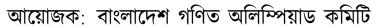


ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২১

জাতীয় গণিত উৎসব





ক্যাটেগরি: জুনিয়র	সময়:
নাম (বাংলায়):	শ্ৰেণি (২০২০ সাল):
Name (In English):	Registration No:
Name of Institution:	Phone No:

এই উত্তরপত্রের নির্দিষ্ট স্থানে উত্তর লিখতে হবে। খসড়ার জন্য পৃথক কাগজ ব্যবহার করতে হবে এবং তা জমা দিতে হবে। সকল সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা হয়েছে। সবাইকে নিজ নিজ উত্তরপত্র জমা দিতে হবে।

নং	সমস্যা	উত্তর
1	মিতা একটা সারিতে 2024-টা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এমনভাবে লিখেছে যাতে পরপর যেকোনো চারটা সংখ্যার গুণফল 2100 হয়। সারির প্রথম সংখ্যাটা 7, 1011-তম সংখ্যাটা 5, 2014-তম সংখ্যাটা 20। সারির সবার শেষের সংখ্যাটা কত? Mita wrote 2024 positive integers in a row such that the product of any four adjacent numbers is 2100. The first number is 7, the 1011th number is 5, the 2014th number is 20. What is the last number in the row?	
2	নিচের সমীকরণটার সব সমাধানের যোগফল বের করো। $5^{2r+1}+5^2=5^r+5^{r+3}$ Find the sum of all solutions of the equation, $5^{2r+1}+5^2=5^r+5^{r+3}$	
3	মনে করো, r একটা ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। $[r]$ দিয়ে আমরা r -এর পূর্ণসাংখ্যিক অংশ বোঝাই আর $\{r\}$ দিয়ে আমরা r -এর ভগ্নাংশিক অংশটা বোঝাই। যেমন যদি $r=32.86$ হয়, তাহলে $\{r\}=0.86$ এবং $[r]=32$ । এমন সব ধনাত্মক সংখ্যা r -এর যোগফল কত যদি $25\{r\}+[r]=125$ হয়? Let r be a positive real number. Denote by $[r]$ the integer part of r and by $\{r\}$ the fractional part of r . For example, if $r=32.86$, then $\{r\}=0.86$ and $[r]=32$. What is the sum of all positive numbers r satisfying $25\{r\}+[r]=125$?	

4	ABC একটা সূক্ষাকোণী ত্রিভুজ। P আর Q হলো AB রেখাংশের ওপর এমন দুটো বিন্দু যেন $CP\perp AB$ হয় এবং CQ , $\angle ACB$ -কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। যদি $AC-CB=18$ আর $AP-PB=12$ হয়, তাহলে $AQ-QB$ কত?	
	ABC is an acute-angled triangle. Let P and Q be points on segment AB such that $CP \perp AB$ and CQ bisects $\angle ACB$. Given that $AC - CB = 18$ and $AP - PB = 12$, find $AQ - QB$.	
5	1 থেকে 19 বছরবিশিষ্ট উনিশজন শিশু বৃত্তাকারে দাঁড়িয়ে আছে। পাশাপাশি দাঁড়ানো প্রতি জোড়া শিশুর বয়সের পার্থক্যগুলো রেকর্ড করা হলো। এই 19-টা রেকর্ডেড সংখ্যার যোগফলের সম্ভাব্য সর্বোচ্চ মান কত?	
	Nineteen children, aged 1 to 19, respectively, are standing in a circle. The difference between the ages of each pair of adjacent children is recorded. What is the maximum value of the sum of these 19 recorded numbers?	
6	$ABCD$ একটা সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম যেন $AD=BC,\ AB=3$ আর $CD=8$ । E এমন একটা বিন্দু যেন $AE\perp EC$ এবং $BC=EC$ । AE -এর দৈর্ঘ্যকে $a\sqrt{b}$ আকারে লেখা যায় যেখানে a আর b পূর্ণসংখ্যা এবং $b,\ 1$ বাদে অন্য কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যা দিয়ে বিভাজ্য না। $(b-a)$ -এর মান বের করো।	
	$ABCD$ be an isosceles trapezium such that $AD = BC$, $AB = 3$, and $CD = 8$. A point E on the plane is such that $AE \perp EC$ and $BC = EC$. The length of AE can be expressed as $a\sqrt{b}$ where a and b are integers and b is not divisible by any square number other than 1. Find the value of $(b-a)$.	
7	একটা সংখ্যাকে বিলম্বী-কিশোর বলা হবে যদি সেটা তার অঙ্কণ্ডলোর যোগফলের 19 গুণ হয়। কতগুলো বিলম্বী-কিশোর সংখ্যা আছে?	
	A late-teen number is a positive integer which is 19 times the sum of its own digits. Determine how many late-teen numbers are there.	
8	$ABCD$ একটা বর্গ যার বাহুর দৈর্ঘ্য 6 । E আর F বিন্দু যথাক্রমে \overrightarrow{DA} আর \overrightarrow{DC} রশ্মির ওপরে এমনভাবে আছে যেন $E,\ B$ আর F বিন্দুগুলো সমরেখ এবং $EF=18$ । $\frac{1}{DE}+\frac{1}{DF}$ -এর মানকে $\frac{a}{b}$ আকারে লেখা যায় যেখানে a আর b সহমৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $(a+10b)$ -এর মান কত?	
	Let \overrightarrow{ABCD} be a square with side length 6. Points E and F are on ray \overrightarrow{DA} and \overrightarrow{DC} respectively such that E , B and F are collinear and $EF = 18$. The value of $\frac{1}{DE} + \frac{1}{DF}$ can be written as as $\frac{a}{b}$, where a and b are coprime positive integers. What is the value of $(a+10b)$?	

9	এক জোড়া অসমান পূর্ণসংখ্যাকে বন্ধুসুলভ বলা হবে যদি তারা পরস্পর সহমৌলিক না হয়। 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 সংখ্যাগুলো দিয়ে সর্বোচ্চ দুটো নিম্ছেদ বন্ধুসুলভ জোড়া বানানো সম্ভব। যেমন $(2,4)$ আর $(3,6)$ । $1,2,3\cdots,50$ সংখ্যাগুলো দিয়ে কতগুলো নিম্ছেদ বন্ধুসুলভ জোড়া বানানো সম্ভব? A pair of distinct integers are called friendly if they are not coprime. Using the numbers 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , at most 2 disjoint friendly pairs can be formed, for example: $(2,4)$ and $(3,6)$. How many disjoint friendly pairs can be formed using the numbers $1,2,3,\cdots,50$?	
	দুটো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা a আর b এর জন্য	
10	$0 < \left \frac{a}{b} - \frac{3}{5} \right \le \frac{1}{150}$	
	b এর সর্বনিম্ন সম্ভাব্য মান কত?	
	For positive integers a and b ,	
	$0 < \left \frac{a}{b} - \frac{3}{5} \right \le \frac{1}{150}$	
	What is the smallest possible value of b ?	
	সিনথিয়া পোকেমন পছন্দ করে এবং সে পারলে সবগুলো পোকেমনই ধরতে চায়। জয়ের রাস্তায় মোট 50-টা পোকেমন আছে। সিনথিয়া এই পোকেমনগুলোর মধ্যে যত সম্ভব বেশি সংখ্যক পোকেমন ধরতে চায়। কিন্তু সে এমন দুটো পোকেমন কখনোই ধরতে পারবে না যারা পরস্পর শক্র। কিছুক্ষণ ঘুরে বেড়ানোর পর সে নিচের দুটো জিনিস বুঝতে পারল। 1. জয়ের রাস্তার প্রতিটা পোকেমনেরই ঠিক দুটো করে শক্র আছে। 2. যেহেতু সে পরস্পর শক্র এমন দুটো পোকেমন কখনোই ধরতে পারবে না, তাই সে যতই চেষ্টা করুক না কেন, জয়ের রাস্তায় সে সর্বোচ্চ n -টা পোকেমন ধরতে পারবে। n -এর সম্ভাব্য সব মানের যোগফল কত?	
11	Cynthia loves Pokemon and she wants to catch them all. In Victory Road, there are a total of 50 Pokemon. Cynthia wants to catch as many of them as possible. However, she can not catch any two Pokemon that are enemies with each other. After exploring around for a while, she makes the following two observations. 1. Every Pokemon in Victory Road is enemies with exactly two other Pokemon. 2. Due to her inability to catch Pokemon that are enemies with one another, the maximum number of Pokemon that she can catch is equal to n. What is the sum of all possible values of n?	

 $1 < N \le 2021$ একটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $1,2,3,\cdots,N$ সংখ্যাগুলো একটা সারিতে এই ক্রমে সাজানো আছে। জয়দীপ আর মুরসালিন একটা খেলা খেলাছে যেখানে তারা পালাক্রমে সারির যেকোনো দুটো পরপর সংখ্যা বাছাই করে, মুছে দেয় এবং তাদের যোগফল বা গুণফলটা লিখে দেয়। ফলে প্রতি চালে সংখ্যাগুলোর সংখ্যা ঠিক এক করে কমে যায়। খেলায় প্রথম চালটা জয়দীপ দেয়। খেলাটা শেষ হয় যখন খালি একটা সংখ্যা বাকি থাকে এবং জয়দীপ জেতে যদি আর কেবল যদি সেই সংখ্যাটা বিজোড় হয়। N-এর সম্ভাব্য যেসব মানের জন্য জয়দীপের একটা জেতার স্ট্র্যাটেজি আছে, তাদের যোগফল কত?

12

Let $1 < N \le 2021$ be a positive integer. The numbers $1, 2, 3, \cdots, N$ are written in a row in this order. Joydip and Mursalin play a game where they each take turns erasing two consecutive numbers from the board and replacing them with either their sum or their product. As a result, the number of numbers goes down by one in each turn. Joydip goes first. The game ends when there is only a single number left and Joydip wins if and only if this number is odd. What is the sum of all possible values of N for which Joydip has a winning strategy?