

ডাচ বাংলা ব্যাংক প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০২১

জাতীয় গণিত উৎসব

আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটেগরি: প্রাইমারি

সময়:

নাম (বাংলায়):

শ্রেণি (২০২০ সাল):

Name (In English):

Registration No:

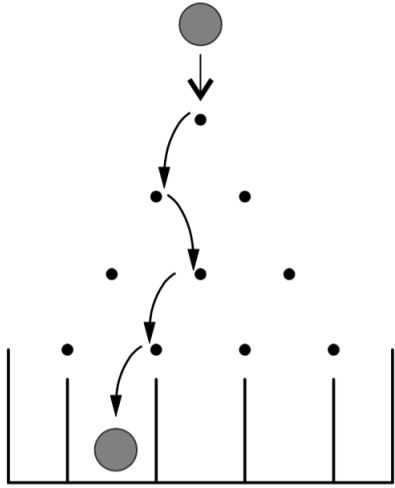
Name of Institution:

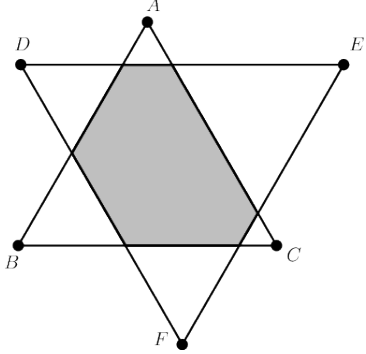
Phone No:

এই উত্তরপত্রের নির্দিষ্ট স্থানে উত্তর লিখতে হবে। খসড়ার জন্য পৃথক কাগজ ব্যবহার করতে হবে এবং তা জমা দিতে হবে। সকল সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা হয়েছে। সবাইকে নিজ নিজ উত্তরপত্র জমা দিতে হবে।

নং	সমস্যা	উত্তর
1	<p>এককালে, একটা দূরের গ্রামে 42 জন মানুষ বাস করত। তাদের প্রত্যেকেই হয় সব সময় সত্যি বলত অথবা সব সময় মিথ্যা বলত। একদিন এক আগন্তুক তাদের প্রত্যেককে জিজ্ঞেস করল, "তোমাদের মধ্যে কতজন মিথ্যাবাদী?" তারা কেউই সরাসরি উত্তর দিল না। কিন্তু তাদের মধ্যে 26 জন বলল যে মিথ্যাবাদীর সংখ্যা বিজোড় আর বাকি 16 জন বলল মিথ্যাবাদীর সংখ্যা জোড়। তাদের মধ্যে কতজন মিথ্যাবাদী?</p> <p>Once upon a time, in a far-away village, there were 42 villagers. Each of them either always told the truth or always lied. Being fascinated, a stranger once asked each of them, "How many of you are liars?" None of them gave a direct answer. But 26 out of them replied that the number of liars is odd and the other 16 told that it was even. How many of them were lying?</p>	
2	<p>জয়দীপের উঠানে তিনটা কল আছে: A, B আর C। সে যদি তিনটা কলই একসাথে খুলে দেয়, তাহলে তার পুলটা 100 মিনিটে পরিপূর্ণ হয়ে যায়। সে যদি খালি A আর B কল একসাথে খুলে দেয়, তাহলে তার পুলটা 150 মিনিটে পরিপূর্ণ হয়ে যায়। সে যদি খালি B আর C কলটা একসাথে খুলে দেয়, তাহলে তার পুলটা 200 মিনিটে পরিপূর্ণ হয়ে যায়। সে যদি খালি A আর C কলটা একসাথে খুলে দেয়, তাহলে তার পুলটা পরিপূর্ণ হতে কত মিনিট সময় লাগবে?</p> <p>Joydip's backyard has three faucets: A, B and C. If he turns on all three of them, it takes 100 minutes to fill the pool. If he turns on only A and B, it takes 150 minutes, and if he turns on only B and C, it takes 200 minutes. If he turns on only A and C, how long will it take (in minutes) to fill the pool?</p>	
3	<p>$1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2021^2$ সংখ্যাগুলোর মধ্যে কতগুলো সংখ্যার এককের ঘরের অঙ্ক 1?</p> <p>How many numbers out of $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2021^2$ have a 1 in its units place?</p>	

4	<p>মিতা একটা সারিতে 2024-টা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এমনভাবে লিখেছে যাতে পরপর যেকোনো চারটা সংখ্যার গুণফল 2100 হয়। সারির প্রথম সংখ্যাটা 7, 1011-তম সংখ্যাটা 5, 2014-তম সংখ্যাটা 20। সারির সবার শেষের সংখ্যাটা কত?</p> <p>Mita wrote 2024 positive integers in a row such that the product of any four adjacent numbers is 2100. The first number is 7, the 1011th number is 5, the 2014th number is 20. What is the last number in the row?</p>	
5	<p>কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য $g(n)$ দিয়ে আমরা তার অঙ্কগুলোর যোগফলকে বোঝাই। কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা x-এর জন্য $g(x)$, $g(g(x))$, $g(g(g(x)))$, \dots সিকোয়েন্সেরটার কথা চিন্তা করো। একসময় এই সিকোয়েন্সের পদগুলো আর পরিবর্তিত হবে না। সেই অবস্থায় সিকোয়েন্সের পদগুলো যে সংখ্যাটার সমান হবে, সেটার নাম দাও $f(x)$। কতগুলো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা $a \leq 2021$ আছে যেন $f(a) = 9$ হয়?</p> <p>For a positive integer n, let $g(n)$ be the sum of its digits. For a positive integer x, consider the sequence $g(x)$, $g(g(x))$, $g(g(g(x)))$, \dots. At some point, this sequence will eventually be a constant. Denote that constant by $f(x)$. Find the number of positive integers $a \leq 2021$ such that $f(a) = 9$.</p>	

6	<p>মনে করো, তুমি একটা খেলা খেলছ। তোমার কাছে ছবিতে দেখানো যন্ত্রের মতো একটা যন্ত্র আছে। ছবিতে কালো বিন্দুগুলো হলো পেরেক যেগুলো দেয়ালের সাথে গাঁথা। তুমি এই যন্ত্রের ঠিক ওপর থেকে একটা বল ছেড়ে দাও। বলটা নিচে পড়তে থাকে। কিন্তু প্রতি পেরেকে গিয়ে সেটা হয় ডানে অথবা বামে যায়। খেয়াল করো, যন্ত্রের বাম থেকে দ্বিতীয় কক্ষে পৌঁছানোর জন্য বলটার 4টা সম্ভাব্য পথ আছে। যদি যন্ত্রটাতে 4-এর বদলে 8 সারি পেরেক থাকত, তাহলে যন্ত্রের বাম থেকে দ্বিতীয় কক্ষে পৌঁছানোর জন্য বলটার কতগুলো সম্ভাব্য পথ থাকত? (এই ক্ষেত্রে যন্ত্রটার নিচে 9টা কক্ষের একটা সারি থাকত।)</p> <p>Imagine that you're playing a game. You have a device that looks just like the one shown in the figure. The black dots are nails hammered to the wall. You release a ball from the top of the device. The ball then rolls downwards but at each nail it goes either to the left or to the right. Notice how there are 4 different ways for the ball to reach the second compartment from the left. If the device had 8 rows of nails instead of 4, how many different ways would there be for the ball to reach the second compartment from the left? (In this case, we would have 9 compartments at the bottom.)</p> 	
7	<p>কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য যদি $(5n + 3)$ আর $(8n + 1)$-এর গসাণ্ড 1-এর চেয়ে বড় হয়, তাহলে তাদের গসাণ্ড কত?</p> <p>Given that the GCD of $(5n + 3)$ and $(8n + 1)$ is greater than 1 for some positive integer n, what is their GCD?</p>	
8	<p>একটা ভোজে সতেরোজন মানুষ একটা গোলটেবিলে বসে আছে। তাদের মধ্যে কেউ কেউ সব সময় মিথ্যা বলে। আর বাকিরা সব সময় সত্যি বলে। তাদের সবাইকে প্রশ্ন করার পর তাদের প্রত্যেকেই বলল যে গোলটেবিলে তাদের পাশে বসা দুইজনই মিথ্যাবাদী। এদের মধ্যে সর্বোচ্চ কতজন মিথ্যাবাদী হতে পারে?</p> <p>In a banquet, seventeen people are sitting around a circular table. Some of them always lie, the others always tell the truth. After being asked, each of them revealed that both of their neighbours are liars. At most how many of them are lying?</p>	

9	<p>কোনো একটা আকৃতির পরিসীমা হলো তার বাউন্ডারির দৈর্ঘ্য। যেমন কোনো একটা ত্রিভুজের পরিসীমা হলো তার তিনটা বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল। নিচের ছবিতে ABC আর DEF দুটোই সমবাহু ত্রিভুজ এবং BC আর DE বাহুদুটো সমান্তরাল। $\triangle ABC$ আর $\triangle DEF$-এর পরিসীমা যথাক্রমে 12 আর 15। ছায়াকৃত অংশের পরিসীমা কত?</p> <p>The perimeter of a shape is the length of the boundary surrounding that shape. For example, the perimeter of a triangle is the sum of all its three side lengths. In the following diagram, ABC and DEF are both equilateral triangles and the sides BC and DE are parallel. The perimeters of $\triangle ABC$ and $\triangle DEF$ are 12 and 15 respectively. What is the perimeter of the shaded region?</p> 	
10	<p>মনে করো, r একটা ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। $[r]$ দিয়ে আমরা r-এর পূর্ণসাংখ্যিক অংশ বোঝাই আর $\{r\}$ দিয়ে আমরা r-এর ভগ্নাংশিক অংশটা বোঝাই। যেমন যদি $r = 32.86$ হয়, তাহলে $\{r\} = 0.86$ এবং $[r] = 32$। এমন সব ধনাত্মক সংখ্যা r-এর যোগফল কত যদি $25\{r\} + [r] = 125$ হয়?</p> <p>Let r be a positive real number. Denote by $[r]$ the integer part of r and by $\{r\}$ the fractional part of r. For example, if $r = 32.86$, then $\{r\} = 0.86$ and $[r] = 32$. What is the sum of all positive numbers r satisfying $25\{r\} + [r] = 125$?</p>	

11	<p>সমুদ্রের কাছে একটা টেবিলের ওপর N-টা গ্লাসের বাক্স আছে যেখানে $N < 2021$। বাক্সগুলোর প্রত্যেকটাতেই ঠিক 2021-টা করে বল আছে। সৌধ আর রাফি একটা খেলা খেলছে যেখানে সৌধ প্রথম চাল দেয়। কোনো চালে একজন যেকোনো একটা বলসহ বাক্স বাছাই করে এবং তারপর বাক্সটা থেকে এক বা তার চেয়ে বেশি সংখ্যক বল বের করে সমুদ্রে ফেলে দেয়। কেউ চাইলে একটা বাক্স বাছাই করে তার সবগুলো বলই ফেলে দিতে পারে। এই খেলায় যে সবার শেষের বলটা ফেলতে পারে, সে জেতে। N-এর সম্ভাব্য যেসব মানের জন্য সৌধর এই খেলায় একটা জেতার স্ট্র্যাটেজি আছে, তাদের যোগফল S। N-এর সম্ভাব্য যেসব মানের জন্য রাফির এই খেলায় একটা জেতার স্ট্র্যাটেজি আছে, তাদের যোগফল R। $\frac{R-S}{10}$-এর মান কত?</p> <p>On a table near the sea, there are N glass boxes where $N < 2021$, each containing exactly 2021 balls. Sowdha and Rafi play a game by taking turns on the boxes where Sowdha takes the first turn. In each turn, a player selects a non-empty box and throws out some of the balls from it into the sea. If a player wants, he can throw out all of the balls in the selected box. The player who throws out the last ball wins. Let S be the sum of values of N for which Sowdha has a winning strategy, and let R be the sum of values of N for which Rafi has a winning strategy. What is the value of $\frac{R-S}{10}$?</p>	
12	<p>$1 < N \leq 2021$ একটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $1, 2, 3, \dots, N$ সংখ্যাগুলো একটা সারিতে এই ক্রমে সাজানো আছে। জয়দীপ আর মুরসালিন একটা খেলা খেলছে যেখানে তারা পালাক্রমে সারির যেকোনো দুটো পরপর সংখ্যা বাছাই করে, মুছে দেয় এবং তাদের যোগফল বা গুণফলটা লিখে দেয়। ফলে প্রতি চালে সংখ্যাগুলোর সংখ্যা ঠিক এক করে কমে যায়। খেলায় প্রথম চালটা জয়দীপ দেয়। খেলাটা শেষ হয় যখন খালি একটা সংখ্যা বাকি থাকে এবং জয়দীপ জেতে যদি আর কেবল যদি সেই সংখ্যাটা বিজোড় হয়। N-এর সম্ভাব্য যেসব মানের জন্য জয়দীপের একটা জেতার স্ট্র্যাটেজি আছে, তাদের যোগফল কত?</p> <p>Let $1 < N \leq 2021$ be a positive integer. The numbers $1, 2, 3, \dots, N$ are written in a row in this order. Joydip and Mursalin play a game where they each take turns erasing two consecutive numbers from the board and replacing them with either their sum or their product. As a result, the number of numbers goes down by one in each turn. Joydip goes first. The game ends when there is only a single number left and Joydip wins if and only if this number is odd. What is the sum of all possible values of N for which Joydip has a winning strategy?</p>	