22B

# TAREA 2 VECTORES MATRICES Y ALGEBRA MATRICIAL

1. Usando el comando ***det***, determinar si las siguientes matrices tienen un determinante cero.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Usando el comando inv, determinar si las matrices anteriores tienen inversa o es no singular.
3. Si A es una matriz cuadrada, entonces es cierto que $|A| = |A^t|$, demuestre esta propiedad para las siguientes matrices usar det:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & -0.6 & 0.1 \\ -1.2 & 0.6 & 0.6 & 0 \\ 0.7 & -0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.3 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 2 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Usando los comandos de Matlab y operaciones elemento por elemento y de acuerdo con la definición calcular el valor del ángulo $\theta$ entre los vectores:

$$cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

5. El *producto punto* de dos vectores $u \cdot v$ se calcula con el comando *dot* en Matlab, calcular el producto de los vectores u = [3,2,-1,4]; v = [1,-1,1,0] y determinar si son o no ortogonales.

6. Determinar el resultado de las siguientes operaciones para las matrices mostradas:

$$(B^{-1}C^T) + \frac{1}{2}(A^2 - C^{-1})$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

7. Para las mismas matrices efectuar la siguiente operación:

$$(AC^{-1})((A^2)^{-1})^T$$

8. Para la siguiente matriz aplicar los pasos mostrados, crear una function que reciba la matriz:

$$a = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) El vector [c] tiene n elementos (n es el tamaño de la matriz cuadrada), y es la primera columna de la matriz:

$$[c] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

El vector [e] se define como el vector columna de longitud n:

$$[e] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Se calcula la norma euclidiana de $\|c\|_2$ de c:

c) El vector v se define:

$$[v] = [c] + \|c\|_2[e]$$

d) Se calculan el producto $[v]^T[v]$ y el producto $[v][v]^T$

e) Se calcula la matriz siguiente donde *[I]* es la matriz identidad:

$$[H] = [I] - \frac{2}{[v]^T[v]}[v][v]^T$$

f) Calcular $[R] = [H][a]$

8. *Usando vectores, operaciones elemento x elemento, operadores relacionales, lógicos, los comandos sum, fix, sqrt, length y mod resolver los siguientes problemas:*

a) ¿Cuál es el promedio de todos los números entre 1 y hasta 300 que son múltiplos de 3 pero no de 2?

b) Considera los números del 1 al 1000. ¿Hay más múltiplos de 3 que terminan en 6 o en 7?

c) Un número entero n se dice que es *bueno* cuando *4n+1* es múltiplo de 5.

¿Cuántos números *buenos* hay entre 500 y 1000?

9 Crear las siguientes matrices usando la notación A(i,j), el operador :, o el comando blkdiag() de Matlab, sumar las 3 matrices resultantes

$$k_1 = \frac{320x10^9(10x10^{-4})}{5} x \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \frac{180x10^9(8x10^{-4})}{4} x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \frac{150x10^9(5x10^{-4})}{3} x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = k_1 + k_2 + k_3$$

10. La proyección ortogonal de u sobre v está dada por:

$$proy_v u = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v}\right) v$$

Calcular la proyección de u = (-1,3) sobre v = (4,4), usando el producto punto (dot en Matlab).

11. La adjunta de una matriz de una matriz se determina mediante el comando *adjoint(A)*, determinar la adjunta de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

12. Usar la adjunta de una matriz para determinar su inversa, usar la definición:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

13. El volumen de un tetraedro de vértices $(x_1,y_1,z_1)$, $(x_2,y_2,z_2)$, $(x_3,y_3,z_3)$ y $(x_4,y_4,z_4)$, está dado por la fórmula:

$$Volumen = \pm \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular el volumen dados los puntos: (3,-1,1), (4,-4,4), (1,1,1) y (0,0,1). Usar el comando ***det***.

14. La inversa de un producto de matrices se define por la operación matricial $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, usando el comando inv, calcular $(AB)^{-1}$ y $B^{-1}A^{-1}$ por separado, para las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

15. La traspuesta de una matriz se representa por A’ en Matlab calcular las siguientes operaciones $A^t$, $A^tA$ y $AA^t$ para la matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

16. Declarada la siguiente matriz A en la command crear una function que la reciba y retorne la matriz B a la command, *no usar rot90().*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Usando el comando ***dot*** de Matlab, demostrar que el siguiente conjunto es una base de $R^4$, es decir $v_1 \cdot v_2 = 0$, $v_1 \cdot v_3 = 0$, $v_1 \cdot v_4 = 0$, $v_2 \cdot v_3 = 0$, $v_2 \cdot v_4 = 0$, $v_3 \cdot v_4 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ S = \{ & (2,3,2,-2), & (1,0,0,1), & (-1,0,2,1), & (-1,2,-1,1) \} \end{array}$$

18. El producto cruz de dos vectores se calcula con el comando cross(a,b) de matlab, para los siguientes vectores calcular:

**u = i -2j + k** y **v = 3i + j -2k**

**u**x**v** **v**x**u** **v**x**v**

19. La norma de un vector se calcula con el comando norm de Matlab, obtener un vector unitario ortogonal tanto a u como a v, de acuerdo con la definición siguiente (usar el producto cruz de dos vectores):

**u = i -4j + k** y **v = 2i + 3j**

$$\frac{\boldsymbol{uxv}}{\|\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{v}\|}$$

20. El área de un paralelogramo cuyos lados adyacentes son u y v tiene un área igual a $\|uxv\|$, usando el producto cruz (cross) y la norma (norm), calcular para los siguientes vectores:

u = -3i + 4j + k, v = -2j + 6k

21. De acuerdo con la definición de una base ortonormal se cumple que:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \qquad i \neq j$$

$$\|v_i\| = 1 \qquad i = 1,2,..,n$$

Para S = $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, por ejemplo, para 3 vectores se debe cumplir:

$$v_1 \cdot v_2 = 0 \qquad v_1 \cdot v_3 = 0 \qquad v_2 \cdot v_3 = 0$$

Y cada vector debe ser de longitud 1, ya que:

$$\|v_1\| = \sqrt{v_1 \cdot v_1} \qquad \|v_2\| = \sqrt{v_2 \cdot v_2} \qquad \|v_3\| = \sqrt{v_3 \cdot v_3}$$

Comprobar si los siguientes vectores forman una base ortonormal,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{bmatrix}$$