

ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২১

জাতীয় গণিত উৎসব

আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটেগরি: সেকেন্ডারি

সময়:

নাম (বাংলায়):

শ্রেণি (২০২০ সাল):

Name (In English):

Registration No:

Name of Institution:

Phone No:

এই উত্তরপত্রের নির্দিষ্ট স্থানে উত্তর লিখতে হবে। খসড়ার জন্য পৃথক কাগজ ব্যবহার করতে হবে এবং তা জমা দিতে হবে। সকল সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা হয়েছে। সবাইকে নিজ নিজ উত্তরপত্র জমা দিতে হবে।

নং	সমস্যা	উত্তর
1	<p>পূর্ণসংখ্যার কতগুলো ক্রমজোড় (m, n) আছে যেন m আর n কোনো একটা সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাদে বাকি দুটো বাহুর দৈর্ঘ্য হয় এবং ত্রিভুজটার ক্ষেত্রফল 50-এর চেয়ে বড় না এমন একটা মৌলিক সংখ্যার সমান হয়?</p> <p>How many ordered pairs of integers (m, n) are there such that m and n are the legs of a right triangle with an area equal to a prime number not exceeding 50?</p>	
2	<p>x আর y এমন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যেন $2(x + y) = \gcd(x, y) + \text{lcm}(x, y)$ হয়। $\text{lcm}(x, y)/\gcd(x, y)$-এর মান বের করো।</p> <p>Let x and y be positive integers such that $2(x + y) = \gcd(x, y) + \text{lcm}(x, y)$. Find $\text{lcm}(x, y)/\gcd(x, y)$.</p>	
3	<p>মনে করো, r একটা ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। $[r]$ দিয়ে আমরা r-এর পূর্ণসাংখ্যিক অংশ বোঝাই আর $\{r\}$ দিয়ে আমরা r-এর ভগ্নাংশিক অংশটা বোঝাই। যেমন যদি $r = 32.86$ হয়, তাহলে $\{r\} = 0.86$ এবং $[r] = 32$। এমন সব ধনাত্মক সংখ্যা r-এর যোগফল কত যদি $25\{r\} + [r] = 125$ হয়?</p> <p>Let r be a positive real number. Denote by $[r]$ the integer part of r and by $\{r\}$ the fractional part of r. For example, if $r = 32.86$, then $\{r\} = 0.86$ and $[r] = 32$. What is the sum of all positive numbers r satisfying $25\{r\} + [r] = 125$?</p>	

4	<p>$ABCD$ একটা সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম যেন $AD = BC$, $AB = 3$ আর $CD = 8$। E এমন একটা বিন্দু যেন $AE \perp EC$ এবং $BC = EC$। AE-এর দৈর্ঘ্যকে $a\sqrt{b}$ আকারে লেখা যায় যেখানে a আর b পূর্ণসংখ্যা এবং b, 1 বাদে অন্য কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যা দিয়ে বিভাজ্য না। $(b - a)$-এর মান বের করো।</p> <p>$ABCD$ be an isosceles trapezium such that $AD = BC$, $AB = 3$, and $CD = 8$. A point E on the plane is such that $AE \perp EC$ and $BC = EC$. The length of AE can be expressed as $a\sqrt{b}$ where a and b are integers and b is not divisible by any square number other than 1. Find the value of $(b - a)$.</p>	
5	<p>$g(x) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ একটা ফাংশন যেটা নিচের শর্তকে মেনে চলে।</p> $g(x) + g(y) = g(x + y) - xy$ <p>যদি $g(23) = 0$ হয়, তাহলে $g(35)$-এর সম্ভাব্য সব মানের যোগফল কত?</p> <p>$g(x) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ is a function that satisfies</p> $g(x) + g(y) = g(x + y) - xy$ <p>If $g(23) = 0$, what is the sum of all possible values of $g(35)$?</p>	
6	<p>সমুদ্রের কাছে একটা টেবিলের ওপর N-টা গ্লাসের বাক্স আছে যেখানে $N < 2021$। বাক্সগুলোর প্রত্যেকটাতেই ঠিক 2021-টা করে বল আছে। সৌধ আর রাফি একটা খেলা খেলছে যেখানে সৌধ প্রথম চাল দেয়। কোনো চালে একজন যেকোনো একটা বলসহ বাক্স বাছাই করে এবং তারপর বাক্সটা থেকে এক বা তার চেয়ে বেশি সংখ্যক বল বের করে সমুদ্রে ফেলে দেয়। কেউ চাইলে একটা বাক্স বাছাই করে তার সবগুলো বলই ফেলে দিতে পারে। এই খেলায় যে সবার শেষের বলটা ফেলতে পারে, সে জেতে। N-এর সম্ভাব্য যেসব মানের জন্য সৌধর এই খেলায় একটা জেতার স্ট্র্যাটেজি আছে, তাদের যোগফল S। N-এর সম্ভাব্য যেসব মানের জন্য রাফির এই খেলায় একটা জেতার স্ট্র্যাটেজি আছে, তাদের যোগফল R। $\frac{R-S}{10}$-এর মান কত?</p> <p>On a table near the sea, there are N glass boxes where $N < 2021$, each containing exactly 2021 balls. Sowdha and Rafi play a game by taking turns on the boxes where Sowdha takes the first turn. In each turn, a player selects a non-empty box and throws out some of the balls from it into the sea. If a player wants, he can throw out all of the balls in the selected box. The player who throws out the last ball wins. Let S be the sum of values of N for which Sowdha has a winning strategy, and let R be the sum of values of N for which Rafi has a winning strategy. What is the value of $\frac{R-S}{10}$?</p>	
7	<p>কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য $s(n)$ আর $c(n)$ হলো যথাক্রমে n-এর পূর্ণবর্গ আর পূর্ণঘন উৎপাদকের সংখ্যা। একটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-কে ন্যায্য বলা হবে যদি $s(n) = c(n) > 1$ হয়। 100-এর চেয়ে ছোট কতগুলো ন্যায্য সংখ্যা আছে?</p> <p>For a positive integer n, let $s(n)$ and $c(n)$ be the number of divisors of n that are perfect squares and perfect cubes respectively. A positive integer n is called fair if $s(n) = c(n) > 1$. Find the number of fair integers less than 100.</p>	

8	<p>ABC হলো একটা সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। $\angle BAC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক BC রেখাকে N বিন্দুতে ছেদ করে। BC-এর মধ্যবিন্দু হলো M। P আর Q হলো AN রেখার ওপর এমন দুটো বিন্দু যেন $\angle PMN = \angle MQN = 90^\circ$। যদি $PN = 6$ আর $BC = 4$ হয়, তাহলে QA-এর দৈর্ঘ্যকে $\frac{a}{b}$ আকারে প্রকাশ করা যায় যেখানে a আর b হলো পরস্পর সহমৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $(a + b)$-এর মান কত?</p> <p>Let ABC be an acute-angled triangle. The external bisector of $\angle BAC$ meets the line BC at point N. Let M be the midpoint of BC. P and Q are two points on line AN such that, $\angle PMN = \angle MQN = 90^\circ$. If $PN = 6$ and $BC = 4$, then the length of QA can be expressed as $\frac{a}{b}$, where a and b are coprime positive integers. What is the value of $(a + b)$?</p>	
9	<p>সিনথিয়া পোকেমন পছন্দ করে এবং সে পারলে সবগুলো পোকেমনই ধরতে চায়। জয়ের রাস্তায় মোট 50-টা পোকেমন আছে। সিনথিয়া এই পোকেমনগুলোর মধ্যে যত সম্ভব বেশি সংখ্যক পোকেমন ধরতে চায়। কিন্তু সে এমন দুটো পোকেমন কখনোই ধরতে পারবে না যারা পরস্পর শত্রু। কিছুক্ষণ ঘুরে বেড়ানোর পর সে নিচের দুটো জিনিস বুঝতে পারল।</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. জয়ের রাস্তার প্রতিটা পোকেমনেরই ঠিক দুটো করে শত্রু আছে। 2. যেহেতু সে পরস্পর শত্রু এমন দুটো পোকেমন কখনোই ধরতে পারবে না, তাই সে যতই চেষ্টা করুক না কেন, জয়ের রাস্তায় সে সর্বোচ্চ n-টা পোকেমন ধরতে পারবে। <p>n-এর সম্ভাব্য সব মানের যোগফল কত?</p> <p>Cynthia loves Pokemon and she wants to catch them all. In Victory Road, there are a total of 50 Pokemon. Cynthia wants to catch as many of them as possible. However, she can not catch any two Pokemon that are enemies with each other. After exploring around for a while, she makes the following two observations.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Every Pokemon in Victory Road is enemies with exactly two other Pokemon. 2. Due to her inability to catch Pokemon that are enemies with one another, the maximum number of Pokemon that she can catch is equal to n. <p>What is the sum of all possible values of n?</p>	
10	<p>একটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-কে মনোরম বলা হবে যদি এটার কমপক্ষে 3-টা প্রকৃত উৎপাদক থাকে এবং এটা তার সবচেয়ে বড় তিনটা প্রকৃত উৎপাদকের যোগফলের সমান হয়। যেমন 6 একটা মনোরম সংখ্যা কারণ 6-এর সবচেয়ে বড় তিনটা প্রকৃত উৎপাদক হলো 3, 2, 1 এবং $6 = 3 + 2 + 1$। 3000-এর চেয়ে বড় না, এরকম কতগুলো মনোরম সংখ্যা আছে?</p> <p>A positive integer n is called nice if it has at least 3 proper divisors and it is equal to the sum of its three largest proper divisors. For example, 6 is nice because its largest proper divisors are 3, 2, 1 and $6 = 3 + 2 + 1$. Find the number of nice integers not greater than 3000.</p>	

11	<p>$ABCD$ এমন একটা বর্গ যেন $A = (0, 0)$ এবং $D = (1, 1)$। $P\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{3}\right)$ বর্গটির ভেতরে একটা বিন্দু। একটা পিঁপড়া P বিন্দু থেকে হাঁটা শুরু করে বর্গটির তিনটা বাহু স্পর্শ করার পর আবার P বিন্দুতে ফিরে আসে। পিঁপড়াটা দ্বারা সর্বনিম্ন সম্ভাব্য অতিক্রান্ত দূরত্বকে $\frac{a\sqrt{c}}{b}$ আকারে লেখা যায় যেখানে a আর b সহমৌলিক আর c, 1-এর চেয়ে বড় কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যা দিয়ে বিভাজ্য না। $(a + b + c)$-এর মান কত?</p> <p>Let $ABCD$ be a square such that $A = (0, 0)$ and $D = (1, 1)$. $P\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{3}\right)$ is a point inside the square. An ant starts walking from point P, touches 3 sides of the square and comes back to the point P. The least possible distance traveled by the ant can be expressed as $\frac{a\sqrt{c}}{b}$, where a and b are coprime and c is not divisible by any square number other than 1. What is the value of $(a + b + c)$?</p>	
12	<p>গামাকিচি আর গামাতাতসু নামের দুটো ব্যাঙ যথাক্রমে $(0, 0)$ আর $(2, 0)$ বিন্দুতে আছে। তারা যথাক্রমে $(5, 5)$ আর $(7, 5)$ বিন্দুতে পৌঁছাতে চায়। তারা শুধু ধনাত্মক x বা y দিকে এক দৈর্ঘ্যের লাফ দিতে পারে। কতভাবে তারা তাদের লক্ষ্যে পৌঁছাতে পারবে যদি এমন কোনো বিন্দু না থাকে যেটা তারা দুজনই স্পর্শ করে?</p> <p>Two toads named Gamakichi and Gamatatsu are sitting at the points $(0, 0)$ and $(2, 0)$ respectively. Their goal is to reach the points $(5, 5)$ and $(7, 5)$ respectively by making one unit jumps in the positive x or y direction at a time. How many ways can they do this while ensuring that there is no point on the plane where both Gamakichi and Gamatatsu land on?</p>	