ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২২
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: প্রাইমারি
Category: Primary

সময়: ১ ঘণ্টা ৩০ মিনিট
Time: 1 hour 30 minutes

সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে।প্রতিটি সমস্যার পূর্ণমান তার পাশে দেওয়া আছে।প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার বিস্তারিত সমাধান মূল উত্তরপত্রে রাফসহ লিখতে হবে। রাফ করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পিছনের অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

Problems are sorted according to their difficulty. Full marks are written beside the problems. You have to write the detailed solutions in the main answer script along with roughs. You can use the back side of the answer script for roughs. If you take extra page, then writing your name and registration number on that page is mandatory.

সমস্যা ১: একটি লাইনে 50 জন মানুষ দাঁড়িয়ে আছে, এদের কয়েকজন সত্যবাদী যারা সবসময় সত্য বলে এবং বাকিরা মিথ্যাবাদী যারা সবসময় মিথ্যা বলে। লাইনের পিছন থেকে প্রথম জন বলল, ''আমার সামনে সবাই মিথ্যাবাদী'', দ্বিতীয় জন বলল ''আমার পিছনে সবাই মিথ্যাবাদী'', তৃতীয় জন বলল, ''আমার সামনে সবাই মিথ্যাবাদী'', চতুর্থ জন বলল, ''আমার পিছনে সবাই মিথ্যাবাদী'' ...। অর্থাৎ পেছন থেকে প্রথম, তৃতীয়, পঞ্চম, $\cdots$, 49-তম সবাই বলল ''আমার সামনে সবাই মিথ্যাবাদী'' এবং পেছন থেকে দ্বিতীয়, চতুর্থ, ষষ্ঠ, $\cdots$, 50-তম সবাই বলল ''আমার পিছনে সবাই মিথ্যাবাদী''। সর্বোচ্চ কত জন সত্যবাদী, সেক্ষেত্রে সত্যবাদী কারা কারা?

(8 মার্ক)

Problem 1: In a line 50 people are standing, some of them are truthful who always speak the truth and remaining are liars who always tell lies. The first person from the back of the line says, "Everyone in front of me is a liar", the second person says, "Everyone behind me is a liar", the third person says, "Everyone in front of me is a liar", the fourth person says, "Everyone behind me is a liar", ... In other words, the first, third, fifth, $\cdots$, 49-th person from the back say, "Everyone in front of me is a liar" and the second, forth, sixth, $\cdots$, 50-th person from the back say, "Everyone behind me is a liar". At most how many of them are truthful, and in that case who are the truthful?

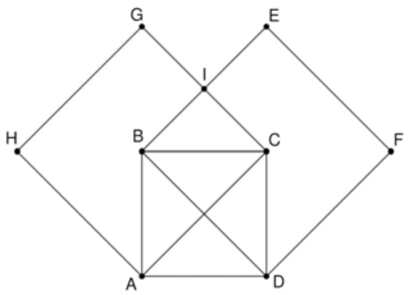
(8 marks)

সমস্যা ২: চিত্রে $ABCD, BDFE, ACGH$ তিনটি বর্গ। $ADFEIGH$ সম্পূর্ণ বহুভুজটির ক্ষেত্রফল 750 বর্গ একক হলে BD এর দৈর্ঘ্য কত?

(8 মার্ক)

Problem 2: In the figure $ABCD, BDFE, ACGH$ are three squares. If the area of the whole polygon $ADFEIGH$ is 750 square units, what is the length of BD?

(8 marks)



সমস্যা ৩: জাহিন 1 থেকে 2000 এর মধ্যে সবগুলো সংখ্যা একটি সারিতে লিখলো। তারপর প্রতিটা সংখ্যার নিচে ওই সংখ্যার ডানে যতগুলো 0 আছে তা লিখলো। যেমন: 1010 এর নিচে 1, 500 এর নিচে 2, 7 এর নিচে 0 ইত্যাদি। এই নতুন সারির সবগুলো সংখ্যার যোগফল কতো?

(10 মার্ক)

Problem 3: Zahin writes all the numbers between 1 and 2000 in a row. Then under every number he writes the number of 0 at the right of that number. For example: 1 under 1010, 2 under 500, 0 under 7 etc. What is the sum of all the numbers in this new row?

(10 marks)

সমস্যা ৪: a, b দুইটি ধনাত্বক পূর্ণসংখ্যা যেন এদের মধ্যে কমপক্ষে একটি পূর্ণবর্গ হয়। এদের ল.সা.গু. (লঘিষ্ট সাধারণ গুনিতক) 72 হলে এমন কতগুলি (a, b) রয়েছে $((x, y)$ এবং (y, x) ভিন্ন) ? একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হল এমন সংখ্যা যাকে দুইটি একই সংখ্যার গুণফল হিসেবে লেখা যায়। যেমনঃ $25 = 5 \times 5, 81 = 9 \times 9, 1 \times 1 = 1$।

(10 মার্ক)

Problem 4: a, b are two positive integers such that at least one of them is a perfect square. If the LCM (Least Common Multiple) of the two numbers is 72, then how many such (a, b) exists ((x, y) and (y, x) are different)? A perfect square is a number that can be expressed as the product of two equal numbers. For example: $25 = 5 \times 5, 81 = 9 \times 9, 1 \times 1$.

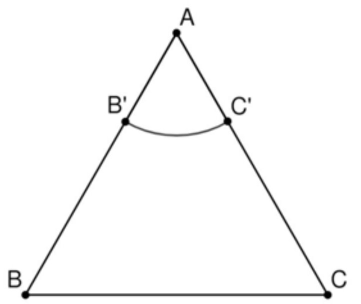
(10 marks)

সমস্যা ৫: $\triangle ABC$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার বাহুর দৈর্ঘ্য 20 একক। A কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তচাপ আঁকা হল যার ব্যাসার্ধ 5 একক। চাপটি AB এবং AC কে যথাক্রমে B' এবং C' বিন্দুতে ছেদ করে। একটি 1 একক ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার চাকা যদি $BB'C'C$ সম্পূর্ণ পথ অতিক্রম করে তাহলে কতবার চাকাটি ঘুরবে?

(10 মার্ক)

Problem 5: $\triangle ABC$ is an equilateral triangle that has side-length 20 unit. An arc is drawn with the center at A and radius 5 unit. The arc intersects AB and AC at points B' and C' respectively. If a circular wheel with a radius of 1 unit travels the whole path $BB'C'C$, then how many times will the wheel rotate?

(10 marks)



সমস্যা ৬: একটি প্যালিন্ড্রোম সংখ্যা হল এমন সংখ্যা যাকে উল্টিয়ে লিখলেও একই হয়। যেমনঃ 12321, 39093 ইত্যাদি।

A. কত গুলো 5 অঙ্কের প্যালিন্ড্রোম সংখ্যা রয়েছে?

B. কত গুলো 7 অঙ্কের প্যালিন্ড্রোম সংখ্যা রয়েছে, যারা 3 দ্বারা বিভাজ্য?

(10 মার্ক)

Problem 6: A Palindrome number is a number which stays the same if the digits are written in reverse. For example: 12321, 39093 etc.

A. How many 5 digit Palindrome numbers are there?

B. How many 7 digit Palindrome numbers are there, which are also divisible by 3?

(10 মার্ক)

সমস্যা ৭: তাহনিক কে কোন ধনাত্বক পূর্ণসংখ্যা n দিলে সে এর সাথে সহমৌলিক সকল সংখ্যা লিখে দেয়, অর্থাৎ যাদের সাথে n এর গ.সা.গু. (গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক) 1। যেমন, $n = 10$ দিলে সে $1, 3, 7, 9, 11, 13, \cdots$ লিখে দিতে থাকে। তাহনিককে কোনো n দিলে তার লিখে দেওয়া সংখ্যাগুলো যদি একটি সমান্তর অনুক্রম তৈরী করে, তবে n এর মান কী কী হতে পারে? একটি সমান্তর অনুক্রমে পরপর দুইটি সংখ্যার অন্তর সবসময় একই মান হয়। যেমনঃ $3, 7, 11, 15, 19, \cdots$

(12 মার্ক)

Problem 7: If Thanic is given any positive integer n, he writes down all the integers co-prime to the given number - meaning numbers with which the GCD (Greatest Common Divisor) of n is 1. For example, if $n = 10$ is given, he keeps writing $1, 3, 7, 9, 11, 13, \cdots$. If after giving Thanic some integer n the numbers he writes down form an arithmetic progression, then what are the possible values for n? In an arithmetic progression the difference between two consecutive terms are always the same. For example: $3, 7, 11, 15, 19, \cdots$

(12 marks)

সমস্যা ৮: প্রমাণ কর যে $x^4 - y^4 = x^3 + x \times y^2 - 26$ হলে x, y উভয়েই ধনাত্বক পূর্ণসংখ্যা হতে পারে না। এখানে যেকোন সংখ্যা z এর জন্য $z^4 = z \times z \times z \times z$ বোঝায়, $z^3 = z \times z \times z$ বোঝায় এবং $z^2 = z \times z$ বোঝায়।

(12 মার্ক)

Problem 8: Prove that if $x^4 - y^4 = x^3 + x \times y^2 - 26$, then both x, y cannot be positive integers. Here for any number z, $z^4 = z \times z \times z \times z$, $z^3 = z \times z \times z$, and $z^2 = z \times z$.

(12 marks)

ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২২
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: জুনিয়র
Category: Junior

সময়: ১ ঘণ্টা ৩০ মিনিট
Time: 1 hour 30 minutes

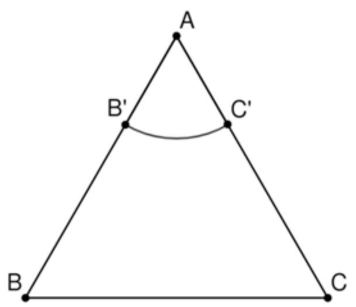
সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে।প্রতিটি সমস্যার পূর্ণমান তার পাশে দেওয়া আছে।প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার বিস্তারিত সমাধান মূল উত্তরপত্রে রাফসহ লিখতে হবে। রাফ করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পিছনের অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।
Problems are sorted according to their difficulty. Full marks are written beside the problems. You have to write the detailed solutions in the main answer script along with roughs. You can use the back side of the answer script for roughs. If you take extra page, then writing your name and registration number on that page is mandatory.

সমস্যা ১: $\triangle ABC$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার বাহুর দৈর্ঘ্য 20 একক। A কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তচাপ আঁকা হল যার ব্যাসার্ধ 5 একক। চাপটি AB এবং AC কে যথাক্রমে B' এবং C' বিন্দুতে ছেদ করে। একটি 1 একক ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার চাকা যদি $BB'C'C$ সম্পূর্ণ পথ অতিক্রম করে তাহলে কতবার চাকাটি ঘুরবে?

(8 মার্ক)

Problem 1: $\triangle ABC$ is an equilateral triangle that has side-length 20 unit. An arc is drawn with the center at A and radius 5 unit. The arc intersects AB and AC at points B' and C' respectively. If a circular wheel with a radius of 1 unit travels the whole path $BB'C'C$, then how many times will the wheel rotate?

(8 marks)



সমস্যা ২: একটি প্যালিন্ড্রোম সংখ্যা হল এমন সংখ্যা যাকে উল্টিয়ে লিখলেও একই হয়। যেমনঃ 12321, 39093 ইত্যাদি।

A. কত গুলো 5 অঙ্কের প্যালিন্ড্রোম সংখ্যা রয়েছে?

B. কত গুলো 7 অঙ্কের প্যালিন্ড্রোম সংখ্যা রয়েছে, যারা 3 দ্বারা বিভাজ্য?

(8 মার্ক)

Problem 2: A Palindrome number is a number which stays the same if the digits are written in reverse. For example: 12321, 39093 etc.

A. How many 5 digit Palindrome numbers are there?

B. How many 7 digit Palindrome numbers are there, which are also divisible by 3?

(8 মার্ক)

সমস্যা ৩: তাহনিক কে কোন ধনাত্বক পূর্ণসংখ্যা n দিলে সে এর সাথে সহমৌলিক সকল সংখ্যা লিখে দেয়, অর্থাৎ যাদের সাথে n এর গ.সা.গু. (গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক) 1। যেমন, $n = 10$ দিলে সে $1, 3, 7, 9, 11, 13, \cdots$ লিখে দিতে থাকে। তাহনিককে কোনো n দিলে তার লিখে দেওয়া সংখ্যাগুলো যদি একটি সমান্তর অনুক্রম তৈরী করে, তবে n এর মান কী কী হতে পারে? একটি সমান্তর অনুক্রমে পরপর দুইটি সংখ্যার অন্তর সবসময় একই মান হয়। যেমনঃ $3, 7, 11, 15, 19, \cdots$

(10 মার্ক)

Problem 3: If Thanic is given any positive integer n, he writes down all the integers co-prime to the given number - meaning numbers with which the GCD (Greatest Common Divisor) of n is 1. For example, if $n = 10$ is given, he keeps writing $1, 3, 7, 9, 11, 13, \cdots$. If after giving Thanic some integer n the numbers he writes down form an arithmetic progression, then what are the possible values for n? In an arithmetic progression the difference between two consecutive terms are always the same. For example: $3, 7, 11, 15, 19, \cdots$

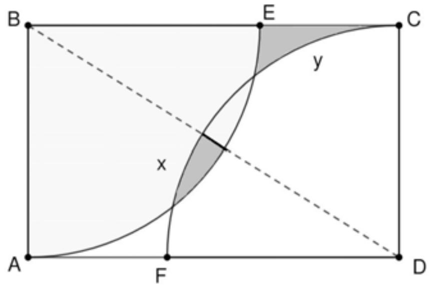
(10 marks)

সমস্যা ৪: চিত্রে $ABCD$ আয়তে $AB = BE, CD = DF$ এবং $AF = 3$ একক। ছায়াকৃত ক্ষেত্রদুইটির ক্ষেত্রফল যথাক্রমে x ও y, যেখানে $y - x = \frac{80 - 25\pi}{4}$ বর্গ একক। $ABCD$ আয়তের বাহুর দৈর্ঘ্যগুলো পূর্ণসংখ্যা হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(10 মার্ক)

Problem 4: In rectangle $ABCD$ in the figure, $AB = BE, CD = DF$ and $AF = 3$ units. The areas of the two shaded regions are x and y respectively, where $y - x = \frac{80 - 25\pi}{4}$ square units. If the sides of the rectangle have integer lengths, then find its area.

(10 marks)



সমস্যা ৫: বাস্তব x এর জন্য সকল সমাধান নির্ণয় করঃ $\lfloor x \rfloor^3 - 7\left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor = -13$। এখানে $\lfloor x \rfloor$ হল ফ্লোর ফাংশন, যা দ্বারা x এর চেয়ে সমান বা ছোট সবচেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যা বোঝায়। যেমনঃ $\lfloor 2.1 \rfloor = 2, \lfloor 3 \rfloor = 3, \lfloor -1.6 \rfloor = -2$।

(10 মার্ক)

Problem 5: Find all solutions for real x: $\lfloor x \rfloor^3 - 7\left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor = -13$. Here $\lfloor x \rfloor$ is the floor function, which represents the largest integer less than or equal to x. For example: $\lfloor 2.1 \rfloor = 2, \lfloor 3 \rfloor = 3, \lfloor -1.6 \rfloor = -2$.

(10 marks)

সমস্যা ৬: প্রত্যয় ও পায়েল দুইজনের কাছে দুইটি সংখ্যা যথাক্রমে n এবং m আছে যেখানে $n > m$। প্রতিদিন, প্রত্যয় তার সংখ্যাটিকে 2 দিয়ে গুণ করে 2 বিয়োগ করে, আর পায়েল তার সংখ্যাটিকে 2 দিয়ে গুণ করে 2 যোগ করে। অর্থাৎ, প্রথমদিন তাদের সংখ্যা দুইটি হবে যথাক্রমে $(2n-2)$ এবং $(2m+2)$। এমন ক্ষুদ্রতম পূর্ণসংখ্যা x প্রমানসহ নির্ণয় কর যেন $n-m \geq x$ হলে প্রতিদিনই প্রত্যয়ের সংখ্যা পায়েলের সংখ্যা থেকে বড় হবে।

(10 মার্ক)

Problem 6: Pratyya and Payel have a number each, n and m respectively, where $n > m$. Everyday, Pratyya multiplies his number by 2 and then subtracts 2 from it, and Payel multiplies his number by 2 and then add 2 to it. In other words, on the first day their numbers will be $(2n-2)$ and $(2m+2)$ respectively. Find minimum integer x with proof such that if $n-m \geq x$, then Pratyya's number will be larger than Payel's number everyday.

(10 marks)

সমস্যা ৭: একটি n আকারের ত্রিভুজ হচ্ছে অনেকগুলো বৃত্তাকার কয়েনের সমষ্টি যাদের একটি সমবাহু ত্রিভুজাকারে রাখা হয়েছে এবং প্রতি বাহু বরাবর nটি কয়েন রয়েছে। যেমন চিত্রে 5 আকারের ত্রিভুজ দেখানো হয়েছে। শুরুতে সবগুলো কয়েনের হেডস সাইডটি উপরের দিকে রয়েছে। তুমি একবারে পরস্পর স্পর্শ করে এমন তিনটি কয়েনকে উল্টিয়ে রাখতে পারো।

A. প্রমাণ কর, $n = 3$ হলে, তুমি এভাবে বেশ কয়েকবার তিনটি করে কয়েন উল্টিয়ে সবগুলো কয়েনের টেইলস সাইড উপরে আনতে পারবে।

B. প্রমাণ কর, n সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে, তুমি এভাবে বেশ কয়েকবার তিনটি করে কয়েন উল্টিয়ে সবগুলো কয়েনের টেইলস সাইড উপরে আনতে পারবে।

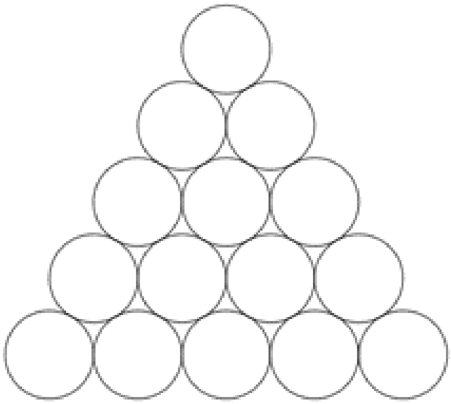
(12 মার্ক)

Problem 7: A triangle of size n is a collection of a number of circular coins which are placed in the shape of an equilateral triangle and there are n coins along each side. For example, in the figure a triangle of size 5 is shown. At first the Heads side of every coin is faced up. At a time, you can take three coins that are touching each other and flip their side.

A. Prove that, if $n = 3$, you can make the Tails side of all the coins faced up after flipping three coins at a time in this method a few times.

B. Prove that, if the number n is divisible by 3, you can make the Tails side of all the coins faced up after flipping three coins at a time in this method a few times.

(12 marks)



সমস্যা ৮: প্রমাণসহ সকল জোড় ধনাত্বক পূর্ণসংখ্যা বের কর যাদেরকে দুইটি যৌগিক বেজোড় সংখ্যার যোগফল হিসেবে লেখা যায় না।

(12 মার্ক)

Problem 8: Find, with proof, all even positive integers that cannot be expressed as the sum of two composite odd numbers.

(12 মার্ক)

ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২২
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: সেকেন্ডারি
Category: Secondary

সময়: ২ ঘণ্টা
Time: 2 hours

সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে।প্রতিটি সমস্যার পূর্ণমান তার পাশে দেওয়া আছে।প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার বিস্তারিত সমাধান মূল উত্তরপত্রে রাফসহ লিখতে হবে। রাফ করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পিছনের অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।
Problems are sorted according to their difficulty. Full marks are written beside the problems. You have to write the detailed solutions in the main answer script along with roughs. You can use the back side of the answer script for roughs. If you take extra page, then writing your name and registration number on that page is mandatory.

সমস্যা ১: বাস্তব x এর জন্য সকল সমাধান নির্ণয় করঃ $\lfloor x \rfloor^3 - 7\left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor = -13$। এখানে $\lfloor x \rfloor$ হল ফ্লোর ফাংশন, যা দ্বারা x এর চেয়ে সমান বা ছোট সবচেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যা বোঝায়। যেমনঃ $\lfloor 2.1 \rfloor = 2, \lfloor 3 \rfloor = 3, \lfloor -1.6 \rfloor = -2$।

(8 মার্ক)

Problem 1: Find all solutions for real x: $\lfloor x \rfloor^3 - 7\left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor = -13$. Here $\lfloor x \rfloor$ is the floor function, which represents the largest integer less than or equal to x. For example: $\lfloor 2.1 \rfloor = 2, \lfloor 3 \rfloor = 3, \lfloor -1.6 \rfloor = -2$.

(8 marks)

সমস্যা ২: $\triangle ABC$ এ $\angle BAC$ সমকোণ। BP এবং CQ যথাক্রমে $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডক যা AC এবং AB কে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে। P এবং Q থেকে BC এর উপর দুইটি লম্ব PM এবং QN আঁকা হল। $\angle MAN$ এর মান প্রমাণ সহ নির্ণয় কর।

(8 মার্ক)

Problem 2: In $\triangle ABC$, $\angle BAC$ is a right angle. BP and CQ are bisectors of $\angle B$ and $\angle C$ respectively, which intersect AC and AB at P and Q respectively. Two perpendicular segments PM and QN are drawn on BC from P and Q respectively. Find the value of $\angle MAN$ with proof.

(8 marks)

সমস্যা ৩: প্রমাণ কর যে $3, 4, 5, \cdots, 3^5$ সংখ্যাগুলোকে দুইটি নিশ্ছেদ সেটে ভাগ করা হলে যেকোন একটি সেটে এমন a, b, c পাওয়া যাবে যেন $ab = c$ হয়। (a, b, c এর সব গুলো ভিন্ন নাও হতে পারে)

(10 মার্ক)

Problem 3: Prove that if the numbers $3, 4, 5, \cdots, 3^5$ are partitioned into two disjoint sets, then in one of the sets the numbers a, b, c can be found such that $ab = c$. (a, b, c may not be pairwise distinct)

(10 marks)

সমস্যা ৪: প্রত্যয় ও পায়েল দুইজনের কাছে দুইটি সংখ্যা যথাক্রমে n এবং m আছে যেখানে $n > m$। প্রতিদিন, প্রত্যয় তার সংখ্যাটিকে 2 দিয়ে গুণ করে 2 বিয়োগ করে, আর পায়েল তার সংখ্যাটিকে 2 দিয়ে গুণ করে 2 যোগ করে। অর্থাৎ, প্রথমদিন তাদের সংখ্যা দুইটি হবে যথাক্রমে $(2n-2)$ এবং $(2m+2)$। এমন ক্ষুদ্রতম পূর্ণসংখ্যা x প্রমানসহ নির্ণয় কর যেন $n - m \geq x$ হলে প্রতিদিনই প্রত্যয়ের সংখ্যা পায়েলের সংখ্যা থেকে বড় হবে।

(10 মার্ক)

Problem 4: Pratyya and Payel have a number each, n and m respectively, where $n > m$. Everyday, Pratyya multiplies his number by 2 and then subtracts 2 from it, and Payel multiplies his number by 2 and then add 2 to it. In other words, on the first day their numbers will be $(2n-2)$ and $(2m+2)$ respectively. Find minimum integer x with proof such that if $n-m \geq x$, then Pratyya's number will be larger than Payel's number everyday.

(10 marks)

সমস্যা ৫: একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ $\triangle ABC$ এ BC এর মধ্যবিন্দু M। B এবং C হতে AC এবং AB এর উপর লম্ব যথাক্রমে BE এবং CF আঁকা হল যেন E এবং F যথাক্রমে AC এবং AB এর উপর থাকে। EF এর মধ্যবিন্দু N। MN, AB কে K বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর B, K, E, M বিন্দু চারটি একই বৃত্তের উপর অবস্থিত।

(10 মার্ক)

Problem 5: In an acute triangle $\triangle ABC$, the midpoint of BC is M. Perpendicular lines BE and CF are drawn respectively on AC from B and on AB from C such that E and F lie on AC and AB respectively. The midpoint of EF is N. MN intersects AB at K. Prove that, the four points B, K, E, M lie on the same circle.

(10 marks)

সমস্যা ৬: প্রায় 5 বছর আগে, জয়দীপ 2017 সংখ্যাটি নিয়ে গবেষণা করছিল। সে বুঝতে পারে যে 2017 একটি মৌলিক সংখ্যা। তারপর সে দুইটি পূর্ণসংখ্যা a, b নেয় যেন $0 < a, b < 2017$ হয় এবং $a + b \neq 2017$ হয়। সে $A_1, A_2, \cdots, A_{2016}$ এবং $B_1, B_2, \cdots, B_{2016}$ অনুক্রম দুইটি তৈরি করল যেখানে A_k হল ak কে 2017 দিয়ে ভাগ করলে কত ভাগশেষ হয় তা এবং B_k হল bk কে 2017 দিয়ে ভাগ করলে কত ভাগশেষ হয় তা। $A_1 + B_1, A_2 + B_2, \cdots, A_{2016} + B_{2016}$ এর মধ্যে Nটি সংখ্যা 2017 থেকে বড়। প্রমাণ কর $N = 1008$।

(10 মার্ক)

Problem 6: About 5 years ago, Joydip was researching on the number 2017. He understood that 2017 is a prime number. Then he took two integers a, b such that $0 < a, b < 2017$ and $a + b \neq 2017$. He created two sequences $A_1, A_2, \cdots, A_{2016}$ and $B_1, B_2, \cdots, B_{2016}$ where A_k is the remainder upon dividing ak by 2017, and B_k is the remainder upon dividing bk by 2017. Among the numbers $A_1 + B_1, A_2 + B_2, \cdots, A_{2016} + B_{2016}$ count of those that are greater than 2017 is N. Prove that $N = 1008$.

(10 marks)

সমস্যা ৭: সাব্বির একদিন খেয়াল করল $BdMO$ শহরে সবার কাছে একটা 10 দৈর্ঘ্যের ভিন্ন শব্দ আছে, যার প্রতিটি অক্ষর A অথবা B। সাব্বির দেখল দুইজন শহরবাসী বন্ধু হয় যদি তাদের একজনের শব্দকে একটি বিশেষ নিয়মে কয়েকবার পরিবর্তন করে অন্যজনের শব্দটিতে নিয়ে আসা যায়। নিয়মটি হচ্ছে, শব্দে কোথাও ABB পাশাপাশি থাকলে তাকে BBA তে পরিবর্তন করা যায় বা BBA পাশাপাশি থাকলে তাকে ABB তে পরিবর্তন করা যায় (চাইলে না করে এমনিও রেখে দেওয়া যায়)। যেমনঃ $AABBA$ কে পরিবর্তন করে $AAABB$ বানানো যায় (বা বিপরীতও করা যায়)। এখন সাব্বির এমন N জন শহরবাসীর দল গঠন করল যেখানে কেউ কারো বন্ধু নয়। N এর সর্বোচ্চ মান কত?

(12 মার্ক)

Problem 7: Sabbir noticed one day that everyone in the city of $BdMO$ has a distinct word of length 10, where each letter is either A or B. Sabbir saw that two citizens are friends if one of their words can be altered a few times using a special rule and transformed into the other ones word. The rule is, if somewhere in the word ABB is located consecutively, then these letters can be changed to BBA - or if BBA is located somewhere in the word consecutively, then these letters can be changed to ABB (If wanted, the word can even be kept as it is, without making this change). For example: $AABBA$ can be transformed into $AAABB$ (The opposite is also possible). Now Sabbir made a team of N citizens where no one is friends with anyone. What is the highest value of N?

(12 marks)

সমস্যা ৮: নিম্নের সমস্যাগুলো সমাধান কর -

A. এমন যেকোন 158 টি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যেন সংখ্যাগুলোর কোনটিরই অঙ্কগুলোর যোগফল 17 দ্বারা ভাগ না যায়।

B. প্রমাণ কর, যেকোন 159 টি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যে সর্বদা কমপক্ষে এমন একটি সংখ্যা থাকবে যেন তার অঙ্কগুলোর যোগফল 17 দ্বারা ভাগ যায়।

(12 মার্ক)

Problem 8: Solve the following problems -

A. Find any 158 consecutive integers such that the sum of digits for any of the numbers is not divisible by 17.

B. Prove that, among any 159 consecutive integers there will always be at least one integer, whose sum of digits is divisible by 17.

(12 marks)

ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২২
জাতীয় গণিত উৎসব
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরি: হায়ার সেকেন্ডারি | সময়: ২ ঘণ্টা
Category: Higher Secondary | Time: 2 hours

সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে।প্রতিটি সমস্যার পূর্ণমান তার পাশে দেওয়া আছে।প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার বিস্তারিত সমাধান মূল উত্তরপত্রে রাফসহ লিখতে হবে। রাফ করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পিছনের অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

Problems are sorted according to their difficulty. Full marks are written beside the problems. You have to write the detailed solutions in the main answer script along with roughs. You can use the back side of the answer script for roughs. If you take extra page, then writing your name and registration number on that page is mandatory.

সমস্যা ১: x, y বাস্তব সংখ্যা হলে এমন সকল (x, y) নির্ণয় কর যেন $4x^2 + 5y^2 + 4y = 4xy - 1$ হয়।

(8 মার্ক)

Problem 1: If x, y are real numbers, then determine all (x, y) such that $4x^2 + 5y^2 + 4y = 4xy - 1$.

(8 marks)

সমস্যা ২: $\triangle ABC$ এ $\angle BAC$ সমকোণ। BP এবং CQ যথাক্রমে $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডক যা AC এবং AB কে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে। P এবং Q থেকে BC এর উপর দুইটি লম্ব PM এবং QN আঁকা হল। $\angle MAN$ এর মান প্রমাণ সহ নির্ণয় কর।

(8 মার্ক)

Problem 2: In $\triangle ABC$, $\angle BAC$ is a right angle. BP and CQ are bisectors of $\angle B$ and $\angle C$ respectively, which intersect AC and AB at P and Q respectively. Two perpendicular segments PM and QN are drawn on BC from P and Q respectively. Find the value of $\angle MAN$ with proof.

(8 marks)

সমস্যা ৩: প্রমাণ কর যে $3, 4, 5, \cdots, 3^5$ সংখ্যাগুলোকে দুইটি নিশ্ছেদ সেটে ভাগ করা হলে যেকোন একটি সেটে এমন a, b, c পাওয়া যাবে যেন $ab = c$ হয়। (a, b, c এর সব গুলো ভিন্ন নাও হতে পারে)

(10 মার্ক)

Problem 3: Prove that if the numbers $3, 4, 5, \cdots, 3^5$ are partitioned into two disjoint sets, then in one of the sets the numbers a, b, c can be found such that $ab = c$. (a, b, c may not be pairwise distinct)

(10 marks)

সমস্যা ৪: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এমন একটি ফাংশন যেন -

1. যেকোনো দুইটি সংখ্যা a, b এর জন্য $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$ হয়।
2. $f(f(f(0))) = 0$

$f(0)$ এর সম্ভাব্য সকল মান নির্ণয় কর।

(10 মার্ক)

Problem 4: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function such that -

1. For any two numbers a, b, $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$.

2. $f(f(f(0))) = 0$

Find all possible values for $f(0)$.

(10 marks)

সমস্যা ৫: O কেন্দ্রের বৃত্তে AB ক্ষুদ্রতর চাপের উপর C একটি বিন্দু। C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক AB জ্যা এর A, B বিন্দুতে অঙ্কিত লম্বদ্বয়কে E, F বিন্দুতে ছেদ করে। OC রেখাংশ AB কে D বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর $AD \cdot BD = CE \cdot CF$.

(10 মার্ক)

Problem 5: In a circle with center O, C is a point on the minor arc AB. The tangent drawn at C intersects the perpendicular lines drawn on A, B points of the chord AB at E, F respectively. Line segment OC intersects AB at point D. Prove that, $AD \cdot BD = CE \cdot CF$.

(10 marks)

সমস্যা ৬: সৌধের মা সৌধকে একটি চকলেটের বাক্স গিফট দিয়েছে। বাক্সটিতে nটি চকলেট রয়েছে যেখানে $n \leq 500$। সৌধ প্রতিদিন নিম্নের পদ্ধতিতে চকলেট খায়:

1. যদি বাক্সে বাকি চকলেটের সংখ্যা বেজোড় হয় এবং 7 থেকে সমান বা বড় হয়, তবে সে 7টি চকলেট খায়।
2. যদি বাক্সে বাকি চকলেটের সংখ্যা জোড় হয় এবং 4 দ্বারা বিভাজ্য হয়,তবে সে বাকি চকলেটের $\frac{3}{4}$ অংশ খেয়ে ফেলে।
3. যদি বাক্সে বাকি চকলেটের সংখ্যা জোড় হয় এবং 4 দ্বারা বিভাজ্য না হয়,তবে সে বাকি চকলেটের অর্ধেক অংশ খেয়ে ফেলে।

সৌধ এভাবে সবগুলো চকলেট খেতে চায়। কোন কোন n এর জন্য সে সবগুলো চকলেট শেষ করতে পারবে?

(10 মার্ক)

Problem 6: Sowdha's mother has given Sowdha a box of chocolates as a gift. There are n chocolates in the box where $n \leq 500$. Sowdha eats chocolates everyday following the method below:

1. If the number of chocolates remaining in the box is odd and greater that or equal to 7, then he eats 7 chocolates.
2. If the number of chocolates remaining in the box is even and divisible by 4, then he eats $\frac{3}{4}$-th of the remaining chocolates.
3. If the number of chocolates remaining in the box is even and not divisible by 4, then he eats half of the remaining chocolates.

Sowdha wants to eat all the chocolates in this way. For which values of n will he be able to finish all the chocolates?

(10 marks)

সমস্যা ৭: 3 টি স্কুলের প্রতিটিতে 2022 জন করে শিক্ষার্থী রয়েছে। প্রতিটি শিক্ষার্থীর বাকি দুই স্কুল মিলিয়ে মোট 2023টি করে বন্ধু রয়েছে (ক, খ এর বন্ধু হলে খ-ও ক এর বন্ধু)। প্রমাণ কর যে প্রতি স্কুল থেকে 1 জন করে নিয়ে এমনভাবে 3 জন শিক্ষার্থী নেওয়া যাবে যেন 3 জনই একে অপরের বন্ধু হয়।

(12 মার্ক)

Problem 7: Each of 3 schools has 2022 students. Every student has exactly 2023 friends among the students of the other two schools (If A is B's friend, then B is also A's friend). Prove that 3 students can be selected by taking 1 student from each school such that the selected 3 students are friends with each other.

(12 marks)

সমস্যা ৮: নিম্নের সমস্যাগুলো সমাধান কর -

A. এমন যেকোন 158 টি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যেন সংখ্যাগুলোর কোনটিরই অঙ্কগুলোর যোগফল 17 দ্বারা ভাগ না যায়।

B. প্রমাণ কর, যেকোন 159 টি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যে সর্বদা কমপক্ষে এমন একটি সংখ্যা থাকবে যেন তার অঙ্কগুলোর যোগফল 17 দ্বারা ভাগ যায়।

(12 মার্ক)

Problem 8: Solve the following problems -

A. Find any 158 consecutive integers such that the sum of digits for any of the numbers is not divisible by 17.

B. Prove that, among any 159 consecutive integers there will always be at least one integer, whose sum of digits is divisible by 17.

(12 marks)