math> are positive integers and <math>b</math> is not divisible by any square number other than 1. What is the value of <math>(a + b + c)</math>?</p>	
11	<p>ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার কতগুলো কোয়াদ্রুপল <math>(a, b, m, n)</math> আছে যেন নিচের সবগুলো বাক্যই সত্যি হয়?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>a, b &lt; 5000</math></li> <li>2. <math>m, n &lt; 22</math></li> <li>3. <math>\gcd(m, n) = 1</math></li> <li>4. <math>(a^2 + b^2)^m = (ab)^n</math></li> </ol> <p>How many quadruples of positive integers <math>(a, b, m, n)</math> are there such that all of the following statements hold?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>a, b &lt; 5000</math></li> <li>2. <math>m, n &lt; 22</math></li> <li>3. <math>\gcd(m, n) = 1</math></li> <li>4. <math>(a^2 + b^2)^m = (ab)^n</math></li> </ol>	
12	<p>একটা ফাংশন <math>g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}</math>-কে বিশেষণ বলা হবে যদি যেকোনো দুটো পূর্ণসংখ্যা <math>m</math> আর <math>n</math>-এর জন্য <math>g(m) + g(n) &gt; \max(m^2, n^2)</math> হয়। <math>f</math> এমন একটা বিশেষণ ফাংশন যেন <math>f(1) + f(2) + \dots + f(30)</math>-এর মান সর্বনিম্ন হয়। <math>f(25)</math>-এর সর্বনিম্ন সম্ভাব্য মান বের করো।</p> <p>A function <math>g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}</math> is called adjective if <math>g(m) + g(n) &gt; \max(m^2, n^2)</math> for any pair of integers <math>m</math> and <math>n</math>. Let <math>f</math> be an adjective function such that the value of <math>f(1) + f(2) + \dots + f(30)</math> is minimized. Find the smallest possible value of <math>f(25)</math>.</p>	